

Proyecto Fin de Carrera
Arquitectura Técnica.



Metodología de cálculo de redes topográficas



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Alumna: María Abellán García
Director: Juan José Martínez García
Fecha: Septiembre 2013

ÍNDICE

1. Fundamentos teóricos del ajuste de redes topográficas.

1.1. Principio de los mínimos cuadrados.	
1.1.1. Principio de los mínimos cuadrados.....	1
1.1.2. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de igual precisión. Modelo lineal.....	6
1.1.3. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de distinta precisión. Modelo lineal.....	9
1.1.4. Ecuaciones no lineales.....	11
1.1.5. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de igual precisión. Modelo no lineal.....	13
1.1.6. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de distinta precisión. Modelo no lineal.....	14
1.1.7. Desviación estándar de referencia a priori.....	15
1.1.8. Ley general de propagación de la varianza.....	16
1.1.9. Propagación de la varianza en el ajuste por ecuaciones de observación. Modelo lineal.....	17
1.1.10. Propagación de la varianza en el ajuste por ecuaciones de observación. Modelo no lineal.....	20
1.1.11. Bondad del ajuste. Test global χ^2	21
1.1.12. Detección de errores groseros. Test τ (tau) de Pope.....	24
1.1.13. Matriz de redundancia.....	27
1.1.14. Ajuste por mínimos cuadrados con restricciones. Método general.....	29
1.1.15. Ajuste por mínimos cuadrados con restricciones. Método Helmert.....	33
1.1.16. Propagación de la varianza en el ajuste por mínimos cuadrados con restricciones.....	36
1.2. Nociones de estadística.	
1.2.1. Teoría de errores relacionado con observaciones topográficas.....	39
1.2.2. Medidas de precisión.....	47
1.2.3. La distribución normal.....	50
1.2.4. El concepto de peso de una observación.....	54
1.2.5. Matrices de covarianza, cofactor y pesos.....	55
1.2.6. Propagación de la media y la varianza.....	61

2. Aplicación de los métodos de nivelación.

2.1. Instrumentos.	
2.1.1. Nivel óptico.....	65
2.1.2. Nivel digital o electrónico.....	69
2.2. Fundamentos de nivelación.	
2.2.1. Definiciones.....	70
2.2.2. Fundamento de la determinación del desnivel.....	71
2.2.3. Nivelación con 3 hilos.....	72
2.2.4. Método de nivelación del punto medio.....	73
2.2.5. Nivelación geométrica compuesta.....	76
2.2.6. Errores aleatorios en la nivelación geométrica.....	79
2.2.7. Redes de nivelación.....	81
2.2.8. Ecuación básica de observación del desnivel.....	83
2.2.9. Peso de las observaciones en la nivelación geométrica.....	84

3. Ajuste de redes de nivelación.

3.1. Ajuste de redes de nivelación.....	87
3.2. Redes de nivelación con restricciones.....	87

4. Aplicación a los métodos planimétricos.

4.1. Características de instrumentos.	
4.1.1. Ángulos que se consideran en topografía.....	89
4.1.2. Elementos básicos que definen la medida de un ángulo.....	89
4.1.3. Generalidades.....	91
4.1.4. Tipos de distancias.....	91
4.1.5. Instrumentos que integran la medición de ángulos y distancias.....	92
4.1.6. Estación total.....	93
4.1.7. Taquimetría. Fundamento y fórmulas taquimétricas.....	95
4.1.8. Errores en la medida de direcciones y ángulos horizontales.....	98
4.1.9. Errores en la medida de ángulos verticales.....	103
4.1.10. Errores en la medida de distancias.....	103

5. Ajuste de redes planimétricas.

5.1. Trilateración.	
5.1.1. Ecuación básica de la distancia horizontal.....	104
5.1.2. Fin de la iteración.....	108
5.2. Ajuste de un levantamiento por trilateración.....	109
5.3. Formulación de la matriz de coeficientes generalizada.....	112
5.4. Triangulación.....	113
5.4.1. Ecuación básica de observación del acimut de una alineación.....	114
5.4.2. Ecuación básica de la dirección horizontal de una alineación.....	116
5.4.3. Ecuación básica del ángulo horizontal definido por dos alineaciones.....	119
5.5. Taquimetría.	
5.5.1. Ecuación básica de observación del ángulo cenital.....	123
5.5.2. Ecuación básica de observación de la distancia geométrica.....	127

6. Elipses y elipsoides de error.

6.1. Elipses de error.	
6.1.1. Cálculo de los semiejes y orientación de la elipse estándar de error, mediante álgebra matricial.....	130
6.1.2. Cálculo de la elipse de error asociada a distintos niveles de probabilidad.....	133
6.2. Elipsoides de error.	
6.2.1. Elipsoides de error.....	136
6.2.2. Cálculo del elipsoide de error asociado a distintos niveles de probabilidad...	140

7. Ejemplos de cálculo de redes topográficas.....143

1. Fundamentos teóricos del ajuste de redes topográficas.

1.1. Principio de los mínimos cuadrados.

1.1.1. Principio de los mínimos cuadrados.

a) Observaciones de igual precisión.

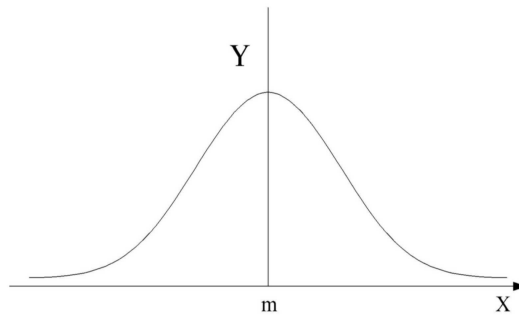
Consideramos una magnitud topográfica x (variable aleatoria), que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, cuya función densidad de probabilidad es,

$$y=f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad (1.1)$$

siendo μ la media de la distribución y σ la desviación estándar, parámetros de la distribución.

Supongamos que, de esa magnitud, se realizan n mediciones independientes con la misma precisión y obtenemos los valores x_1, x_2, \dots, x_n . Sea m el valor más probable de esa magnitud. Podemos definir los residuos como la diferencia entre las cantidades obtenidas en las mediciones y el valor más probable m .

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1 - m \\ r_2 &= x_2 - m \\ &\vdots \\ r_n &= x_n - m \end{aligned} \quad (1.2)$$

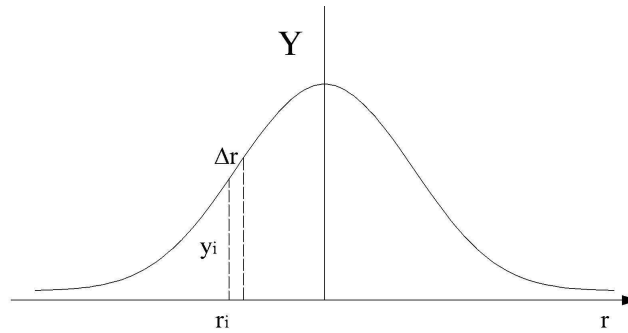


Si se supone, igualmente, que estos residuos siguen una ley normal y llamamos $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, tendremos que la función densidad de probabilidad es,

$$y = f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 r^2} = k e^{-h^2 r^2} \quad (1.3)$$

siendo $k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

La probabilidad se representa como el área bajo la curva de distribución normal. De ahí, que la probabilidad de que ocurra un determinado residuo se obtiene multiplicando la ordenada respectiva por un incremento infinitesimal Δr .



Por tanto,

$$\begin{aligned} P(r_1) &= y(r_1) \Delta r = k e^{-h^2 r_1^2} \Delta r \\ P(r_2) &= y(r_2) \Delta r = k e^{-h^2 r_2^2} \Delta r \\ &\vdots \\ P(r_n) &= y(r_n) \Delta r = k e^{-h^2 r_n^2} \Delta r \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por otro lado, la probabilidad P de que ocurran simultáneamente todos los residuos r_1, r_2, \dots, r_n es el producto de las probabilidades individuales,

$$P = (k e^{-h^2 r_1^2} \Delta r) (k e^{-h^2 r_2^2} \Delta r) \dots (k e^{-h^2 r_n^2} \Delta r) \quad (1.5)$$

que agrupando términos queda de la forma,

$$P = k^n (\Delta r)^n e^{-h^2(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)} \quad (1.6)$$

m es el valor de mayor probabilidad de la variable aleatoria, por ello el valor de P debe ser maximizado. Para que esto ocurra, y debido al signo negativo del exponente, es necesario minimizar la suma $(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)$, es decir, hay que minimizar la suma de los cuadrados de los residuos.

$$\sum r_i^2 = (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.7)$$

condición de Legendre, que expresa el principio fundamental de los mínimos cuadrados.

La condición anterior puede expresarse de la forma

$$\sum r_i^2 = (x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2 = \sum (x_i - m)^2 \quad (1.8)$$

Si tomamos la derivada de esta expresión respecto a m , y la igualamos a cero, tendremos

$$\frac{\partial(\sum r_i^2)}{\partial m} = 0 = 2(x_1 - m)(-1) + 2(x_2 - m)(-1) + \dots + 2(x_n - m)(-1) \quad (1.9)$$

agrupando

$$\begin{aligned} x_1 - m + x_2 - m + \dots + x_n - m &= 0 \\ nm &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ m &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Esta última expresión indica que el valor más probable de una magnitud que ha sido medida varias veces independientemente, es la media aritmética.

b) Observaciones de distinta precisión.

El caso más general del ajuste por mínimos cuadrados tiene en cuenta que las observaciones puedan tener diferente precisión y, por tanto, diferentes pesos.

Supongamos que una magnitud topográfica x que sigue una distribución normal. Y de la cual hemos realizado un grupo de medidas de pesos relativos p_1, p_2, \dots, p_n y que han originado unos residuos r_1, r_2, \dots, r_n , respectivamente. Sea m el valor más probable ponderado. Al igual que antes, los residuos están relacionados con las observaciones

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1 - m \\ r_2 &= x_2 - m \\ &\vdots \\ r_n &= x_n - m \end{aligned} \quad (1.11)$$

y la probabilidad total de que ocurran simultáneamente todos los residuos es

$$P = k^n (\Delta r)^n e^{-h^2(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)} \quad (1.12)$$

Como $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, al ser los pesos inversamente proporcionales a las varianzas son, por tanto, directamente proporcionales a h^2 , pudiendo escribir la ecuación anterior como

$$P = k^n (\Delta r)^n e^{-(p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2 + \dots + p_n r_n^2)} \quad (1.13)$$

Para maximizar esta probabilidad hemos de minimizar el exponente. Es decir, la suma de los productos de los pesos por sus respectivos residuos al cuadrado, debe ser mínima.

La condición del ajuste por mínimos cuadrados ponderados es

$$\sum p_i r_i^2 = p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2 + \dots + p_n r_n^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.14)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de los residuos, tendremos

$$\sum p_i r_i^2 = p_1(x_1 - m)^2 + p_2(x_2 - m)^2 + \dots + p_n(x_n - m)^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.15)$$

La condición de mínimo se establece derivando la ecuación anterior respecto a **m**, e igualando a cero.

$$\frac{\partial(\sum p_i r_i^2)}{\partial m} = 0 = 2p_1(x_1 - m)(-1) + 2p_2(x_2 - m)(-1) + \dots + 2p_n(x_n - m)(-1) \quad (1.16)$$

que agrupando términos queda en

$$p_1(x_1 - m) + p_2(x_2 - m) + \dots + p_n(x_n - m) = \sum p_i(x_i - m) = 0 \quad (1.17)$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum p_i x_i &= \sum p_i m \\ \sum p_i x_i &= m \sum p_i \\ m &= \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Esta última expresión resulta ser la media aritmética ponderada.

Así pues, podemos pronunciar el Principio de Legendre, base del Método de los Mínimos Cuadrados como:

“dado un conjunto finito de medidas x_i , del mismo peso (o de pesos p_i), de una magnitud X , se considera como valor más probable de esta, a la cantidad que hace mínima la expresión $\sum r_i^2$ (o la expresión $\sum p_i r_i^2$)”.

Finalmente se define el Ajuste por Mínimos Cuadrados como la resolución de un modelo matemático donde tenemos mayor número de ecuaciones que de incógnitas, al cual hay que aplicar la condición de minimización cuadrática a los errores cometidos en el proceso de observación.

1.1.2. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de igual precisión. Modelo lineal.

Supongamos que a partir de una serie de observaciones (mediciones) topográficas realizadas con la misma instrumentación y en las mismas condiciones, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales de observación, en su forma más general,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + r_1 &= d_1 + \ell_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + r_2 &= d_2 + \ell_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + r_m &= d_m + \ell_m \end{aligned} \quad (1.19)$$

existiendo \mathbf{m} ecuaciones (igual al número de observaciones), \mathbf{n} incógnitas (igual al número mínimo de observaciones necesarias para resolver el modelo) y $\mathbf{m} > \mathbf{n}$.

Expresando el sistema en forma matricial,

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{r} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\ell} \quad (1.20)$$

siendo,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_{\mathbf{n} \times \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_{\mathbf{m} \times \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}; \quad (1.21)$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{m} \times \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{m} \times \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}$$

A: matriz de los coeficientes de las incógnitas.

x: vector de incógnitas.

r: vector de residuos.

d, **ℓ**: vectores del término independiente.

Si llamamos $\mathbf{f} = \mathbf{d} + \mathbf{l}$, tendremos

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (1.22)$$

La solución mínimos cuadrados, minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, $\sum r_i^2 \rightarrow \text{mínimo}$. Expresando esta condición en forma matricial.

$$\mathbf{r}^t \mathbf{r} \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.23)$$

El valor mínimo de esta expresión se obtiene tomando la derivada parcial de la forma cuadrática $\mathbf{r}^t \mathbf{r}$ respecto de \mathbf{x} , e igualando a cero.

$$\frac{\partial(\mathbf{r}^t \mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{r}^t \frac{\partial(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}^t \quad (1.24)$$

Pero $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}$, de donde,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{f} - \mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A} \quad (1.25)$$

sustituyendo, tendremos

$$-2\mathbf{r}^t \mathbf{A} = \mathbf{0}^t \quad (1.26)$$

dividiendo por -2, quedará

$$\mathbf{r}^t \mathbf{A} = \mathbf{0}^t \quad (1.27)$$

transponiendo ambos términos

$$\mathbf{A}^t \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.28)$$

Como $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ax}$

$$\mathbf{A}^t (\mathbf{Ax} - \mathbf{f}) = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{Ax} - \mathbf{A}^t \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{A}^t \mathbf{f} \\ \mathbf{N} \mathbf{x} &= \mathbf{t} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Las ecuaciones de expresión anterior se conocen con el nombre de **ecuaciones normales**, puesto que se trata de un sistema de **n** ecuaciones con **n** incógnitas, siendo **N** la matriz de los coeficientes de las ecuaciones normales, matriz simétrica no singular,

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}^t \mathbf{f} \quad (1.31)$$

Multiplicando ambos miembros por $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{A}) \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{f} \quad (1.32)$$

obteniéndose finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{f} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (1.33)$$

que representa el vector solución al sistema de ecuaciones inicial.

Tras este cálculo, podríamos determinar los residuos del ajuste mediante,

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1.34)$$

Si consideramos el sistema inicial (1.20) reagrupado,

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{l} - \mathbf{r} \quad (1.35)$$

podemos llamar

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{r} \quad (1.36)$$

vector que contiene las observaciones ajustadas.

1.1.3. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación, para observaciones de distinta precisión. Modelo lineal.

Supongamos que a partir de una serie de mediciones topográficas podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones de observación

$$\begin{aligned} p_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + r_1) &= p_1(d_1 + \ell_1) \\ p_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + r_2) &= p_2(d_2 + \ell_2) \\ &\vdots \\ p_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + r_m) &= p_m(d_m + \ell_m) \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde las cantidades p_i corresponden a los pesos de cada observación, existiendo m ecuaciones (igual al número de observaciones) y n incógnitas (igual al número mínimo de observaciones necesarias para resolver el modelo), y $m > n$.

Expresándolo en forma matricial

$$\mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{d} + \boldsymbol{\ell}) \quad (1.38)$$

Si llamamos $\mathbf{f} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\ell}$, el sistema queda de la forma,

$$\mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{r}) = \mathbf{Pf} \quad (1.39)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{m \times m} &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{pmatrix}; \mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \mathbf{x}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}_{m \times 1} &= \begin{pmatrix} d_1 + \ell_1 \\ d_2 + \ell_2 \\ \vdots \\ d_m + \ell_m \end{pmatrix}; \mathbf{r}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.40)$$

La solución mínimos cuadrados minimiza la suma de los productos de los

pesos por los residuos al cuadrado, $\sum (p_i r_i)^2 \rightarrow \text{mínimo}$. En forma matricial sería, $\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r} \rightarrow \text{mínimo}$. Esta condición se consigue tomando la derivada parcial de la forma cuadrática $\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r}$ respecto de \mathbf{x} , e igualándola a cero.

$$\frac{\partial(\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}^t = 2 \mathbf{r}^t \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.41)$$

pero $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x}$, luego

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A} \quad (1.42)$$

sustituyendo

$$-2 \mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{0}^t \quad (1.43)$$

Dividiendo por -2 y transponiendo

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P}^t \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.44)$$

Como $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x}$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P}^t (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P}^t \mathbf{f} - \mathbf{A}^t \mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Al ser \mathbf{P} una matriz diagonal, se cumple que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^t$, entonces

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{t}$$

expresión que corresponde a las **ecuaciones normales**, siendo $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$ la matriz de los coeficientes de las ecuaciones normales, matriz simétrica no singular y $\mathbf{t} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f}$.

Multiplicando ambos miembros por $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ tendremos

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}$$

que es la solución del sistema inicial (1.37).

De igual forma, tras este cálculo, podríamos determinar los residuos del ajuste mediante,

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.48)$$

y el vector

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{r} \quad (1.49)$$

de las observaciones ajustadas.

Si suponemos que todas las observaciones tienen igual peso, la matriz \mathbf{P} se convierte en la matriz identidad \mathbf{I} , y la solución sería

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{f} \quad (1.50)$$

que coincide con la deducida anteriormente para observaciones de igual peso, (1.33).

1.1.4. Ecuaciones no lineales.

En determinados trabajos topográficos se realizan ciertas observaciones que conducen a ecuaciones no lineales. Tal es el caso de la medida de ángulos y distancias. Para poder abordar el ajuste de estas observaciones por el método de los mínimos cuadrados y poder resolver un sistema de ecuaciones no lineales, es necesario proceder a su linealización mediante el desarrollo en serie de Taylor de primer orden.

Consideremos la siguiente ecuación que relaciona un valor observado l con dos parámetros incógnitas \mathbf{x} e \mathbf{y} , mediante una función f no lineal,

$$l = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.51)$$

Si aplicamos el teorema de Taylor, podemos aproximar la función f mediante su desarrollo en serie,

$$\begin{aligned} \ell = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_0 dy \right) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_0 dx^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_0 dy^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_0 dx dy \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.52)$$

donde x_0, y_0 son valores iniciales aproximados de \mathbf{x}, \mathbf{y} ; $f(x_0, y_0)$ es el valor de la función no lineal evaluada para esos valores iniciales y dx, dy son las correcciones a los valores iniciales aproximados tal que,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + dx \\ y &= y_0 + dy \end{aligned} \quad (1.53)$$

Cuanto mayor sea el valor de n mejor es la aproximación que se obtiene de la función, aunque la significación de estos términos va disminuyendo. Si despreciamos los términos correspondientes a las derivadas superiores al primer orden, obtenemos la siguiente expresión lineal que aproxima la función f ,

$$\ell \approx f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_0 dy \quad (1.54)$$

Una vez que se eligen o disponemos de unas aproximaciones iniciales x_0, y_0 , las únicas incógnitas de la ecuación (1.54) son las correcciones dx, dy . Es claro que despreciar los términos de orden superior supone obtener solo una aproximación a la ecuación original. Sin embargo, para su resolución se puede aplicar un procedimiento iterativo que nos conduzca a soluciones de mayor precisión en cada iteración. Este procedimiento consiste en:

1. Determinar unas aproximaciones iniciales de las incógnitas. Esto se puede conseguir a partir de un determinado grupo de observaciones. Cuanto más próximos sean los valores iniciales a los valores finales, el cálculo iterativo se realizará con mayor rapidez de convergencia.
2. Sustituir las aproximaciones iniciales de las incógnitas en la ecuación (1.54) y resolver los valores dx, dy .
3. Calcular unas nuevas aproximaciones aplicando las expresiones de la ecuación

(1.53),

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + dx_i \\ y_{i+1} &= y_i + dy_i\end{aligned}\tag{1.55}$$

4. Usando estas nuevas aproximaciones repetir los pasos 2 y 3.
5. Continuar el procedimiento hasta que las correcciones dx , dy sean lo suficientemente pequeñas como para obtener x e y con la precisión requerida. Cuando esto ocurra decimos que la solución converge.

1.1.5. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación para observaciones de igual precisión. Modelo no lineal.

Supongamos que en un proyecto topográfico se realizan un conjunto de observaciones que se vinculan con las incógnitas a calcular a través de funciones no lineales, dando lugar al siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned}F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + r_1 &= \ell_1 - \ell_1^0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + r_2 &= \ell_2 - \ell_2^0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) + r_m &= \ell_m - \ell_m^0\end{aligned}\tag{1.56}$$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor hasta el primer orden, podemos linealizar cada una de las ecuaciones anteriores.

Este sistema linealizado puede ser escrito matricialmente de la forma,

$$\begin{aligned}\mathbf{Jx} + \mathbf{r} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{k} &= \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}^0\end{aligned}\tag{1.57}$$

donde \mathbf{J} representa la matriz jacobiana (matriz de las derivadas parciales) que contiene los coeficientes de las ecuaciones de observación linealizadas, siendo dichas matrices

$$\mathbf{J}_{\text{mxn}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \mathbf{x}_{\text{nx1}} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\text{mx1}} = \ell - \ell^0 = \begin{pmatrix} \ell_1 - F_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \ell_2 - F_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \vdots \\ \ell_m - F_m(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{pmatrix}; \mathbf{r}_{\text{mx1}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$
(1.58)

El vector \mathbf{x} de correcciones, correspondiente a la solución mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones de observación de igual precisión es,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{J}^t \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{k} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{k}$$
(1.59)

siendo $\mathbf{N} = \mathbf{J}^t \mathbf{J}$ la matriz de las ecuaciones normales.

1.1.6. Solución matricial al problema de ajuste por ecuaciones de observación para observaciones de distinta precisión. Modelo no lineal.

Para observaciones de distinta precisión, el sistema es de la forma

$$\mathbf{P}(\mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \mathbf{P}\mathbf{k}$$
(1.60)

cuya solución es

$$\mathbf{x} = (\mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{k} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{k}$$
(1.61)

siendo \mathbf{P} la matriz diagonal de los pesos de las observaciones y $\mathbf{N} = \mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{J}$ la matriz de las ecuaciones normales.

De igual forma, tras estos cálculos, podríamos determinar los residuos del ajuste mediante,

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} - \mathbf{J}\mathbf{x} \quad (1.62)$$

y el vector

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{r} \quad (1.63)$$

de las observaciones ajustadas.

1.1.7. Desviación estándar de referencia a posteriori.

La desviación estándar para un grupo de observaciones ponderadas es

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i r_i^2}{n-1}} \quad (1.64)$$

Esta ecuación se aplica a un grupo de observaciones de una magnitud simple o individual, donde cada observación tiene un peso diferente. Sin embargo, en Topografía se realizan observaciones que relacionan varios parámetros a través de ecuaciones. Para este tipo de observaciones, la desviación estándar en el caso de pesos iguales es

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum r_i^2}{m-n}} \quad (1.65)$$

que en forma matricial es,

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{r}^t \mathbf{r}}{m-n}} \quad (1.66)$$

En esta ecuación, $\sum r_i^2$ se expresa en forma matricial como $\mathbf{r}^t \mathbf{r}$, m es el número de observaciones y n el número de incógnitas. El valor $m-n$ corresponde a las medidas redundantes y representa los grados de libertad del ajuste.

