

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**



**MÁSTER UNIVERSITARIO EN TECNOLOGÍAS DE LA  
INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES**

**Trabajo Fin de Máster**

**ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN MÚLTIPLE EN  
IMÁGENES MEDIANTE MORFOLOGÍA  
MATEMÁTICA Y TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN**

***Álvar Ginés Legaz Aparicio***

*12 de Septiembre de 2013*

Director: ***Rafael Verdú Monedero***



---

**Nombre:** Álvar Ginés Legaz Aparicio **E-mail:** Alvar.legaz@gmail.com

**Director:** Rafael Verdú Monedero **E-mail:** rafael.verdu@upct.es

**Título:** Estimación de la Orientación Múltiple en Imágenes Mediante Morfología Matemática y Técnicas de Regularización.

**Descriptores:** Estimación de orientaciones múltiples en imágenes. Morfología matemática. Regularización. B-splines.

**Resumen:**

El presente trabajo describe un novedoso método de estimación de orientaciones múltiples para imágenes. Este método combina la estimación de las orientaciones múltiples de las estructuras de los objetos de la imagen con la difusión de la información de las orientaciones, de esta forma se consigue obtener las orientaciones múltiples en todos los píxeles de la imagen. Para evaluación de las prestaciones se emplean imágenes tanto sintéticas como reales con diversos tipos de escenarios. Por último se presentan las conclusiones y se describen las líneas futuras.

**Titulación:** Máster Universitario en Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.

**Departamento:** Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.

**Fecha de presentación:** Septiembre de 2013.



|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2. Estado del arte en la estimación de orientaciones</b>                           | <b>3</b>  |
| 2.1. Definición de orientación . . . . .  | 4         |
| 2.2. Estimación de la orientación simple . . . . .                                    | 4         |
| 2.2.1. Tensor Estructural Local . . . . .   | 5         |
| 2.2.2. Análisis de Componentes Principales . . . . .                                  | 6         |
| 2.2.3. Gradiente al cuadrado promediado . . . . .                                     | 8         |
| 2.2.4. Conexiones entre los métodos descritos . . . . .                               | 9         |
| 2.3. Estimación de la orientación múltiple . . . . .                                  | 9         |
| 2.3.1. Tensor estructural para orientaciones múltiples . . . . .                      | 10        |
| 2.3.2. Bancos de filtros . . . . .  | 10        |
| 2.4. Difusión de la información de las orientaciones . . . . .                        | 11        |
| 2.5. Aplicaciones de la estimación de la orientación . . . . .                        | 12        |
| <b>3. Estimación de orientaciones múltiples con morfología matemática y b-splines</b> | <b>15</b> |
| <b>4. Evaluación y resultados del método de estimación de orientaciones múltiples</b> | <b>25</b> |
| 4.1. Resultados para imagen sintética . . . . .                                       | 26        |
| 4.2. Resultados para imagen real . . . . .  | 27        |
| 4.3. Resultados del algoritmo de detección de bifurcaciones y cruces . . . . .        | 27        |
| <b>5. Conclusiones y Líneas Futuras</b>   | <b>37</b> |
| 5.1. Conclusiones . . . . .   | 37        |
| 5.2. Líneas futuras . . . . .   | 38        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>A. Introducción a la Morfología Matemática</b>       | <b>41</b> |
| A.0.1. Elemento Estructurante . . . . .                 | 42        |
| A.0.2. Unión e Intersección . . . . .                   | 42        |
| A.0.3. Dilatación y Erosión . . . . .                   | 44        |
| A.0.4. Apertura y Cierre . . . . .                      | 47        |
| <b>B. Método de detección de bifurcaciones y cruces</b> | <b>51</b> |
| B.0.5. Pseudocódigo . . . . .                           | 52        |
| <b>C. Publicaciones</b>                                 | <b>53</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                     | <b>55</b> |

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

La estimación de la orientación es una tarea importante en el procesado de imágenes, con multitud de aplicaciones y diferentes métodos de estimación. Por otro lado la morfología matemática ha mostrado excelentes resultados aplicada a zonas con texturas y en los bordes de las estructuras de las imágenes. El objetivo de este trabajo es presentar un nuevo método de estimación de orientaciones múltiples basado en la potencia que aporta la morfología matemática para la estimación de las orientaciones, consiguiendo sustanciales mejoras respecto a los métodos existentes.

Esta memoria está dividida en otros cuatro capítulos. El Capítulo 2 presenta los conceptos básicos de estimación de orientaciones (definición de orientación, diferencia entre orientación simple y múltiple, difusión de la información, etc), los métodos más usados como el tensor estructural, los bancos de filtros orientables ó el gradiente al cuadrado promediado y por último un resumen de las aplicaciones más importantes, como puede ser el filtrado variante en el espacio, el seguimiento de objetivos ó las aplicaciones para mejorar la segmentación.

El Capítulo 3 describe el nuevo método de estimación de orientaciones múltiples basado en aperturas morfológicas orientadas. Este método combina la estimación de las orientaciones múltiples de las estructuras de los objetos de la imagen con la difusión de la información de las orientaciones, de esta forma se consigue obtener la firma direccional en todos los píxeles de la imagen, no solo cerca de las estructuras de los objetos de la imagen, siendo las orientaciones prin-

principales aquellas que presenten los mayores valores en la firma direccional para cada píxel de la imagen.

La evaluación de las prestaciones del método se presenta en el Capítulo 4, para ello se emplean imágenes tanto sintéticas como reales con diversos tipos de escenarios.

Para concluir este trabajo, en el Capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas tras diseñar y evaluar el método propuesto en el presente trabajo y las líneas futuras de trabajo.

---

### Estado del arte en la estimación de orientaciones

---

La estimación de la orientación es un campo de estudio bastante amplio, que está siendo tratado de forma ininterrumpida desde hace varias décadas. El interés radica en su gran campo de aplicaciones ya que resulta de gran importancia en el procesado de imágenes, las tareas de visión por computador, la extracción de características, la segmentación, el análisis de texturas, etc.

A lo largo de este capítulo se presentará en primer lugar una definición de la orientación y posteriormente se realizará una recopilación de los métodos de estimación más utilizados. Es importante señalar que la elección del método adecuado estará fuertemente condicionada a las estructuras que presenten los objetos contenidos en la imagen, por lo que para abordar el problema existen dos caminos, la estimación de una única orientación, conocida como estimación de la orientación simple ó la estimación de un conjunto de orientaciones, conocido como estimación de orientaciones múltiples. Otra clasificación posible para el problema de estimación de orientaciones distingue entre orientación local, para cada punto de la imagen y, estimación global, para los bloques de la imagen ó la imagen completa.

El capítulo concluye presentando un resumen de los campos donde es más usada la estimación de orientaciones, con una descripción de las aplicaciones más representativas tanto para orientación simple ó múltiples orientaciones.

## 2.1. Definición de orientación

Dar una definición de lo que es una orientación puede parecer una tarea trivial, pero no es así, de hecho presenta ciertas complicaciones conceptuales que si no están lo suficientemente claras pueden ser las causantes de diversos errores. Un ejemplo bastante representativo de esto es descrito por Perona en [29] donde explica que los métodos empleados tradicionalmente para realizar la difusión de la orientación presentaban errores bastante significativos, producto de no utilizar una adecuada definición de la orientación.

Por otro lado no es de extrañar que ante un problema complejo como es la definición de la orientación existan varias definiciones, una de las más descriptivas y también una de las más utilizadas por su simplicidad es la siguiente, cuya definición, ha sido extraída de [26]:

Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  una variable de un espacio  $N$ -dimensional. Denotamos  $\mathbf{x}$  como  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , o para el caso concreto de imágenes, donde la dimensión es  $N = 2$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ . Una señal multivariante  $s(\mathbf{x})$  se considera localmente orientada en una región  $\Omega$  si esta señal es constante a lo largo de unas estructuras paralelas, es decir,

$$s(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}) = s(\mathbf{x}) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{u} \in \Omega \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario que denota la orientación.

Esta es una definición bastante simple que puede dar lugar a los errores mencionados anteriormente, si no se tiene en cuenta el tipo de estructuras que contiene la imagen con la que se trabaja.

Otra definición, más apropiada para el procesado de imágenes es la presentada por Granlund y Knutsson en [8]. Esta definición asocia las orientaciones con un punto en un círculo, de manera que se distingue entre dos tipos de orientaciones: los bordes (transiciones oscuro a claro ó claro a oscuro) y las líneas (transiciones oscuro-claro-oscuro ó viceversa), mientras que los bordes son periódicos cada  $360^\circ$ , las líneas lo son cada  $180^\circ$ .

## 2.2. Estimación de la orientación simple

Para la estimación de la orientación simple se han propuesto gran cantidad de técnicas, sobre las que realizaremos una enumeración y breve explicación. En primer lugar se desarrollaron las técnicas de estimación de la orientación simple, que solo eran capaces de estimar una orientación y por tanto su aplicación estaba condicionada a imágenes con estructuras sin bifurcaciones ni cruces. De estas técnicas las tres que se pueden considerar como las más importantes son las basadas

en el tensor estructural local, el análisis de componentes principales y el gradiente al cuadrado promediado.

### 2.2.1. Tensor Estructural Local

El tensor estructural local, en inglés *local structural tensor (LST)*, es una técnica introducida inicialmente por Knutsson [20]. A lo largo del tiempo se ha mostrado como una de las técnicas de estimación de la orientación simple más utilizada, ha sido citada por multitud de autores, como Kass y Witkin [19], Bigün [4], Mühlich [26] o más recientemente Landström y Thurley [21]. También existe una extensión de la técnica del tensor estructural local para la estimación de orientaciones múltiples, en la que se profundizará en siguientes apartados. La definición matemática del tensor estructural local es la siguiente:

Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  las coordenadas del píxel y  $f(\mathbf{x})$  el correspondiente valor en escala de grises en la posición  $\mathbf{x}$ . El tensor estructural local,  $T(\mathbf{x})$ , se define como:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} T_{x_1x_1} & T_{x_1x_2} \\ T_{x_2x_1} & T_{x_2x_2} \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = G_\sigma * (\nabla f(\mathbf{x}) \nabla^T f(\mathbf{x})), \quad (2.2)$$

y representa las características de orientación locales en los datos, las cuales son dadas por una matriz de  $2 \times 2$  donde  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$  es el gradiente de cada uno de los píxeles y  $G_\sigma$  denota el núcleo de un filtro de promediado, normalmente este filtro se basa en un núcleo gaussiano y su finalidad es otorgar inmunidad al ruido y reducir el mal condicionamiento que presenta el problema del cálculo de los autovalores.

Para cada píxel se calculan los autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2)$  y los correspondientes autovectores  $(e_1, e_2)$  del tensor  $T(\mathbf{x})$ . El autovector  $e_1$  representa la dirección de mayor variación de los datos en la región y por tanto al ser  $e_2$  ortogonal, éste representará la dirección de menor variación de los datos en la región [5]. Por otra parte los autovalores muestran la magnitud de los vectores de dirección, la interpretación de los autovalores es la siguiente:

- $\lambda_1 = \lambda_2 \gg 0$  No hay una dirección dominante, se puede tratar de un cruce o de un punto.
- $\lambda_1 \gg \lambda_2$  Existe una dirección predominante.
- $\lambda_1 = \lambda_2 \approx 0$  No existe ninguna dirección, por tanto se trata de una zona homogénea.

El autovector  $e_2$  apunta en la dirección de menor variación de los datos, es decir  $e_2$  está orientado según los bordes de la estructura que estamos analizando. Por tanto la orientación en

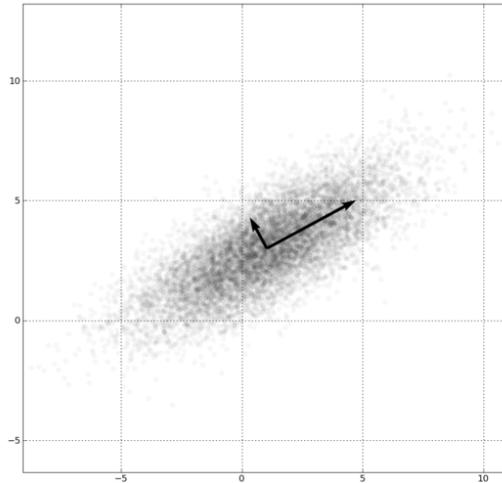
cada píxel se calcula con la siguiente expresión:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{e_{2,x_2}}{e_{2,x_1}}\right), & \text{si } e_{2,x_1}(\mathbf{x}) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } e_{2,x_1}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo  $\phi(\mathbf{x})$  la orientación del vector  $e_2$  en un punto  $\mathbf{x}$  de la imagen y usando la notación  $e_2(\mathbf{x}) = (e_{2,x_1}, e_{2,x_2})(\mathbf{x})$

### 2.2.2. Análisis de Componentes Principales

El análisis de componentes principales, en inglés *principal component analysis (PCA)*, es una técnica de matemática utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos. La finalidad de esta técnica es encontrar el estimador de máxima verosimilitud (ML) de la orientación local [24]. Aplicado al procesamiento de imágenes permite determinar la distribución de una nube de puntos para obtener la orientación principal de esta.



**Figura 2.1.:** Componentes principales de una distribución normal

El cálculo de los componentes principales se puede realizar de dos formas distintas, mediante la descomposición de la matriz de covarianza en sus valores singulares, en inglés *single value decomposition (SVD)*, o por medio del cálculo de autovectores y autovalores de la matriz de covarianza. En concreto en esta sección se describe la técnica SVD.

Asumiendo que una zona presenta una única orientación homogénea, el cálculo de la orientación consiste en encontrar un vector unitario,  $\vec{a}$ , que maximice la diferencia de ángulos  $\theta_i$  entre los vectores  $\vec{a}$  y el vector de gradiente  $\vec{g}_i = \nabla f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , siendo  $n$  el número de píxeles

considerado, lo anterior es equivalente a minimizar la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{a}^T \vec{g}_i)^2 = \vec{a}^T \sum_{i=1}^n (\vec{g}_i \vec{g}_i^T) \vec{a} = \vec{a}^T C \vec{a} \quad (2.4)$$

donde

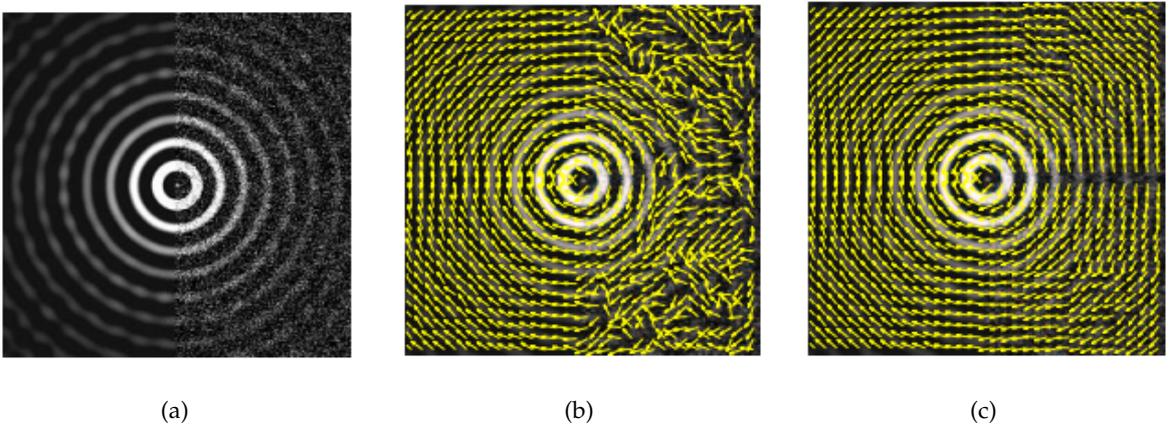
$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n g_{x_1}^{(i)} g_{x_1}^{(i)} & \sum_{i=1}^n g_{x_1}^{(i)} g_{x_2}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n g_{x_2}^{(i)} g_{x_1}^{(i)} & \sum_{i=1}^n g_{x_2}^{(i)} g_{x_2}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sueto a que  $\|\vec{a}\| = 1$ , donde  $g_{x_1}^{(i)}$  y  $g_{x_2}^{(i)}$  son las derivadas en  $x_1$  y en  $x_2$  respectivamente.

Al ser  $\vec{a}$  un vector que apunta a la máxima diferencia de ángulos respecto al gradiente, se trata de un vector que apunta en la dirección de los bordes de la estructura.

Una vez resuelto el problema obtenemos el vector unitario,  $\vec{a}$ , que minimiza la expresión  $\vec{a}^T C \vec{a}$ , este es el autovector de  $C$  correspondiente al autovalor menor, aun así en [24] se apuesta por utilizar el SVD frente al cálculo de los autovectores y autovalores porque presenta una mayor estabilidad y eficiencia.