La desviación estándar para el caso de observaciones con pesos diferentes es,

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum p_i r_i^2}{m-n}} \quad (1.67)$$

y en forma matricial,

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r}}{m-n}} \quad (1.68)$$

donde $\sum p_i r_i^2$ en forma matricial es $\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r}$.

Como estas desviaciones estándar se refieren al ajuste global y no a una cantidad simple, se les denomina desviaciones estándar de referencia calculadas a posteriori.

1.1.8. Ley general de propagación de la varianza.

Más adelante estudiaremos la propagación de la varianza en el apartado 1.2.6. Vamos ahora a aplicarla al ajuste por ecuaciones de observación definido en la ecuación (1.20).

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{r} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\ell} \quad (1.69)$$

En este modelo, \mathbf{r} es el vector de los residuos, \mathbf{x} es el vector de parámetros incógnitas, \mathbf{A} es la matriz de coeficientes numéricos y \mathbf{f} un vector columna compuesto por

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\ell} \quad (1.70)$$

donde $\boldsymbol{\ell}$ es el vector de observaciones y \mathbf{d} es un vector de constantes numéricas. Asociado al vector $\boldsymbol{\ell}$ de observaciones, existe su matriz covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\ell}}$, así como la matriz cofactor $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\ell}}$ y la matriz de pesos $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\ell}}$ que es su inversa. Para estudiar la propagación de la varianza en la solución mínimos cuadrados, es más cómodo trabajar con las matrices cofactor.

También, por comodidad, vamos a quitar el subíndice $\boldsymbol{\ell}$ de las matrices $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\ell}}$ y $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\ell}}$, es decir, para el vector $\boldsymbol{\ell}$ de observaciones, \mathbf{Q} representa su matriz cofactor y \mathbf{P} (inversa de \mathbf{Q}) representa la matriz de pesos.

Por tanto, para la función lineal $y=Ax+c$, la ley de propagación de cofactores es

$$Q_y = A Q_x A^t \quad (1.71)$$

Expresando la ecuación (1.70) en la forma $y=Ax+c$

$$f = I\ell + d \quad (1.72)$$

siendo I la matriz identidad, y aplicando la ley de propagación de cofactores a esta ecuación, de tendrá que

$$Q_f = I Q I^t = Q \quad (1.73)$$

luego la matriz cofactor de ℓ es también la matriz cofactor de f .

1.1.9. Propagación de la varianza en el ajuste por ecuaciones de observación. Modelo lineal.

A continuación vamos a estudiar la propagación de la varianza en el ajuste para observaciones de distinta precisión según el modelo lineal, recordando que para observaciones de igual precisión $P=I$, ecuación (1.39).

$$P(Ax + r) = Pf \quad (1.74)$$

Los pasos a seguir para el análisis de la propagación de la varianza pasarían por establecer previamente las siguientes matrices

$$N = A^t P A \quad (1.75)$$

$$t = A^t P f \quad (1.76)$$

$$x = N^{-1} t \quad (1.77)$$

$$r = f - Ax \quad (1.78)$$

$$\hat{\ell} = \ell - r \quad (1.79)$$

Si expresamos las ecuaciones (1.76) a (1.79) de la forma $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}+\mathbf{c}$, tendremos

$$\mathbf{t}=(\mathbf{A}^t\mathbf{P})\mathbf{f} \quad (1.80)$$

$$\mathbf{x}=(\mathbf{N}^{-1})\mathbf{t} \quad (1.81)$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{f}-\mathbf{Ax}=\mathbf{f}-\mathbf{AN}^{-1}\mathbf{t}=\mathbf{f}-\mathbf{AN}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{f}=(\mathbf{I}-\mathbf{AN}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{P})\mathbf{f} \quad (1.82)$$

$$\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{t}-\mathbf{r}=\mathbf{t}-\mathbf{f}+\mathbf{Ax}=(\mathbf{A})\mathbf{x}-\mathbf{d} \quad (1.83)$$

donde, en cada caso, la expresión entre paréntesis representa la matriz \mathbf{A} de la expresión $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{c}$.

Si aplicamos la ecuación (1.71), ley de propagación de los cofactores, tendremos

$$\mathbf{Q}_t=(\mathbf{A}^t\mathbf{P})\mathbf{Q}_f(\mathbf{A}^t\mathbf{P})^t=\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{Q}_f\mathbf{P}^t\mathbf{A} \quad (1.84)$$

pero según (1.73), $\mathbf{Q}_f=\mathbf{Q}=\mathbf{P}^{-1}$, y de ahí $\mathbf{Q}_f\mathbf{P}^t=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}^t$. Pero como $\mathbf{P}^t=\mathbf{P}$ por ser \mathbf{P} una matriz diagonal, tenemos que

$$\mathbf{Q}_f\mathbf{P}^t=\mathbf{I} \quad (1.85)$$

y

$$\mathbf{Q}_t=\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A}=\mathbf{N} \quad (1.86)$$

Por otro lado,

$$\mathbf{Q}_x=(\mathbf{N}^{-1})\mathbf{Q}_t(\mathbf{N}^{-1})^t=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N}^{-1})^t=\mathbf{I}(\mathbf{N}^{-1})^t=(\mathbf{N}^{-1})^t=\mathbf{N}^{-1} \quad (1.87)$$

recordando que si una matriz \mathbf{N} es simétrica, su inversa \mathbf{N}^{-1} también es simétrica y se cumple que $(\mathbf{N}^{-1})^t=\mathbf{N}^{-1}$.

Además

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_r &= (\mathbf{I} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}) \mathbf{Q}_f (\mathbf{I} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P})^t = \\
 &= (\mathbf{IQ} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{PQ}) (\mathbf{I} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P})^t = \\
 &= (\mathbf{IQ} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{PQ}) (\mathbf{I}^t - \mathbf{P}^t \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^t \mathbf{A}^t) = \\
 &= \mathbf{IQI}^t - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{PQI}^t - \mathbf{IQP}^t \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^t \mathbf{A}^t + \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{PQP}^t \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^t \mathbf{A}^t = \\
 &= \mathbf{Q} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t - \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^t \mathbf{A}^t + \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^t \mathbf{A}^t = \mathbf{Q} - \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

resultando que

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q} - \mathbf{QN}^{-1} \mathbf{A}^t \tag{1.89}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{PQ} = \mathbf{I}$, $\mathbf{QP}^t = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^t \mathbf{PA} = \mathbf{N}$ y $(\mathbf{N}^{-1})^t = \mathbf{N}^{-1}$.

La matriz cofactor de las observaciones ajustadas será

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{f}}} = \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^t = \mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t \tag{1.90}$$

pero según la ecuación (1.89)

$$\mathbf{AN}^{-1} \mathbf{A}^t = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_r \tag{1.91}$$

quedará finalmente que,

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{f}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_r \tag{1.92}$$

Por último, las matrices de covarianza de \mathbf{x} , \mathbf{r} y $\hat{\mathbf{f}}$ se obtienen multiplicando las correspondientes matrices cofactor por la varianza de referencia σ_0^2 , o en su caso por el estimador s_0^2 calculado a posteriori.

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_x \tag{1.93}$$

$$\Sigma_{\mathbf{r}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_r \tag{1.94}$$

$$\Sigma_{\hat{t}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{t}} \quad (1.95)$$

1.1.10. Propagación de la varianza en el ajuste por ecuaciones de observación. Modelo no lineal.

En el caso del ajuste para observaciones de distinta precisión según un modelo no lineal, ecuación (1.60),

$$P(Jx + r) = Pk \quad (1.96)$$

se obtienen las mismas expresiones, teniendo en cuenta que

$$N = J^t P J \quad (1.97)$$

$$t = J^t P J \quad (1.98)$$

Por tanto,

$$Q_x = N^{-1} \quad (1.99)$$

$$Q_r = Q - JN^{-1}J^t \quad (1.100)$$

$$Q_{\hat{t}} = JN^{-1}J^t = Q - Q_r \quad (1.101)$$

y las correspondientes matrices de covarianza calculadas según las expresiones (1.93), (1.94) y (1.95).

A partir de las matrices de covarianzas anteriores, tanto en el modelo lineal como en el no lineal, se puede obtener la desviación estándar de cada una de las incógnitas, residuos y observaciones ajustadas, mediante las expresiones

$$\sigma_{x_i} = \pm \sigma_0 \sqrt{q_{x_{ii}}} \quad (1.102)$$

$$\sigma_{r_i} = \pm \sigma_0 \sqrt{q_{r_{ii}}} \quad (1.103)$$

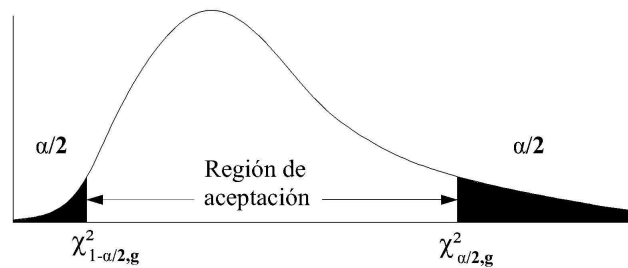
$$\sigma_{\hat{\ell}_i} = \pm \sigma_0 \sqrt{q_{\hat{\ell}_{ii}}} \quad (1.104)$$

donde el subíndice ii representa el elemento de la diagonal principal, correspondiente a la i-ésima fila y a la i-ésima columna de la matriz en cuestión.

1.1.11. Bondad del ajuste. Test global χ^2 .

Al finalizar el ajuste por mínimos cuadrados, es necesario validar estadísticamente la varianza de referencia calculada a posteriori, s_0^2 . A esta comprobación se le denomina test de bondad del ajuste, dado que el cálculo de s_0^2 está basado en el cálculo de $\sum r_i^2$. El test determina si el histograma de los residuos es compatible con una función densidad de probabilidad que siga una distribución normal. Si los residuos son grandes, también lo será la varianza de referencia calculada y el modelo calculado se desviará más de los valores observados. Sin embargo, el tamaño de los residuos no es el único factor que contribuye al tamaño de la varianza de referencia calculada en un ajuste ponderado. El modelo estocástico juega un importante papel en esta variable. Así, cuando el test de bondad de ajuste indica que la hipótesis nula debe ser rechazada, puede ser debido a la presencia de un error grosero en los datos o a la mala elección del operador al seleccionar el modelo estocástico para el ajuste.

Como indicaremos en el apartado de estadística 1.2.4., el valor establecido a priori para la varianza de referencia es la unidad. El test de bondad del ajuste compara el valor calculado a posteriori para la varianza de referencia con su valor a priori, mediante el test χ^2 de dos colas (figura). Como puede observarse, si el valor χ^2 calculado está comprendido entre las dos colas de la distribución el test falla contra el rechazo de la hipótesis nula, H_0 . Entonces, debería considerarse como valor σ_0^2 la unidad, para todos los cálculos posteriores al ajuste, puesto que el valor calculado a posteriori es solo una estimación del valor admitido a priori.



La variable e,

$$e = g \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \quad (1.105)$$

sigue una distribución χ^2 con g grados de libertad. Podemos plantear, entonces, el siguiente contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} \text{Hipótesis nula} &\rightarrow H_0: s_0^2 = \sigma_0^2 \\ \text{Hipótesis alternativa} &\rightarrow H_0: s_0^2 \neq \sigma_0^2 \end{aligned}$$

Para un nivel de significación α y un número g de grados de libertad (observaciones redundantes), si se cumple que

$$\chi^2_{1-\alpha/2, g} \leq g \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha/2, g} \quad (1.106)$$

se debe aceptar la hipótesis nula, es decir, la varianza de referencia s_0^2 , calculada a posteriori es un buen estimador de la varianza de referencia a priori, σ_0^2 , valor igual a la unidad. Podremos decir también que esta afirmación es cierta con una probabilidad del $100(1-\alpha)\%$. Valores habituales para el nivel de significación α son 0.10, 0.05 y 0.01, siendo el más frecuente en el ámbito del ajuste de observaciones topográficas el valor 0.05.

Si el test global falla, es necesario investigar el tamaño de los residuos mediante obras técnicas. En este caso, podrían verificarse múltiples opciones como hipótesis alternativas, siendo las dos más importantes las siguientes,

$$Ha_1 = \text{los pesos de las observaciones son incorrectos.}$$

H_{a_2} = existen errores groseros en las observaciones.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.68) y $\mathbf{P}_\ell = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}_\ell^{-1}$, el estadístico de la ecuación (1.105) puede expresarse como

$$e = g \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = \mathbf{r}^t \frac{\mathbf{P}}{\sigma_0^2} \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{r} \quad (1.107)$$

que como puede observarse es inversamente proporcional a la matriz de covarianza de las observaciones. Una sobreestimación de los errores aleatorios de las observaciones (es decir, asumir que las observaciones son menos precisas que en la situación actual) conducirá a un valor más pequeño del estadístico, que caerá por debajo del límite inferior establecido por la ecuación (1.106). Por otro lado, una subestimación de los errores aleatorios de las observaciones (es decir, asumir que las observaciones son más precisas que en la situación actual) conducirá a un valor muy grande del estadístico, que excederá del límite superior establecido por la ecuación (1.106). Ambas situaciones provocarán que la hipótesis nula sea rechazada.

Reordenando la ecuación (1.105) como

$$s_0^2 = \frac{e}{g} \sigma_0^2 \quad (1.108)$$

Así, en el caso de que los errores de las observaciones sean sobreestimados, la varianza de referencia a posteriori resultante s_0^2 será mucho más pequeña que el factor de varianza a priori σ_0^2 y viceversa.

El rechazo de la hipótesis nula causada por una estimación incorrecta de los errores aleatorios de las observaciones es fácil de reconocer, puesto que en este caso los residuos siguen ajustándose a una distribución normal de media cero, sin que se produzcan residuos de tamaño excesivo. Por tanto, si el test global de bondad de ajuste muestra que el factor de varianza a priori σ_0^2 , y la magnitud de los residuos es razonablemente pequeña en comparación con la precisión de los instrumentos utilizados, tenemos razones para creer que la precisión de las observaciones no es correcta y que se debería reconstruir la matriz de covarianza de las observaciones $\boldsymbol{\Sigma}_\ell$, o la correspondiente matriz de pesos \mathbf{P}_ℓ .

En la práctica, es usual modificar la matriz Σ_{ℓ} escalándola con el factor de varianza calculado a posteriori,

$$\tilde{\Sigma}_{\ell} = s_0^2 \Sigma_{\ell} \quad (1.109)$$

y realizar un nuevo ajuste que conduzca a aceptar la hipótesis nula H_0 .

Por otro lado, si el test global falla y algunos de los residuos tienen un tamaño excesivo, debería considerarse investigar la hipótesis alternativa H_{a2} y examinar la presencia o no de errores groseros en las observaciones. Esto se realiza mediante el test de Pope, (The Statistics of Residuals and Detection of Outliers, NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, Rockville, MD).

1.1.12. Detección de errores groseros. Test τ (tau) de Pope.

Hasta este momento hemos supuesto que los datos tomados en campo no contienen errores groseros. Sin embargo, cuando se ajustan observaciones reales los datos de campo rara vez están exentos de dichos errores. No todos los errores groseros son grandes, pero aunque no importe su tamaño es deseable eliminarlos del grupo de observaciones.

Como se a comentado anteriormente, las observaciones se distribuyen normalmente. Esto significa que, ocasionalmente, podrían producirse errores aleatorios de gran tamaño. Sin embargo, de acuerdo con la teoría, esto debería ocurrir con muy poca frecuencia. Así, es más probable que los grandes errores que aparecen en las observaciones sean errores groseros que errores aleatorios. Errores groseros muy comunes son la transposición de números al anotar los datos de campo, identificación errónea de puntos, etc. Cuando en las observaciones existen errores groseros, el ajuste por mínimos cuadrados es de mala calidad y produce resultados erróneos no válidos. Para tener mayor seguridad, los resultados de un ajuste nunca deberían considerarse válidos sin realizar el correspondiente análisis estadístico con posterioridad al ajuste.

Como hemos comentado en el apartado 1.1.11, con posterioridad al ajuste se realiza el test χ^2 de bondad del ajuste para contrastar el valor de la varianza de referencia a priori con su estimación a posteriori. Sin embargo, este test no es un buen indicador de la presencia de errores groseros porque es muy sensible frente a una mala elección de los pesos de las observaciones. Por ello, si el test χ^2 falla, es

necesario analizar la magnitud de los residuos que se originan tras el ajuste y comprobar si algunos son de gran tamaño tras la aplicación de algún criterio estadístico. En este caso, habría que utilizar en los cálculos el valor de la varianza de referencia calculada a posteriori, s_0^2 . Si no aparecen residuos de gran tamaño, se podrían modificar los pesos de las observaciones y volver a realizar el ajuste. Como este test es muy sensible a los pesos, es necesario tener en cuenta el instrumental utilizado y los errores que se pueden producir en el proceso de medición.

Además del tamaño de los residuos, el signo de los mismos puede ser un buen indicador de la presencia de errores groseros en las observaciones. De la teoría de probabilidad sabemos que los residuos son de tamaño muy pequeño y se distribuyen aleatoriamente. Si todos los residuos son del mismo signo podemos deducir que no siguen una distribución normal y que es posible la existencia de algún error grosero o sistemático en todo o parte del levantamiento topográfico. Por ejemplo, si existen dos puntos de control cuyas coordenadas son fijas, parte del problema podría estar en una discrepancia entre las mismas. Esta situación se puede detectar y aislar realizando un ajuste con los parámetros mínimos.

Tipo de red	Parámetros mínimos para el ajuste
Nivelación	- Coordenada Z de un punto.
Planimétrica	- Coordenadas X, Y de un punto y el acimut de un segundo punto. - Coordenadas X, Y de dos puntos.
Espacial	- Coordenadas X, Y, Z de un punto. Acimut y ángulo cenital de un segundo punto. Ángulo cenital de un tercer punto. - Coordenadas X, Y, Z de tres puntos.

Aunque el tamaño de los residuos pueda sugerir la presencia de errores en las observaciones, no necesariamente identifican las observaciones que tienen errores groseros. Esto es debido al hecho de que el ajuste por mínimos cuadrados extiende la influencia de un gran error observacional, o error grosero, al resto de observaciones. Por ello, si una observación presenta un residuo muy grande no significa que dicha observación sea la que contiene el error grosero, sino que podría ser otra observación a la que se le haya asignado un peso muy grande.

La ecuación (1.89) establece que el cálculo de la matriz cofactor de los residuos r_i de las observaciones. A partir de ella, se pueden calcular los llamados

residuos estandarizados o residuos normalizados, mediante la expresión

$$\bar{r}_i = \frac{r_i}{\sqrt{q_{r_{ii}}}} \quad (1.110)$$

donde \bar{r}_i es el residuo normalizado, r_i el residuo calculado y $q_{r_{ii}}$ el elemento correspondiente de la diagonal principal de la matriz cofactor Q_r . La presencia de un error grosero en las observaciones afecta al cálculo de s_0 y de s_{r_i} . Como hemos establecido en la ecuación (1.103), la desviación estándar de los residuos es $s_{r_i} = \pm s_0 \sqrt{q_{r_{ii}}}$ considerando, como se ha dicho anteriormente, el valor de la ecuación (1.110) por s_0 tendremos un estadístico

$$\tau_i = \frac{|r_i|}{s_0 \sqrt{q_{r_{ii}}}} = \frac{|r_i|}{s_{r_i}} = \frac{|\bar{r}_i|}{s_0} \quad (1.111)$$

que según Pope, sigue una distribución τ (tau) cuyo valor crítico se calcula mediante la expresión,

$$\tau_{\alpha_0/2, g} = \sqrt{\frac{g t_{\alpha_0/2, g-1}^2}{g-1 + t_{\alpha_0/2, g-1}^2}} \quad (1.112)$$

$$a_0 = 1 - (1 - \alpha)^{1/n} \approx \frac{\alpha}{n} \quad (1.113)$$

donde t representa la distribución t-student para un nivel de significación $\alpha_0/2$, g los grados de libertad del ajuste, α_0 es el nivel de significación para el test individual sobre cada residuo y n es el número de observaciones cuyos valores r_i y σ_{r_i} son diferentes de cero. Utilizando este criterio, una observación será rechazada por contener un error grosero si se cumple que

$$\tau_i = \frac{|\bar{r}_i|}{s_0} > \tau_{\alpha_0/2, g} \quad (1.114)$$

o bien,

$$|\bar{r}_i| > s_0 \tau_{\alpha_0/2, g} \quad (1.115)$$

En esta técnica se admite que solo es posible rechazar las observaciones con errores groseros de una en una. El procedimiento para detectar y eliminar la presencia de errores en las observaciones consistiría en localizar la observación cuyo residuo normalizado cumpla la ecuación (1.115) hasta que no existan observaciones consideradas como errores groseros. A partir de aquí, se vuelven a incorporar al ajuste las observaciones eliminadas, también de una en una, y se va comprobando si nuevamente son detectadas o no como errores groseros al cumplir la ecuación (1.115). Si son consideradas errores groseros por segunda vez, se eliminan definitivamente del ajuste.

1.1.13. Matriz de redundancia.

Al analizar los resultados del ajuste de una red topográfica es necesario controlar, más allá de su precisión, la calidad de la red tomando en consideración el aspecto de la fiabilidad. La fiabilidad de la red se refiere al grado de control de las observaciones sobre la capacidad de detección de la presencia de errores groseros en ellas (fiabilidad interna) y a la posibilidad de estimar los efectos que las observaciones con errores groseros indetectables tienen sobre las coordenadas finales obtenidas en el ajuste (fiabilidad externa). Las observaciones afectadas por la presencia de errores groseros pueden ser detectadas gracias a las medidas redundantes de comprobación.

Según la ecuación (1.48), los residuos de las observaciones tras el ajuste por mínimos cuadrados vienen dados por

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ax} \quad (1.116)$$

Si en esta expresión sustituimos el valor de \mathbf{x} dado por la ecuación (1.47), tendremos que

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{Ax} = \mathbf{f} - \mathbf{A} [(\mathbf{A}^t \mathbf{PA}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{Pf}] = [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{PA})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}] \mathbf{f} = \mathbf{Rf} \quad (1.117)$$

La nueva matriz \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \quad (1.118)$$

se denomina Matriz de Redundancia del ajuste. Por otro lado, si tenemos en cuenta la expresión (1.89), también podemos expresar \mathbf{R} de la forma

$$\mathbf{R} = [\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t] \mathbf{P} = \mathbf{Q}_r \mathbf{P} \quad (1.119)$$

Esta matriz es singular, no tiene inversa, y es idempotente,

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$$

$$0 \leq r_{ii} \leq 1 \quad (1.120)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{R}) = \sum r_{ii} = \text{rang}(\mathbf{R}) = m - n = g \text{ (grados de libertad del ajuste)}$$

Cada elemento,

$$r_{ii} = q_{r_{ii}} p_{ii} \quad (1.121)$$

se denomina Número de Redundancia y es la contribución de la i -ésima observación a los grados de libertad total del ajuste o redundancia de la red. Los números de redundancia nos dan una idea de la rigidez geométrica del ajuste. Un ajuste con números de redundancia pequeños (próximos a 0) es debido a observaciones que carecen de suficientes comprobaciones para aislar los errores groseros y, por tanto, la probabilidad de que existan errores groseros indetectables es alta. Por el contrario, un ajuste con números de redundancia grandes (próximos a 1) permite un alto grado de comprobaciones internas en las observaciones y por ello una menor probabilidad de aceptar errores groseros en las observaciones. Esto quiere decir que la presencia de un error grosero en este tipo de observaciones, se verá más claramente reflejada en su correspondiente residuo y por ello más fácilmente detectable a través del test de Pope, que será más sensible y hará que el número de errores groseros indetectables se reduzca al mínimo. Podemos indicar además que cuando el número de redundancia de una observación $r_{ii} = 0$, el residuo de esta observación también es 0 y la presencia de errores groseros en otras observaciones no afectan al valor de dicho residuo, siendo dichos errores indetectables. Por el contrario, cuando el número de redundancia $r_{ii} = 1$, la observación es totalmente redundante y su residuo es muy sensible a la presencia de errores groseros en estas observaciones, siendo estos fácilmente detectables. Por tanto, la contribución de una observación a la redundancia total del

ajuste está muy relacionada con la cuantía en la que afectará la presencia de errores groseros de otras observaciones al residuo de dicha observación.

El grado de control de las observaciones, según su número de redundancia, se muestra en la siguiente tabla.

Rango r_{ii}	Posibilidad de control
$0 < r_{ii} \leq 0.01$	Sin control
$0.01 < r_{ii} \leq 0.1$	Control bajo
$0.1 < r_{ii} \leq 0.3$	Control bueno
$0.3 < r_{ii} \leq 1.0$	Control excelente

La fiabilidad de una red topográfica depende de su geometría y, por tanto, de la configuración de la matriz de diseño así como de la matriz de los pesos de las observaciones, y no de las observaciones en sí mismo.

Si la redundancia de la red estuviera uniformemente distribuida, todos los números de redundancia serían prácticamente iguales. En general, esto no suele ocurrir, siendo más frecuente la existencia de grandes diferencias entre los números de redundancia de las observaciones en distintas partes de la red, sobre todo si existen diferentes tipos de medidas. Por ello suele también utilizarse, como medida global de la fiabilidad, el cociente g/m, siendo g el número observaciones redundantes del ajuste y m el número de observaciones, que se denomina Redundancia Media de la red o Redundancia Relativa del ajuste. Según Pope, un valor adecuado de este parámetro para redes topográficas convencionales suele ser 0.5.

1.1.14. Ajuste por mínimos cuadrados con restricciones. Método general.

Supongamos que a partir de una serie de mediciones topográficas podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones de observación

$$\begin{aligned}
 p_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + r_1) &= p_1(d_1 + \ell_1) \\
 p_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + r_2) &= p_2(d_2 + \ell_2) \\
 &\vdots \\
 p_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + r_m) &= p_m(d_m + \ell_m)
 \end{aligned}
 \tag{1.122}$$

donde las cantidades p_i corresponden a los pesos de cada observación, existiendo m ecuaciones (igual al número de observaciones) y n incógnitas (igual al número mínimo de observaciones necesarias para resolver el modelo), y $m > n$.

Supongamos también que, debido a unas condiciones previamente establecidas y conocidas, las incógnitas del sistema anterior deben cumplir además las siguientes ecuaciones de restricción

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= \ell'_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= \ell'_2 \\ &\vdots \\ c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \dots + c_{sn}x_n &= \ell'_s \end{aligned} \quad (1.123)$$

siendo s el número de restricciones.

Expresando ambos sistemas en notación matricial,

$$\mathbf{P}(\mathbf{Ax} + \mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{d} + \boldsymbol{\ell}) \quad (1.124)$$

$$\mathbf{Cx} = \boldsymbol{\ell}^* \quad (1.125)$$

La función a minimizar es $\Phi = \sum_{i=1}^m p_i r_i^2 = \mathbf{r}^t \mathbf{Pr}$. Al tratarse de un problema de mínimos condicionados, se debe emplear el método de los multiplicadores de Lagrange.

Redondeando las ecuaciones (1.124) y (1.125),

$$\mathbf{PAx} + \mathbf{Pr} - \mathbf{Pf} = \mathbf{0} \quad (1.126)$$

$$\mathbf{Cx} - \boldsymbol{\ell}^* = \mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones de la expresión (1.126), el valor mínimo de la función Φ es el mismo que el de esta otra función,

$$\Phi^* = \mathbf{r}^t \mathbf{Pr} - 2\mathbf{k}_1^t (\mathbf{PAx} + \mathbf{Pr} - \mathbf{Pf}) - 2\mathbf{k}_2^t (\mathbf{Cx} - \boldsymbol{\ell}^*) \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.127)$$

siendo $\mathbf{k}_1^{(mx1)}$ y $\mathbf{k}_2^{(sx1)}$, vectores columna de los coeficientes llamados multiplicadores de Lagrange, que también son incógnitas del problema.

Derivando la función Φ^* respecto a sus cuatro variables,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{r}} = 2\mathbf{r}^t \mathbf{P} - 2\mathbf{k}_1^t \mathbf{P} = \mathbf{0}_{(1xm)}^t \quad (1.128)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{k}_1^t} = -2(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{r} - \mathbf{P}\mathbf{f}) = \mathbf{0}_{(mx1)} \quad (1.129)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{k}_1^t \mathbf{P}\mathbf{A} - 2\mathbf{k}_2^t \mathbf{C} = \mathbf{0}_{(1xn)}^t \quad (1.130)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{k}_2^t} = -2(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{l}^*) = \mathbf{0}_{(sx1)}^t \quad (1.131)$$

De (1.128),

$$2\mathbf{r}^t \mathbf{P} - 2\mathbf{k}_1^t \mathbf{P} = \mathbf{0}^t \quad (1.132)$$

Dividiendo por 2 y transponiendo,

$$\mathbf{P}^t \mathbf{r} - \mathbf{P}^t \mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \quad (1.133)$$

Al ser $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}$ y multiplicando por -1,

$$-\mathbf{P}\mathbf{r} + \mathbf{P}\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \quad (1.134)$$

De (1.129),

$$\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{r} = \mathbf{P}\mathbf{f} \quad (1.135)$$

que es el sistema de ecuaciones original.

De (1.130),

$$-2\mathbf{k}_1^t \mathbf{P} \mathbf{A} - 2\mathbf{k}_2^t \mathbf{C} = \mathbf{0}^t \quad (1.136)$$

Multiplicando por -1, dividiendo por 2 y transponiendo,

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P}^t \mathbf{k}_1 + \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad (1.137)$$

Al ser $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}$,

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{k}_1 + \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad (1.138)$$

De (1.131),

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{f}^* \quad (1.139)$$

que resulta ser la ecuación de las restricciones.

Agrupando las ecuaciones (1.134), (1.135), (1.138) y (1.139),

$$\begin{aligned} -\mathbf{P} \mathbf{r} + \mathbf{P} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{P} \mathbf{r} &= \mathbf{P} \mathbf{f} \\ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{k}_1 + \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{x} &= \mathbf{f}^* \end{aligned} \quad (1.140)$$

tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que son los vectores columna \mathbf{r} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{x} y \mathbf{k}_2 .

Por tanto, este sistema de cuatro ecuaciones matriciales lo podemos escribir en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P}_{(m \times m)} & \mathbf{P}_{(m \times m)} & \mathbf{0}_{(m \times n)}^t & \mathbf{0}_{(m \times s)}^t \\ \mathbf{P}_{(m \times m)}^t & \mathbf{0}_{(m \times m)} & \mathbf{P}\mathbf{A}_{(m \times n)} & \mathbf{0}_{(m \times s)}^t \\ \mathbf{0}_{(n \times m)} & \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(n \times m)}^t & \mathbf{0}_{(n \times n)} & \mathbf{C}_{(n \times s)}^t \\ \mathbf{0}_{(s \times m)} & \mathbf{0}_{(s \times m)} & \mathbf{C}_{(s \times n)} & \mathbf{0}_{(s \times s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{k}_1_{(m \times 1)} \\ \mathbf{x}_{(n \times 1)} \\ \mathbf{k}_2_{(s \times 1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{P}\mathbf{f}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ \ell^*_{(s \times 1)} \end{pmatrix} \quad (1.141)$$

sistema con $m+m+n+s$ filas y $m+m+n+s$ columnas con $m+m+n+s$ incógnitas. Se trata de un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, cuya matriz de coeficientes también es simétrica y no singular,

$$\mathbf{G}\mathbf{y}=\mathbf{b} \quad (1.142)$$

siendo,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_{(m \times m)} & \mathbf{P}_{(m \times m)} & \mathbf{0}_{(m \times n)}^t & \mathbf{0}_{(m \times s)}^t \\ \mathbf{P}_{(m \times m)}^t & \mathbf{0}_{(m \times m)} & \mathbf{P}\mathbf{A}_{(m \times n)} & \mathbf{0}_{(m \times s)}^t \\ \mathbf{0}_{(n \times m)} & \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{(n \times m)}^t & \mathbf{0}_{(n \times n)} & \mathbf{C}_{(n \times s)}^t \\ \mathbf{0}_{(s \times m)} & \mathbf{0}_{(s \times m)} & \mathbf{C}_{(s \times n)} & \mathbf{0}_{(s \times s)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{k}_1_{(m \times 1)} \\ \mathbf{x}_{(n \times 1)} \\ \mathbf{k}_2_{(s \times 1)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{P}\mathbf{f}_{(m \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(n \times 1)} \\ \ell^*_{(s \times 1)} \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

cuya solución es,

$$\mathbf{y}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b} \quad (1.144)$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{P} & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{P}^t & \mathbf{0} & \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^t \mathbf{P}^t & \mathbf{0} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \ell^* \end{pmatrix} \quad (1.145)$$

1.1.15. Ajuste por mínimos cuadrados con restricciones. Método Helmert.

Dado el elevado número de ecuaciones que genera el procedimiento anterior, vamos a seguir un razonamiento que conduzca a una simplificación y genere un

menor número de ecuaciones. Este método se debe al gran geodesta alemán Friedrich Robert Helmert (1843-1917).

De (1.128),

$$\mathbf{Pr} = \mathbf{Pk}_1 \quad (1.146)$$

De (1.129),

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pf} - \mathbf{Pr} \quad (1.147)$$

y sustituyendo el valor de \mathbf{Pr} en (1.146),

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pf} - \mathbf{Pk}_1 \quad (1.148)$$

$$\mathbf{Pk}_1 = \mathbf{Pf} - \mathbf{PAx} \quad (1.149)$$

De (1.130), sustituyendo el valor \mathbf{Pk}_1 de (1.149),

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{Pf} - \mathbf{PAx}) + \mathbf{C}^t\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad (1.150)$$

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Pf} - \mathbf{A}^t\mathbf{PAx} + \mathbf{C}^t\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad (1.151)$$

y finalmente,

$$\mathbf{A}^t\mathbf{PAx} - \mathbf{C}^t\mathbf{k}_2 = \mathbf{A}^t\mathbf{Pf} \quad (1.152)$$

Esta última expresión, junto con (1.131),

$$\mathbf{A}^t\mathbf{PAx} - \mathbf{C}^t\mathbf{k}_2 = \mathbf{A}^t\mathbf{Pf} \quad (1.153)$$

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{l}^*$$

forman un nuevo sistema de dos ecuaciones matriciales con dos incógnitas, que podemos expresar en notación matricial de la forma $\mathbf{Hx}^* = \mathbf{t}^*$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\ell}^* \end{pmatrix} \quad (1.154)$$

siendo,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}_{(n \times n)} & \mathbf{C}_{(n \times s)}^t \\ \mathbf{C}_{(s \times n)} & \mathbf{0}_{(s \times s)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{(n \times 1)} \\ -\mathbf{k}_{2(s \times 1)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f}_{(n \times 1)} \\ \boldsymbol{\ell}_{(s \times 1)}^* \end{pmatrix} \quad (1.155)$$

donde, como se observa, \mathbf{H} es una matriz cuadrada y simétrica, también no singular. Este nuevo sistema tiene $n+s$ ecuaciones con $n+s$ incógnitas. A la matriz \mathbf{H} se le denomina **matriz de Helmert**.

La solución a este sistema será,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\ell}^* \end{pmatrix} \quad (1.156)$$

Debe observarse que el vector columna de incógnitas de este sistema, \mathbf{x}^* , está formado por el vector columna \mathbf{x} , y por el vector $-\mathbf{k}_2$, del segundo grupo de multiplicadores de Lagrange.

A partir de aquí podríamos calcular los residuos del ajuste,

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1.157)$$

bien entendido que \mathbf{x} debe extraerse de \mathbf{x}^* . De igual forma, calcularemos el vector de observaciones ajustadas,

$$\hat{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell} - \mathbf{r} \quad (1.158)$$

En este caso la varianza de referencia a posteriori se calcula mediante la expresión

$$s_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r}}{m - n + s}} \quad (1.159)$$

1.1.16. Propagación de la varianza en el ajuste por mínimos cuadrados con restricciones.

La ecuación (1.152) podemos expresarla de la forma

$$\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{f} + \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 \quad (1.160)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2$$

de donde,

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 \quad (1.161)$$

Sustituyendo este valor de \mathbf{x} en la ecuación de la restricción (1.125)

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2) = \ell^* \quad (1.162)$$

Desarrollando,

$$\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 = \ell^* \quad (1.163)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{k}_2 = \ell^* - \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}$$

de donde

$$\mathbf{k}_2 = (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} (\ell^* - \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}) \quad (1.164)$$

que sustituyendo en (1.161)

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} (\ell^* - \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}) \quad (1.165)$$

Donde el primer sumando es la solución sin restricciones y claramente el segundo sumando representa la influencia de las restricciones introducidas para los parámetros.

Si llamamos

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \quad (1.166)$$

a la solución sin restricciones, la expresión (1.165) puede ser escrita como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} (\boldsymbol{\ell}^* - \mathbf{C} \mathbf{x}_0) \quad (1.167)$$

y en general de la forma,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \quad (1.168)$$

siendo

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} (\boldsymbol{\ell}^* - \mathbf{C} \mathbf{x}_0) \quad (1.169)$$

Por tanto, la matriz cofactor de \mathbf{x} vendrá dado por,

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_{x_0} + \mathbf{Q}_{\Delta x} \quad (1.170)$$

Como ya sabemos por (1.87), $\mathbf{Q}_{x_0} = \mathbf{N}^{-1}$, y si llamamos

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \quad (1.171)$$

desarrollando (1.167)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} \boldsymbol{\ell}^* - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{x}_0 = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{x}_0 + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\ell}^* \end{aligned} \quad (1.172)$$

expresión de la forma genérica $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c}$, donde la constante \mathbf{c} es

$$\mathbf{c} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\ell}^* \quad (1.173)$$

si aplicamos la ley general de propagación de los cofactores (1.71) a la expresión (1.172) tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C})^t = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1}) \end{aligned} \quad (1.174)$$

al ser \mathbf{M}^{-1} y \mathbf{N}^{-1} matrices simétricas.

Desarrollando la expresión (1.174) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1}) = \\ &= (\mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1}) (\mathbf{I} - \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1}) = \\ &= \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} = \\ &= \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} = \\ &= \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} = \\ &= \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} = \\ &= \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \end{aligned} \quad (1.175)$$

resultando

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t (\mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}^t)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}^{-1} \quad (1.176)$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (1.171).

Si consideramos ahora las ecuaciones (1.78) y (1.79), podemos expresar que,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} - \mathbf{f} + \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{l} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1.177)$$

ecuación de la forma genérica $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c}$, a la que aplicamos la ley general de propagación de cofactores teniendo en cuenta la expresión (1.176)

$$Q_{\hat{t}} = A Q_x A^t = A N^{-1} A^t - A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t \quad (1.178)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la ecuación (1.92), podemos calcular la matriz cofactor de los residuos,

$$Q_r = Q - Q_{\hat{t}} = P^{-1} - A N^{-1} A^t + A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t \quad (1.179)$$

Resumiendo, las matrices cofactor de las incógnitas, los residuos y las observaciones ajustadas son

$$\begin{aligned} Q_x &= N^{-1} - N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} \\ Q_r &= P^{-1} - A N^{-1} A^t + A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t \\ Q_{\hat{t}} &= A N^{-1} A^t - A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t \end{aligned} \quad (1.180)$$

y las correspondientes matrices de covarianzas

$$\begin{aligned} \sum_x &= \sigma_0^2 [N^{-1} - N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1}] \\ \sum_r &= \sigma_0^2 [P^{-1} - A N^{-1} A^t + A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t] \\ \sum_{\hat{t}} &= \sigma_0^2 [A N^{-1} A^t - A N^{-1} C^t (C N^{-1} C^t)^{-1} C N^{-1} A^t] \end{aligned} \quad (1.181)$$

1.2. Nociones de estadística. Introducción a la teoría de errores.

1.2.1. Teoría de errores relacionado con observaciones topográficas.

1.2.1.1. El error observacional como variable aleatoria.

Un suceso es el resultado de un experimento estadístico. Las probabilidades están relacionadas con dichos sucesos estadísticos, sean reales o hipotéticos. Si un suceso estadístico tiene varios resultados posibles, se puede asociar a ese suceso una

variable aleatoria X . El carácter aleatorio se debe a la posibilidad de que dicha variable se puede definir como un parámetro que puede tomar varios valores, asociándole una determinada probabilidad a cada uno de ellos.

El proceso de medición es una consecuencia natural de las operaciones elementales de observación y está sujeto a una posible variación. Esa variación puede ocurrir si alguno de los aspectos del proceso operatorio que implica la medición no se tienen en cuenta. Ninguna observación puede ser repetida con exactitud, debido a las limitaciones propias del instrumento utilizado, a la habilidad del observador en su manipulación y al cuidado de las lecturas que se tengan que realizar con dicho instrumento. Las pequeñas alteraciones que se produzcan en las operaciones elementales producirán las correspondientes variaciones en la medida resultante.

Puesto que todas las mediciones están sujetas a una posible variación, se considera en realidad que ninguna magnitud a medir es completamente determinable. Lo que se pretende es averiguar es un valor numérico fijo de una magnitud, que se conciba como valor verdadero, pero lo que realmente se obtiene no es más que una estimación de ese valor verdadero, que siempre será desconocido. Desde el punto de vista matemático y/o estadístico, el proceso de medición u observación de una magnitud debe ser considerado como una variable. Más concretamente deberíamos decir que debe considerarse como una variable aleatoria, porque incluye componentes de error que tienen este tipo de comportamiento. Los mismos errores aleatorios son variables aleatorias.

Así como las variaciones sistemáticas tratan con modelos o funciones matemáticas, las variables aleatorias deben ser tratadas con modelos probabilísticos. La teoría de la probabilidad y la estadística matemática son las ciencias que sirven de base teórica para el tratamiento de los errores aleatorios de las medidas. La teoría estadística moderna considera las observaciones como muestras de una distribución de probabilidad y su variabilidad se rige, por tanto, según las leyes de probabilidad. Quiere ello decir que las observaciones que contienen equivocaciones no pertenecen a la misma distribución que el resto de observaciones de la muestra.

Basados en la experiencia y en el análisis de gran cantidad de observaciones topográficas, se ha podido constatar que los errores aleatorios, aun siendo no sistemáticos, presentan ciertas características estadísticas que intuitivamente podemos llegar a comprender. Si un grupo de errores, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ se han producido bajo prácticamente las mismas condiciones de medición, se ha observado que:

- La media aritmética de ε_i tiende a cero cuando el número n de observaciones tiende a infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{n} = 0 \quad (1.182)$$

- Los errores positivos y los errores negativos de la misma magnitud aparecen aproximadamente con la misma frecuencia.
- Los errores de pequeña magnitud se producen con mayor frecuencia que los errores de mayor magnitud.
- Bajo condiciones específicas de medición, la magnitud absoluta de los errores se mantiene dentro de unos límites.

1.2.1.2. Medidas redundantes en Topografía y su ajuste.

Para reducir los errores de las mediciones y sus efectos sobre el resultado final de los cálculos topográficos, fundamentalmente coordenadas cartesianas, es necesario optimizar todas las condiciones del proceso de medición. Como es imposible eliminar los errores por completo, una buena práctica es realizar mediciones redundantes, es decir, mayor número de las necesarias para determinar unívocamente los parámetros topográficos necesarios. De esta manera podremos descubrir la existencia de errores y se podrá incrementar la precisión y fiabilidad de los cálculos finales resultantes.

Cuando están presentes los errores en las mediciones y existe redundancia en las mismas, se producirá cierto grado de inconsistencia o contradicción entre las medidas, también llamado en topografía Error de cierre. Una de las tareas más importantes a realizar en los cálculos topográficos es deshacerse de esas inconsistencias entre las medidas de una manera óptima y de acuerdo con algún criterio de estimación, tal como el principio de los mínimos cuadrados. Estos criterios deben estar basados en las propiedades de los errores de las mediciones. Tradicionalmente, el proceso por el cual se eliminan las inconsistencias entre las medidas y se obtienen los mejores resultados posibles a partir de los datos de las observaciones disponibles se denomina ajuste.

En Topografía, la presencia de errores se puede detectar en muchas situaciones donde las observaciones deben cumplir ciertas condiciones geométricas. Por ejemplo, en un itinerario altimétrico cerrado, que comienza y termina en un mismo punto, el

desnivel debe ser cero. Sin embargo, en la práctica difícilmente se cumplirá esta condición debido a la presencia de errores aleatorios.

Ejemplos de otros condicionamientos cuyo cumplimiento impiden los errores en las observaciones topográficas son:

- La suma de los tres ángulos de un triángulo plano, debe ser 200^{g} .
- La suma de todos los ángulos horizontales medidos alrededor de un punto, debe ser 400^{g} .

Estos ejemplos no solo sirven para ilustrar la presencia de errores aleatorios en las observaciones topográficas, sino también la importancia de las observaciones redundantes.

Por ejemplo, si realizamos dos medidas de la distancia entre dos puntos, una de ellas es una observación redundante. La primera medida es suficiente para determinar la distancia desconocida, la segunda es redundante. Sin embargo esta segunda medida es muy valiosa. En primer lugar, porque examinando la discrepancia entre ambos valores podemos tener una idea del tamaño del error en las observaciones. Si existe gran discrepancia, con seguridad se habrá producido un error grande. En este caso, ambas medidas deberían repetirse hasta obtener una discrepancia pequeña aceptable. En segundo lugar, la observación redundante permite realizar un ajuste para obtener el valor final de la distancia desconocida entre los dos puntos y este valor final ajustado será estadísticamente más preciso que cada una de las observaciones individuales. En este caso, si las dos observaciones se han realizado con la misma precisión y no existe gran discrepancia entre las mismas, el valor final debería ser la media aritmética de ambas cantidades.

En el caso de la medida de los tres ángulos de un triángulo plano también existe una observación redundante. Bastaría con medir dos de los ángulos y obtener el tercero por diferencia a 200^{g} . La medida del tercer ángulo permite calcular el error en la medida de los ángulos y hace posible un ajuste para obtener los valores finales de los ángulos con una precisión estadísticamente mejorada. Si los ángulos han sido medidos con la misma precisión, la condición que debe cumplir la suma de los tres permite distribuir la discrepancia respecto a 200^{g} en partes iguales entre los tres ángulos.

En redes topográficas donde intervienen mayor cantidad de medidas, el número de observaciones redundantes puede llegar a ser considerable y el proceso de ajuste

más complicado que el comentado en los ejemplos anteriores.

Las magnitudes que se miden en el ámbito de la Topografía, fundamentalmente distancias, ángulos y desniveles, no sólo son importantes por sí mismas, sino porque sirven para determinar o calcular otras magnitudes. La ecuación o ecuaciones que relacionan las magnitudes de interés, con las magnitudes medidas, constituyen lo que se denomina modelo.

Como en general, en el ámbito de la Topografía, esas relaciones implican cumplir determinadas condiciones geométricas y realizar una serie de cálculos, el modelo se suele denominar modelo matemático.

Como ejemplo, considérese nuevamente el análisis de la forma y el tamaño de un triángulo plano. En este análisis es imprescindible establecer el mínimo número de elementos (variables) n_0 necesarios para determinar unívocamente el modelo y el tipo de elementos que son consistentes con el modelo. Se puede establecer, por geometría elemental, que la forma del triángulo queda determinada mediante los ángulos o los lados (o una combinación de ellos), mientras que el tamaño no queda unívocamente determinado con los ángulos, sino que requiere, al menos, un lado. De aquí se deduce que un lado y dos ángulos, es decir, tres elementos, son el número mínimo requerido para satisfacer el modelo unívocamente.