Feng y Peyman presentan en [7] una aproximación multiescala de la técnica de PCA descrita por [24], esta aproximación presenta una mayor inmunidad al ruido que la técnica tradicional de PCA, también presentan una serie de aplicaciones de estimación de orientaciones con PCA basado en SVD tanto para imágenes reales como sintéticas (ver Fig 2.2).



**Figura 2.2.:** (a) Imagen original ruidosa, (b) campo vectorial de orientaciones con PCA, (c) campo vectorial de orientaciones con PCA multiescala. Todas las imágenes extraídas de [7].

### 2.2.3. Gradiente al cuadrado promediado

La técnica de gradiente al cuadrado promediado, en inglés *average squared gradient (ASG)*, es otra técnica de estimación de la orientación ampliamente utilizada. Mediante el gradiente al cuadrado promediado se obtiene un campo vectorial que indica la orientación de los bordes y contornos de las estructuras en una imagen. La formulación fue presentada en 1987 por Kass y Witkin [18].

El ASG emplea la siguiente definición del gradiente,

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \text{sign} \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde  $f(x_1, x_2)$  es una imagen en escala de grises. Esta definición solo tiene en cuenta las orientaciones, y no las direcciones debido a que la definición del gradiente propuesta proporciona un vector de campo cuya primera componente siempre será positiva.

Posteriormente el gradiente calculado se eleva al cuadrado y se promedia con los vecinos en una ventana  $W$ :

$$\bar{\mathbf{g}}_s = \begin{bmatrix} \bar{g}_{s,1}(x_1, x_2) \\ \bar{g}_{s,2}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_W(g_1^2(x_1, x_2) - g_2^2(x_1, x_2)) \\ \Sigma_W(2g_1(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2)) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

al elevar al cuadrado un vector, el resultado es otro vector cuyo módulo es el cuadrado del módulo del vector original, y la fase es el doble de la fase del vector original. A consecuencia de esto, los vectores con direcciones opuestas, al elevar al cuadrado, pasan a apuntar en la misma dirección, y los vectores perpendiculares se cancelan. El campo direccional ASG es  $\mathbf{d} = [d_1(x_1, x_2) \quad d_2(x_1, x_2)^T]$ , donde este ángulo se obtiene como

$$\angle \mathbf{d} = \frac{\Phi}{2} - \text{sign}(\Phi) \frac{\pi}{2}, \quad (2.8)$$

siendo  $\Phi = \angle \bar{\mathbf{g}}_s$ . Este ángulo será  $180^\circ$ -periódico, ya que estamos estimando la orientación sobre el gradiente de la imagen y éste nos dará líneas sobre las que estimar la orientación, una explicación más detallada se encuentra al principio de este capítulo en la Sección 2.1. La magnitud de  $\mathbf{d}$  puede ser, dependiendo de la aplicación, unitaria, como es el caso en [29], la magnitud  $\bar{\mathbf{g}}_s$  ó la raíz cuadrada de  $\bar{\mathbf{g}}_s$ .

Este método está basado en el gradiente, por ello, en zonas homogéneas de la imagen donde el gradiente es cero, el ASG también es cero y no hay información de la orientación.

Sobre este método Verdú *et al.* [39] aplican una regularización del campo vectorial de las orientaciones para extender la información de la orientación más allá de la propia estructura del objeto, con esto se consigue difundir la información de la orientación a todos los píxeles de la imagen para su utilización en diferentes aplicaciones, como filtrado variante en el espacio.

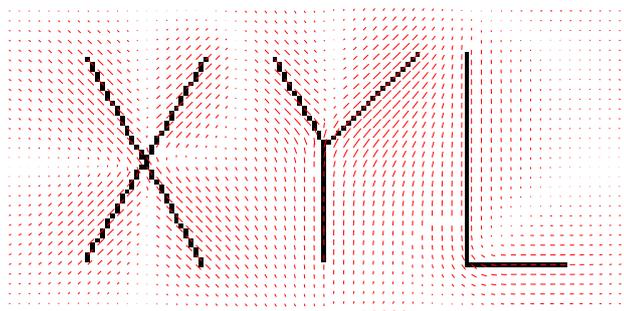
### 2.2.4. Conexiones entre los métodos descritos

Tras las publicaciones de Bazén [3] se ha establecido una relación entre las técnicas de ASG con la aplicación de la técnica de PCA a la matriz de covarianza. Se puede observar que la técnica utilizada tanto en el LST como en el PCA son análogos cuando la media de los datos es cero. Posteriormente Rieger [31] establece conexiones teóricas entre ASG, la matriz de covarianza del campo de gradientes y la aproximación basada en el tensor estructural local.

## 2.3. Estimación de la orientación múltiple

Hasta el momento se han presentado métodos para estimar la orientación de los objetos contenidos en una imagen que presenten estructuras lineales. Si bien los métodos descritos con anterioridad muestran excelentes resultados en estos escenarios, donde solo existe una orientación predominante, al margen de los posibles errores ó posibles orientaciones secundarias producidas por el ruido, su aplicación a estructuras no lineales presenta muchas desventajas.

Es lógico pensar que en una imagen real un píxel pueda tener asociadas varias orientaciones predominantes. Este caso es el de bifurcaciones, cruces y esquinas, también conocido en este ámbito como intersecciones en X, Y y L. La Figura 2.3 muestra un ejemplo de estas estructuras y la estimación de orientaciones producida por la aplicación de los métodos de estimación de orientación simple. En el caso de la Figura 2.3 se observa el resultado de un método de estimación simple, en concreto se trata de el algoritmo ASGVF descrito por Verdú *et al.*, en [39]. En la figura se puede observar como en los píxeles que están cercanos a intersecciones ó cruces, se obtiene una única orientación que es en este caso el promedio de las orientaciones cercanas. Similares resultados se obtienen con el tensor estructural o PCA.



**Figura 2.3.:** Campo vectorial de orientaciones obtenido por el algoritmo ASGVF [40] usando  $\eta=1$ . El tamaño de la imagen es  $128 \times 64$  píxeles.

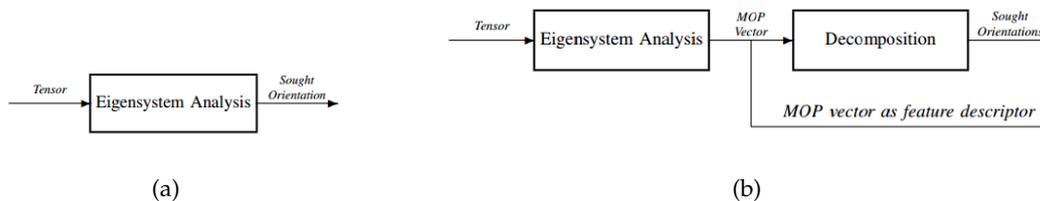
Como se puede observar, sobre estos píxeles con varias orientaciones predominantes, los métodos anteriores no son capaces de distinguir entre éstas por tanto solo se conseguirá tener un

promedio de las orientaciones múltiples que puede presentar cada píxel.

Para determinar las orientaciones múltiples existen diversos métodos, la mayoría de ellos basados en el análisis del gradiente en el dominio espacial. Los más importantes son dos, la extensión del tensor estructurante para el caso de múltiples orientaciones y la utilización de bancos de filtros.

### 2.3.1. Tensor estructural para orientaciones múltiples

A diferencia del método del tensor estructural, que se reduce a un problema de cálculo de autovalores, el proceso de estimación de orientaciones múltiples está dividido en dos pasos.



**Figura 2.4.:** (a) Proceso de estimación de una orientación, (b) proceso de estimación de múltiples orientaciones. Imágenes extraídas de [26].

El primer paso al igual que en el método tradicional es el análisis de los autovalores y autovectores. En el caso de orientación simple se obtiene el vector de orientación y en el caso de orientaciones múltiples este vector codifica la información multidimensional. Este vector de orientaciones múltiples es el autovector correspondiente al autovalor menor. La denominación de este autovector es vector de parámetros de orientación mixto, o por sus siglas en inglés (MOP vector). Este vector puede ser utilizado tal cual en ciertas aplicaciones, como segmentación ó clasificación, para las aplicaciones donde sea necesario una descomposición en diferentes vectores de orientaciones es necesario descomponer el vector de parámetros de orientación mixto [26].

### 2.3.2. Bancos de filtros

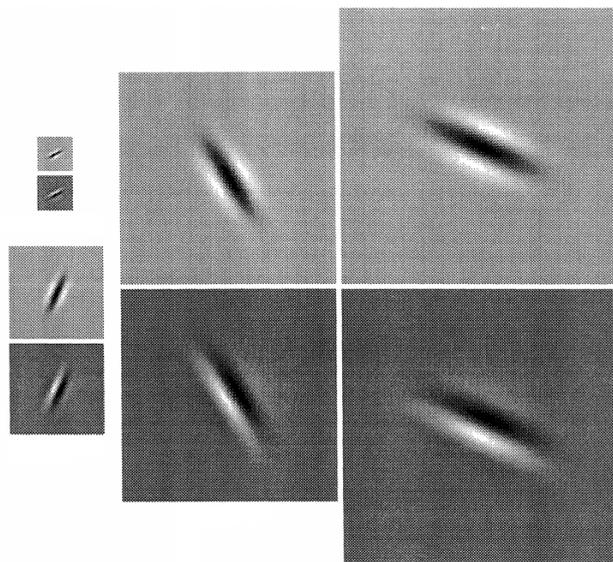
Esta técnica para estimar las orientaciones múltiples fue tratada entre otros por Perona en [30] y se centra en el uso de un banco de filtros con núcleos con diferentes orientaciones, diferentes formas y escalas para determinar la orientación, lo que presenta:

- Mejora respecto a las técnicas de gradiente en cuanto a inmunidad al ruido, en este caso la elección del núcleo más acertado para la aplicación determinará la inmunidad de este

método.

- Determinación de múltiples orientaciones debido a la aplicación de diversas ventanas con diversas orientaciones sobre el mismo vecindario.

El funcionamiento de esta técnica consiste en convolucionar la imagen con un banco de filtros, donde dichos filtros pueden ser lineales (p.e filtros de Gabor) o no lineales (p.e aperturas morfológicas), y cuyos núcleos presentan unas orientaciones y formas determinadas. Las orientaciones múltiples estimadas para cada píxel serán producto de procesar el conjunto de respuestas de cada uno de los filtros del banco de filtro. Para estas aplicaciones hay gran cantidad de núcleos, pero los más utilizados son los gaussianos y los filtros de Gabor, cuya respuesta es producto de una sinusoidal combinada con una gaussiana. El uso de filtros de Gabor es muy interesante para las aplicaciones de estimación de las orientaciones múltiples ya que permiten diseñar filtros muy selectivos en una dirección determinada.



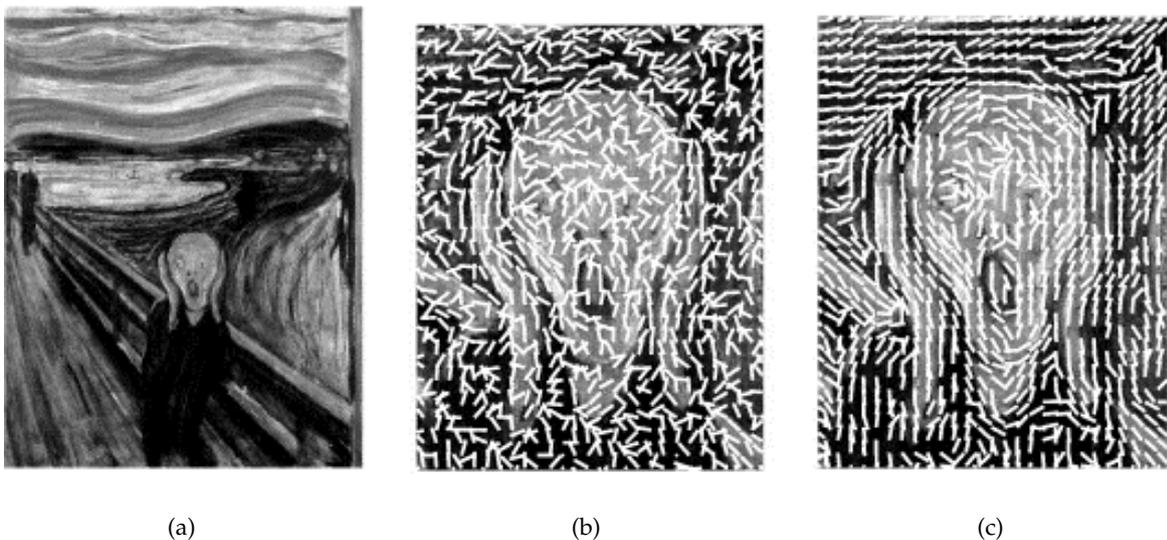
**Figura 2.5.:** Ejemplo de diferentes núcleos con diferentes escalas y diferentes orientaciones que van a ser aplicados sobre una imagen para obtener las orientaciones múltiples. Imagen extraída de [30].

## 2.4. Difusión de la información de las orientaciones

Un concepto bastante ligado a la estimación de la orientación es el de la difusión de las orientaciones. Este concepto fue utilizado por Perona en 1998 [29] para extender la información del campo vectorial más allá de las estructuras de la imagen donde de otra forma no habría información de la orientación.

Esto es de gran utilidad para las aplicaciones donde es importante disponer de información de las orientaciones, no solo en la estructuras que contienen de los objetos, sino en todos los píxeles de la imagen. Como es el caso del filtrado variante en el espacio ó la unión de estructuras inconexas.

Por otro lado la difusión de la información proporciona una mayor inmunidad al ruido, ya que la difusión lleva asociada una regularización de la información, esta ventaja es especialmente resaltada por Perona en el artículo anteriormente citado. En la Figura 2.6 se pueden observar un ejemplo de regularización de la orientación.



**Figura 2.6.:** (a) Imagen original, (b) campo vectorial de orientaciones, (c) campo vectorial de orientaciones regularizado. Imágenes extraídas de [22].

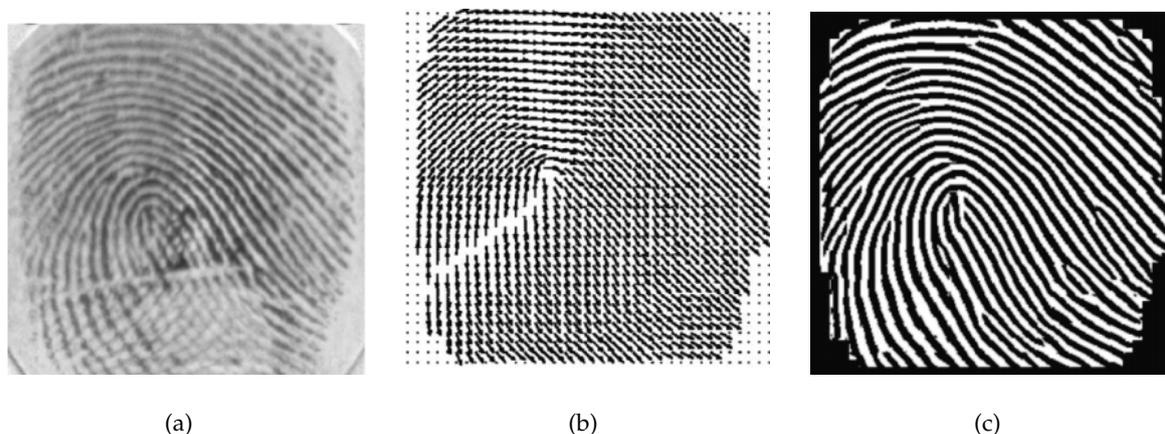
Una extensión de la difusión de la información al caso multidimensional fue presentada por Larrey *et al.* en 2011 [22], donde utiliza la difusión de la información para volúmenes de imágenes, como pueden ser la imágenes médicas de tomografías.

### 2.5. Aplicaciones de la estimación de la orientación

Tal y como se ha mencionado al principio de este capítulo, la estimación de la orientación presenta gran cantidad de aplicaciones. En un principio fue utilizada para el análisis de texturas, donde mediante la búsqueda de discontinuidades en el flujo óptico se conseguía una mejora en el proceso de segmentación, permitiendo una mejor distinción entre objetos en una imagen [27].