Una vez determinado n_0 , el topógrafo debe decidir que mediciones realiza para resolver el problema. Si únicamente mide un lado y dos ángulos, el triángulo así obtenido es único y queda perfectamente definido. Pero si se ha cometido un error en alguna de esas tres medidas, no tenemos manera de detectarlo. De ahí que sea una buena práctica, en Topografía, realizar siempre la medición de más magnitudes que el número mínimo necesario para la determinación del modelo.

Cada observación que excede del número mínimo n_0 se llama medida u observación redundante. Si el total de medidas realizadas es n y el número mínimo de elementos es n_0 , se define la redundancia del modelo, también llamada grados de libertad en estadística, como $r = n - n_0$.

Por tanto, la redundancia es la diferencia entre el número de observaciones realizadas, n , y el mínimo requerido, n_0 , para resolver unívocamente el modelo.

La existencia de medidas redundantes origina una situación llamativa que es necesario explicar. Para cada subgrupo de n_0 medidas, del total de n realizadas

($n > n_0$), se obtiene una solución ligeramente distinta del modelo. De esta forma, si en el ejemplo analizado se mide un lado y los tres ángulos, existen tres combinaciones posibles, cada una formada por el lado y dos de los tres ángulos medidos. Cada una de estas tres posibilidades dará lugar a un triángulo ligeramente diferente en forma y tamaño, debido a los inevitables errores que se cometen al realizar mediciones. Como consecuencia de estos errores inevitables, las n observaciones no determinarán el modelo exactamente o de forma unívoca. Esta aparente inconsistencia se resuelve sustituyendo las observaciones realizadas ℓ , por otras estimadas $\hat{\ell}$, de forma que satisfagan el modelo. Así, cuando se calculen las estimaciones del lado y de los tres ángulos medidos, cualquier combinación del lado y dos de los ángulos originarán exactamente el mismo triángulo. Esto significa que con las estimaciones $\hat{\ell}$, se resuelve la inconsistencia del modelo y cualquier subgrupo de n_0 medidas estimadas conducirán a la misma determinación única del modelo.

Cada observación estimada $\hat{\ell}_i$, puede ser considerada como una observación corregida, y obtenida restándole al valor medido ℓ_i una corrección o residuo r_i .

$$\hat{\ell} = \ell - r \quad (1.183)$$

Para un total de n observaciones, y utilizando la notación matricial

$$\hat{\ell} = \ell - r \quad (1.184)$$

donde cada término es un vector columna de dimensión ($n \times 1$).

$$\hat{\ell} = \begin{pmatrix} \hat{\ell}_1 \\ \hat{\ell}_2 \\ \vdots \\ \hat{\ell}_n \end{pmatrix} \quad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad (1.185)$$

El vector de residuos r juega un papel muy importante con posterioridad al proceso de ajuste, siendo posible analizar los elementos de r para determinar la adecuación del modelo. En ciertos casos este análisis puede incluso conducir a rechazar completamente el modelo elegido y a reconsiderar nuevamente el problema.

Los residuos o correcciones son desconocidos y deben ser determinados para poder calcular las estimaciones. Esencialmente existe un número infinito de posibles grupos de residuos o correcciones que originan observaciones que conducen a una determinación del modelo. Sin embargo, parece lógico pensar, que de esas infinitas soluciones, sólo una de ellas conduzca a la solución óptima del modelo. Para elegir esa solución óptima se necesita un criterio adicional que conduzca al cálculo de un sólo grupo de residuos. Existen varios criterios posibles pero el más usado, en el campo de la Topografía, es el que origina el principio de los mínimos cuadrados.

La operación de encontrar o calcular ese grupo de observaciones estimadas \hat{l} , a partir del cálculo de un grupo de residuos adecuados, según algún criterio definido, se denomina ajuste.

Por tanto, y como norma general, en cualquier levantamiento topográfico se tomarán medidas redundantes por las dos razones importantes establecidas anteriormente: 1) hacen posible detectar errores y nos permiten tomar decisiones sobre la aceptación o rechazo de las observaciones y 2) hacen posible un ajuste para determinar unos valores de las incógnitas obtenidas con mayor precisión.

1.2.1.3. Postulados fundamentales de la teoría de errores.

La teoría de errores se ocupa del estudio de los errores accidentales o aleatorios, suponiendo que una serie de observaciones obtenidas en un experimento se ha depurado de errores sistemáticos. Formalizando las ideas anteriores, podemos enunciar los postulados fundamentales que rigen el estudio de los errores producidos en un determinado experimento:

1.- En una serie de observaciones realizadas un número grande de veces y efectuadas en idénticas condiciones y con el mismo esmero, la frecuencia de aparición de posibles errores es inversamente proporcional al valor absoluto del error. Quiere esto decir que los errores más pequeños ocurren con más frecuencia que los errores grandes y por ellos son más probables.

2.- En una serie de observaciones realizadas un número grande de veces y efectuadas en idénticas condiciones y con el mismo esmero, los errores del mismo valor absoluto pero de distinto signo aparecen el mismo número de veces, es decir, son igualmente probables. Según este postulado, para cada error $+\varepsilon$ se admite que existe otro error $-\varepsilon$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0 \quad (1.186)$$

La conclusión que se obtiene de este segundo postulado es que si una medida pertenece a una serie de observaciones suficientemente grande de una cierta magnitud presenta un error $+\varepsilon$, existirá otra medida de dicha serie cuyo error será $-\varepsilon$, de tal modo que efectuando la media aritmética de las medidas de la serie se eliminarán los errores accidentales cometidos. Al valor obtenido a partir de la media aritmética se le denomina valor más probable de la magnitud medida.

En efecto, sean $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ los valores obtenidos al medir una magnitud λ , asumiendo a priori que todas las medidas han sido hechas en las mismas condiciones y no están afectadas de errores sistemáticos.

La suma de todos los errores verdaderos de la observación vendrá dada por,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (\ell_i - \lambda) = \sum_{i=1}^n \ell_i - n\lambda \quad (1.187)$$

Aplicando el segundo postulado, para n suficientemente grande ($n \rightarrow +\infty$), se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \ell_i - n\lambda = 0 \quad (1.188)$$

de donde,

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell_i = \bar{\ell} \quad (1.189)$$

Como en general no es posible efectuar infinitas medidas de la magnitud λ , no se puede garantizar el cumplimiento del segundo postulado. Por tanto, la media aritmética no será el valor verdadero de la magnitud medida cuando se realice un número finito de medidas, ni tampoco se puede asegurar que entre los distintos valores de la serie haya alguno que se aproxime al valor verdadero más que a la media aritmética.

A pesar de estas restricciones se asumirá que la media aritmética es el valor que tiene una mayor proximidad del valor verdadero de ella magnitud medida.

Considerando el valor más probable como el valor verdadero de dicha magnitud, el error resultante de cada medida se denomina error probable, error residual o simplemente residuo y viene dado por

$$r_i = \ell_i - \bar{\ell} \quad (1.190)$$

Las ventajas de introducir el error residual son obvias; por una parte, los residuos si se pueden determinar experimentalmente y por otra, verifican el segundo postulado fundamental de la Teoría de Errores, aun para un número finito de medidas, pues,

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n (\ell_i - \bar{\ell}) = \sum_{i=1}^n \ell_i - n \bar{\ell} = 0 \quad (1.191)$$

Puesto que el error verdadero expresa la desviación del resultado de un experimento con respecto al valor verdadero de la magnitud a medir, presenta un carácter teórico que hace que sea imposible cuantificar exactamente dicha magnitud. Únicamente, se podrán realizar estimaciones del error residual y valor más probable del error verdadero y valor verdadero de dicha magnitud, respectivamente.

Los errores verdaderos están asociados al concepto de exactitud, mientras que el error residual indica la precisión de una serie de observaciones o la discrepancia existente entre los valores más probables obtenidos en series diferentes de medidas de una misma magnitud realizadas en idénticas condiciones y en igual o diferente número.

1.2.2. Medidas de precisión.

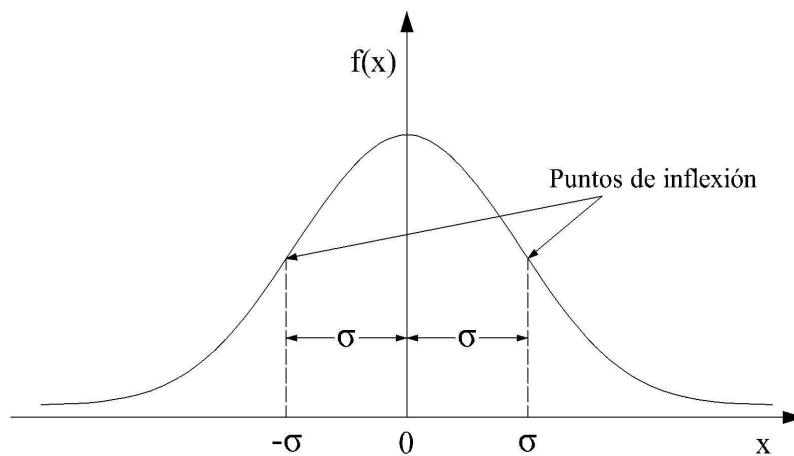
Bajo el supuesto de que la distribución normal es un modelo de probabilidad adecuado a las medidas topográficas, podemos representar estas medidas por una variable aleatoria X que tiene una dada por la ecuación

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]; \text{ para } -\infty < x < \infty \quad (1.192)$$

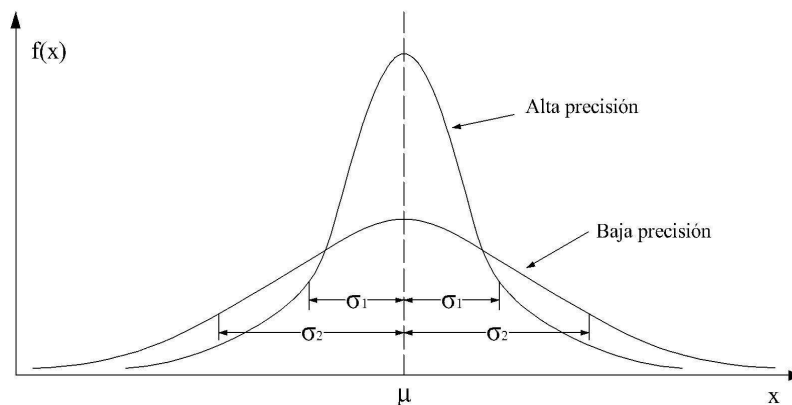
Si hacemos el cambio de variable para que resulte la media $\mu = 0$, la ecuación (1.192) se reduce a

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.193)$$

Se ha comprobado que la distribución normal es el modelo de probabilidad para la componente del error aleatorio de una media topográfica. Esta función densidad se muestra en la siguiente figura



La precisión de una medida es el grado de aproximación o conformidad de mediciones repetidas de la misma magnitud. Según esto, la dispersión de la distribución de probabilidad de una medida, o de su componente de error aleatorio, es una indicación de la precisión de la medida. Una dispersión pequeña indica alta precisión, mientras que una dispersión grande indica baja precisión, como se muestra a continuación.



En esta figura se debe observar que, como el área bajo cada función densidad es la unidad, la curva de alta precisión tiene un pico más alto que la de baja precisión.

Cuando se pretende realizar un análisis de mediciones topográficas, se requiere un indicador de la precisión de las medidas. Un indicador obvio es la desviación estándar. A menor desviación estándar, mayor es la precisión. En la figura anterior, $\sigma_1 < \sigma_2$, donde σ_1 es la desviación estándar de la medida de alta precisión y σ_2 es la desviación estándar de la medida de baja precisión.

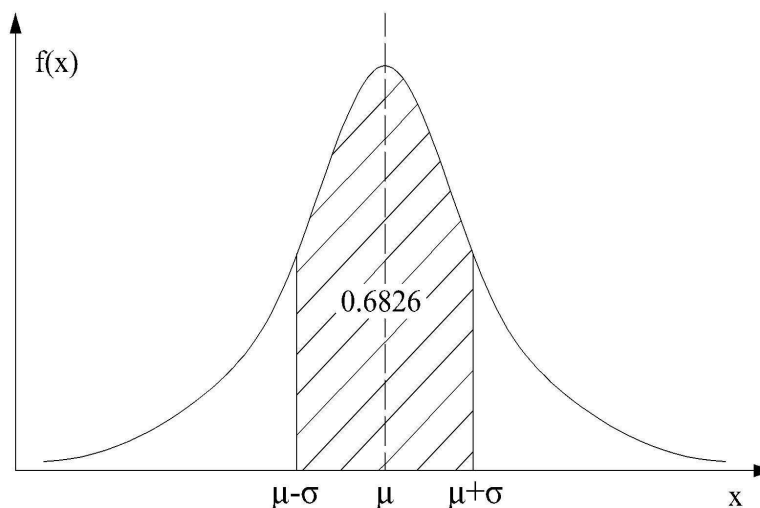
La probabilidad de que una medida X caiga entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ viene dada por

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (1.194)$$

Para evaluar esta probabilidad es conveniente estandarizar la variable X , y utilizar una tabla de distribución normal $N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P\left[\frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma}\right] = P(-1 < Z < 1) = \\ &= F(1) - F(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 \end{aligned} \quad (1.195)$$

que indica que el área sombreada en la siguiente figura es 0.6826 del total del área bajo la función densidad.



Múltiplos de la desviación estándar también se usan como medidas de la precisión. La probabilidad de que una medida topográfica de media μ y desviación

estándar σ esté comprendida entre $\mu - k\sigma$ y $\mu + k\sigma$ es

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (1.196)$$

Si estandarizamos de nuevo X

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(-k < Z < k) = F(k) - F(-k) \quad (1.197)$$

Debido a la simetría de la distribución, $F(k) + F(-k) = 1$, y la ecuación anterior se reduce a

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 2F(k) - 1 \quad (1.198)$$

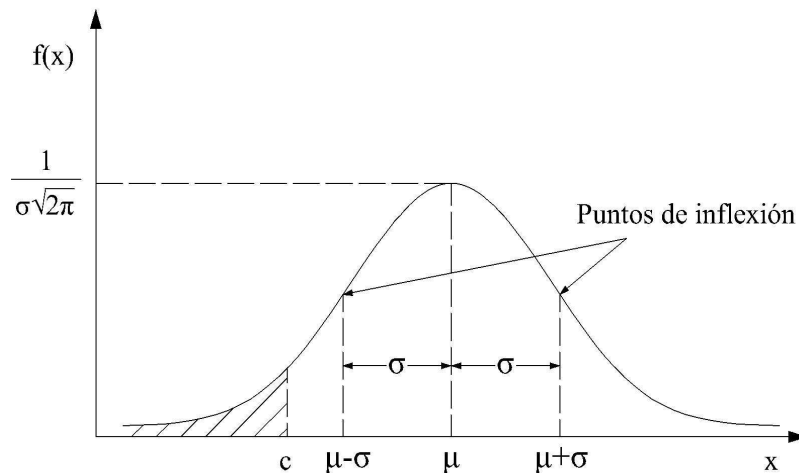
Los valores de $F(k)$ se pueden obtener de una tabla de la distribución normal o mediante la correspondiente función en la hoja de cálculo EXCEL.

La cantidad $\pm 0.674\sigma$ se denomina error probable. Este término se usa cada vez menos y en su lugar se dice que dicha cantidad representa un 50% de nivel de confianza. La cantidad $\pm 1.645\sigma$ representa un 90% de nivel de confianza. La probabilidad de que una medida esté dentro de $\pm 1.645\sigma$ de su valor medio μ es 0.900. De forma similar, $\pm 1.960\sigma$ representa un 95% de nivel de confianza y $\pm 2.576\sigma$ un 99% de nivel de confianza.

1.2.3. La distribución normal.

De todas las distribuciones estadísticas existentes, la distribución normal puede considerarse como la más importante. Esta distribución tiene un campo de aplicación muy extenso y se usa como modelo básico en todas las observaciones topográficas.

La función densidad de probabilidad de la distribución normal, representada en la siguiente figura,



se define como,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]; \text{ para } -\infty < x < \infty \quad (1.199)$$

Se observa en la gráfica que la distribución normal es simétrica respecto a μ . Los puntos de inflexión de la función densidad están localizados en las abscisas $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$. El máximo de la función se produce en $x = \mu$.

Las cantidades μ y σ son los parámetros de la distribución y se denominan media y desviación estándar respectivamente. Se dice que la distribución es $N(\mu, \sigma)$, es decir, Normal de media μ y desviación estándar σ .

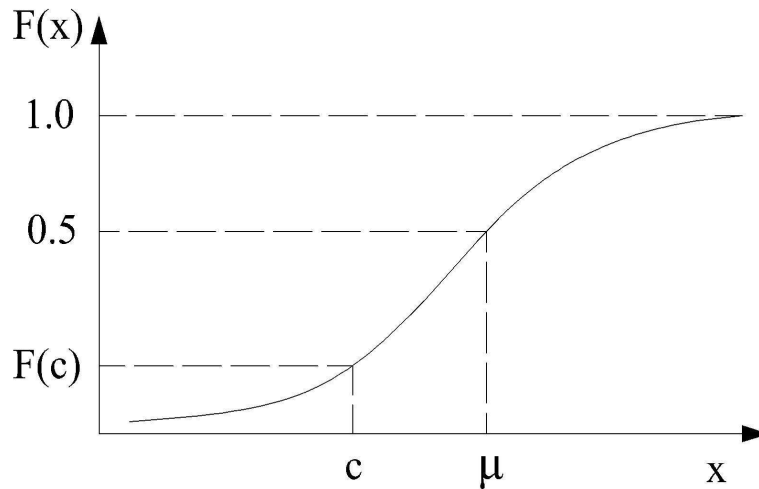
El coeficiente

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (1.200)$$

es una constante que no depende de x , y puede ser considerado como un factor de normalización que asegure que,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1 \quad (1.201)$$

La función de distribución de la distribución normal, representado en la siguiente figura,



se define como,

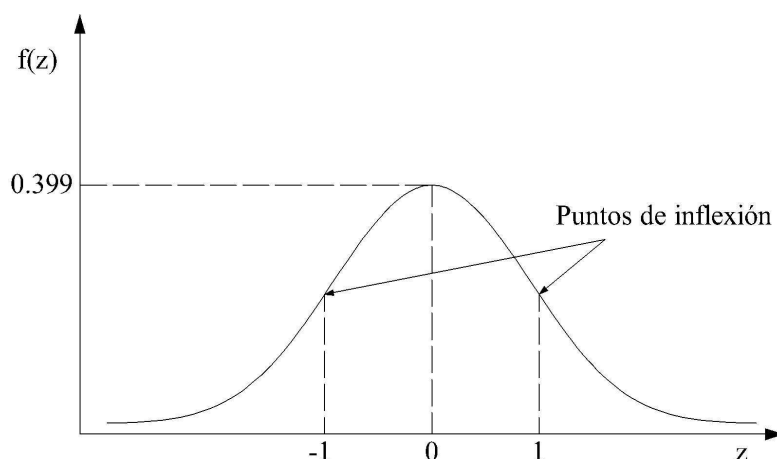
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] du \quad (1.202)$$

Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución normal, entonces $P[X \leq c]$ (probabilidad de que X sea menor o igual que c) representa el área sombreada en la figura de la función densidad de probabilidad, y por la ordenada $F(c)$ en la figura de la función de distribución.

Se dice que una variable aleatoria Z sigue una distribución normal estandarizada o tipificada si su función densidad es

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]; \text{ para } -\infty < z < \infty \quad (1.203)$$

Esta función se obtiene de la función densidad de la distribución normal haciendo el cambio de variable definido en (1.204) resultando ser sus parámetros $\mu=0$ y $\sigma=1$, y se muestra en la siguiente figura. Se dice entonces que la distribución es $N(0,1)$.



La distribución normal estandarizada es un caso particular de la distribución normal y nos permite resolver el problema de evaluar probabilidades asociadas a cualquier distribución normal. Como la función densidad de la distribución normal no puede ser integrada directamente, se nos presenta un problema cuando hay que calcular las probabilidades para los valores específicos de μ y σ . El problema se resuelve transformando la variable aleatoria normal X en una variable aleatoria normal estandarizada Z , y evaluando después las probabilidades para Z .

Esta transformación de la variable, o tipificación, se realiza asignando

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1.204)$$

Incluso así es imposible integrar $f(z)$ directamente, quedando la función resultante como se indica en la expresión siguiente:

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du ; \text{ para } -\infty < z < \infty \quad (1.205)$$

Esta integral puede ser evaluada por métodos numéricos aproximados y tabular así los valores de $F(z)$.

La conveniencia de utilizar la distribución normal como modelo de probabilidad para las medidas está basado en el comportamiento de las observaciones, puesto que este modelo se elige para ajustar datos observados. Esta elección de la distribución normal tiene también unas bases teóricas. Si el error resultante en una medida es la suma de varias componentes de error, cada uno de los cuales tiene su propia distribución de probabilidad, puede considerarse que el error

total sigue aproximadamente una distribución normal, independientemente de la distribución que siga cada uno de sus componentes por separado.

1.2.4. El concepto de peso de una observación.

El peso de una observación es una medida de su valor relativo comparado con el resto de observaciones. Como se ha comentado anteriormente, una medida de gran precisión tiene una varianza pequeña, hache que refleja un alto grado de cuidado en las observaciones y calidad del instrumento utilizado. Esta medida de gran precisión, en el proceso de ajuste, debería recibir una porción relativamente pequeña de la corrección global. Por el contrario, una medida de baja precisión tiene una varianza mayor y en el proceso de ajuste recibirá una corrección mayor.

Como el valor de la varianza varía en sentido opuesto al de la precisión, es necesario introducir una medida que varíe directamente con la precisión. De esta forma, a cada observación le asignamos un número positivo, denominado peso de la observación.

Así, para una medida u observación dada, cuanto mayor es su precisión, mayor será el peso y viceversa. De acuerdo con esto, el peso de una observación simple se define como una cantidad inversamente proporcional a la varianza de la observación, σ^2 .

$$p = \frac{k}{\sigma^2} \quad (1.206)$$

siendo k una constante positiva de proporcionalidad.

Los pesos se utilizan para controlar el tamaño de las correcciones que se aplican a las medidas en el proceso de ajuste. Por tanto, las correcciones que se aplican son inversamente proporcionales a sus pesos.

Si una observación tiene peso unidad, $p=1$, su varianza se define con el símbolo σ_0^2 ,

$$1 = \frac{k}{\sigma_0^2} ; \text{ de donde } k = \sigma_0^2 \quad (1.207)$$

y de aquí

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p}} \quad (1.208)$$

Así, la constante de proporcionalidad es la varianza σ_0^2 de una observación de peso unidad. A esta varianza se le llama de diferentes formas: factor de varianza a priori, varianza a priori de peso unidad y varianza de referencia a priori, siendo esta última denominación la que se utilizará en adelante. En general, la varianza de referencia a priori se hace igual a la unidad, significando que una observación cuya varianza sea igual a σ_0^2 tendrá un peso unidad. Una de las capacidades del ajuste por mínimos cuadrados es la obtención de un valor estimado de este factor, denominado varianza de referencia a posteriori, denotándose por s_0^2 .