En las imágenes de huellas dactilares se encuentra posiblemente uno de los mayores campos de aplicación de la estimación de orientación. Ha sido utilizada esta información para restaurar la

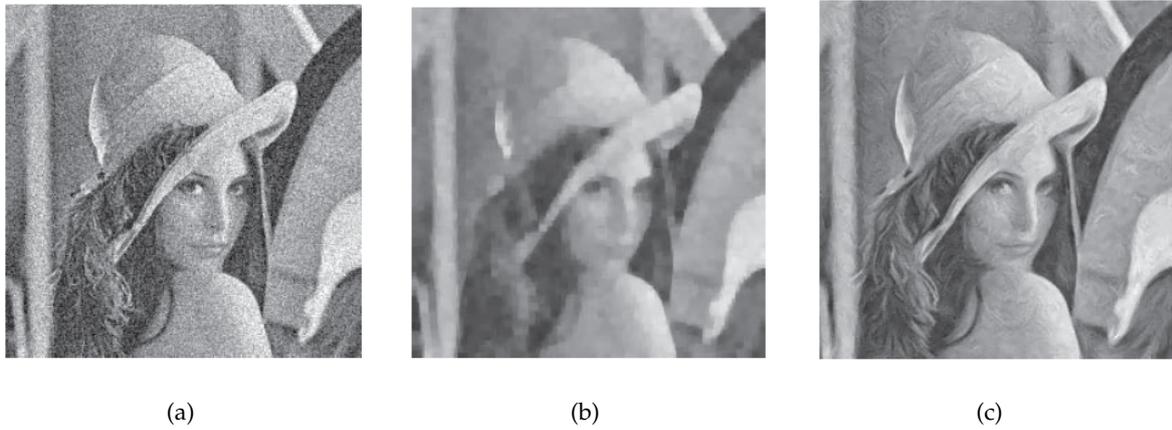
estructura de las imágenes con poca calidad [12], [23], [1], [16] o para la clasificación y adaptación de éstas [13], [6], [17], [28]. Un ejemplo del uso de la estimación de la orientación en huellas dactilares se puede observar en la Figura 2.7, donde se consigue la restauración de las estructuras de las imágenes por medio del análisis de las orientaciones.



**Figura 2.7.:** (a) Imagen original, (b) campo vectorial de orientaciones, (c) imagen reconstruida con la información del campo vectorial de orientaciones. Imagen extraída de [12].

Otro de los grandes campos de utilización es el filtrado variante en el espacio. Para estas aplicaciones se emplean núcleos que varían su forma y orientación con la información direccional de cada píxel [41]. Un ejemplo de estas aplicaciones se observa en la Figura 2.8, donde Verdú [39] emplea la información obtenida con el ASGVF para realizar un filtrado selectivo. Más reciente Landström y Thurley emplean morfología matemática para el filtrado variante en el espacio donde los elementos estructurantes tienen forma de elipse cuyo tamaño y orientación depende de los autovectores y autovalores obtenidos por el método del tensor estructurante [21].

La estimación de orientaciones múltiples adquiere su importancia para aplicaciones de estimación del movimiento [10], un buen ejemplo de esto se puede encontrar en [37] donde utilizan la extensión del tensor estructurante al caso de orientaciones múltiples para realizar aplicaciones de seguimiento de objetivos. También resulta de gran utilidad para el análisis de texturas [4]. En las aplicaciones médicas se emplea la información de las orientaciones múltiples para la detección de bifurcaciones y cruces en imágenes de la retina.



**Figura 2.8.:** (a) Imagen original ruidosa, (b) imagen con un filtro de media invariante en el espacio de tamaño 5x5 (c) imagen filtrada con un filtro de media variante en el espacio. Imagen extraída de [39]

---

### Estimación de orientaciones múltiples con morfología matemática y b-splines

---

Este capítulo presenta una posible mejora respecto a las aplicaciones tradicionales de estimación de las orientaciones múltiples, basada del uso de morfología matemática.

La razón de utilizar morfología matemática radica en el hecho que son operaciones no lineales, que respetan muy bien los bordes de las estructuras de la imagen [33],[35] y en los excelentes resultados que muestra, para la estimación de la orientación tanto global como local [14]. Gracias al concepto de campo de orientaciones morfológicas es posible determinar una firma direccional para cada píxel mediante el cálculo de una serie de aperturas direccionales orientadas sobre el píxel en cuestión, siendo la orientación predominante la que entre todas las aperturas direccionales produce el mayor valor en la firma direccional. De todas formas este método no es novedoso en cuanto al uso de morfología matemática para la estimación de orientaciones, Angulo y Verdú ya presentaron en 2011 un estimador de orientaciones múltiples en un bloque de la imagen [2]. Lo que es realmente novedoso de este trabajo es la extensión de este método al cálculo de las orientaciones múltiples en cada píxel, por medio de la morfología matemática y con la aplicación de un proceso de difusión y regularización de la información.

En el Anexo A puede encontrarse una breve descripción de los conceptos básicos de morfología matemática para comprender este capítulo.

La primera sección de este capítulo describe el método empleado para la obtención de las orientaciones múltiples que presentan las estructuras de la imagen. La segunda sección explica la técnica de regularización empleada para extender la información de orientaciones más allá de los bordes de los objetos. A continuación se realiza un estudio sobre cómo condiciona el elemento estructurante el proceso de estimación. Y por último en las dos últimas secciones se describe el proceso de regularización y el proceso de interpolación de los valores de las aperturas direccionales orientadas para así obtener la firma direccional con las orientaciones de cada píxel. Esta información es la que será utilizada posteriormente en las aplicaciones futuras.

### Método propuesto para la estimación de las orientaciones múltiples

La Figura 3.1 muestra el diagrama de bloques del método propuesto. Sea  $f(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}$  una imagen en escala de grises, donde el espacio de soporte es  $E \subset \mathbb{Z}^2$  y las coordenadas de los píxeles son  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Se define  $g(\mathbf{x})$  como el valor absoluto del gradiente de  $f(\mathbf{x})$ :

$$g(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right)^2}. \quad (3.1)$$

La apertura direccional de  $g(\mathbf{x})$  por un elemento estructurante lineal (simétrico) de longitud  $l$  y dirección  $\theta$ ,  $L^{\theta, l}$ , se define como la erosión de  $g(\mathbf{x})$  con  $L^{\theta, l}$  seguido de la dilatación del resultado con el mismo elemento estructurante [41]:

$$\gamma_{L^{\theta, l}}(g)(\mathbf{x}) = \delta_{L^{\theta, l}}[\varepsilon_{L^{\theta, l}}(g)](\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Las definiciones de erosión y la dilatación son, respectivamente,

$$\varepsilon_{L^{\theta, l}}(g)(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{h} \in L^{\theta, l}(\mathbf{x})} \{g(\mathbf{x} + \mathbf{h})\}, \quad (3.3)$$

$$\delta_{L^{\theta, l}}(g)(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{h} \in L^{\theta, l}(\mathbf{x})} \{g(\mathbf{x} - \mathbf{h})\}, \quad (3.4)$$

donde los símbolos  $\bigwedge$  y  $\bigvee$  denotan los operadores mínimo y máximo respectivamente.

Recordemos que el subgrafo de la apertura de la imagen es equivalente a la unión de las traslaciones del elemento estructurante lineal EE siempre que el elemento estructurante definido para cada píxel quede dentro del subgrafo de la imagen original [34], o en otras palabras, se eliminan las estructuras de la imagen que no pueden contener al elemento estructurante.

El modelo de estimación de la orientación propuesto está basado en la descomposición de la información del gradiente mediante una familia de aperturas lineales. Sea  $\{\gamma_{L^{\theta_i, l}}\}_{i \in I}$  una familia de aperturas lineales de longitud  $l$  conforme a una particular discretización del espacio de

orientaciones  $\{\theta_i\}_{i \in I}$ . En la teoría de la morfología matemática a esta familia de aperturas parametrizadas se le conoce como granulometría [35]. Para cada orientación obtenemos la información de la intensidad del gradiente tras la apertura correspondiente. Además, la acumulación por el supremo de las aperturas (que posee las propiedades de una apertura [35], i.e., idempotencia y anti-extensividad) produce una aproximación de  $g(\mathbf{x})$  en escala lineal  $l$ , denotado como  $a_l^\ominus(g)(\mathbf{x})$ :

$$a_l^\ominus(g)(\mathbf{x}) = \bigvee_{i \in I} \gamma_{L^{\theta_i, l}}(g)(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

La imagen acumulada  $a_l^\ominus(g)(\mathbf{x})$  extrae las estructuras lineales de  $g(\mathbf{x})$  cuya longitud es mayor que  $l$ . Por tanto, el residuo entre  $g(\mathbf{x})$  y  $a_l^\ominus(g)(\mathbf{x})$ ,

$$r_l^\ominus(g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - a_l^\ominus(g)(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

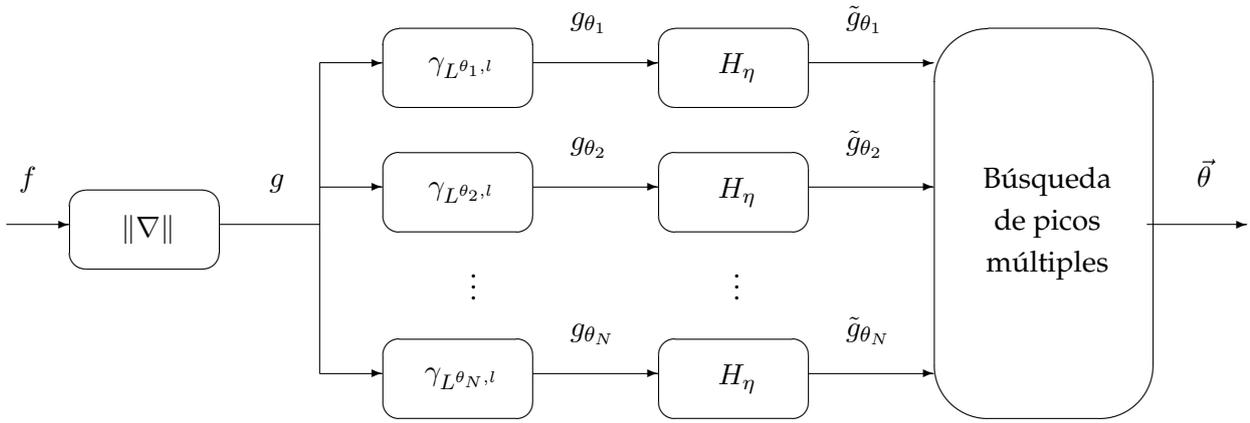
contendrá las estructuras lineales de la imagen de longitud menor que el EE. Por otro lado, el residuo  $r_l^\ominus(g)(\mathbf{x})$  puede ser utilizado como dato de entrada para realizar una aproximación multiescala con elementos estructurantes de menor tamaño, como se detalla en [2].

Dado un elemento estructurante de longitud  $l$ , la discretización del espacio de orientaciones  $\{\theta_i\}_{i \in I}$  viene dada por  $\theta_i = i \cdot \Delta\theta$  con  $i = [0, 2(l-1) - 1]$ . El número de aperturas direccionales del banco de filtros será dependiente de la longitud del elemento estructurante,  $l$ , produciendo  $N = 2(l-1)$  ángulos distintos [40]. Además, la longitud del elemento estructurante a su vez condicionará la resolución angular que presenta el método para estimar las orientaciones según  $\Delta\theta = \frac{90^\circ}{l-1}$ . Por tanto es fácil concluir que a mayor longitud del elemento estructurante, mayor resolución angular, pero como contrapartida las aperturas direccionales solo tendrán en cuenta las estructuras lo suficientemente grandes como para ser contenidas, es decir, que escapan un mayor número de detalles que no pueden ser contenidos por los elementos estructurantes.

Para ilustrar cada una de las etapas del proceso, se ha escogido una imagen sintética (ver Fig 3.2(a)), para ver el resultado que proporciona en cada punto el método propuesto. En la Figura 3.2(b) se muestra el módulo del gradiente,  $g(\mathbf{x})$ . La Figura 3.2(c) muestra la acumulación de aperturas direccionales  $a_l^\ominus(g)(\mathbf{x})$  y por último, la Figura 3.2(d) muestra el residuo resultante de la aplicación de las aperturas direccionales a la imagen  $f(\mathbf{x})$ .

## Regularización

En el método propuesto en [2] se realiza una estimación de la orientación múltiple considerando bloques de la imagen. En el método propuesto en este trabajo se obtiene la información en cada píxel y por ello es necesario extender la información de la orientación a todos los píxeles de la imagen, más allá de las estructuras de la imagen. El proceso de regularización, como se ha comentado en el capítulo anterior, reduce el ruido y facilita la realización de tareas posteriores,



**Figura 3.1.:** Diagrama de flujo del método de estimación de orientaciones múltiples.

como el filtrado [39], detección de bifurcaciones y cruces (como se podrá observar en el siguiente capítulo), estimación de flujo óptico, etc.

Para extender la información se realiza una regularización de cada una de las aperturas direccionales. La regularización difunde la información de la orientación y mejora la inmunidad frente al ruido. Cada una de las aperturas regularizadas,  $\tilde{g}_{\theta_i}$ , minimiza el siguiente funcional de energía,

$$\mathcal{E}(\tilde{g}_{\theta_i}) = \mathcal{D}(\tilde{g}_{\theta_i}) + \alpha \mathcal{S}(\tilde{g}_{\theta_i}), \quad (3.7)$$

donde  $\mathcal{D}$  representa la medida de distancia dada por la diferencia al cuadrado entre la apertura original y la apertura direccional regularizada, ponderada por el valor al cuadrado de la apertura direccional original:

$$\mathcal{D}(\tilde{g}_{\theta_i}) = \frac{1}{2} \int_E \|g_{\theta_i}\|^2 \|\tilde{g}_{\theta_i} - g_{\theta_i}\|^2 dx_1 dx_2, \quad (3.8)$$

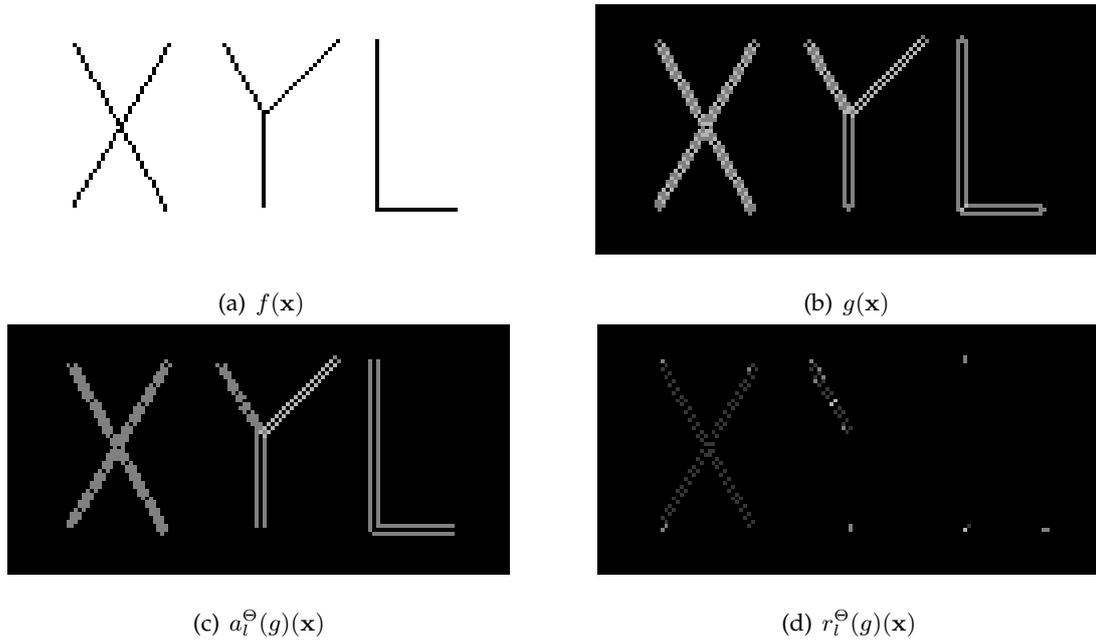
siendo  $E$  el dominio de la imagen. El término de energía  $\mathcal{S}$  es el término de regularización. Su función es determinar el suavizado de las aperturas regularizadas y representa la energía de las derivadas de segundo orden de la señal:

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_E \|\Delta \tilde{g}_{\theta_i}\|^2 dx_1 dx_2, \quad (3.9)$$

donde  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  es el operador Laplaciano. El parámetro positivo  $\alpha$  controla el ajuste de la solución a los datos y la suavidad de la solución. De acuerdo al cálculo variacional, la apertura regularizada  $\tilde{g}_{\theta_i}$  que minimiza la ecuación (3.7) es necesariamente una solución de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$(\tilde{g}_{\theta_i} - g_{\theta_i})|g_{\theta_i}|^2 + \alpha \Delta^2 \tilde{g}_{\theta_i} = 0. \quad (3.10)$$

Esta ecuación se puede resolver añadiendo un tiempo artificial y calculando la solución en estado estacionario. La solución se obtendrá con una implementación iterativa en el dominio de