1.2.5. Matrices de covarianza, cofactor y de pesos.

1.2.5.1. Varianza.

Sea $Z(X)$ una función definida como

$$Z(X) = [X - E(X)]^2 = (X - \mu_X)^2 \quad (1.209)$$

La esperanza matemática (valor medio μ de la variable) de esta función especial se llama varianza de la variable aleatoria X , y es

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E[Z(X)] = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \quad (1.210)$$

La raíz cuadrada de σ_X^2 , expresada por σ_X , se conoce como desviación estándar o desviación típica. La varianza o la desviación estándar son medidas de la dispersión de una variable aleatoria. Otras expresiones de la varianza, en términos de la esperanza matemática son

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = E\{(X - \mu_X)^2\} = E[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2] = \quad (1.211)$$

$$=E(X^2)-2\mu_x E(X)+E(\mu_x^2)=E(X^2)-\mu_x$$

o bien,

$$\sigma_x^2=E(X^2)-(\mu_x)^2=E(X^2)-E(X)^2 \quad (1.212)$$

1.2.5.2. Covarianza y correlación.

De forma similar a la definición de la varianza de una variable aleatoria, se introduce el concepto de covarianza cuando se consideran dos o más variables aleatorias.

Sean dos variables aleatorias X e Y, que tienen una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ y definimos la función

$$h(X, Y)=[X-E(X)][Y-E(Y)]=(X-\mu_x)(Y-\mu_y) \quad (1.213)$$

La covarianza ente X e Y se define como la esperanza de la función $h(X, Y)$

$$\text{cov}(X, Y)=\sigma_{xy}=E[h(X, Y)]=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \quad (1.214)$$

o bien

$$\sigma_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y)f(x, y) dx dy \quad (1.215)$$

Así como la varianza de una variable aleatoria expresa la variación de su distribución, la covarianza expresa la variación conjunta de las dos variables aleatorias. Refleja la interrelación o correlación mutua, para la cual se define la que se denomina coeficiente de correlación ρ_{xy}

$$\rho_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}=E\left\{\frac{[X-E(X)]}{\sigma_x} \frac{[Y-E(Y)]}{\sigma_y}\right\} \quad (1.216)$$

donde σ_x y σ_y son las desviaciones estándar de las distribuciones de las variables X e Y respectivamente. La correlación entre dos variables aleatorias describe cierta independencia entre ellas. Cuando dos variables aleatorias X e Y son estadísticamente independientes, su covarianza es cero, $\sigma_{xy}=0$, por lo tanto también su coeficiente de correlación.

1.2.5.3. Matrices de covarianza, cofactor y de pesos.

Ya hemos introducido el concepto de covarianza y el de función de distribución conjunta de dos variables aleatorias.

La covarianza es, básicamente, la relación que existe entre dos variables aleatorias. Si hay tres o más variables aleatorias que están distribuidas conjuntamente, debemos considerar las covarianzas de todas las posibles parejas de variables. Así, cuando hablemos de la covarianza de tres variables aleatorias, X, Y y Z, nos estaremos refiriendo específicamente a las tres covarianzas: σ_{xy} , entre X e Y, σ_{xz} , entre X y Z, y σ_{yz} , entre Y y Z.

Si consideramos, en el caso más general, m variables aleatorias conjuntamente distribuidas, es más conveniente agruparlas en una matriz o vector columna, formando así lo que denominamos un vector aleatorio. Así, si $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ son m variables aleatorias distribuidas conjuntamente, cuyas medias son $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, el vector

$$\mathbf{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix} \quad (1.217)$$

es un vector aleatorio.

Si se consideraciones

$$(\mathbf{\ell} - \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \ell_1 - \mu_1 \\ \ell_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ \ell_m - \mu_m \end{pmatrix} \quad (1.218)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (\ell - \mu)(\ell - \mu)^t &= \begin{pmatrix} \ell_1 - \mu_1 \\ \ell_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ \ell_m - \mu_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 - \mu_1 & \ell_2 - \mu_2 & \cdots & \ell_m - \mu_m \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (\ell_1 - \mu_1)^2 & (\ell_1 - \mu_1)(\ell_2 - \mu_2) & \cdots & (\ell_1 - \mu_1)(\ell_m - \mu_m) \\ (\ell_2 - \mu_2)(\ell_1 - \mu_1) & (\ell_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (\ell_2 - \mu_2)(\ell_m - \mu_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\ell_m - \mu_m)(\ell_1 - \mu_1) & (\ell_m - \mu_m)(\ell_2 - \mu_2) & \cdots & (\ell_m - \mu_m)^2 \end{pmatrix} \quad (1.219)
 \end{aligned}$$

Calculando la esperanza matemática de los elementos de esta matriz y teniendo en cuenta que $E[(\ell_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2$ (varianza de ℓ_i) y que $E[(\ell_i - \mu_i)(\ell_j - \mu_j)] = \sigma_{ij}$ (covarianza de ℓ_i y ℓ_j y que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,) obtendremos la matriz simétrica

$$\sum_{\ell} = E[(\ell - \mu)(\ell - \mu)^t] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \quad (1.220)$$

Las varianzas de cada variable aleatoria forman la diagonal principal de la matriz \sum_{ℓ} . Las covarianzas de todas las posibles parejas de variables aleatorias son los elementos restantes de la matriz donde, por simetría, cada covarianza aparece dos veces.

La matriz \sum_{ℓ} se denomina matriz de varianza-covarianza del vector ℓ o, simplemente, matriz de covarianza de ℓ , puesto que la varianza de una variable aleatoria puede considerarse como la covarianza con ella misma $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

Si las variables aleatorias del vector ℓ no están correlacionadas, todas las covarianzas son cero, y la matriz se convierte en diagonal. En este caso a \sum_{ℓ} se le llama matriz de varianza, aunque por no perder la generalidad le llamaremos siempre matriz de covarianza.

De momento supondremos que las observaciones no están correlacionadas y, por tanto, sus covarianzas son cero.

Para un grupo de medidas no correlacionadas $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ cuyas varianzas son, $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$ respectivamente, se define la matriz de covarianza como la matriz diagonal

$$\Sigma_{\ell} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \quad (1.221)$$

Los pesos correspondientes a estas medidas no correlacionadas son

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}; \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2}; \quad \dots; \quad p_m = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} \quad (1.222)$$

Los pesos pueden ser agrupados en la matriz de pesos

$$\mathbf{P}_{\ell} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_m^2} \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{pmatrix} \quad (1.223)$$

Al sacar fuera de la matriz la varianza de referencia σ_0^2 , la matriz que queda es la inversa de la matriz de covarianza, por tanto

$$\mathbf{P}_{\ell} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell}^{-1} \quad (1.224)$$

La aparición de observaciones ponderadas no correlacionadas es frecuente en Topografía. Ello ocurre cuando se realizan diferentes tipos de mediciones, tales como ángulos y distancias, puesto que la varianza de una distancia medida en metros es distinta a la varianza de un ángulo expresado en radianes. Por tanto, cuando ambas varianzas se colocan juntas en una matriz de varianza y se calcula la matriz de pesos correspondiente, los dos valores de los pesos serán distintos. Medidas del mismo tipo, sólo distancias o sólo ángulos, pueden ser no correlacionadas pero con diferente precisión o peso, simplemente debido a que hayan sido realizadas por observaciones diferentes y/o instrumentos diferentes.

Cada elemento de la matriz \sum_{ℓ} puede dividirse por la cantidad σ_0^2 para obtener así una nueva matriz. Esta matriz se designa por la letra Q_{ℓ} , y se llama matriz cofactor,

$$Q_{\ell} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{\ell} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_0^2} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_0^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_0^2} & \dots & \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0^2} \end{pmatrix} \quad (1.225)$$

o bien

$$\sum_{\ell} = \sigma_0^2 Q_{\ell} \Rightarrow \sum_{\ell}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} Q_{\ell}^{-1} \quad (1.226)$$

Como sabemos que $P_{\ell} = \sigma_0^2 \sum_{\ell}^{-1}$ tendremos que,

$$P_{\ell} = \sigma_0^2 \sum_{\ell}^{-1} = \sigma_0^2 \frac{1}{\sigma_0^2} Q_{\ell}^{-1} = Q_{\ell}^{-1} \quad (1.227)$$

es decir $P_{\ell} = Q_{\ell}^{-1}$, luego la matriz de pesos es igual a la inversa de la matriz cofactor de las observaciones.

1.2.6. Propagación de la media y la varianza.

El problema de la propagación de la media y la varianza consiste en determinar la media y la varianza de una variable aleatoria m-dimensional, Y, que es función de los n elementos de otra variable aleatoria n-dimensional, X.

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \quad (1.228)$$

Sean Y y X variables aleatorias m-dimensional y n-dimensional respectivamente. Consideremos las variables y_i como una combinación lineal de las variables x_i , de la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + c_2 \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + c_m \end{aligned} \quad (1.229)$$

que podemos expresar matricialmente como,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{c} \quad (1.230)$$

siendo,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (1.231)$$

Aplicando a (1.230) que la media de una constante es igual a dicha constante y que la media del producto de una variable aleatoria por una constante es igual a dicha constante multiplicada por la media de la variable aleatoria, se tiene que

$$E(\mathbf{y}) = E(\mathbf{Ax} + \mathbf{c}) = \mathbf{A}E(\mathbf{x}) + \mathbf{c} \quad (1.232)$$

que es la expresión de la propagación de la media en el caso lineal.

La ley de propagación de la varianza será,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{y}} &= E\{[\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^t\} \\
 &= E\{[\mathbf{y} - \mathbf{c} - \mathbf{A}E(\mathbf{x})][\mathbf{y} - \mathbf{c} - \mathbf{A}E(\mathbf{x})]^t\} \\
 &= E\{[\mathbf{Ax} - \mathbf{A}E(\mathbf{x})][\mathbf{Ax} - \mathbf{A}E(\mathbf{x})]^t\} \\
 &= \mathbf{A}E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^t\}\mathbf{A}^t \\
 &= \mathbf{A} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{A}^t
 \end{aligned}
 \tag{1.233}$$

por tanto,

$$\sum_{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{A}^t
 \tag{1.234}$$

$$\sum_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \sigma_{x_n x_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
 \tag{1.235}$$

Supongamos ahora que la variable Y se establece a partir de una función no lineal de la variable X. Así tendremos que,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{1.236}$$

expresado en notación matricial como,

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})
 \tag{1.237}$$

Si linealizamos esta función mediante el desarrollo en serie de Taylor para un entorno de los valores $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$ de la variable n-dimensional X, se tiene que

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right]_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \quad (1.238)$$

Despreciando los términos de grado superior a 1 y llamando

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.239)$$

a la matriz Jacobiana, la forma lineal aproximada será

$$\mathbf{y} \approx F(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (1.240)$$

Entonces, la propagación de la media y la varianza en este caso vendrán dadas por,

$$E(\mathbf{y}) \approx F(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}E(\mathbf{x}) - \mathbf{J}\mathbf{x}_0 \quad (1.241)$$

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{J} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{J}^t \quad (1.242)$$

$$\sum_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \sigma_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \sigma_{x_n x_2} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.243)$$

En caso d existir una única función,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.244)$$

relacionada con n variables (x_1, x_2, \dots, x_n) , la ecuación (1.243) puede escribirse para el caso de medidas estadísticamente independientes (covarianzas = 0),

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \sigma_{x_n}\right)^2} \quad (1.245)$$

2. Aplicación de los métodos de nivelación.

2.1. Instrumentos.

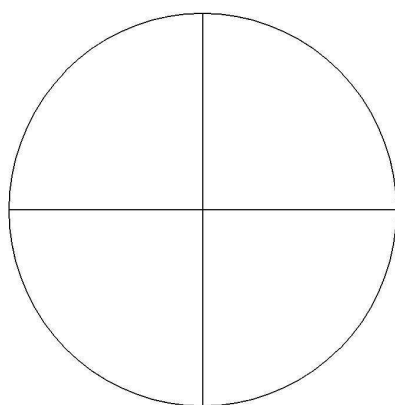
Para la realización de la parte práctica del apartado de nivelación de este proyecto, se han usado los niveles de Leica, óptico y automático, Leica NA 724 y Leica Sprinter 200, respectivamente.

2.1.1. Nivel óptico.

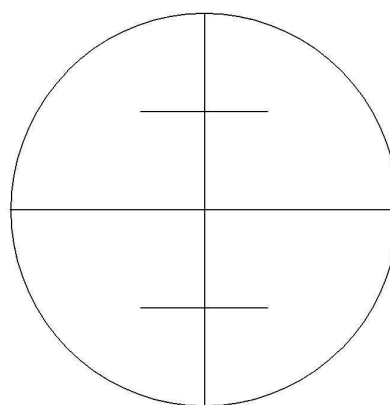
El nivel topográfico es un instrumento que consta principalmente de un anteojo con un sistema de lentes cuyo eje óptico define una visual horizontal. La horizontalidad que define el eje óptico del anteojo, llamado también eje de colimación, se consigue con ayuda de un nivel de burbuja, colocado junto a él, cuando ésta queda centrada. La finalidad del anteojo es fijar la dirección de la visual hacia la mira y amplificar el tamaño de la misma, debido a los aumentos de las lentes.



Al realizar una observación por el anteojo se puede ver, dentro del campo de visión y superpuesta a la imagen observada, una fina línea vertical y otra horizontal de color negro, denominadas hilo vertical e hilo horizontal respectivamente. Ambos hilos constituyen la cruz filar o retículo. El retículo de algunos niveles puede llevar, además, dos pequeñas líneas paralelas y equidistantes al hilo horizontal, denominadas hilo superior e inferior, denominándose hilo central al hilo horizontal de la cruz filar. A este tipo de retículo se le denomina retículo estadimétrico, cuya aplicación se verá mas adelante. El hilo central del retículo es el que define la visual del eje óptico del anteojo.



Cruz filar



Retículo estadimétrico

El anteojo puede girar alrededor de un eje vertical, de forma que la visual definida por el eje óptico es la que define el plano horizontal de comparación H entre dos puntos del terreno.

El nivel consta de una lente ocular, con un tornillo que permite enfocar con nitidez la cruz filar. Además tiene una lente objetivo que permite la observación del campo de visión del anteojo. La imagen que se observa a través de la lente objetivo se enfoca con otro tornillo.

Para localizar de forma rápida la mira, dispone de un dispositivo de puntería. Una vez localizada, la imagen de la mira se centra sobre el campo de visión del anteojo con ayuda de un tornillo sin fin colocado en el lateral. Salvo este tornillo, todos los demás del instrumento tienen un recorrido con principio y final. Cuando se llega al tope en el movimiento de algún tornillo, éste no debe forzarse, sino ser girado en sentido contrario para evitar ser dañado.

Como se ha dicho con anterioridad, para conseguir la horizontalidad del eje óptico del anteojo, el nivel lleva incorporado un nivel de burbuja esférico que se cala con ayuda de tres tornillos nivelantes dispuestos en la parte inferior del instrumento. Para observar cómodamente la burbuja de este nivel, antes de realizar la lectura en la mira, sobre él existe un pequeño espejo con inclinación de 45° que permite comprobar en todo momento si la burbuja está centrada. Todo este conjunto descrito está ubicado sobre la base nivelante, que sirve para la sujeción del nivel al trípode mediante otro tornillo colocado en éste último.

Los tres tornillos situados sobre la base nivelante del nivel se accionan para “calar” (centrar) la burbuja del nivel esférico y conseguir la horizontalidad del eje de

colimación.

Antes de accionarlos, es conveniente que se encuentren a mitad de su recorrido con el objeto de que éste no se agote antes de que la burbuja se haya calado. Para realizar el centrado de la burbuja se actúa inicialmente sobre dos de los tornillos simultáneamente con los dedos pulgar e índice de cada mano, girando los tornillos en sentido contrario, y teniendo en cuenta que la burbuja se desplaza hacia donde movamos el pulgar de la mano izquierda. Al girar los tornillos, la burbuja comenzará a moverse debiendo detener el giro cuando la burbuja se encuentre en una posición centrada, es decir, cuando la línea imaginaria que une el centro de la burbuja con el centro del nivel quede perpendicular a la línea definida por los dos tornillos que estamos girando.

Después se acciona el tercer tornillo, hasta dirigir la burbuja al centro del nivel, materializado con una circunferencia.

Una vez centrada la burbuja, entra en funcionamiento un compensador interno que corrige la ligera inclinación residual del eje vertical, consiguiendo que la visual a través del eje óptico del anteojo sea perfectamente horizontal.

Por último, la mira graduada es el elemento observado a través del anteojo del nivel, y sirve para determinar la altura existente desde el plano de comparación establecido por el eje de colimación del nivel al punto donde apoya la mira. La mira tiene una longitud total de 4 metros, plagada de forma telescópica en cuatro tramos.

Para poder determinar la altura existente entre el pie de la mira y el plano de colimación del nivel, es necesario hacer una “lectura en la mira”, colocada ésta verticalmente. La verticalidad de la mira se controla con un nivel de burbuja esférico colocado en la parte superior del primer tramo. Dicha lectura, en metros, corresponde a esa altura. Para ello, la mira se encuentra graduada en metros, decímetros, centímetros y dobles milímetros. La lectura se hace apuntando a la mira, superponiendo la imagen del retículo con la imagen a la mira y observando donde incide el hilo horizontal de la cruz filar sobre la mira. En ese punto debemos identificar los cuatro dígitos de la lectura: metros, decímetros, centímetros y milímetros, contando las unidades enteras desde abajo hacia arriba.



Antes de realizar la lectura en la mira hay que tener la precaución de que tanto la imagen del retículo como la imagen de la mira están correctamente enfocadas, accionando los correspondientes tornillos de enfoque. Es posible que si hacemos un ligero cabeceo hacia arriba y hacia abajo, mientras miramos por el anteojo,

observemos que la línea horizontal del retículo se desplaza con relación a la imagen de la mira. Ello es debido a que la imagen del retículo está en un plano distinto al de la imagen de la mira, motivado por un enfoque incorrecto. Este hecho se denomina Error de Paralaje y es necesario eliminarlo antes de realizar la lectura de la mira, girando lentamente los tornillos de enfoque hasta que ambos planos se superpongan.

Leica NA 724. Características.

Al situarse el nivel esférico y el círculo horizontal al lado del anteojo, se facilita su lectura.

El círculo horizontal se puede leer en grados sexagesimales o centesimales.

La distancia mínima de enfoque son 50 cm.

Datos técnicos	NA720	NA724	NA728	NA730
Aumentos	20x	24x	28x	30x
Imagen	Derecha	Derecha	Derecha	Derecha
Diametro del objetivo	30 mm	36 mm	40 mm	40 mm
Distancia mínima de puntería	0,5 m	0,5 m	0,5 m	0,7 m
Relleno de gas	Si	Si	Si	Si
Medición de ángulos	360 grados/400 gon seleccionable	360 grados/400 gon seleccionable	360 grados/400 gon seleccionable	360 grados/400 gon seleccionable
Medición de distancia				
- Factor de multiplicación	100	100	100	100
- Constante de adición	0	0	0	0
Nivel de burbuja	10' / 2 mm	10' / 2 mm	10' / 2 mm	10' / 2 mm
Tornillo de enfoque	sencillo	sencillo	sencillo/fino	sencillo/fino
Tornillo mov. horizontal	dos lados, sin fin	dos lados, sin fin	dos lados, sin fin	dos lados, sin fin
Precisión (desviación típica)				
Desviación típica por km doble	2,5 mm	2 mm	1,5 mm	1,2 mm
Medición a 30 m	1,5 mm	1,2 mm	1 mm	0,8 mm
Compensador				
Precisión (desviación típica)	< 0,5"	< 0,5"	< 0,3"	< 0,3"
Rango de trabajo	± 15'	± 15'	± 15'	± 15'
Ambiente				
Impacto	ISO 9022-33-5	ISO 9022-33-5	ISO 9022-33-5	ISO 9022-33-5
Protección agua/suciedad	IP57 (inmersión total)	IP57 (inmersión total)	IP57 (inmersión total)	IP57 (inmersión total)
Rango de temperatura				
- Trabajo	-20 a +50 C	-20 a +50 C	-20 a +50 C	-20 a +50 C
- Almacenamiento	-40 a +70 C	-40 a +70 C	-40 a +70 C	-40 a +70 C
Dimensiones, Peso				
Dimensiones instrumento	19x12x12 cm	19x12x12 cm	21x12x12 cm	21x12x12 cm
Peso del instrumento	1,6 kg	1,6 kg	1,7 kg	1,7 kg

2.1.2. Nivel digital o electrónico.

Estos niveles también tienen anteojo y se utilizan con una mira, pero no está graduada, como la del nivel óptico, sino que es una mira de código de barras. Al ser un instrumento electrónico, tiene un dispositivo que capta la imagen digital de la mira, y en función de la zona de mira captada es capaz de calcular la lectura en la mira, así como la distancia del nivel a la mira.



Además, todas las medidas se almacenan en una memoria interna y los datos se pueden extraer conectando el nivel a un ordenador. Posee un teclado y una pantalla LCD que permite visualizar los resultados de las medidas.

Leica Sprinter 200 (250/150). Características.

El nivel electrónico permite realizar mediciones más precisas y lecturas sin error, todo ello de forma más rápida y sencilla.

Especificaciones técnicas	Sprinter 50	Sprinter 150/150M	Sprinter 250M
Precisiones de altura	Desviación típica en medición de altura por km de doble nivelación (ISO 17123-2)		
-Medición electrónica*	2.0 mm	1.5 mm	1.0/0.7* mm
-Medición óptica	Con mira de aluminio estándar con escala E/con graduación: 2,5 mm		
-Lectura de mira sencilla	Desviación típica: 0,6 mm (electrónica) y 1,2 mm (óptica) a 30 m		
Precisiones de distancia	Desviación típica de medición de distancia de 10 mm para $D \leq 10$ m y (distancia en m x 0.001) para $D > 10$ m		
Alcance	2 - 100 m (electrónico)		
Modos de medición	Aislado y seguimiento		
Tiempo para medida aislada	< 3 seg		
Compensador	Compensador de péndulo de amortiguación magnética (rango +/- 10 min)		
Anteojo	Aumento (óptico): 24x		
Registro de datos	Hasta 1.000 puntos (sólo 150M)		hasta 1.000 puntos
Condiciones ambientales	IP55		
Fuente de alimentación	Pilas secas AA (4 x LR6/AA/AM3 1,5 V)		
Peso	< 2.5 kg		

* Con mira de aluminio con código de barras Sprinter, puede alcanzarse 0,7 mm con mira de fibra de vidrio con código de barras Sprinter (2 ó 3 m, 1 sección)

2.2. Fundamentos de nivelación.

2.2.1. Definiciones.

Llamamos Altimetría a aquella parte de la Topografía que estudia los métodos e instrumentos necesarios para definir el relieve del terreno, mediante la obtención de la elevación o altura de puntos del terreno respecto a una superficie de comparación o la diferencia de elevación o altura entre dos o más puntos del terreno.

Nivelación es el término general que se aplica a los procesos que intervienen en la determinación de la altimetría del terreno. Es una metodología de tal importancia que no se concibe un proyecto de construcción en el que no sea crítica esta determinación, tal como la construcción de terraplenes, muros de contención, drenajes, cimentaciones de edificios, subsidencia del terreno, etc.

En altimetría, las superficies de comparación que se toman como referencia para determinar la elevación de los puntos del terreno corresponden a las superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre, denominadas también superficies de nivel. En ellas, la elevación de todos sus puntos es constante y la dirección de la gravedad es perpendicular en todos ellos. En realidad, debido al aplastamiento de la Tierra en la zona de los polos, las superficies de nivel a diferentes alturas y en diferentes latitudes no son verdaderamente concéntricas. De todas estas superficies de nivel, la más importante es la que corresponde a la de potencial cero, denominada geoide y definida como la resultante de prolongar idealmente la superficie de los mares en calma por debajo de los continentes.

Sin embargo, para simplificar, localmente podemos considerar las superficies de nivel esféricas y concéntricas a la superficie de la Tierra, a la que igualmente podremos considerar esférica en todo este análisis.

Aun esta simplificación, y debido a la irregularidad que presenta la superficie del geoide, es necesario definir en cada país un punto de referencia a partir del cual se establecen las elevaciones del terreno. En este punto, denominado, Punto Altimétrico Fundamental, se define por medio de mareógrafos que calculan el llamado cero nominal.