**Figura 3.2.:** (a) Imagen sintética,  $f(\mathbf{x})$ , (b) valor absoluto del gradiente de la imagen,  $|\nabla f(\mathbf{x})|$ , (c) acumulación de las aperturas direccionales,  $a_l^\Theta(g)(\mathbf{x})$  y (d) residuo de aperturas direccionales  $r_l^\Theta(g)(\mathbf{x})$ .

la frecuencia

$$\tilde{G}_{\theta_i}^n = H_\eta(\tilde{G}_{\theta_i}^{n-1} + F^{n-1}) \quad (3.11)$$

siendo  $\tilde{G}_{\theta_i}^n$  y  $\tilde{G}_{\theta_i}^{n-1}$  las transformadas discretas de Fourier en 2D de sus respectivas señales en el dominio del espacio. El superíndice  $n$  denota el índice de iteración,  $F^{n-1}$  es la transformada de Fourier en dos dimensiones de  $f^{n-1} = (g_{\theta_i} - \tilde{g}_{\theta_i}^{n-1})|g_{\theta_i}|^2$ ,  $H_\eta$  es el muestreo del filtro paso bajo

$$H_\eta(\omega_1, \omega_2) = \frac{\eta}{\eta + 4(2 - \cos \omega_1 - \cos \omega_2)^2}. \quad (3.12)$$

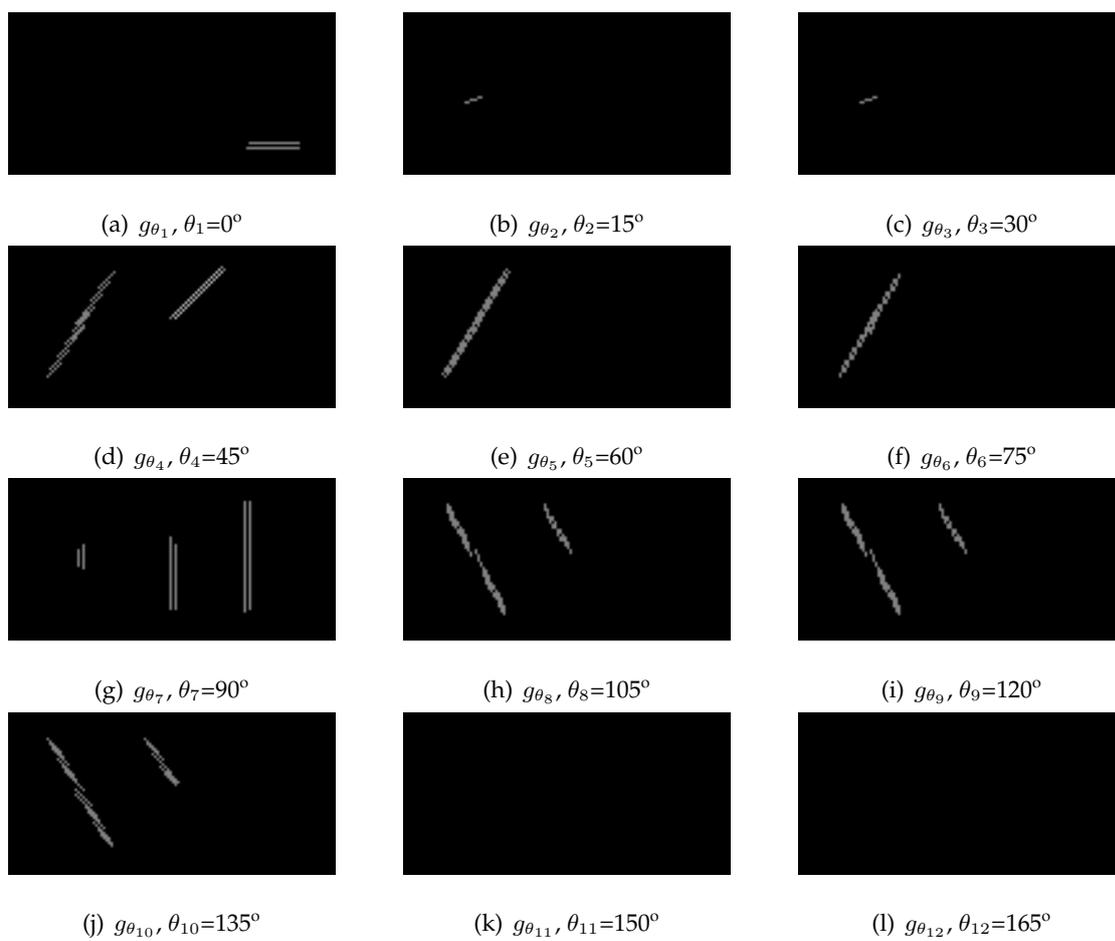
Una vez que las aperturas direccionales han sido regularizadas, la firma direccional en el píxel  $\mathbf{x}$  se define como

$$s_{\mathbf{x};l}(i) = \tilde{g}_{\theta_i}(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

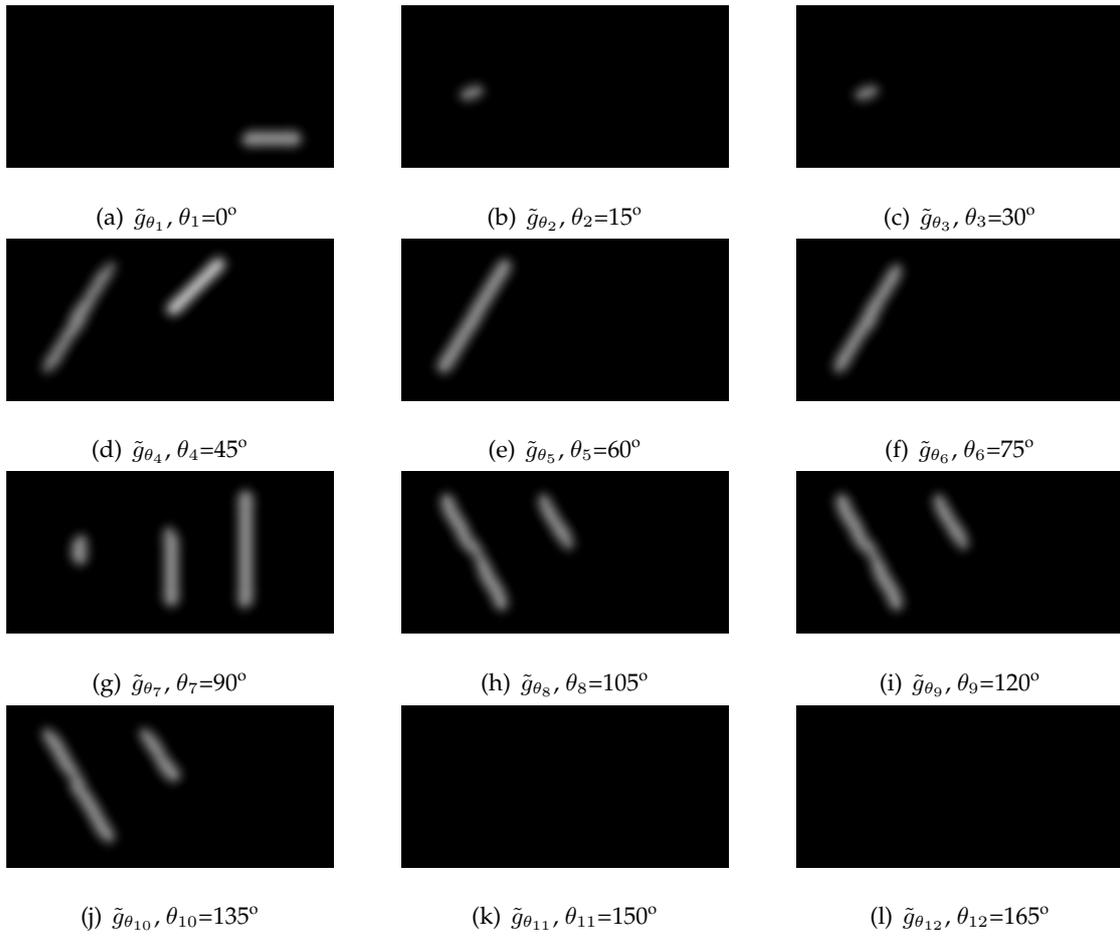
Es decir, la secuencia  $s_{\mathbf{x};l}(i)$  contendrá en su muestra  $i$  el valor de la apertura direccional regularizada  $\tilde{g}_{\theta_i}$  en el píxel  $\mathbf{x}$ .

### Alcance de la regularización

El control del alcance de la regularización es importante para determinar hasta donde se extiende la información más allá de la propia estructura. Los parámetros que se encargan de controlar la regularización son  $\eta$  y el número de iteraciones del proceso iterativo.



**Figura 3.3.:** Aperturas direccionales de  $g(x)$  con  $l=7$ .



**Figura 3.4.:** Aperturas direccionales regularizadas usando  $\eta=1$ .

El parámetro  $\eta$  es proporcional al ancho de banda del filtro  $H_\eta(\omega_1, \omega_2)$ , así un valor alto proporcionará transiciones bruscas y un alcance limitado. Un valor bajo de  $\eta$  suaviza más las transiciones, logrando así un mayor alcance. El número de iteraciones es proporcional al alcance y suavizado de la solución del proceso iterativo. Por tanto, al aumentar el número de iteraciones se aumenta el alcance y suavizado del filtro equivalente del proceso iterativo.

Para profundizar en el conocimiento del filtro equivalente del proceso iterativo de la ecuación 1.11, en la Figura 3.5 se muestra el resultado de aplicar este proceso a una señal delta de Kronecker 2D. donde

$$V^n = H_\eta(V^{n-1} + F^{n-1}) \quad (3.14)$$

es la solución del proceso iterativo en el dominio de la frecuencia,  $F^{n-1}$  es la transformada de Fourier de  $f^{n-1} = (\delta - v^{n-1})|\delta|^2$ ,  $\delta = \delta[n_1, n_2]$  y  $V$  es la transformada de Fourier 2D de la señal regularizada  $v[n_1, n_2]$ . En la Figura 3.6 se muestra un corte del filtro equivalente para los valores de  $\eta$  y las iteraciones indicadas. Notar que el filtro  $H_\eta$  es simétrico.

En la Figura 3.6 se observa la respuesta del filtro equivalente del sistema iterativo para diferentes valores de  $\eta$  y distinto número de iteraciones.

## Interpolación

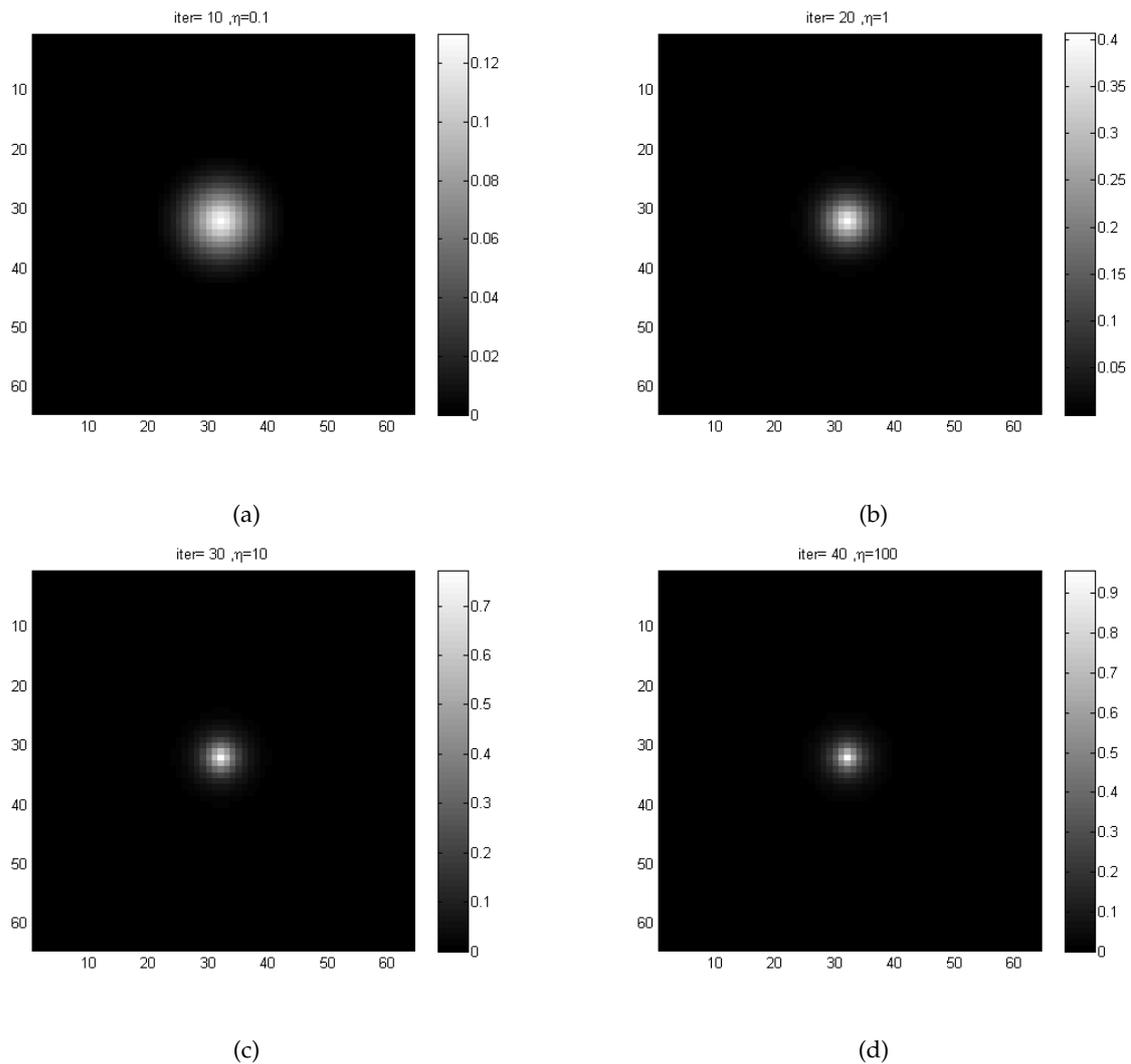
Una vez obtenida la firma direccional en cada píxel tras la aplicaciones del banco de aperturas direccionales, es necesario estimar las orientaciones significativas a partir de  $s_{\mathbf{x}_p; l_j}(i)$  encontrando los picos locales de estas señales. La búsqueda de los picos se realizará interpolando los valores de la firma direccional resultando  $S_{\mathbf{x}_p; l_j}(\alpha)$  una señal continua y diferenciable y  $\alpha$  una variable continua que denota el ángulo de la orientación. Los picos por tanto se encontrarán en los puntos donde la primera derivada sea cero y la segunda derivada sea negativa, i.e.

$$\frac{\partial \widehat{S}_{\mathbf{x}_p; l_j}(\alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{S}_{\mathbf{x}_p; l_j}(\alpha)}{\partial \alpha^2} < 0. \quad (3.16)$$

Si se quiere profundizar en la interpolación por medio de b-splines es interesante consultar la revisión que hace Thévenaz en [38].

Finalmente solo queda considerar aquellos ángulos  $\alpha_p$  cuyo valor de pico sea superior a un umbral que estableceremos. En el caso de este proyecto el valor del umbral es del 50 % del valor del



**Figura 3.5.:** Resultado de regularizar la señal delta de Kronecker mediante el filtro  $H_\eta$  y el proceso iterativo de la ecuación 1.11.

pico máximo. Solo se considerarán las orientaciones correspondientes a los picos por encima de este umbral. El resultado del método de estimación de orientaciones múltiples propuesto puede observarse en la Figura 3.7.

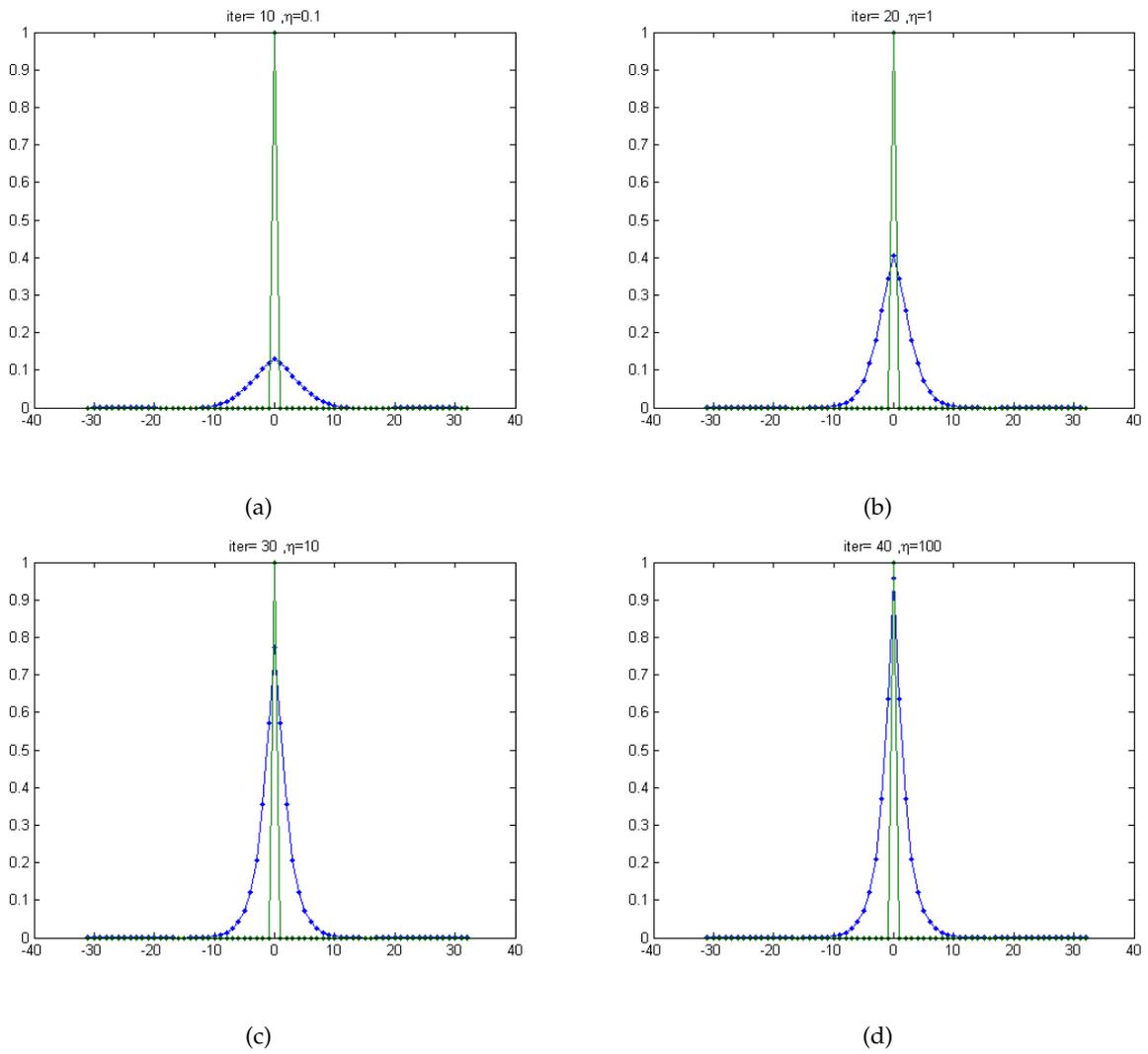


Figura 3.6.: Respuesta espacial del filtro equivalente del sistema iterativo.

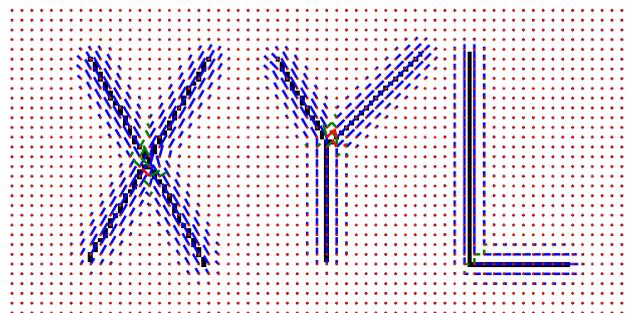


Figura 3.7.: Campo vectorial de orientaciones,  $\vec{\theta}$ , obtenido por el algoritmo propuesto. El tamaño de la imagen es  $128 \times 64$  píxeles.

---

### Evaluación y resultados del método de estimación de orientaciones múltiples

---

Para evaluar las prestaciones del método de estimación de orientaciones múltiples propuesto en el capítulo anterior se emplearán dos imágenes, una sintética y otra real. La imagen sintética es una imagen binaria de tamaño  $335 \times 388$  píxeles generada específicamente para este estudio y está formada por la unión de diversas estructuras lineales. Por otro lado la imagen real es una imagen binaria de tamaño  $564 \times 564$  píxeles que procede de la segmentación manual de una retinografía en escala de grises, dicha imagen ha sido extraída de la base de datos DRIVE [36]. En la Figura 4.1 se muestran ambas imágenes. Por otra parte, la Figura 4.2 muestra los gradientes de las respectivas imágenes.

Para concluir la evaluación de prestaciones, el último apartado del capítulo presenta los resultados de un nuevo método para la detección de bifurcaciones y cruces en la estructura vascular de la retina humana (ver Fig 4.1 (b)), este método resulta interesante por tratarse de una aplicación real basada en el método propuesto de estimación de orientaciones múltiples. El método de detección empleado clasifica la información de las orientaciones múltiples obtenida para discernir entre las bifurcaciones y cruces ó la curvatura de las venas. Más información sobre el método de detección de orientaciones múltiples puede encontrarse en el Anexo B de este trabajo.

## 4.1. Resultados para imagen sintética

En primer lugar se muestran los resultados de la aplicación del método de estimación de orientaciones múltiples sobre la imagen sintética, ésta presenta un escenario mucho más controlado que la imagen real, donde solo existen estructuras con unas pocas orientaciones determinadas. Por otro lado las bifurcaciones, cruces e intersecciones están controladas.

Para la estimación de las orientaciones múltiples se probaron diferentes tamaños de elementos estructurantes lineales hasta encontrar el que permitiese una mejor relación entre el nivel de detalle y resolución angular. En éstas pruebas se utilizaron EE de longitud  $l_1 = 5, l_2 = 7, l_3 = 9$  y  $l_4 = 11$ . En las Figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 puede observarse en la primera columna la acumulación de las aperturas direccionales para cada uno de los EE y en la segunda columna los correspondientes residuos de cada una de las acumulaciones de aperturas. El residuo obtenido podría usarse en etapas posteriores de una aproximación multiescala con EE de menor tamaño.

El elemento estructurante que presenta un mejor compromiso entre nivel de detalle y resolución angular es el de longitud  $l = 9$ . Para el caso de elementos estructurantes de menor tamaño no se consigue tener una resolución angular suficiente para estimar correctamente las diferentes orientaciones que presentan las estructuras de la imagen (dado que EE de longitud menor permite menos orientaciones). Por otro lado, el EE de longitud  $l = 11$  es grande y no es capaz de contener los pequeños detalles que presenta la imagen. Este efecto puede apreciarse al comparar la acumulación de las aperturas direccionales para EE de longitud  $l = 9$  y  $l = 11$ , donde se observa que los detalles de las aristas de las figuras geométricas no aparecen en la acumulación de aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 11$ .

En la etapa de regularización se han probado diferentes parámetros de  $\eta$  para analizar como se difunde la información de las orientaciones, siendo para esta imagen el mejor resultado encontrado  $\eta = 1$ . La Figura 4.7 muestra la regularización de las aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 9$ .

La Figura 4.8 muestra la firma direccional (donde el eje  $x$  se corresponde con el ángulo  $\theta_i$  en grados, el marcador rojo corresponde a la segunda imagen y el marcador azul a la tercera imagen de la figura) obtenida para dos puntos de la imagen que presentan orientaciones múltiples, en ella se pueden apreciar la existencia de picos que representan cada una de las orientaciones principales. La interpolación para obtener la firma direccional ha sido realizada con b-splines cúbicos de los cuales solo se han tenido en cuenta aquellos que han superado cierto umbral, en este caso un umbral correspondiente al 50 % respecto al máximo de los picos.

Finalmente, la Figura 4.9 muestra el campo vectorial con las tres orientaciones más significativas estimadas para la imagen sintética, y en la segunda columna de la figura se muestra un

zoom sobre una zona que presenta bifurcaciones y cruces. Se puede observar que los puntos con varias orientaciones tienen asociados varios vectores de orientación, donde cada vector indica una orientación determinada.

## 4.2. Resultados para imagen real

En el proceso de estimación de orientaciones múltiples en la imagen real de retinografía se probaron elementos estructurantes lineales de longitud  $l_1 = 3, l_2 = 5, l_3 = 7, l_4 = 9$  y  $l_5 = 11$  obteniendo las mejores prestaciones para elementos estructurantes de longitud  $l = 7$ . Con este tamaño se consigue una resolución angular de  $15^\circ$  y el banco de filtros está formado por doce aperturas direccionales. En esta imagen la elección del EE una vez más es clave, ya que de otra forma resulta imposible detectar ciertas bifurcaciones o cruces. Es el caso de EE pequeños donde las bifurcaciones o cruces no quedan contenidas en las aperturas direccionales ó el caso de EE grandes donde aún estando contenidas, no se puede estimar la orientación adecuadamente a causa de la reducida resolución angular. La Figura 4.10 muestra la acumulación de aperturas direccionales y el residuo de éstas.

El valor del parámetro  $\eta$  se encarga de regular la difusión de la información de las orientaciones, para la imagen de retinografía se emplea, al igual que con la imagen anterior, el valor  $\eta = 1$ . Otros valores de  $\eta$  también han sido probados, siendo este el que mejor resultado proporciona para esta imagen. La acumulación de aperturas direccionales regularizadas se muestra en la Figura 4.11.

El campo vectorial de orientaciones múltiples se muestra en la Figura 4.12. También se incluye un zoom de una zona que presenta múltiples bifurcaciones y cruces para apreciar mejor los detalles. Puede observarse que en las zonas donde aparecen bifurcaciones el método es capaz de estimar todas las orientaciones presentes.

## 4.3. Resultados del algoritmo de detección de bifurcaciones y cruces

Para la detección de las bifurcaciones y cruces en la retinografía segmentada del apartado anterior se ha mantenido el EE de longitud  $l = 7$ . En la etapa de regularización también se ha mantenido el mismo valor de  $\eta$  y se ha elegido un umbral de  $th = 25^\circ$  entre la diferencia de ángulos de la orientación principal y la secundaria en cada punto de la imagen para distinguir entre bifurcaciones o cruces respecto a la propia curvatura de las venas, es decir si la diferencia

de ángulos es menor de  $25^\circ$  se trata como la propia curvatura de la vena y en otro caso como una bifurcación o cruce.

La Figura 4.13 muestra resaltadas las zonas de la retinografía donde se han detectado bifurcaciones y cruces. Como se puede observar todas las bifurcaciones o cruces han sido detectadas. Aún así aparecen varios falsos positivos, producto de la elevada curvatura de algunas venas las cuales el método de detección las interpreta como bifurcaciones o cruces.

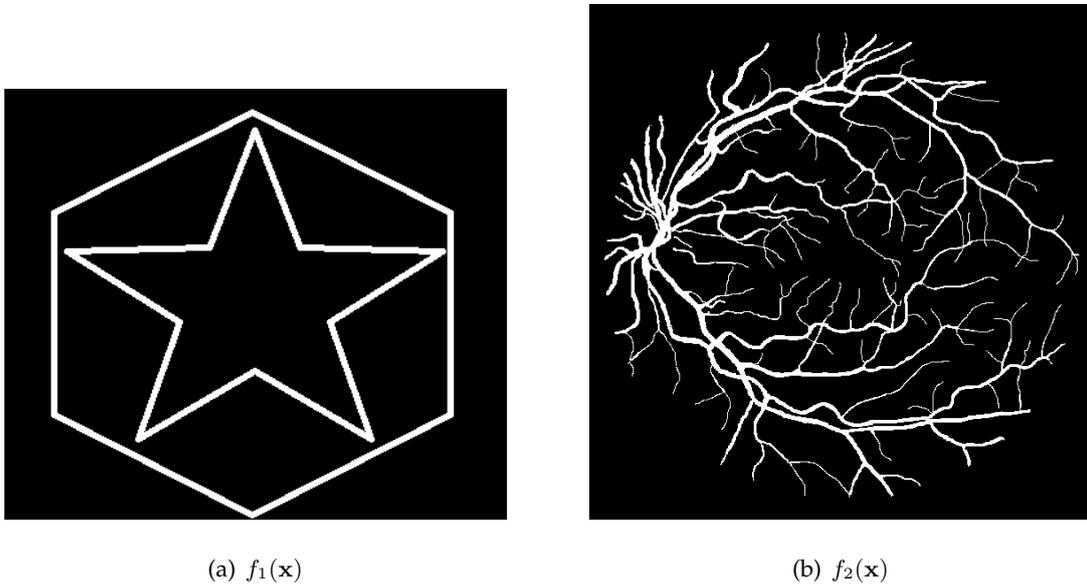


Figura 4.1.: (a) Imagen sintética  $f_1(\mathbf{x})$  de  $335 \times 388$  píxeles y (b) imagen real  $f_2(\mathbf{x})$  de  $564 \times 564$  píxeles.

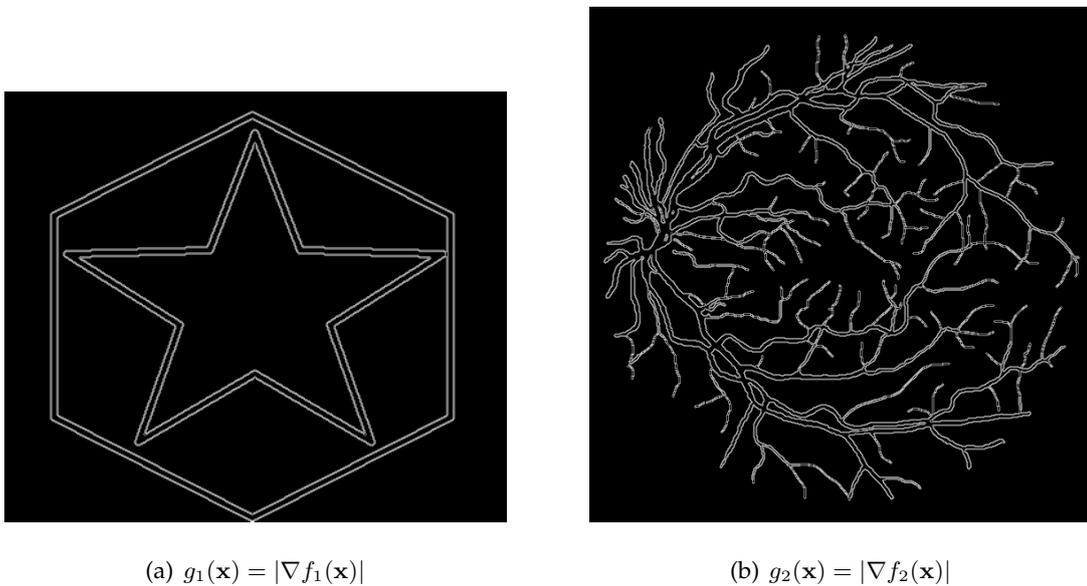
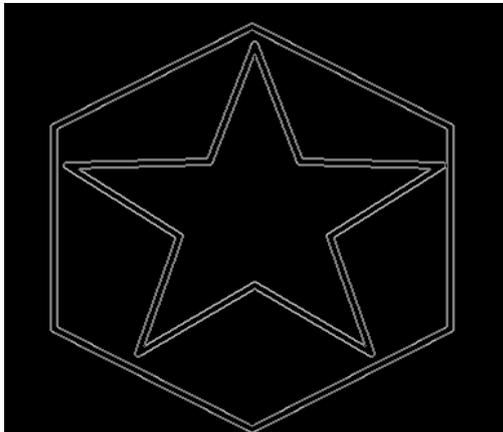


Figura 4.2.: (a) Modulo del gradiente de la imagen sintética,  $|\nabla f_1(\mathbf{x})|$  y (b) modulo del gradiente de la imagen real,  $|\nabla f_2(\mathbf{x})|$ .

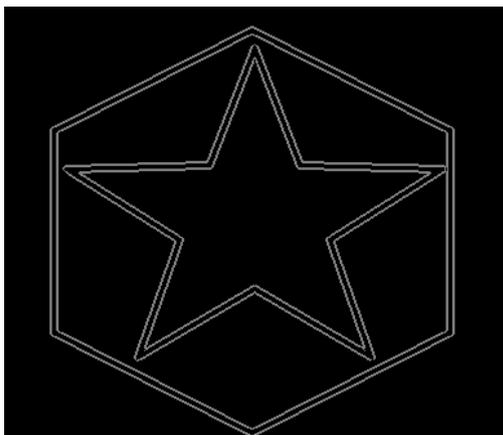


(a)  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$



(b)  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

**Figura 4.3.:** (a) Acumulación de aperturas direccionales,  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$  y (b) residuo de la acumulación de aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 5$ ,  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$ .