En nuestro país, este punto está establecido por un mareógrafo instalado por el Instituto Geográfico Nacional en el puerto de la ciudad de Alicante, que define la elevación cero para todo el territorio de nuestro país.

Una de las razones fundamentales es que, en esa zona, el nivel medio del mar Mediterráneo es bastante estable.

Podemos definir la Cota de un punto como su elevación o altura respecto a una superficie de nivel cualquiera, siguiendo la dirección de la fuerza de la gravedad. La cota del punto A sería entonces la distancia AA'. La cota así definida se llama Altura o Cota Ortométrica.

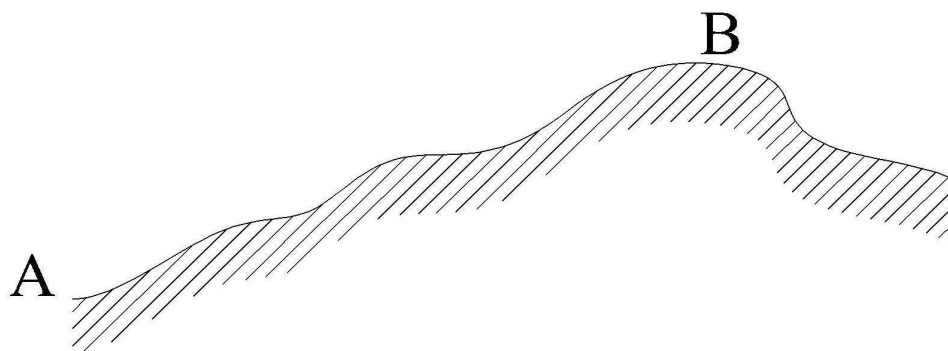
Definimos la Altitud como la cota de un punto cuando la superficie de comparación es el geoide. La altitud de A será la distancia AAO, y la de B la distancia BBO.

Finalmente, podemos definir el Desnivel entre dos puntos como la diferencia de alturas o elevaciones entre ellos, cualquiera que sea la superficie de comparación, es decir, es igual a la diferencia de cotas o altitudes. Según esta definición, el desnivel entre A y B es la distancia BB1.

En nivelación, a la operación de calcular altitudes o cotas de puntos, por aplicación de los desniveles entre ellos, se denomina Arrastrar o Correr cotas. Coloquialmente, en el ámbito de la Topografía, a las altitudes también se les suele llamar cotas.

2.2.2. Fundamento de la determinación del desnivel.

Supongamos dos puntos del terreno A y B, relativamente próximos (para fijar ideas, a una distancia inferior a 100 m.), que aparecen representados en el siguiente perfil.



Imaginemos que sobre ellos se traza un plano horizontal, representado por su traza H.

El desnivel entre A y B es la distancia entre las superficies de nivel que pasan por ambos puntos que, dada su proximidad, podemos suponer planas y horizontales. Este valor lo vamos a representar como ΔZ_A^B (que leeremos: incremento de Z entre A y B o desnivel entre A y B).

Podríamos calcular el desnivel entre ambos puntos si fuéramos capaces de medir la distancia vertical desde dichos puntos al plano horizontal H, valores indicados como L_A y L_B respectivamente, y estableciendo la siguiente igualdad,

$$L_A = L_B + \Delta Z_A^B \quad (2.1)$$

de donde podríamos obtener el desnivel como,

$$\Delta Z_A^B = L_A - L_B \quad (2.2)$$

Las distancias L_A y L_B se pueden medir con ayuda de un instrumento denominado equialtímetro, nivel de anteojo, o nivel topográfico, junto con una mira graduada.

2.2.3. Nivelación con 3 hilos.

Como su nombre indica, la nivelación con 3 hilos consiste en tomar lecturas sobre la mira en el hilo superior, el hilo central y el hilo inferior. Este procedimiento tiene las siguientes ventajas: a) permite realizar comprobaciones de las lecturas y evitar posibles errores, b) produce una mayor exactitud en las medidas al poder la media aritmética de las mismas, c) permite realizar mediciones estadimétricas para calcular la distancia de la visual entre el nivel y la mira, que permitirá calcular el peso de las observaciones para el ajuste de redes de nivelación por el método de los mínimos cuadrados.

En este procedimiento, la diferencia entre la lectura superior y la central se compara con la diferencia entre la lectura central y la inferior. Ambos valores deben coincidir o, en todo caso, diferir en menos del valor de la división más pequeña de la mira: 2 mm. Si la diferencia es mayor de esta cantidad, las tres lecturas deben ser repetidas, se calcula la media aritmética de todas ellas y se compara con el valor de la lectura central. Si coinciden o con prácticamente iguales (< 2 mm.), este valor es el que se toma como definitivo para los cálculos.

Por otro lado, la diferencia entre la lectura superior y la inferior, multiplicada por la constante estadimétrica del retículo del anteojo, normalmente 10, es igual a la distancia de la visual entre el nivel y la mira.

2.2.4. Método de nivelación del punto medio.

Se pueden distinguir dos tipos de nivelación, Geométrica o por alturas, o Trigonométrica o por ángulos.

El método de nivelación del punto medio se encuentra dentro de los métodos de nivelación geométrica simple, que son aquellos en los que se determina el desnivel entre dos o más puntos desde una única posición del nivel.

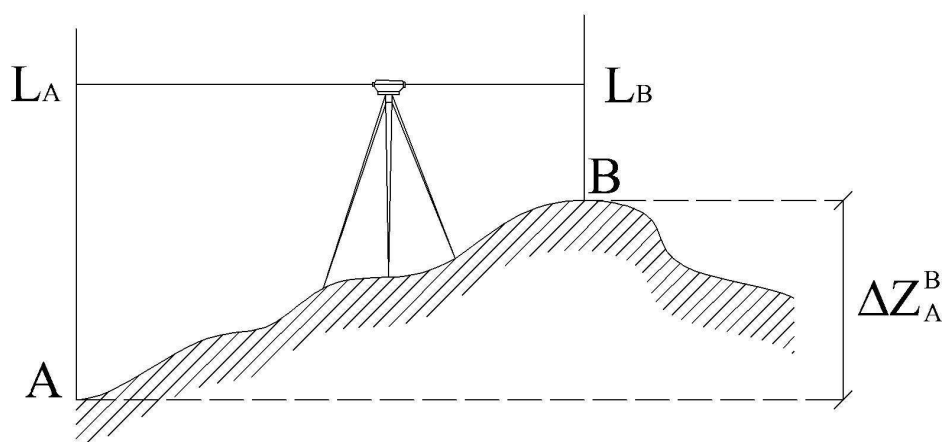
Consiste en posicionar el nivel en un punto arbitrario que esté situado, aproximadamente, a la misma distancia de los dos puntos cuyo desnivel se quiere obtener. Desde esa posición se tomará lectura en la mira colocada en A y después colocada en B.

Tendremos, por tanto, que

$$L_A = \Delta Z_A^B + L_B \quad (2.3)$$

de donde el desnivel será,

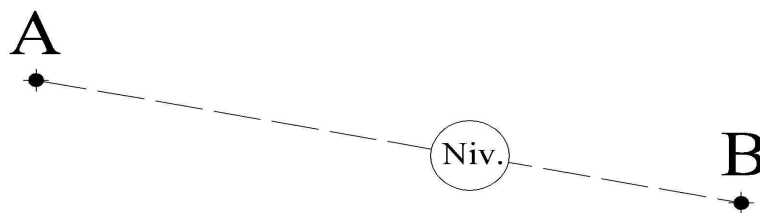
$$\Delta Z_A^B = L_A - L_B \quad (2.4)$$



Como hemos comentado anteriormente, la determinación del desnivel entre dos puntos se establece en un sentido determinado, desde un punto hacia otro: ΔZ_A^B , desnivel entre A y B, medido desde A hacia B. El valor numérico del desnivel debe indicar la posición relativa entre ambos puntos, por tanto, el desnivel debe venir acompañado de un signo, positivo si el punto hacia el cual se mide el desnivel tiene mayor cota que el punto desde el cual se mide, y negativo en caso contrario.

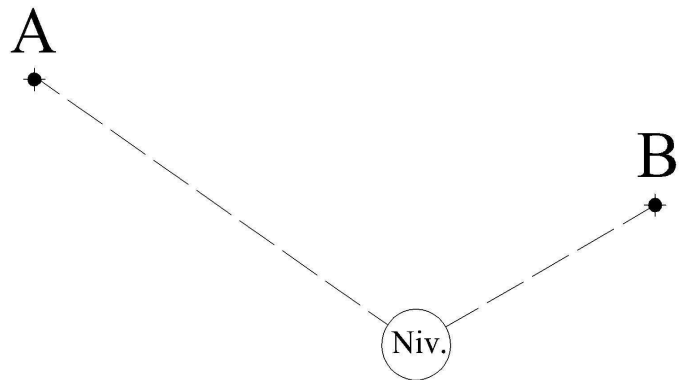
Como norma general, determinaremos el desnivel desde un punto hacia otro como la lectura en el punto desde el cual se mide, menos la lectura en el punto hacia el cual se mide. Esa diferencia de lecturas nos dará el signo correcto del desnivel, positivo o negativo, que indicará la posición relativa correcta entre ambos puntos. La nomenclatura que se emplea en nivelación es la siguiente: la lectura en el punto desde el cual se mide, se denomina lectura de espalda y la lectura en el punto hacia el cual se mide, se denomina lectura de frente. De esta forma, el desnivel entre dos puntos A y B, se determinará como,

$$\Delta Z_A^B = \text{Lectura de espalda (en A)} - \text{Lectura de frente (en B)}$$

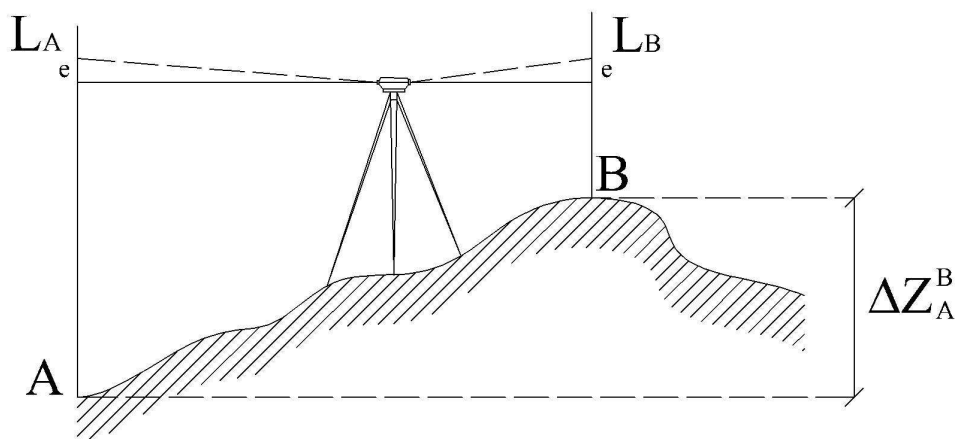


En el desarrollo longitudinal (o de perfil) que hemos indicado para la posición de los puntos A y B, y el nivel, hemos indicado que el nivel debe estar aproximadamente a la misma distancia de los puntos. Ello no implica necesariamente que el nivel está alineado con ellos; esto sería un caso particular.

El nivel puede estar en cualquier punto de la mediatriz del segmento que une los dos puntos. La posición particular en la que el nivel está alineado con los dos puntos es la más favorable, pues es aquella en la que las visuales a la mira tienen la menor longitud posible y, por tanto, se pueden realizar las lecturas con la mayor precisión.



Este método elimina la influencia del efecto de la esfericidad y la refracción, al quedar compensados en ambas visuales. También elimina la influencia de un posible error sistemático del instrumento por falta de horizontalidad del eje de colimación.



$$\Delta Z_A^B = (L_A - e) - (L_B - e) = L_A - e - L_B + e = L_A - L_B \quad (2.5)$$

Otra ventaja de este método es que no es necesario medir la altura del instrumento y, por ello, la altura del eje de colimación del nivel puede ser arbitraria. El desnivel entre puntos es independiente de la altura del instrumento, es decir, de la altura del plano definido por el eje de colimación.

Como caso particular, puede ocurrir que uno o ambos puntos estén situados por encima del plano de comparación que establece el eje de colimación del nivel.

$$\Delta Z_A^B = (-L_A) - L_B = -(L_A + L_B) < 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta Z_A^B = L_B - (-L_A) = L_B + L_A > 0$$

En estos casos se coloca la mira al revés apoyada sobre el punto que queda por encima del plano definido por el eje de colimación, de forma que la imagen de la misma a través del anteojo es invertida. Como ya se indicó, la lectura sobre el punto donde la mira está al revés se considera negativa, a efectos de determinar el desnivel como la diferencia entre la lectura de espalda y la lectura de frente.

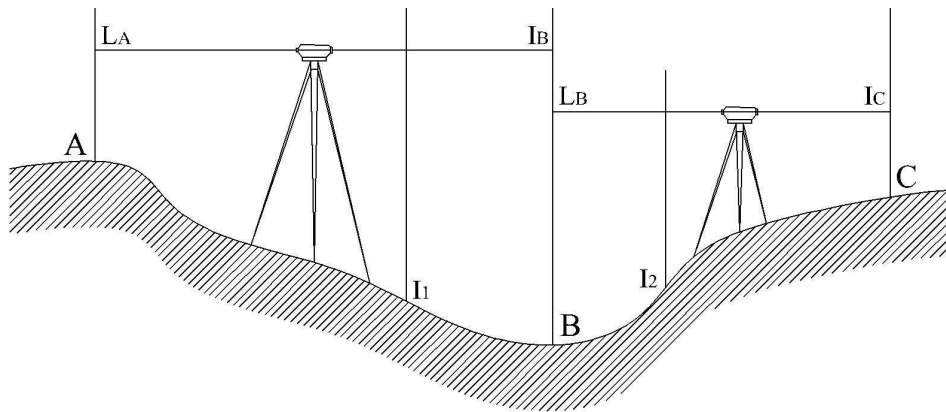
Tanto en este método como en el anterior, no hay forma de comprobar que el desnivel está bien calculado. Si alguna de las lecturas sobre la mira fuera errónea, el desnivel calculado sería erróneo y no tendríamos forma de detectar una mala lectura.

2.2.5. Nivelación geométrica compuesta.

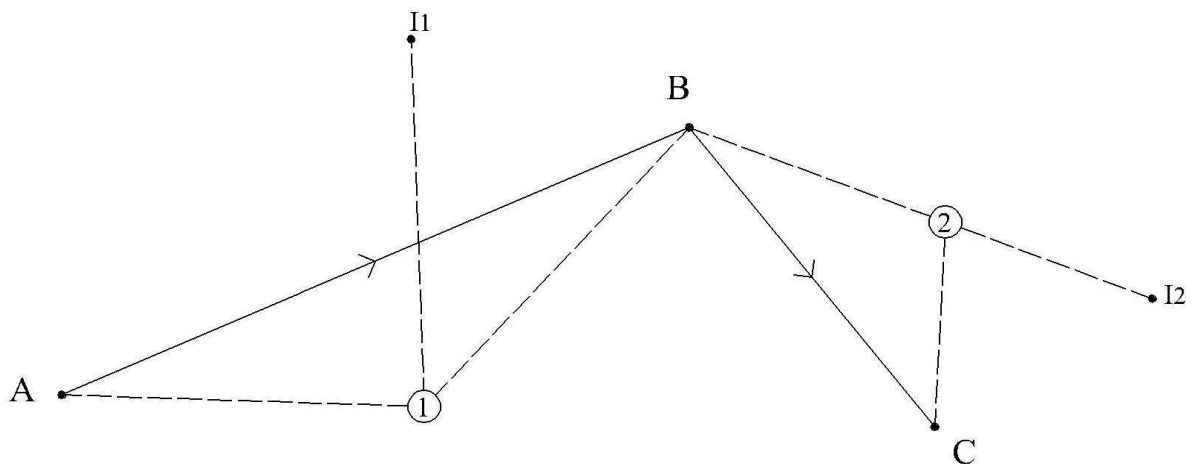
Se dice que la nivelación geométrica es compuesta cuando hemos de determinar el desnivel entre varios puntos del terreno de forma que, bien por no haber visibilidad entre todos ellos o bien porque están muy alejados unos de otros, es necesario cambiar de posición el nivel una o varias veces, haciendo un recorrido por el terreno.

Análisis de un tramo de nivelación.

Vamos a analizar, con carácter genérico, un tramo compuesto por dos ejes, de un itinerario cualquiera.



La situación, en planta, es la siguiente:



Consideremos, también con carácter genérico, un sentido de recorrido $A \rightarrow B \rightarrow C$. En el primer eje, entre A y B, colocamos el nivel en la posición 1, definiendo un plano de comparación. Desde esa posición del nivel, se realizan tres niveladas, hacia los puntos A, B e I_1 . La nivelada efectuada sobre A (L_A) se

denomina Nivelada de ESPALDA, mientras que la nivelada realizada sobre B (I_B) se denomina Nivelada de FRENTE. Ambos puntos, A y B, constituyen los extremos del eje. La denominación espalda o frente se establece según el sentido de avance del recorrido. La nivelada efectuada sobre I_1 , punto no perteneciente a los extremos del eje, se denomina nivelada INTERMEDIA.

Cambiamos el nivel a la posición 2, para continuar el recorrido del itinerario, donde el plano de comparación quedará, en general, a una altura diferente a la de la posición 1. Sobre el segundo eje, cuyos extremos son los puntos B y C, se realiza una nivelada de espalda sobre B (L_B), una de frente sobre C (I_C) y otra intermedia sobre I_2 , punto éste no perteneciente a los extremos del eje. Distinguimos con L e I las lecturas de espalda y frente respectivamente, con objeto de poder distinguir ambos tipos de lecturas.

Para poder relacionar las medidas (lecturas) tomadas desde ambas posiciones del nivel, es necesario enlazar los dos planos de comparación. Esto se consigue, tal y como hemos hecho, tomando una nivelada de frente sobre el punto B (I_B), desde la posición 1 y una nivelada de espalda sobre dicho punto (L_B), desde la posición 2, puesto que el punto B es el punto común de ambos ejes. Este punto B, así considerado, se denomina Punto de ENLACE. Por tanto, el punto común a cada pareja de ejes consecutivos de un itinerario será siempre un punto de enlace.

Según hemos visto, las niveladas intermedias corresponden a puntos que NO forman parte de los extremos de los ejes de un itinerario. Por tanto, estos puntos no sirven para enlazar los planos de comparación, sino que forman parte de la radiación hecha desde cada posición del nivel. De esta manera, cada eje de un itinerario constará, siempre, de una nivelada de espalda, una nivelada de frente y, en ocasiones, de una o varias niveladas intermedias (puntos radiados).

De la descripción realizada, vamos a extraer una serie de conclusiones.

Según sabemos,

$$\begin{aligned}\Delta Z_A^B &= L_A - I_B \\ \Delta Z_B^C &= L_B - I_C\end{aligned}\tag{2.7}$$

y por tanto la diferencia de nivel entre los puntos extremos de un itinerario será igual a la suma de los desniveles parciales de cada uno de los ejes que lo componen. De donde,

$$\Delta Z_A^C = \Delta Z_A^B + \Delta Z_B^C = L_A - I_B + L_B - I_C = (L_A + L_B) - (I_B + I_C) \quad (2.8)$$

$$\Delta Z_A^C = \sum (\text{Lecturas de espalda}) - \sum (\text{Lecturas de frente})$$

es decir, la diferencia de nivel (desnivel) entre los puntos extremos de un itinerario es igual a la suma de las niveladas de espalda menos la suma de las niveladas de frente.

Conocida la cota de A y los desniveles entre A y B, B y C, A y C, podremos calcular la cota de los puntos B y C,

$$Z_B = Z_A + \Delta Z_A^B \quad (2.9)$$

$$Z_C = Z_B + \Delta Z_B^C$$

Y también,

$$Z_C = Z_A + \Delta Z_A^C \quad (2.10)$$

De estas expresiones, podemos deducir que la diferencia de nivel entre dos puntos es igual a la diferencia de cotas entre ellos,

$$\Delta Z_A^B = Z_B - Z_A$$

$$\Delta Z_B^C = Z_C - Z_B \quad (2.11)$$

$$\Delta Z_A^C = Z_C - Z_A$$

Bien entendido que el desnivel así obtenido llevará implícito un signo (positivo o negativo) que indicará la posición vertical relativa (desnivel) de los puntos medidos en el sentido desde el subíndice al superíndice.

2.2.6. Errores aleatorios en la nivelación geométrica

Además de los errores sistemáticos que aparecen en la nivelación, tales como el error de esfericidad, error de refracción y error debido a la falta de horizontalidad del eje de colimación, existen diversas causas por las que pueden aparecer errores aleatorios, siendo las principales las debidas a la nivelación del instrumento y a la lectura sobre la mira. El tamaño de estos errores se ve afectado por la calidad de la óptica del anteojo, la sensibilidad del nivel de burbuja y del compensador, y la graduación de la mira.