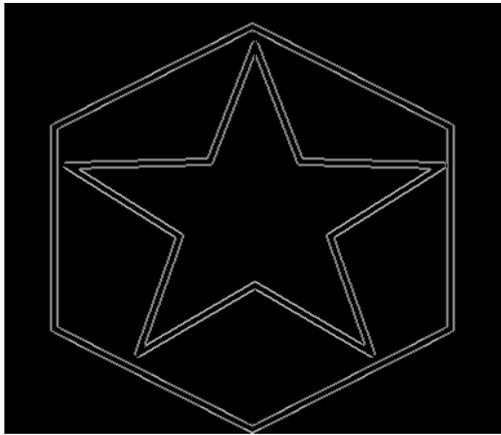


(a)  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

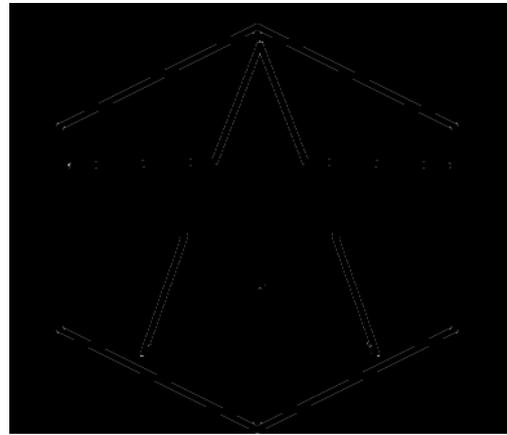


(b)  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

**Figura 4.4.:** (a) Acumulación de aperturas direccionales,  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$  y (b) residuo de la acumulación de aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 7$ ,  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$ .

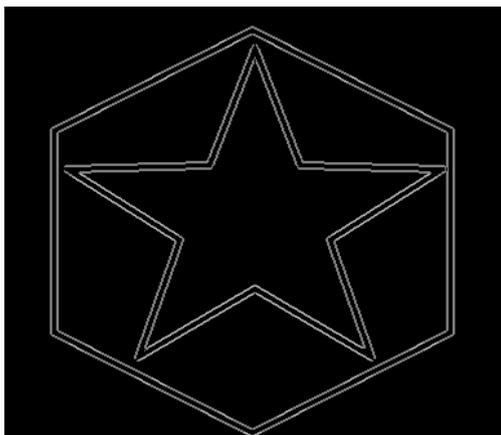


(a)  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$



(b)  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

**Figura 4.5.:** (a) Acumulación de aperturas direccionales,  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$  y (b) residuo de la acumulación de aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 9$ ,  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$ .



(a)  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

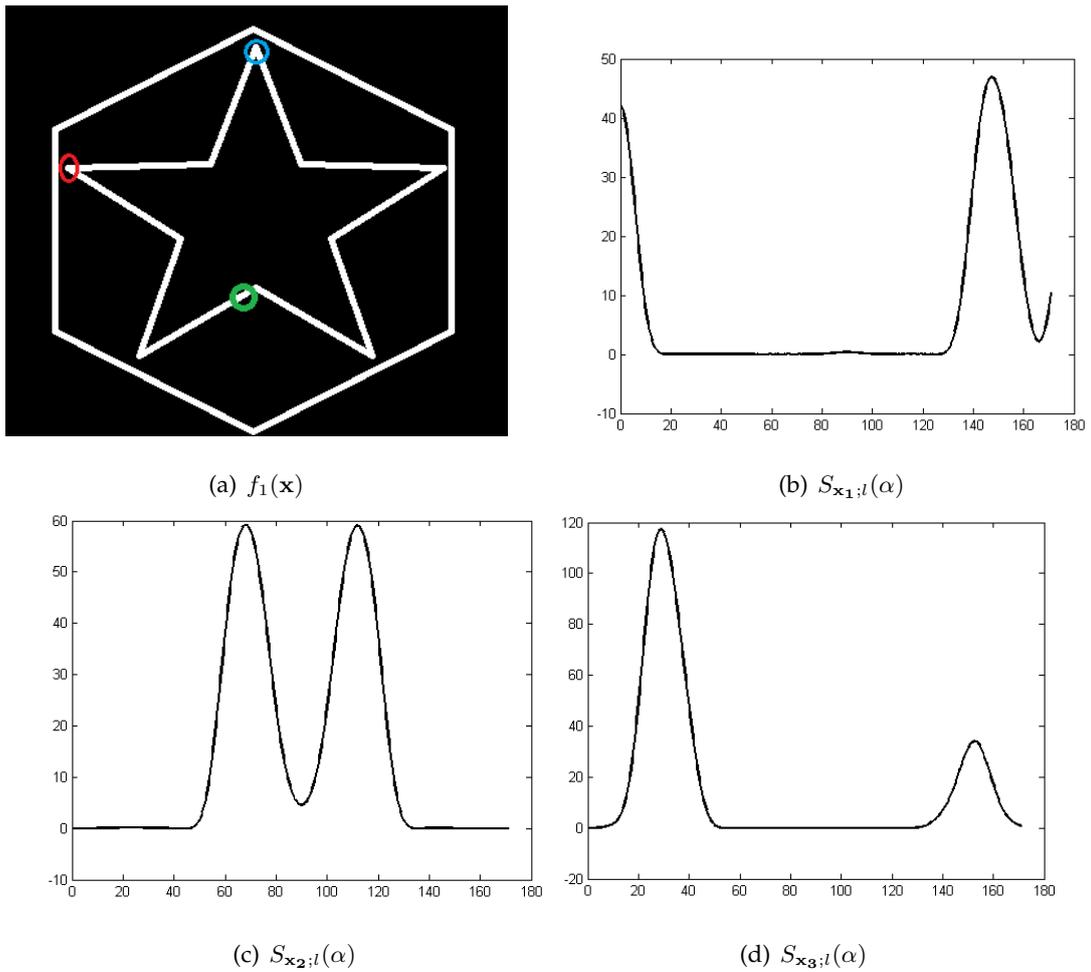


(b)  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$

**Figura 4.6.:** (a) Acumulación de aperturas direccionales,  $a_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$ , (b) residuo de la acumulación de aperturas direccionales con EE de longitud  $l = 11$ ,  $r_l^\ominus(g_1)(\mathbf{x})$ .



**Figura 4.7.:** Acumulación de aperturas direccionales regularizadas con EE de longitud  $l = 9$ .



**Figura 4.8.:** (a) Imagen sintética con marcadores en los puntos  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$ , (b) firma direccional del marcador rojo, (c) firma direccional del marcador azul, (d) firma direccional del marcador verde.

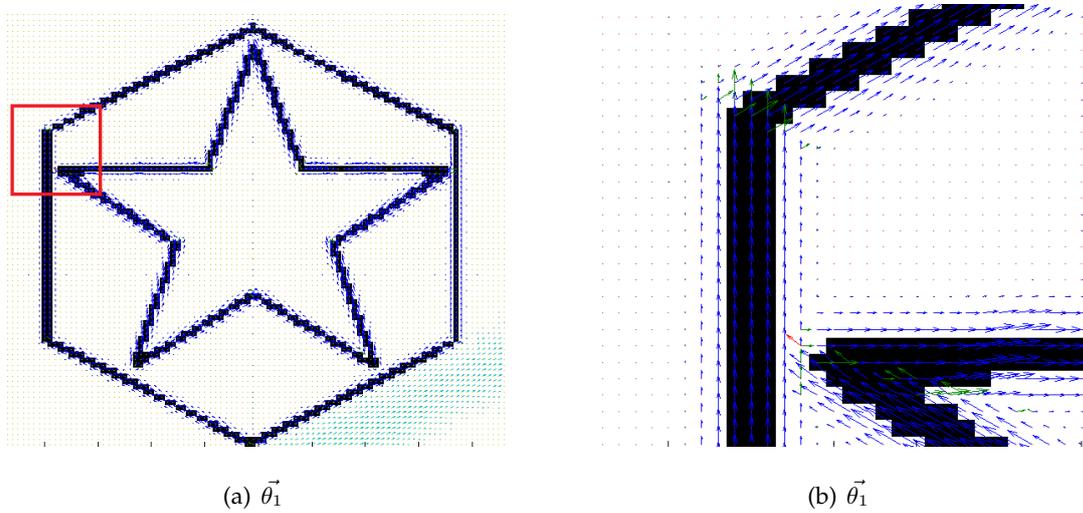


Figura 4.9.: (a) Campo vectorial de orientaciones múltiples, (b) zoom del recuadro con el campo vectorial de orientaciones múltiples.

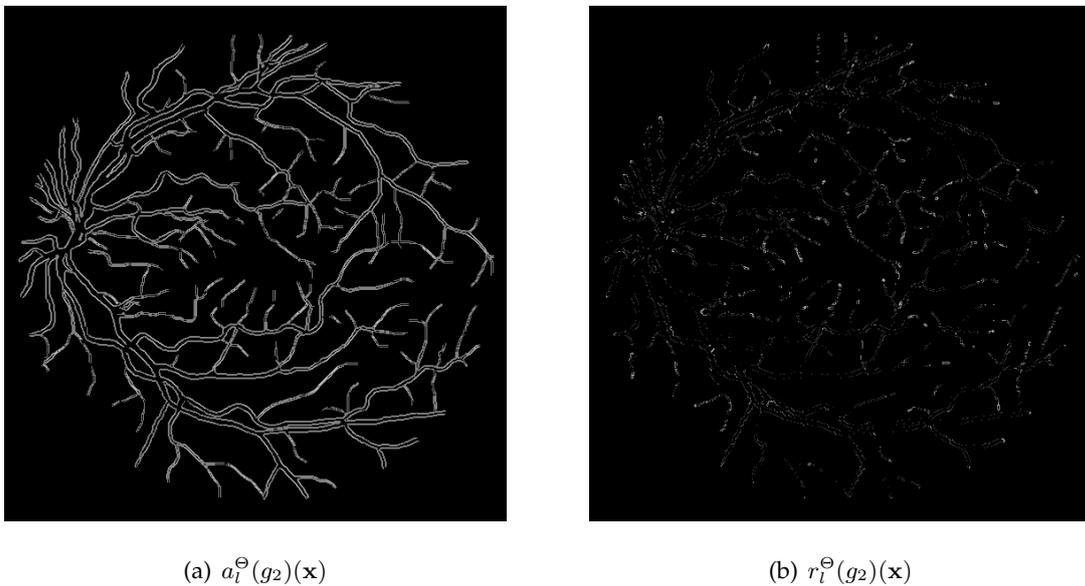
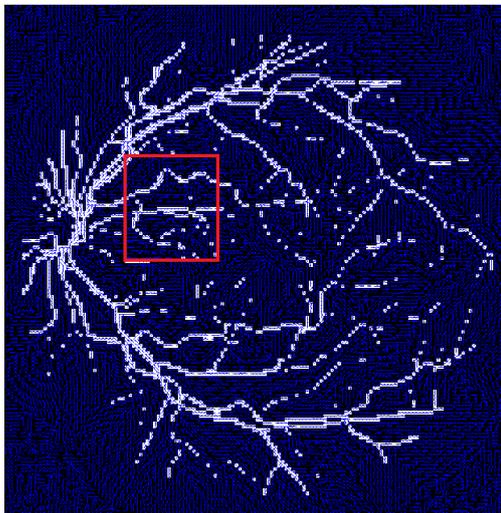


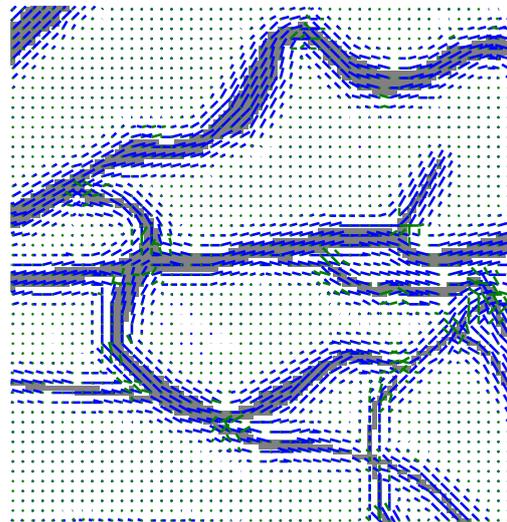
Figura 4.10.: (a) Acumulación de aperturas direccionales  $a_l^\ominus(g_2)(\mathbf{x})$ , (b) residuo de la acumulación de aperturas direccionales utilizando un EE de longitud  $l = 7$ ,  $r_l^\ominus(g_2)(\mathbf{x})$ .



Figura 4.11.: Acumulación de aperturas direccionales regularizadas.

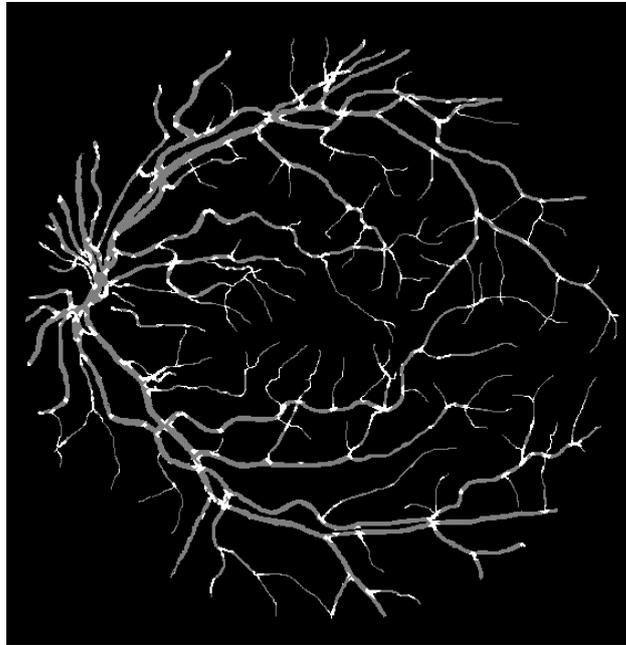


(a)  $\vec{\theta}_2$



(b)  $\vec{\theta}_2$

Figura 4.12.: (a) Imagen de la retina con el campo vectorial de orientaciones múltiples estimadas, (b) zoom del recuadro con el campo vectorial de orientaciones múltiples.



**Figura 4.13.:** Bifurcaciones y cruces detectados en la segmentación de la retinografía con el algoritmo propuesto, basado en la estimación de orientaciones múltiples.

---

### Conclusiones y Líneas Futuras

---

#### 5.1. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un método de estimación de orientaciones múltiples basado en un banco de filtros no lineales (aperturas direccionales con EE orientados) gracias al cual obtenemos las múltiples orientaciones de las estructuras que componen los objetos de una imagen. Tras estimar las orientaciones múltiples en las estructuras de la imagen y zonas cercanas, se realiza una regularización de las aperturas direccionales para extender la información de la orientación a todos los puntos de la imagen, y no solo a las zonas cercanas a la estructura de la imagen. Con la información de las aperturas direccionales regularizadas se obtiene la firma direccional para cada píxel de la imagen y, posteriormente, se detectan los picos en la firma mediante interpolación con b-splines cúbicos para encontrar los ángulos en los que las firmas direccionales son máximas.

Respecto a la evaluación de prestaciones, se puede concluir que el método descrito presenta una gran sensibilidad para detectar las orientaciones múltiples, como puede observarse en las Figuras 4.9 y 4.12. Siendo la sensibilidad del método proporcional a la resolución angular. La resolución angular del método es, a su vez, proporcional a la longitud del EE, pero como contrapartida las aperturas direccionales solo tendrán en cuenta las estructuras lo suficientemente grandes como para ser contenidas, es decir que al incrementar la resolución angular se pierden las orientaciones de los detalles pequeños de la imagen. Por tanto, podemos concluir que la elección de la longitud

del EE lineal es una fase crucial en el proceso de estimación de orientaciones múltiples y debe adecuarse al tipo y tamaño de la imagen.

La elección de los parámetros para el proceso de regularización ( $\eta$  y número de iteraciones) determinará cómo se extiende la información de la orientación más allá de las estructuras e la imagen.

Por otro lado, el elevado volumen de información de orientaciones múltiples proporcionado por el método, siendo este proporcional a la longitud del EE, presenta un reto para el diseño de nuevas aplicaciones. Un ejemplo de este problema se describe en el método de detección de bifurcaciones y cruces descrito en el Anexo B, donde fue preciso discernir cuantas orientaciones predominantes se tendrían en cuenta para el método de estimación.

### 5.2. Líneas futuras

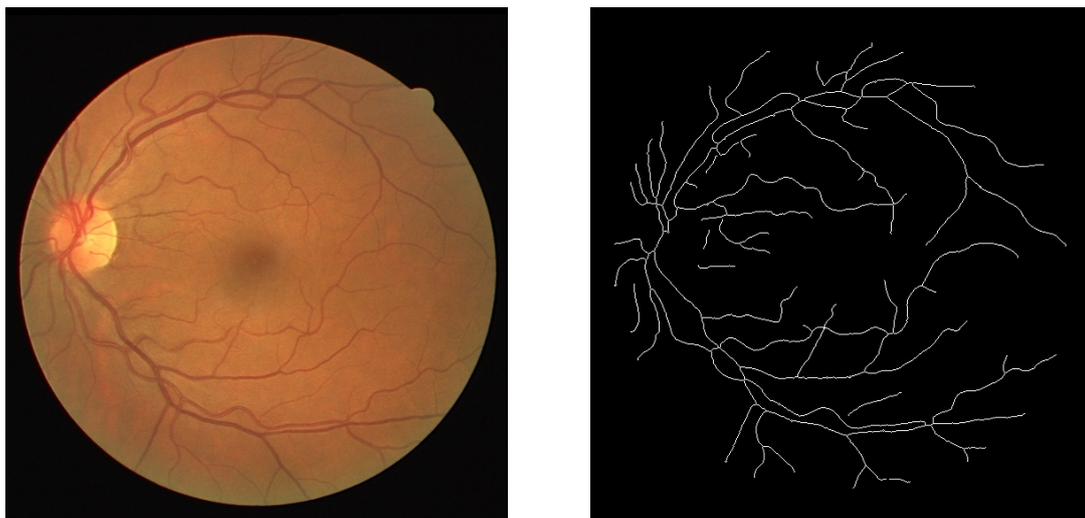
Actualmente se está trabajando en aplicar el método de estimación de orientaciones múltiples junto con los filtros morfológicos para unir las discontinuidades en las estructuras de la imagen donde aparezca más de una orientación principal. El objetivo final es encontrar una aplicación que sea capaz de mejorar la segmentación de imágenes de la retina del ojo humano. Las imágenes segmentadas sobre las que se van a trabajar han sido proporcionada por el Instituto Interuniversitario de Investigación en Bioingeniería y Tecnología Orientada al Ser Humano (I3BH) de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV).

El proceso será el siguiente: primero se estiman las orientaciones múltiples con la imagen original del ojo en escala de grises. La información obtenida será utilizada para aplicar cierres morfológicos variantes en el espacio que unan las discontinuidades en la estructura de la imagen segmentada.

Por otro lado, también se están realizando pruebas de filtrado variante en el espacio con imágenes que presentan bifurcaciones o cruces y comparando las prestaciones de este método respecto a métodos de estimación de orientación simple como ASGVF o LST.

Otra posible línea de investigación interesante consiste en realizar una aproximación multi-escala capaz de utilizar el residuo producido tras la aplicación del banco de aperturas direccionales para estimar la orientaciones de los elementos de la imagen que no son lo suficientemente grandes como para estar contenidos en las primeras aperturas direccionales.

Por último es interesante realizar una comparativa respecto a los principales métodos de estimación de orientaciones múltiples para determinar las ventajas y desventajas de este método



(a)

(b)

**Figura 5.1.:** (a) Imagen original, (b) imagen segmentada

respecto a los otros métodos.



---

## Introducción a la Morfología Matemática

---

Como ya se ha mencionado, es interesante que antes de explicar del algoritmo diseñado, se presenten unos conceptos previos de morfología matemática. Una explicación más detallada sobre la morfología matemática se pueden encontrar en gran cantidad de textos, tanto monografías o artículos, sobre procesado de imágenes, como pueden ser [9] y [15]. Así como libros especializados en morfología matemática como lo son [33] y [11], donde se pueden encontrar explicaciones en mayor detalle, especialmente si se está interesado en la formulación matemática de esta. Por otro lado existe una continua publicación de nuevos trabajos sobre morfología matemática para nuevas aplicaciones [41].

Es interesante reseñar que la morfología matemática recibe su nombre debido a que se basa en el estudio y análisis de las formas de las estructuras espaciales[11]. Fue desarrollada por Matheron [25] y Serra [32], los cuales introdujeron los principios matemáticos en 1975 y 1982, respectivamente, para su aplicación en el procesado de imágenes. Los conceptos de morfología matemática eran ya conocidos y utilizados en el mundo industrial, aún así, no fue hasta la llegada de Matheron y Serra cuando recibieron una formulación matemática adecuada al procesado de señales, el uso de los operadores morfológicos tienden a simplificar los datos de la imagen preservando sus estructuras esenciales y eliminando los datos irrelevantes.

Tras esta contextualización, se van a presentar los conceptos básicos, como son el elemento estructurante, las operaciones matemáticas básicas de teoría de conjuntos en las que están basados

los operadores morfológicos y por último las operaciones morfológicas básicas.

### A.0.1. Elemento Estructurante

El elemento estructurante (EE) es en la mayoría de los casos un pequeño conjunto que se emplea para sondear la imagen bajo estudio. Este conjunto es el que determinará la zona donde se aplica la operación morfológica. La forma del elemento estructurante determinará como se aplicará el operador morfológico en cuestión. Lo que hace que la elección del elemento estructurante sea un punto crítico del diseño.

Dependiendo de la forma del elemento estructurante tendrá asociado unos parámetros determinados, a continuación se presentan los dos elementos estructurantes más utilizados:

- Elemento estructurante tipo disco: Este fue el primer elemento estructurante utilizado, en las primeras aplicaciones se trataba de un elemento 3x3. En la actualidad el radio del disco es el parámetro que lo define:

$$SE = B^r. \quad (\text{A.1})$$

- Elemento estructurante lineal: Tiene asociado dos parámetros, longitud y orientación:

$$SE = L^{\theta,l}. \quad (\text{A.2})$$

### A.0.2. Unión e Intersección

Una vez definido el elemento estructurante que condicionará la zona de aplicación de los operadores morfológicos, el siguiente paso es explicar en que operadores matemáticos están basado los operadores morfológicos. El conjunto de operadores básicos para morfología sobre imágenes binarias están basados en teoría de conjuntos y son la unión  $\cup$  y la intersección  $\cap$ . En las imágenes en escalas de grises la unión se transforma en el operador máximo  $\vee$  de los dos conjuntos y la intersección se transforma en el operador mínimo entre los dos conjuntos  $\wedge$ .

La definición matemática de la unión por tanto quedará como:

$$(f \vee g) = \text{máx} [f(x), g(x)]. \quad (\text{A.3})$$

La definición matemática de la intersección quedará como:

$$(f \wedge g) = \text{mín} [f(x), g(x)]. \quad (\text{A.4})$$

---

Estos serán los operadores que darán lugar a las operaciones morfológicas básicas, la erosión y la dilatación.

Otro operador básico es el complemento. El complemento de una imagen  $f$ , se denota como  $f^c$ , y se define en cada píxel  $\mathbf{x}$  como el valor máximo del tipo de datos utilizado para almacenar la imagen (por ejemplo, en el tipo de datos de 8 bits es 255), menos el valor de la imagen  $f$  en la posición  $\mathbf{x}$ :

$$f^c(\mathbf{x}) = t_{max} - f(\mathbf{x}). \quad (\text{A.5})$$

El operador complemento se denota como  $C : C(f) = f^c$ .

Existen otros tipos de operadores matemáticos que también serán importantes para la morfología matemática, puede consultar en cualquiera de los libros descritos al comienzo de la sección si se quiere profundizar en el tema. Estas operaciones son la diferencia entre conjuntos  $X \setminus Y = X \cap Y^c$  y la transposición  $B^V = \{-\mathbf{b} | \mathbf{b} \in B\}$ .

A continuación se definen otras propiedades que presentan los operadores morfológicos.

**Idempotencia:** Es la propiedad de realizar la misma operación varias veces y conseguir el mismo resultado, es decir la transformación  $\Psi$  es idempotente si al aplicarla dos veces sobre una imagen, es equivalente a aplicarla una vez:

$$\Psi, \text{ idempotente} \Leftrightarrow \Psi\Psi = \Psi. \quad (\text{A.6})$$

**Extensiva:** Una transformación  $\Psi$  es extensiva si ésta es mayor o igual a la identidad transformada  $I$ :

$$\Psi, \text{ extensiva} \Leftrightarrow I \leq \Psi. \quad (\text{A.7})$$

**Antiextensiva:** Una transformación  $\Psi$  es antiextensiva si esta es menor o igual a la identidad transformada  $I$ :

$$\Psi, \text{ antiextensiva} \Leftrightarrow I \geq \Psi. \quad (\text{A.8})$$

**Dual:** Dos transformaciones  $\Psi$  y  $\Phi$  son duales si al aplicar  $\Psi$  a una imagen es igual que aplicar  $\Phi$  al complemento de esta.

$$\Psi \text{ y } \Phi, \text{ duales} \Leftrightarrow \Psi = C\Phi. \quad (\text{A.9})$$

**Autodualidad:** Una transformación  $\Psi$  es autodual si el complemento del complemento de la transformación es igual a la transformación:

$$\Psi \text{ autodual} \Leftrightarrow \Psi = C\Psi C. \quad (\text{A.10})$$

### A.0.3. Dilatación y Erosión

#### Dilatación:

La dilatación produce un engrosamiento de los bordes de los objetos claros que forman la imagen, permitiendo un aumento en el contorno de los mismos para unir líneas discontinuas entre estos, fruto de, por ejemplo, algún filtrado. Para llevar a cabo esta transformación, se realiza un solapamiento de una máscara sobre todos los píxeles de la imagen original; si algunos de los elementos del entorno del píxel analizado son iguales que los de la máscara, dicho píxel se fija a 1.

En morfología matemática se define la dilatación de una imagen binaria como la dilatación del conjunto  $X$  por un elemento estructurante  $B$  como  $\delta_B(x)$ . En imágenes binarias se consideran blancos los píxeles a uno y negros los píxeles a cero. Este operador define la combinación de dos conjuntos por medio de la adición vectorial de los elementos del conjunto:

$$\delta_B(x) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}. \quad (\text{A.11})$$

La Figura A.1 muestra la dilatación de un conjunto  $X$  por un elemento estructurante y el resultado de la dilatación.

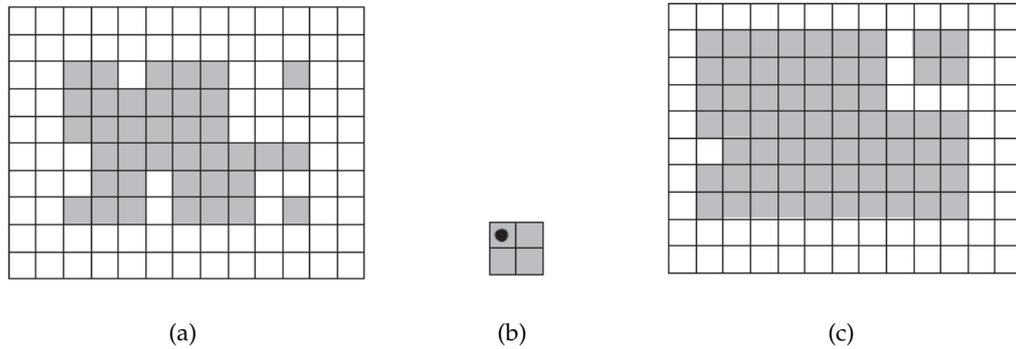
La definición de la dilatación en binario puede ser extendida directamente a escala de grises siendo denotada la dilatación de una imagen  $f$  por un elemento estructurante  $B$  como  $\delta_B(f)$  y definida como el máximo de la traslación de  $f$  por el vector  $-b$  de  $B$ :

$$\delta_B(f) = \bigvee_{b \in B} \{f(x - b)\}. \quad (\text{A.12})$$

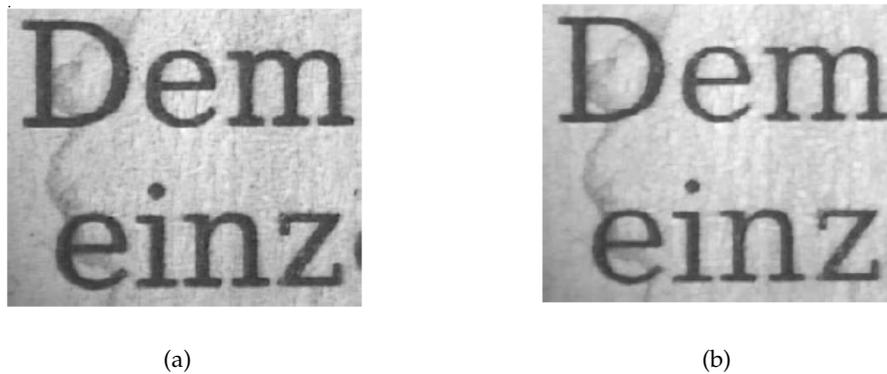
En otras palabras, el valor dilatado en el píxel  $x$  es el máximo valor de la imagen en la ventana definida por el elemento estructurante cuando el origen está en  $x$ . En la Figura A.2 puede observarse el resultado de la dilatación en una imagen en escala de grises.

#### Erosión:

La erosión es una técnica que permite la reducción (de los contornos) de los objetos claros que forman la imagen, permitiendo la separación de los mismos, o incluso su eliminación si su tamaño es menor que el EE. Para ello se realiza un solapamiento secuencial de una máscara, determinada por el elemento estructurante, sobre todos los píxeles que forman la imagen. Cuando el píxel analizado no tenga un entorno exactamente igual que el elemento estructurante (máscara) empleado, dicho píxel se fija a 0.



**Figura A.1.:** (a) Conjunto original, (b) elemento estructurante, (c) dilatación del conjunto. Imágenes extraídas de [11].



**Figura A.2.:** (a) Imagen original, (b) dilatación de la imagen. Imágenes extraídas de [11].

La erosión es el operador morfológico dual a la dilatación, la erosión de un conjunto  $X$  con un elemento estructurante  $B$  se denota como  $\varepsilon_B(x)$ . Su definición para conjuntos binarios es:

$$\varepsilon_B(x) = \bigcap_{\mathbf{b} \in B} X_{-\mathbf{b}}. \quad (\text{A.13})$$

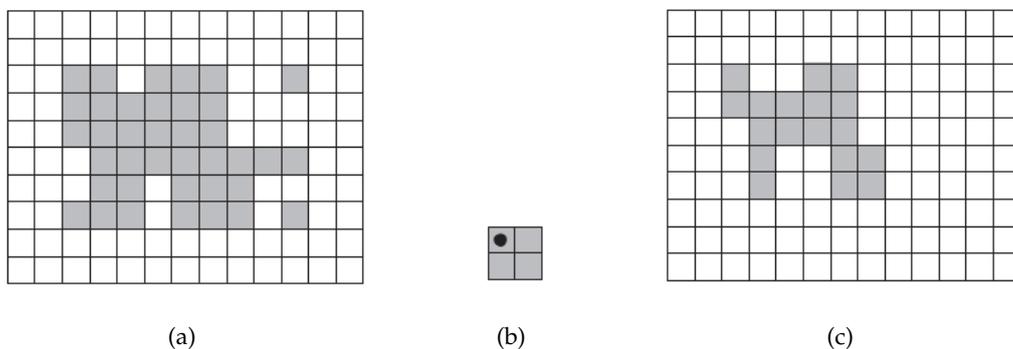
En la Figura A.3 se muestra la erosión de un conjunto  $X$  por un elemento estructurante.

La extensión de binario a escala de grises es la siguiente: la erosión de una imagen  $f$  por un elemento estructurante  $B$  se denota por  $\varepsilon_B(f)$  y es definido como el mínimo de la traslación de  $f$  por el vector  $-\mathbf{b}$  de  $B$ :

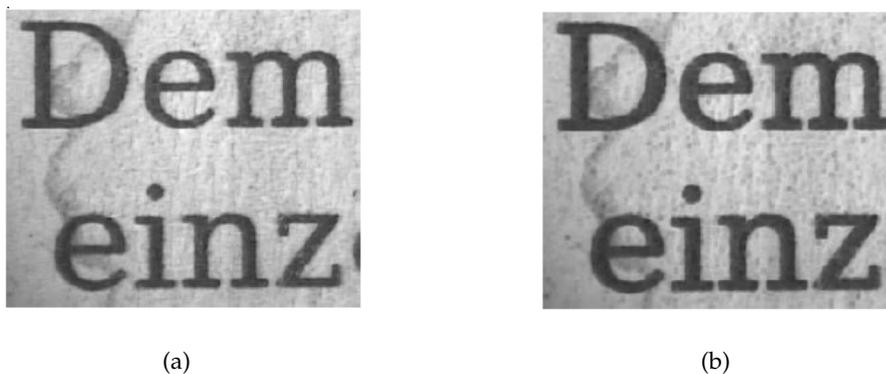
$$\varepsilon_B(f) = \bigwedge_{\mathbf{b} \in B} \{f(\mathbf{x} + \mathbf{b})\}. \quad (\text{A.14})$$

En otras palabras el valor erosionado en el pixel  $\mathbf{x}$  es el mínimo valor de la imagen en la ventana definida por el elemento estructurante cuando su origen está en  $\mathbf{x}$ .