2.2.6.1. Error en la nivelación del instrumento.

El error estimado en la nivelación de un instrumento que tiene un compensador automático, vienen dados por el fabricante en los datos técnicos de dicho instrumento. Los niveles con un compensador de gran precisión suelen presentar una desviación en torno a $\pm 0.2''$, pudiendo llegar hasta $\pm 10''$ para niveles de poca precisión. Para los niveles utilizados, Leica NA724 y Leica Sprinter 200, la precisión del compensador es de $\pm 0.5''$ y $\pm 0.8''$ respectivamente.

$$\sigma_c = \pm 0.5'' \quad \text{Nivel automático Leica NA724} \quad (2.12)$$

$$\sigma_c = \pm 0.8'' \quad \text{Nivel digital Leica Sprinter 200}$$

Para una distancia D , entre el nivel y la mira, este error se cuantifica por

$$\sigma_{c/D} = D \sigma_c \quad (2.13)$$

Si se aplica esta expresión al cálculo del desnivel entre dos puntos del terreno separados una distancia $2D$, mediante el método del punto medio, el error de dicho desnivel será,

$$\sigma_{\Delta z/c}^2 = \sigma_{c/D}^2 + \sigma_{c/D}^2 = 2 \sigma_{c/D}^2 = 2D^2 \sigma_c^2 \quad (2.14)$$

de donde,

$$\sigma_{\Delta z/c} = \pm D \sigma_c \sqrt{2} \quad (2.15)$$

2.2.6.2. Error en la lectura sobre la mira.

El error estimado en la lectura de la mira se expresa normalmente como el error estándar estimado en la lectura de la mira por unidad de longitud de la visual. Para los niveles Leica NA724 y Leica Sprinter 200, la precisión en la lectura de la mira es de $\pm 1.2 \text{ mm.}$ y $\pm 0.6 \text{ mm.}$, respectivamente, a una distancia de 30 m. tal y como establece la norma ISO 17123-2. Estos valores corresponden a un error en la lectura de la mira, por unidad de longitud, de

$$\sigma_{\ell} = \pm 0.04 \text{ mm/m. Nivel automático Leica NA724} \quad (2.16)$$

$$\sigma_{\ell} = \pm 0.02 \text{ mm/m. Nivel digital Leica Sprinter 200}$$

Para una distancia D entre el nivel y la mira, el error de lectura será

$$\sigma_{\ell/D} = D\sigma_{\ell} \quad (2.17)$$

Si se aplica esta expresión al cálculo del desnivel entre dos puntos del terreno separados una distancia 2D, mediante el método del punto medio, el error de dicho desnivel será,

$$\sigma_{\Delta z/\ell}^2 = \sigma_{\ell/D}^2 + \sigma_{\ell/D}^2 = 2\sigma_{\ell/D}^2 = 2D^2\sigma_{\ell}^2 \quad (2.18)$$

de donde,

$$\sigma_{\Delta z/\ell} = \pm D\sigma_{\ell}\sqrt{2} \quad (2.19)$$

2.2.6.3. Error total.

Por tanto, el error aleatorio total del desnivel entre dos puntos debido a ambas causas, nivelación del instrumento y lectura de mira, viene dado por

$$\sigma_{\Delta z}^2 = \sigma_{\Delta z/c}^2 + \sigma_{\Delta z/\ell}^2 = 2D^2\sigma_c^2 + 2D^2\sigma_{\ell}^2 = 2D^2(\sigma_c^2 + \sigma_{\ell}^2) \quad (2.20)$$

de donde

$$\sigma_{\Delta z} = \pm \sqrt{2D^2(\sigma_c^2 + \sigma_{\ell}^2)} = \pm D\sqrt{2(\sigma_c^2 + \sigma_{\ell}^2)} \quad (2.21)$$

Por ejemplo, si se utiliza un nivel Leica NA724 para determinar el desnivel entre dos puntos del terreno separados una distancia de 100 m. aplicando el método

del punto medio, el error total de dicho desnivel será

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta z} &= \pm D \sqrt{2(\sigma_c^2 + \sigma_\ell^2)} = \pm 50 \text{ m} \cdot \sqrt{2 \left(\frac{0.5''}{\rho''} \right)^2 + 2 \left(\frac{0.04 \text{ mm.}}{1000 \text{ mm.}} \right)^2} = \\ &= \pm 50 \sqrt{2 \left(\frac{0.5}{206265} \right)^2 + 2 \left(\frac{0.04}{1000} \right)^2} = \pm 0.00283 \text{ m.} = \\ &= \pm 2.83 \text{ mm.}\end{aligned}$$

Para el caso del nivel digital Leica Sprinter 200,

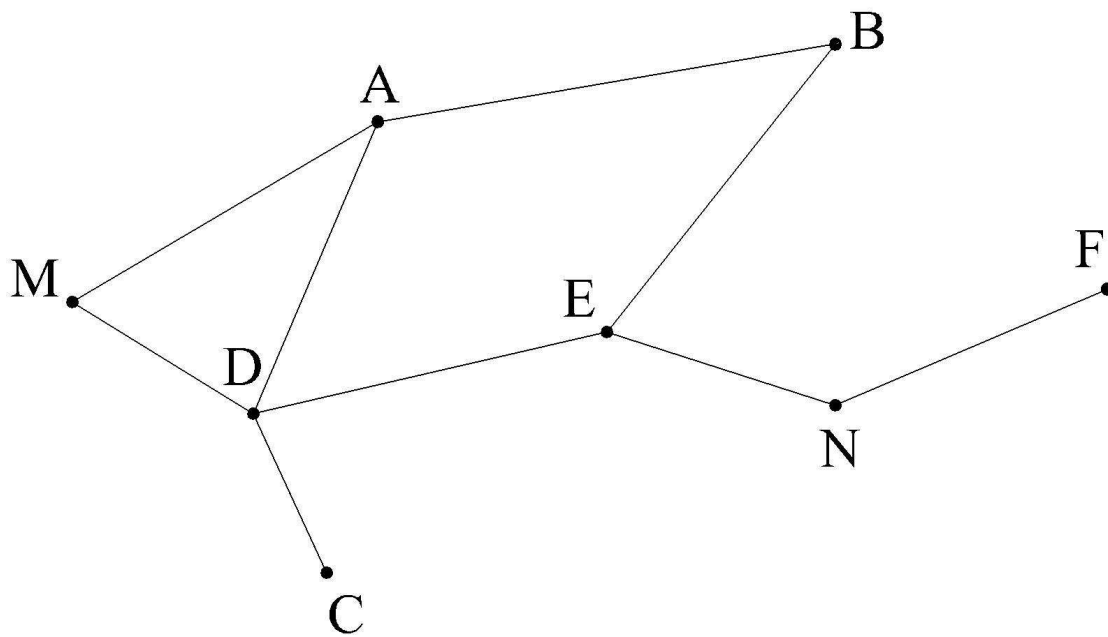
$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta z} &= \pm D \sqrt{2(\sigma_c^2 + \sigma_\ell^2)} = \pm 50 \text{ m} \cdot \sqrt{2 \left(\frac{0.8''}{\rho''} \right)^2 + 2 \left(\frac{0.02 \text{ mm.}}{1000 \text{ mm.}} \right)^2} = \\ &= \pm 50 \sqrt{2 \left(\frac{0.8}{206265} \right)^2 + 2 \left(\frac{0.02}{1000} \right)^2} = \pm 0.00144 \text{ m.} = \\ &= \pm 1.44 \text{ mm.}\end{aligned}$$

2.2.7. Redes de nivelación

El desarrollo clásico de los métodos de nivelación geométrica compuesta y sus procedimientos de compensación de errores, mediante la realización de itinerarios altimétricos o líneas de nivelación, se ven condicionados por la geometría de los recorridos a realizar, dando lugar a los itinerarios cerrados y abiertos. El desarrollo de los mismos es lineal, con un punto de inicio y otro punto de finalización, sin posibilidad de bifurcaciones. Se ha de establecer un sentido de recorrido que implica la necesidad de asignar un orden a los distintos ejes. Además, es necesario conocer al menos la cota de un punto en los itinerarios cerrados, o la cota de dos puntos en el caso de los itinerarios encuadrados. En ellos, tanto el cálculo del llamado “error de cierre” como el procedimiento de compensación de errores empleado, se establecen en función de esa geometría, repartiendo el error a partes iguales entre los distintos ejes y empleando la libreta de nivelación como ayuda para el cálculo ordenado de los resultados. Este tipo de itinerarios no nos permite realizar trabajos de cierta envergadura o extensión.

Hoy día, con los avances en la fabricación de instrumentos cada vez más precisos y el empleo de ordenadores, estos procesos resultan obsoletos y hemos de dar paso a la generalización de estos métodos en su ampliación práctica sobre el terreno y a un tratamiento matemático riguroso del ajuste de los errores que se produzcan como consecuencia de la toma de medidas.

Todo ello nos conduce a la ampliación o extensión del concepto de itinerario de nivelación al concepto de red de nivelación. Esta se puede definir como un conjunto de itinerarios conectados o enlazados entre sí, donde pueden existir otro tipo de condicionamientos tales como uno o más puntos de cota conocida, e incluso uno o varios desniveles conocidos previamente. Desde el punto de vista de cálculo, en las redes de nivelación no existe un punto inicial y otro punto final, aunque físicamente si existan a la hora de la toma de datos en campo. Tampoco es necesario definir un sentido de recorrido, aunque sobre el terreno los datos se tomen en un orden determinado.

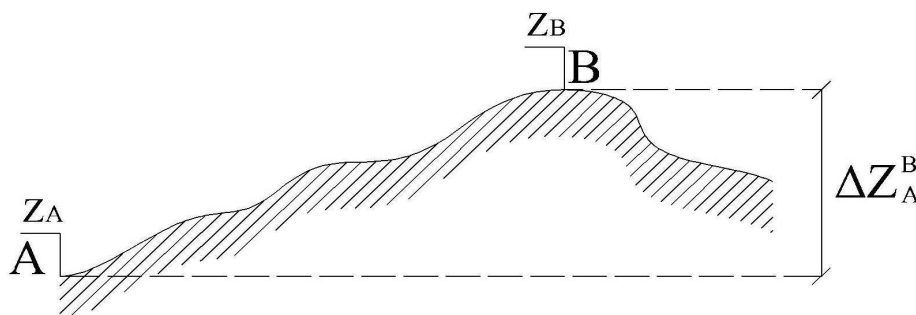


Para el cálculo de este tipo de redes vamos a emplear la metodología desarrollada en el capítulo anterior, aplicando el criterio de compensación de los errores basado en el principio de los mínimos cuadrados, todo ello con las herramientas de cálculo que nos proporcionan el álgebra lineal y la teoría de matrices.

2.2.8. Ecuación básica de observación del desnivel.

Según hemos estudiado anteriormente, consideramos dos puntos del terreno, cuyo desnivel ΔZ_A^B queremos determinar. Ese desnivel podemos expresarlo en función de las cotas de dichos puntos, que en general serán desconocidas

$$\Delta Z_A^B = Z_B - Z_A \quad (2.22)$$



Con ayuda de un nivel y una mira podemos determinar ese desnivel, como sabemos, aplicando el método del punto medio y expresar el desnivel en función de las lecturas de mira.

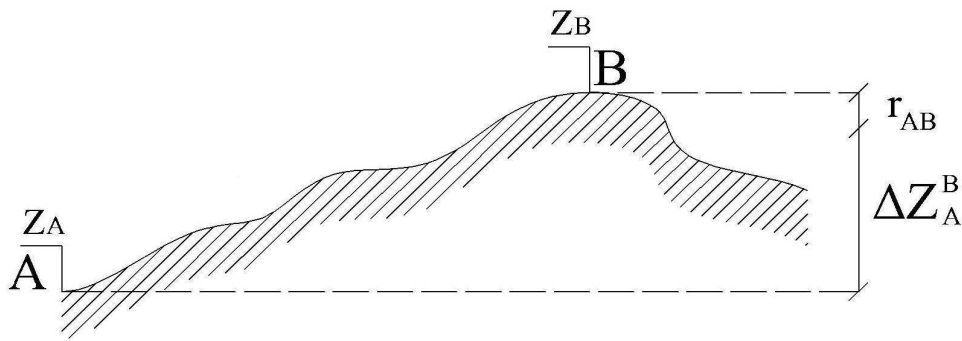
$$\Delta Z_A^B = L_A - L_B \quad (2.23)$$

Con estas consideraciones, podríamos escribir la siguiente ecuación lineal,

$$\Delta Z_A^B = Z_B - Z_A = L_A - L_B \quad (2.24)$$

expresión que se denomina ECUACIÓN BÁSICA DE OBSERVACIÓN DE DESNIVEL, que relaciona las cotas de los puntos del terreno, como incógnitas, con las lecturas de mira, que son valores medidos y, por tanto, conocidos.

Sin embargo, como sabemos, en todo proceso de medición se cometen errores, y por ello debemos admitir que las lecturas de mira pueden ir acompañadas de un cierto error en su medición, que conduce inevitablemente a que las cotas calculadas, a partir de esas lecturas, sean también erróneas. En este sentido, es necesario definir la ecuación básica del desnivel (2.24), introduciendo en el primer miembro un componente denominado residuo, que compense los errores inherentes al proceso de medición que acompañan a las lecturas de mira que aparecen en el segundo miembro de la ecuación.



De esta forma, la ecuación básica del desnivel sería,

$$\Delta Z_A^B + r_{AB} = Z_B - Z_A + r_{AB} = L_A - L_B \quad (2.25)$$

En esta ecuación podrán ser incógnitas la cota de uno o ambos puntos y el residuo.

2.2.9. Peso de las observaciones en la nivelación geométrica.

Como se ha visto en el apartado 1.2.4., el peso de una observación se calcula mediante la expresión

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \quad (2.26)$$

Si consideramos que la varianza de la observación de peso unidad es $\sigma_0^2 = 1$, entonces el peso se calcula como

$$p = \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.27)$$

siendo σ^2 la varianza de la observación.

La varianza de la observación de un desnivel se calcula mediante la expresión

$$\sigma_{\Delta z}^2 = 2D^2(\sigma_c^2 + \sigma_l^2) \quad (2.28)$$

Como D es la distancia de cada visual entre el nivel y la mira, y en cada eje se realizan dos visuales iguales (espalda y frente), si llamamos L a la distancia total de las dos visuales tendremos que

$$L=2D \quad (2.29)$$

y por tanto, en la expresión (2.28) podremos considerar que D , σ_c^2 y σ_1^2 son constantes, de donde la varianza del desnivel será

$$\sigma_{\Delta z}^2 = 2D^2(\sigma_c^2 + \sigma_1^2) = LD(\sigma_c^2 + \sigma_1^2) = kL \quad (2.30)$$

siendo k una constante, según las características técnicas del nivel utilizado en la medición.

Según esta última expresión, el peso de un desnivel vendrá dado por

$$p_{\Delta z} = \frac{1}{\sigma_{\Delta z}^2} = \frac{1}{kL} \quad (2.31)$$

pero como los pesos son cantidades relativas, podemos simplificar la expresión anterior y definir el peso de un desnivel como

$$p_{\Delta z} = \frac{1}{L} \quad (2.32)$$

En resumen, podemos establecer que el peso de un desnivel es la inversa de la distancia total de las dos visuales que se realizan para su determinación. En este caso, la distancia L se expresa normalmente en kilómetros.

Como se ha explicado en el apartado 2.2.3, nivelación con 3 hilos, la toma de lecturas superior, central e inferior sobre la mira nos permite, entre otras cosas, calcular la distancia de la visual entre el nivel y la mira. Como en la determinación del desnivel entre dos puntos hay dos visuales, una de espalda y otra de frente, calculando la distancia de ambas podremos calcular la distancia total.

Es más fácil entender que cuanto menor es la distancia entre el nivel y la mira, la lectura sobre la misma se hace con mayor precisión puesto que, para un determinado número de aumentos de la lente, la imagen de la mira a través del anteojo se verá de mayor tamaño. Por tanto, el error de lectura $\sigma_{1/D}$ será menor. Por

ello, podríamos establecer que a menor distancia entre el nivel y la mira, mayor es la precisión con la que se calcula el desnivel, frente a otro desnivel calculado a partir de lecturas de mira tomadas con visuales de mayor longitud. Si calculamos la distancia total de las dos visuales que intervienen en la medida de un desnivel, esta cantidad nos puede servir para calcular un parámetro relativo, el peso de la observación, que indique la mayor o menos precisión con la que se ha calculado ese desnivel con respecto a otro, tal y como se ha indicado en la ecuación (2.32).

Con este parámetro vamos a ponderar cada una de las ecuaciones básicas de observación generadas en la red de nivelación, con objeto de indicar el peso que cada ecuación tiene en el conjunto de la red, es decir, la precisión que corresponde a cada uno de los desniveles que se han medido. En principio, un desnivel con un peso mayor se verá afectado de un ajuste menos en el conjunto de la red.

De esta manera, la ecuación básica del desnivel considerando el peso sería,

$$p_{AB}(\Delta Z_A^B + r_{AB}) = p_{AB}(Z_B - Z_A + r_{AB}) = p_{AB}(L_A - L_B) \quad (2.33)$$

Como puede entenderse fácilmente, la ecuación no se modifica al multiplicar ambos miembros por el peso.

3. Ajuste de redes de nivelación.

3.1. Ajuste de redes de nivelación.

Teniendo en consideración el planteamiento establecido en los apartados anteriores, en una red de nivelación de m desniveles con n puntos de cota desconocida, podremos escribir una ecuación básica de la forma indicada en (2.24), por cada uno de los desniveles medidos. En este análisis, y por simplificar, hemos considerado la no existencia de puntos intermedios en los ejes, con lo que únicamente es posible determinar un desnivel en cada eje, que resulta en una ecuación básica.

En caso de existir puntos intermedios en algunos ejes, en cada uno de ellos se podrán plantear tantas ecuaciones básicas como desniveles puedan establecerse entre dos puntos cualesquiera de dicho eje.

En general, como ocurre siempre en Topografía, tendremos una cantidad de medidas (m) superiores a las necesarias para resolver el problema (n). Por ello, podemos concluir que en una red de nivelación con m desniveles y n puntos de cota desconocida, se generará un sistema de m ecuaciones lineales con $n+m$ incógnitas, con $m > n$. Para resolver este problema matemático emplearemos las potentes herramientas que nos proporciona el álgebra matricial.

3.2. Redes de nivelación con restricciones.

Anteriormente hemos comentado que para calcular una red de nivelación es necesario conocer, como mínimo, la cota de un punto conocido. En ocasiones se puede presentar el caso de conocer previamente, además de la cota de algún punto, el desnivel existente entre una o varias parejas de puntos del terreno. Esto puede ser debido a la existencia de alguna medición previa en la zona, mediante la cual se haya determinado con gran precisión el desnivel entre algunos puntos. Estos desniveles fijos suponen un condicionamiento para el modelo de ajuste de forma que, una vez calculadas las cotas, se deben verificar esos desniveles fijos conocidos de antemano. Por ello, cuando en una red de nivelación se conoce previamente el desnivel exacto

entre una o varias parejas de puntos, decimos que se trata de una red con restricciones. Tales restricciones se deben tener en cuenta durante el proceso de cálculo y cumplir (verificar) tras el ajuste.

Para ello se aplicará la teoría desarrollada en los apartados 1.1.14, 1.1.15 y 1.1.16.

4. Aplicación a los métodos planimétricos.

4.1. Características de instrumentos.

Para la realización de la parte práctica del apartado de planimetría y red espacial de este proyecto, se ha usado la estación total de la serie 300 de Leica, Leica TCR 307.

4.1.1. Ángulos que se consideran en topografía.

Los ángulos pueden medirse de forma directa, mediante un instrumento topográfico, o determinarse de forma indirecta, a partir de relaciones trigonométricas, como cuando en un triángulo se mide la longitud de tres de sus lados. A través del teorema del coseno se puede calcular la magnitud de cualquiera de sus tres ángulos.

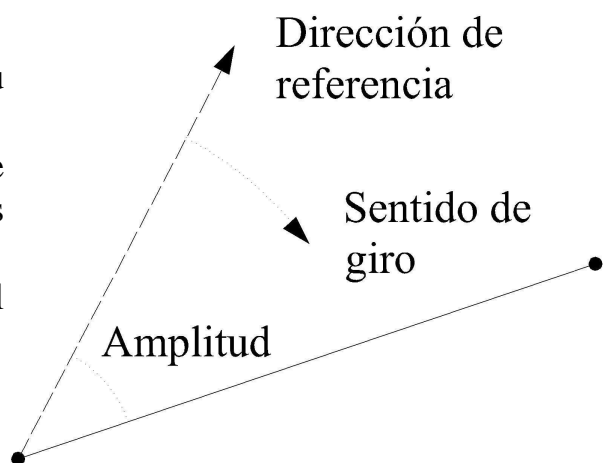
$$\hat{B} = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \quad (4.1)$$

4.1.2. Elementos básicos que definen la medida de un ángulo.

En la siguiente figura se muestran los elementos básicos necesarios para definir la medida de un ángulo.

Estos elementos son:

- Una dirección de referencia u origen de la mediación.
- El sentido de giro, positivo si se considera en el sentido de las agujas del reloj.
- La amplitud o valor numérico del ángulo.



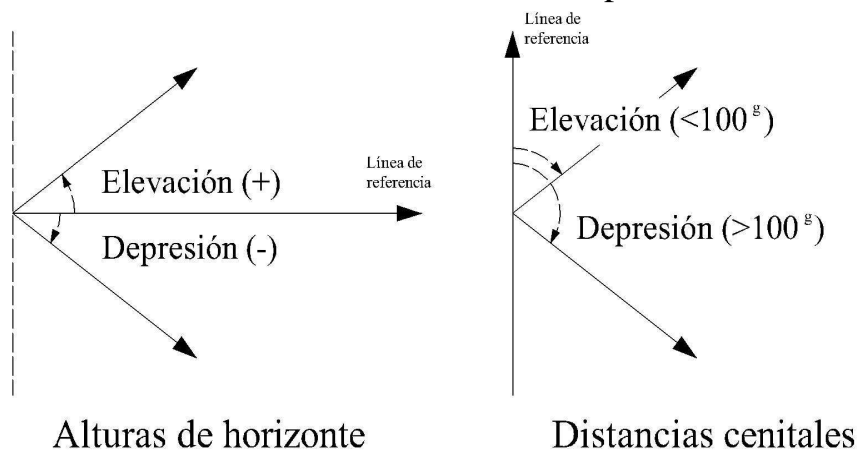
Teniendo en cuenta estos elementos, se puede realizar una clasificación de los ángulos de la manera siguiente:

HORIZONTALES:

- Acimut: ángulo horizontal medido respecto a la dirección del norte geográfico.
- Rumbo: ángulo horizontal medido respecto a la dirección del norte magnético.
- Orientación: ángulo horizontal medido respecto a la dirección del norte de la cuadrícula

VERTICALES:

- Altura de horizonte: ángulo vertical medido a partir de una dirección horizontal. Estos ángulos se denominan también ángulos de pendiente, y pueden ser de elevación (considerados positivos), si se miden hacia una dirección por encima de la dirección horizontal de referencia, o de depresión (considerados negativos) si se miden hacia una dirección por debajo de la dirección horizontal de referencia.
- Distancia cenital: ángulo vertical medido a partir de la dirección cenital. Estos ángulos se denominan también ángulos cenitales, y pueden ser de elevación si son menores de 100° o de depresión si son mayores.



En la práctica topográfica, dada la dificultad natural que supone conocer con precisión la dirección horizontal que corresponde a cualquiera de los tres nortes establecido sobre el terreno, no se utiliza ninguna de estas tres como origen de medida de los ángulos horizontales, sino que estos se definen a partir de una dirección horizontal arbitrariamente elegida por nosotros sobre la superficie del terreno. De esta manera, definiremos la dirección u orientación de una alineación recta sobre el terreno, como el ángulo horizontal medido a partir de una dirección de

referencia arbitrariamente elegida por nosotros alrededor del horizonte, donde habremos fijado previamente el origen de medida de estos ángulos. También es común, en la práctica topográfica, designar a este tipo de ángulos horizontales con el vocablo Acimut, entendiéndose claramente que no se corresponde con el acimut geográfico, sino con un ángulo horizontal medido a partir de una dirección arbitraria de referencia.

Los ángulos verticales que habitualmente se emplean son los cenitales.

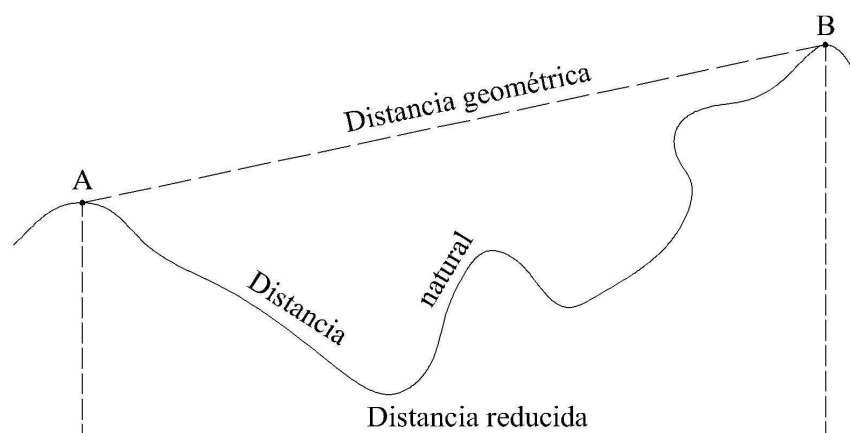
4.1.3. Generalidades.

Con carácter genérico, designaremos con el nombre de goniómetro al dispositivo o instrumento que permite la medida de ángulos.

En el ámbito de la Topografía, denominamos goniómetro acimutal al que solo mide ángulos horizontales. Si el goniómetro únicamente mide ángulos verticales se denomina eclímetro. Si el goniómetro permite medir ambos tipos de ángulos se denomina goniómetro completo. El instrumento topográfico que se corresponde con los denominados goniómetros completos, se denomina específicamente teodolito.

4.1.4. Tipos de distancias.

Entre dos puntos del terreno, A y B, se pueden definir tres tipos de distancia, según se muestra a continuación, natural, geométrica y reducida.



La distancia natural es la que corresponde al perfil que resulta de la intersección del plano vertical que contiene a ambos puntos y la superficie del

terreno. Es la que recorreríamos si fuésemos caminando por el terreno sin salirnos de dicho plano vertical. Esta distancia se mide con un odómetro.

La distancia geométrica es la longitud del vector que une ambos puntos en el espacio. Esta distancia se mide de manera indirecta mediante instrumentos topográficos.