En la Figura A.4 se muestra el resultado de la erosión sobre una imagen en escala de grises.



**Figura A.3.:** (a) Conjunto original, (b) elemento estructurante, el punto define el origen de coordenadas y (c) erosión del conjunto. Imágenes extraídas de [11].



**Figura A.4.:** (a) Imagen original, (b) erosión de la imagen. Imágenes extraídas de [11].

#### A.0.4. Apertura y Cierre

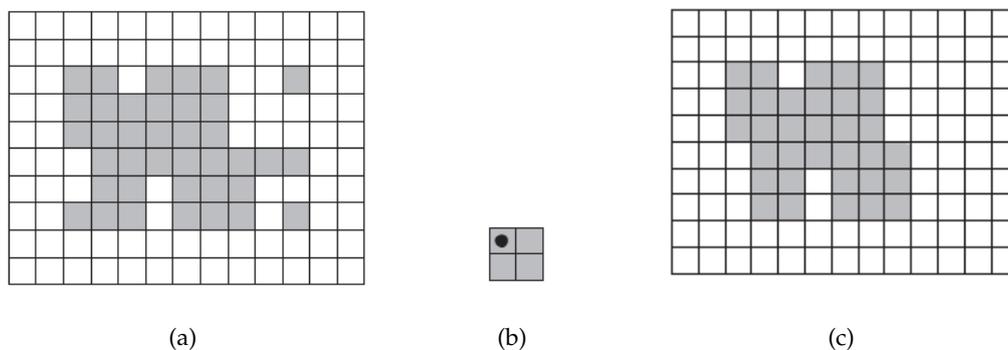
##### Apertura:

Una vez que una imagen ha sido erosionada, existe generalmente una transformación para devolver, en la medida de sus posibilidades, la imagen original, esta es la dilatación. La dilatación de una erosión, también conocida como apertura resulta de gran interés ya que devuelve la imagen original pero eliminando los picos brillantes de menor tamaño que el elemento estructurante. En otras palabras los elementos menores que el elemento estructurante son eliminados. Con ello se consigue un efecto de alisado de contornos, descomposición de objetos en elementos más simples y extracción de formas en entornos con ruido.

La apertura  $\gamma$  por un elemento estructurante  $B$  se denota por  $\gamma_B$  y se define como la erosión por  $B$  seguida de la dilatación con el elemento estructurante traspuesto  $B^V$ .

$$\gamma_B(\mathbf{x}) = \delta_B [\varepsilon_B(f)](\mathbf{x}). \quad (\text{A.15})$$

En la Figura A.5 puede observarse el resultado de la operación morfológica de dilatación sobre un conjunto y el la Figura A.6 sobre una imagen en escala de grises.

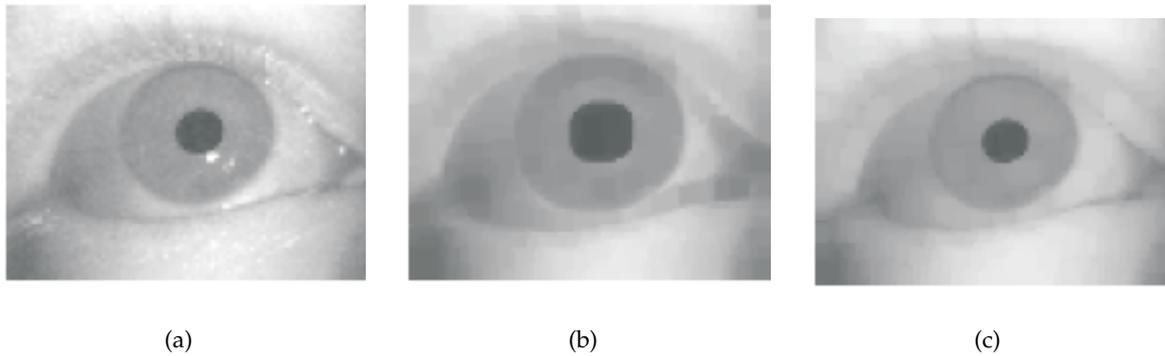


**Figura A.5.:** (a) Conjunto original, (b) Elemento estructurante, (c) Apertura del conjunto. Imágenes extraídas de [11].

##### Cierre:

Esta es la operación resultante de aplicar sobre una imagen, primero una dilatación y, posteriormente, una erosión con el mismo elemento estructurante. Los efectos que se consiguen sobre la imagen original son, entre otros, alisar porciones del contorno, fusionar estrechas grietas o rellenar pequeños agujeros.

El cierre con un elemento estructurante  $B$  se denota por  $\Phi_B$  y se define como la dilatación con un elemento estructurante  $B$  seguido de la erosión con el elemento estructurante  $B$  transpues-

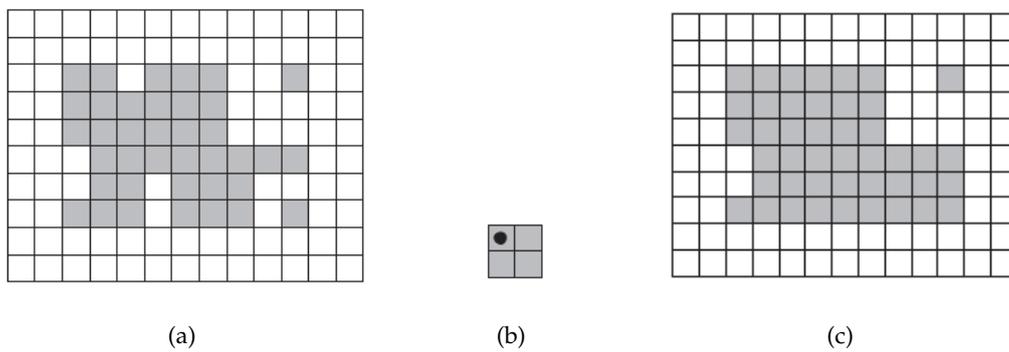


**Figura A.6.:** (a) Imagen original, (b) Imagen original erosionada, (c) Apertura de la imagen original. Imágenes extraídas de [11].

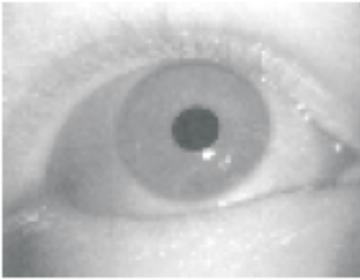
to.

$$\Phi_B(\mathbf{x}) = \varepsilon_B [\delta_B(f)] (\mathbf{x}). \quad (\text{A.16})$$

En la Figura A.7 puede observarse el resultado de la operación morfológica de cierre sobre un conjunto y el la Figura A.8 sobre una imagen en escala de grises.



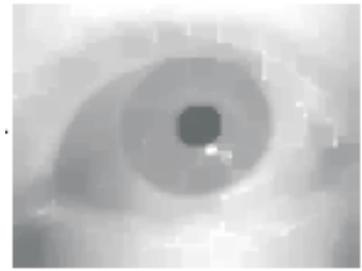
**Figura A.7.:** (a) Conjunto original, (b) elemento estructurante, (c) cierre del conjunto. Imágenes extraídas de [11].



(a)



(b)



(c)

**Figura A.8.:** (a) Imagen original, (b) imagen original dilatada, (c) cierre de la imagen original. Imágenes extraídas de [11].



---

### Método de detección de bifurcaciones y cruces

---

El algoritmo creado para la detección de las bifurcaciones constará de tres bloques fundamentales.

- El primer bloque se encarga de la estimación de las orientaciones múltiples, para ello se emplea el método descrito en el presente trabajo. La imagen puede ser en escala de grises o binaria. Aún así la mayoría de los métodos de detección de bifurcaciones y cruces usan imágenes segmentadas y por tanto binarias.
- El bloque de detección usa la información de las orientaciones presentes en cada píxel, para a partir de ésta, detectar las bifurcaciones y cruces. Solo se tendrán en cuenta las dos orientaciones más significativas de cada píxel, esto se debe a que con dos orientaciones ya es posible detectar tanto bifurcaciones como cruces. Es necesario tener en cuenta dos condiciones para la detección de las bifurcaciones y los cruces.

La primera condición será que la magnitud de las aperturas regularizadas sea mayor a un umbral,  $|\tilde{\mathbf{g}}_{\theta_i}| > \gamma$ . Con este parámetro se consigue acotar la zona sobre la que se va a estudiar las bifurcaciones y cruces. Con un valor elevado del parámetro, las zonas estarán muy próximas a las estructuras de la imagen, ya que en las zonas próximas a las estructuras se consigue el mayor valor de las aperturas direccionales regularizadas. Con valores pequeños del umbral abarcará una zona más extensa desde las estructuras de la imagen.

La segunda condición es que la diferencia entre los ángulos de las dos orientaciones sea superior a  $2\Delta\theta$  para no confundir las orientaciones múltiples de las bifurcaciones y los cruces con las orientaciones múltiples que presentan las curvaturas de las venas presentes en la retina. El valor de  $2\Delta\theta$  ha sido elegido tras realizar diferentes pruebas, siendo éste el que mejor resultados producía.

- El tercer bloque se encarga de presentar los resultados obtenidos, para ello se realizarán operaciones morfológicas para marcar las zonas donde se encuentran las bifurcaciones y los cruces como zonas de interés.

### B.0.5. Pseudocódigo

A continuación se muestra el pseudocódigo que describe el algoritmo.

```
for i=1:anchoImagen do
  for j=1:largoImagen do
    Carga las dos orientaciones más significativas de cada pixel,  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ 
    if  $|\tilde{g}_{\theta_2}| > \gamma$  then
       $Dif = |\theta_1 - \theta_2|$ 
      if  $Dif > 2\Delta\theta$  then
        Existe bifurcación o cruce en el píxel x
        Se marca a 1,  $f(x) = 1$ 
      else
        No existe bifurcación, puede ser la curvatura de la vena, en el píxel x
        Se marca a 0,  $f(x) = 0$ 
      end if
    end if
  end for
end for
```

## APÉNDICE C

---

### Publicaciones

---

- Á.G.Legaz, M.C. Bastida, R.M. Menchón, R. Verdú, J. Morales, "Análisis en bloques de imagen para la estimación de orientaciones múltiples usando aperturas direccionales y b-splines", Jornada de Introducción a la Investigación de la UPCT , vol. 6, pp. 136-138, April 2013
- R. Berenguer-Vidal, R. Verdú-Monedero, R.M. Menchón-Lara, Á.G Legaz-Aparicio, " Comparison of Finite Difference and B-Spline Deformable Models in Characterization of 3D Data", 5th International Work-Conference on the Interplay between Natural and Artificial Computation (IWINAC 2013), Mallorca, Balearic Islands (Spain), June 2013
- Álvaro-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sánchez, Jorge Larrey-Ruiz, Jesús Angulo, "Detection of Retinal Vessel Bifurcations by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings", 13th Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing, September 2013



---

## Bibliografía

---

- [1] Andrés Almansa and Tony Lindeberg. Fingerprint enhancement by shape adaptation of scale-space operators with automatic scale selection. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(12):2027–2042, 2000.
- [2] Jesús Angulo, Rafael Verdú-Monedero, and Juan Morales-Sánchez. Multiscale local multiple orientation estimation using Mathematical Morphology and B-spline interpolation. *Proc. of 7th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pages 575 – 578, 2011.
- [3] Asker M. Bazen and Sabih H. Gerez. Systematic methods for the computation of the directional fields and singular points of fingerprints. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24(7):905–919, 2002.
- [4] J. Bigün, G.H. Granlund, and J. Wiklund. Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 13(8):775–790, 1991.
- [5] L. Cammoun, C. A. Castano-Moraga, E. Munoz-Moreno, D. Sosa-Cabrera, B. Acar, M. A. Rodriguez-Florido, A. Brun, H. Knutsson, and J. P. Thiran. A review of tensors and tensor signal processing. In S. Aja-Fernandez, R. de Luis Garcia, D. Tao, and X. Li, editors, *Tensors in Image Processing and Computer Vision*, pages 1–32. Springer, 2009. ISBN 978-1-84882-298-6.
- [6] Raffaele Cappelli, Alessandra Lumini, Dario Maio, and Davide Maltoni. Fingerprint classification by directional image partitioning. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 21(5):402–421,

May 1999.

- [7] Xiaoguang Feng and Peyman Milanfar. Multiscale principal components analysis for image local orientation estimation. In *Proceedings of the 36th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 478–482, 2002.
- [8] G.H. Granlund and H. Knutsson. *Signal Processing for Computer Vision*. Springer, 2010.
- [9] R. M. Haralick, S. R. Sternberg, and X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 9(4):532–550, April 1987.
- [10] Berthold K. P. Horn and Brian G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 1981.
- [11] B. Jähne, H. Haussecker, and P. Geissler. *Computer Vision and Applications*. Handbook of Computer Vision and Applications. Academic Press, 1999.
- [12] Anil Jain, Lin Hong, Sharath Pankanti, and Ruud Bolle. An identity authentication system using fingerprints, 1997.
- [13] Anil Jain, Salil Prabhakar, and Lin Hong. A multichannel approach to fingerprint classification. *IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE*, 21:348–359, 1999.
- [14] D. Jeulin and M. Kurdy. Directional mathematical morphology for oriented image restoration and segmentation. *Acta Stereologica*, 11:545–550, 1992.
- [15] Bernd Jähne, Horst Haussecker, and Pierre Soille. *Computer Vision and Application*. Springer-Verlag, 2000.
- [16] Xudong Jiang. On orientation and anisotropy estimation for online fingerprint authentication. *Trans. Sig. Proc.*, 53(10):4038–4049, October 2005.
- [17] Xudong Jiang, Wee Ser, and Senior Member. Online fingerprint template improvement. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24:1121–1126, 2002.
- [18] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *Int. J. of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [19] Michael Kass and Andrew Witkin. Analyzing oriented patterns. *Comput. Vision Graph. Image*

- Process.*, 37(3):362–385, 1987.
- [20] H. Knutsson. Representing local structure using tensors. *Proc. of the 6th Scandinavian Conference of Image Analysis*, pages 244–251, 1989.
- [21] Landström and Thurley. Adaptive morphology using tensor-based elliptical structuring elements. *Pattern Recognition Letter*, 2013.
- [22] Jorge Larrey-Ruiz, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sánchez, and Jesús Angulo. Frequency domain regularization of d-dimensional structure tensor-based directional fields. *Image Vision Comput.*, 29(9):620–630, August 2011.
- [23] Dario Maio and Davide Maltoni. Direct gray-scale minutiae detection in fingerprints. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 27–40, 1997.
- [24] K.V. Mardia and P.E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2009.
- [25] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [26] Matthias Mühlich and Til Aach. Analysis of multiple orientations. *IEEE Trans. Image Processing*, 18(7):1424–1437, July 2009.
- [27] K Nakayama and J M Loomis. Optical velocity patterns, velocity-sensitive neurons, and space perception: a hypothesis. *Perception*, 3(1):63–80, 1974.
- [28] Cheong Hee Park and Haesun Park. Fingerprint classification using fast fourier transform and nonlinear discriminant analysis. *Pattern Recogn.*, 38(4):495–503, April 2005.
- [29] P. Perona. Orientation diffusions. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3):457–467, 1998.
- [30] Pietro Perona. Deformable kernels for early vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17:488–499, 1991.
- [31] Bernd Rieger and Lucas J. Van Vliet. A systematic approach to nd orientation representation. *Image Vis. Comput.*, 22:453–459, 2004.
- [32] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume I. Academic Press, London, 1982.

- [33] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, volume II. Academic Press, London, 1988.
- [34] P. Soille and H. Talbot. Directional morphological filtering. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11):1313–1329, 2001.
- [35] Pierre Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, 1999.
- [36] J. Staal, M.D. Abramoff, M. Niemeijer, M.A. Viergever, and B. van Ginneken. Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(4):501–509, 2004.
- [37] Nicolaj C. Stache, Thomas H. Stehle, Matthias Mühlich, and Til Aach. Towards multiple-orientation based tensor invariants for object tracking. In F. Gini, editor, *European Signal Processing Conference, Firenze, September 4-8 2006*. EURASIP.
- [38] P. Thévenaz, T. Blu, and M. Unser. Interpolation revisited. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 19(7):739–758, July 2000.
- [39] R. Verdú-Monedero, J. Angulo, J. Larrey-Ruiz, and J. Morales-Sánchez. Comparison of orientated and spatially variant morphological filters vs mean/median filters for adaptive image denoising. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, pages 113 – 116, 2010.
- [40] Rafael Verdú-Monedero and Jesús Angulo. Spatially-variant directional mathematical morphology operators based on a diffused average squared gradient field. *Lecture Notes in Computer Science: Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, 5259:542–553, 2008.
- [41] Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, and Jean Serra. Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields. *IEEE Trans. Image Processing*, 20(1):200–212, January 2011.