La distancia reducida es la proyección de las dos distancias anteriores sobre un plano horizontal. Esta se suele medir de manera directa o se puede deducir a partir de la distancia geométrica. Es la distancia mas importante en Topografía, dado que el terreno se representa en el sistema de planos acotados.

4.1.5. Instrumentos que integran la medición de ángulos y distancias.

Al instrumento que integra conjuntamente la medición de ángulos y distancias se le denomina taquímetro, de forma que podríamos decir que:

$$\text{TAQUIMETRO} = \text{TEODOLITO} + \text{DISTANCIOMETRO}$$

Los primeros distanciómetros electrónicos, debido a su tamaño, se montaban externamente sobre los teodolitos. Posteriormente, con los avances de la electrónica se redujo su tamaño y se implementaron en el interior de los anteojos, denominándose así taquímetros electrónicos.

Se les añadió la posibilidad de almacenar los datos medidos en soporte magnético, bien en un colector de datos o en tarjetas de memoria, pasando a denominarse estaciones totales.

Más tarde los dispositivos de memoria redujeron su tamaño y se implementaron en el interior de las estaciones totales, disponiendo así de una memoria interna. Para extraer los datos de medición se conecta la estación total al puerto serie o USB del ordenador.

4.1.6. Estación total.

Responden a una estructura básica: base nivelante con tornillos, limbo horizontal y aliada, con anteojo y limbo vertical.

El anteojo lleva implementado un retículo que permite hacer puntería, tanto en horizontal como en vertical, hacia los puntos a medir.

Para poder realizar medidas angulares con un teodolito, desde un punto del terreno denominado punto de estación, este a de ser colocado solidariamente sobre un trípode y este último apoyado sobre el terreno. Cuando esta operación haya finalizado, los niveles de burbuja han de estar calados y la proyección del eje principal del instrumento, materializado por la plomada, debe incidir sobre el punto de estación del terreno desde el que se van a efectuar las mediciones angulares, que a su vez estará materializado mediante algún elemento de señalización (clavo, estaca, etc.)



Colocaremos el teodolito centrado sobre la plataforma del trípode, enroscando el tornillo de fijación del mismo a la parte inferior de la base nivelante del teodolito, quedando éste rígidamente unido al trípode y al terreno.

El centrado exacto sobre el punto de estación se realiza con ayuda de la plomada óptica. Los modernos teodolitos electrónicos incorporan un nivel esférico de burbuja, de poca sensibilidad, para facilitar una nivelación previa aproximada, antes de realizar la nivelación final precisa con el nivel de burbuja tórico de la aliada. En estos instrumentos, los niveles tóricos de la aliada son electrónicos, aparecen visibles en la pantalla del teodolito y son mas sensibles que los niveles esféricos.

Habiendo hecho coincidir la plomada con el punto de estación habrá que calar la burbuja del nivel esférico sin que la plomada se aleje del punto de estación.

Acortando o alargando la longitud de las patas de forma que la burbuja tienda a ir hacia el centro del nivel. La modificación de la longitud de la pata deberá finalizar cuando observemos que la línea imaginaria entre la burbuja y el centro del nivel incide sobre alguna de las dos patas. La burbuja se moverá alejándose de la pata que

se acorte o acercándose hacia la pata que se alargue.

Esta operación se repetirá hasta que la burbuja del nivel quede en el interior de la circunferencia impresa sobre el mismo, es decir, esté calada.

A partir de ese momento, con la burbuja del nivel esférico calada y la plomada prácticamente sobre el punto de estación, nos olvidaremos del nivel esférico, dado que tiene poca sensibilidad (del orden de $6''$) y su centrado no garantiza la verticalidad del eje principal. Ahora se procederá a calar la burbuja de los dos niveles tóricos electrónicos que aparecen gráficamente en la pantalla del teodolito, de mucha más intensidad (del orden de $20''$).

En primer lugar se calará la burbuja de uno de estos dos niveles, accionando simultáneamente dos de los tornillos de la base nivelante en sentido contrario teniendo en cuenta, como ya sabemos, que la burbuja se desplazará hacia donde se mueva el dedo pulgar de la mano izquierda. Una vez calado este nivel, con el tercer tornillo se calará el otro, colocado en dirección perpendicular al primero.

El calado de estas dos burbujas hace que se modifique la dirección del eje principal, que al estar ahora en posición vertical implica que su proyección se haya desplazado de la posición del punto de estación. En este momento tenemos las burbujas caladas, pero el eje principal (la plomada) no incide sobre el punto de estación. Para conseguirlo, se aflojará ligeramente el tornillo de fijación del teodolito al trípode, y se desplazará sobre la plataforma del mismo, sin girarlo, hasta que la plomada incida nuevamente sobre el punto de estación, gracias a la holgura que permite el hueco de dicha plataforma. Debido a este desplazamiento, es posible que las burbujas de los niveles tóricos se hayan descentrado. En este momento podemos tener el eje principal (la plomada) sobre el punto de estación, pero las burbujas ligeramente descentradas. El proceso anterior se repetirá hasta conseguir que las burbujas estén caladas y la plomada incida exactamente sobre el punto de estación.

Orientar el teodolito consiste en elegir una dirección de referencia, alrededor del horizonte, sobre el cual vamos a hacer coincidir la lectura 0° , es decir, vamos a fijar el origen de la lectura de los ángulos horizontales.

Esa dirección estará definida por algún elemento de carácter permanente en el entorno del terreno y que nos permita hacer una puntería precisa con el retículo del anteojo. Apuntando con precisión a ese elemento y mediante el teclado del teodolito, cambiaremos la dirección a la que estuviera apuntando en ese momento la lectura 0° hacia esta nueva dirección a la que apunta el anteojo. De esta forma, hemos cambiado

la dirección de referencia u origen de la medición de ángulos horizontales hacia una dirección concreta, que nos permita volver a orientar el teodolito en la misma dirección si fuera necesario continuar las mediciones en días posteriores.

Leica TCR 307. Características.

Taquímetro con el que el trabajo de posicionamiento y medición en las obras se puede hacer más fácil, rápido y preciso.

Datos técnicos

Anteojos

- Totalmente basculable
- Aumentos: 30x
- Imagen: derecha
- Diámetro libre del objetivo: 40 mm
- Distancia mínima de enfoque: 1.7 m (5.6 ft)
- Enfoque: fino
- Campo visual: 1°36' (1.6gon)
- Campo visual a 100m: 2.6m

Medida de ángulo:

- absoluta, continua
- Tiempo de repetición 0.3 segundos
- Unidades elegibles: 360° (sexag.), 400gon, 360° decimal, 6400 mil, V%, ±V
- Desviación típica (según DIN 18723 / ISO 12857)

TC(R)303	3" (1 mgon)
TC(R)305	5" (1.5 mgon)
TC(R)307	7" (2 mgon)
- Resolución de pantalla

gon	0.0005
360d	0.0005
360s	1"
mil	0.01

Sensibilidad de los niveles

- Nivel esférico: 6"/2 mm
- Nivel electrónico: 20"/2mm

Plomada láser:

- Situación: en el eje principal del instrumento
- Precisión: Desviación de la línea de la plomada: 1.5 mm (2s) a 1.5m de altura del instrumento
- Ø del punto láser: 2.5mm/1.5m

Compensador:

- Compensador de dos ejes
- Amplitud de oscilación libre: ±4' (0.07 gon)
- Precisión de estabilización

(TC(R)307)	2" (0.7 mgon)
(TC(R)305)	1.5" (0.5 mgon)
(TC(R)303)	1" (0.3 mgon)

Teclado:

- Ángulo de inclinación: 70°
- Superficie: 110x75 mm
- número de teclas: 12 más ON y disparador de medición (en el lateral)
- segundo teclado opcional

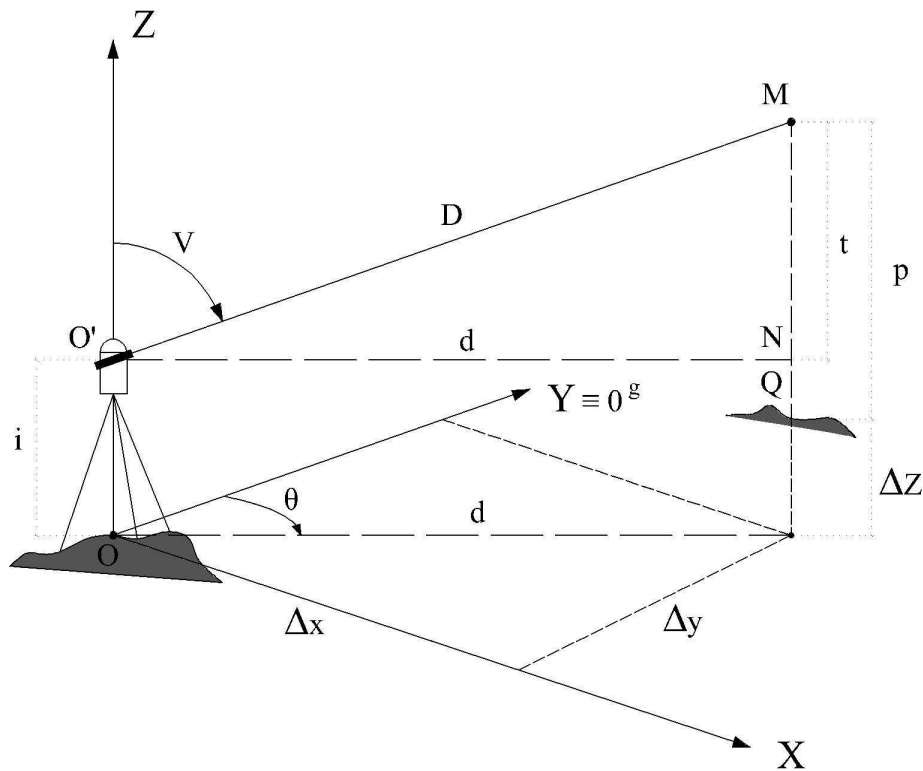
4.1.7. Taquimetría. Fundamento y fórmulas taquimétricas.

La palabra Taquimetría significa etimológicamente *medida rápida*. Es una parte de la Topografía que tiene por objeto determinar la posición espacial de puntos del terreno mediante observaciones simultáneas de distancias, ángulos horizontales y ángulos verticales.

Sus principales aplicaciones son:

- levantamientos de pequeñas zonas del terreno a escalas grandes.
- trabajos de replanteo, deslindes, etc.
- otras mediciones propias de la arquitectura y la ingeniería que son complementarias de los trabajos topográficos.

Supongamos que se estaciona una estación total sobre un punto O del terreno, de coordenadas absolutas conocidas (x_0, y_0, z_0) , donde hay establecido un sistema de referencia XYZ orientado, fijando en una dirección arbitraria a la lectura 0^g del limbo horizontal. Un punto Q del terreno quedara determinado, cuando se conozcan las coordenadas parciales o relativas de este respecto a O .



Para ello, dirigimos la visual $O'M$ a un prisma reflector situado sobre Q , y anotaremos los siguientes datos:

- i : altura del instrumento
- p : altura del prisma reflector
- θ : ángulo horizontales
- V : angulo vertical cenital (distancia cenital)
- D : distancia geométrica

Con estos valores (i , p : medidos por el operador del instrumento; θ , V , D : medidos por el instrumento), podemos calcular las coordenadas relativas de Q respecto de O . En primer lugar, calculamos la distancia reducida a partir de la distancia geométrica,

$$d = D \operatorname{sen} V \quad (4.2)$$

y también el valor t , distancia desde el plano horizontal que pasa por O' (eje secundario del instrumento) hasta el prisma reflector, denominado tangente,

$$t = D \cos V = d \operatorname{cotg} V \quad (4.3)$$

Las coordenadas parciales o relativas de Q respecto de O serán

$$\Delta x_O^Q = d \operatorname{sen} \theta \quad (4.4)$$

$$\Delta y_O^Q = d \cos \theta \quad (4.5)$$

$$i + t = p + \Delta z_O^Q \Rightarrow \Delta z_O^Q = t + i - p \quad (4.6)$$

y sus coordenadas absolutas,

$$x_Q = x_O + \Delta x_O^Q = x_O + d \operatorname{sen} \theta \quad (4.7)$$

$$y_Q = y_O + \Delta y_O^Q = y_O + d \cos \theta \quad (4.8)$$

$$z_Q = z_O + \Delta z_O^Q = z_O + t + i - p \quad (4.9)$$

Según lo expuesto, desde la posición O de la estación total se pueden medir y obtener coordenadas de todos los puntos del espacio a su alrededor, siempre que haya visibilidad y alcance el distanciómetro.

Al método topográfico que consiste en el levantamiento (medida) de puntos, desde una única estación por este procedimiento, se le denomina *método de radiación*.

4.1.8. Errores en la medida de direcciones y ángulos horizontales.

Cuando se observa una dirección o un ángulo horizontal, los mayores errores que pueden aparecer son debidos al estacionamiento y nivelación del instrumento, a la colocación del prisma reflector y a la puntería sobre el mismo. Aunque se ponga mayor cuidado en hacer estas observaciones, todos estos errores conducen a resultados inexactos. Por tanto, debemos ser capaces de identificar estos errores, conocer sus efectos sobre las medidas y tratar de cuantificarlos.

Estos errores aleatorios pueden ser de mayor o menos tamaño, dependiendo del instrumento, la habilidad del operador y de las condiciones ambientales en las cuales se hace la medida.

Para la estación total Leica TCR 307, la desviación estándar de la medida de una dirección, según la norma DIN 18723, es:

$$\sigma_{\text{DIN}} = \pm 7'' \approx \pm 22^{\text{cc}} \quad (4.10)$$

4.1.8.1. Error de lectura y puntería sobre el prisma.

Para la observación de una única dirección angular horizontal, el error de lectura y puntería sobre el prisma viene dado por

$$\sigma_{\text{pd}} = \sigma_{\text{DIN}} \quad (4.11)$$

donde el subíndice **p** indica puntería y el subíndice **d** indica dirección. Si se aplica la Regla de Bessel para obtener un total de **n** lecturas de la dirección angular, dicho error se calcula como

$$\sigma_{\text{pd}} = \frac{\sigma_{\text{DIN}}}{\sqrt{n}} \quad (4.12)$$

que en el caso de que se aplique una sola vez ($n=2$), la expresión anterior será

$$\sigma_{\text{pd}} = \frac{\sigma_{\text{DIN}}}{\sqrt{2}} \quad (4.13)$$

La medida simple de un ángulo horizontal se obtiene por diferencia de las lecturas de las dos direcciones que definen el ángulo, en cuyo caso el error angular se

calcula como

$$\sigma_{pa} = \sqrt{\sigma_{DIN}^2 + \sigma_{DIN}^2} = \sigma_{DIN} \sqrt{2} \quad (4.14)$$

donde el subíndice **a** indica ángulo. Si se aplica la Regla de Bessel para obtener un total de n valores de un ángulo, dicho error se calcula como

$$\sigma_{pa} = \frac{\sigma_{DIN} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad (4.15)$$

que en el caso de que se aplique una sola vez ($n=2$), la expresión anterior será

$$\sigma_{pa} = \sigma_{DIN} \quad (4.16)$$

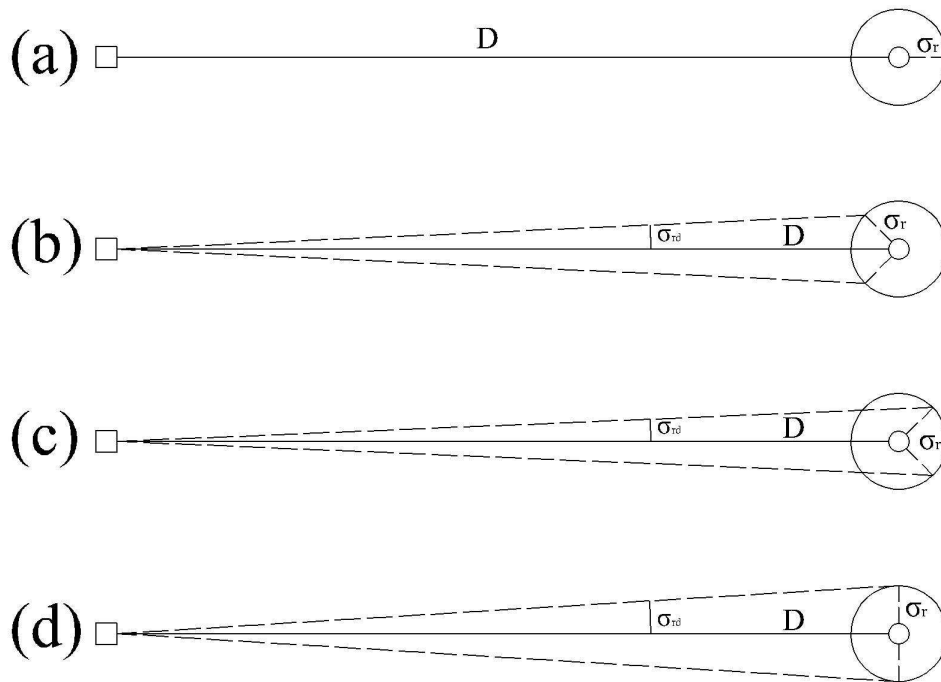
4.1.8.2. Error de centrado del prisma reflector.

Cuando se coloca el prisma reflector sobre un punto, se producirá un error debido a la falta de centrado de su eje respecto al punto. Puede atribuirse este error a las condiciones ambientales, a la sensibilidad del nivel de burbuja del jalón del prisma, a la habilidad personal, etc. Se admite que si el jalón del prisma se sustenta manualmente, aunque tengamos el máximo cuidado, el desplazamiento que se puede producir alrededor del punto está en torno a

$$\sigma_r = \pm 5 \text{ mm.} \quad (4.17)$$

donde el subíndice **r** indica reflector.

Si analizamos la contribución de este error a la medida simple de una dirección, el error angular debido al error de centrado del prisma depende de la posición del eje del prisma respecto al punto. Si el prisma se desplaza en la misma dirección que la visual desde la estación al prisma, (a), el error de centrado del prisma no contribuye al error angular. Sin embargo, si el eje del prisma se desplaza a ambos lados de la visual anterior, el error angular aumenta. Como se indica en (b), el máximo error angular se produce cuando el eje del prisma se desplaza en dirección perpendicular a la visual desde la estación al punto.



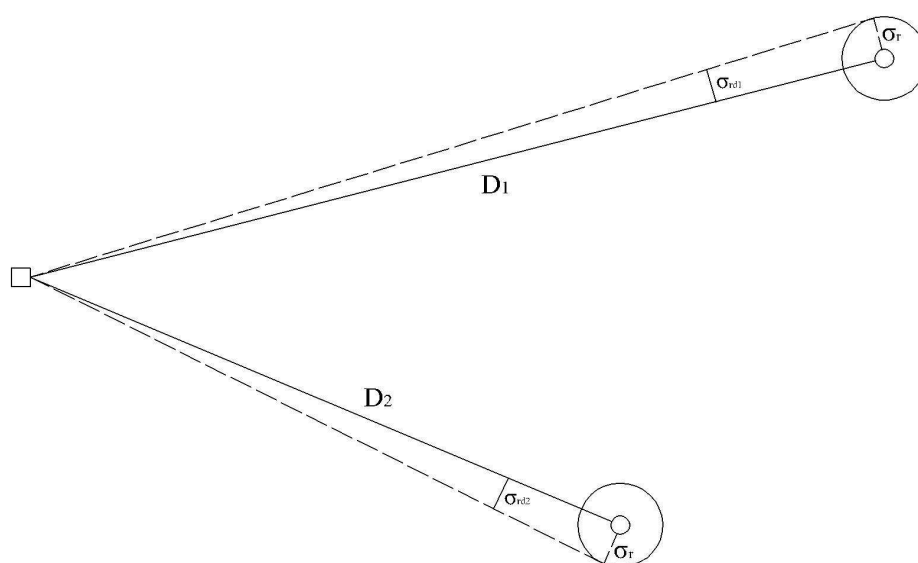
Si llamamos σ_r a la distancia desde la localización errónea del prisma hasta su posición exacta, el máximo error angular en la medida simple de una dirección debido al error de centrado del prisma será

$$\sigma_{rd} = \frac{\pm \sigma_r}{D} \rho \quad (4.18)$$

siendo ρ los segundos centesimales que tiene un radián ($\rho \approx 636620^{cc}$) y D la distancia horizontal desde la estación al prisma. El subíndice **d** indica dirección.

Como la medida de un ángulo requiere dos direcciones, la contribución del error de centrado del prisma al error total angular será

$$\sigma_{ra} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{D_1} \rho\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{D_2} \rho\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}{D_1 D_2} \rho \sigma_r \quad (4.19)$$



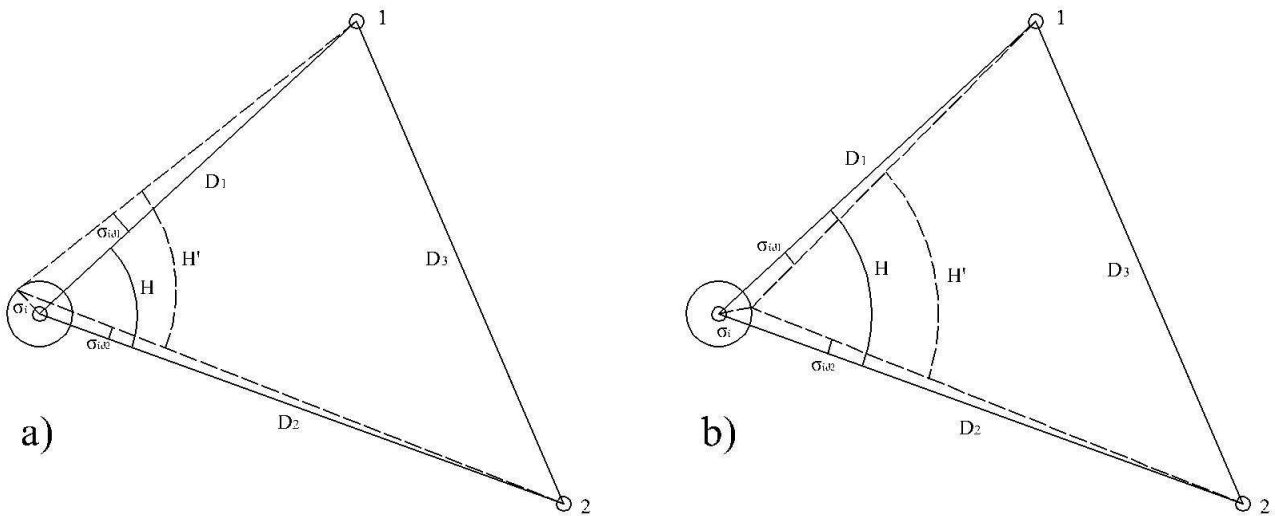
donde el subíndice **a** indica ángulo.

Si admitimos que en ambos puntos se pueda producir el máximo error angular debido a la falta de centrado del prisma, este error es uno de los más significativos en las observaciones angulares.

4.1.8.3. Error de centrado del instrumento.

Cada vez que se estaciona un instrumento sobre un punto, existe cierto desplazamiento en su posición respecto a la posición exacta del punto. Este error depende del dispositivo de centrado (plomada óptica o láser) y de la habilidad del operador. Como se observa a continuación, para la medida de un ángulo, este error puede compensarse parcialmente dependiendo de la posición del instrumento o puede ser máximo si el instrumento se estaciona sobre la bisectriz del ángulo. En las especificaciones de la estación total Leica TCR 307 se indica que la observación de la línea de la plomada es de 1.5 mm. a 1.5 m. de altura y que el diámetro de la plomada láser es de 2.5 mm. a 1.5 m. de altura. Por ello, vamos a admitir como desplazamiento máximo del eje del instrumento respecto al punto de estación, debido a una falta de centrado del instrumento, la cantidad

$$\sigma_i = \pm 2.5 \text{ mm.} \quad (4.20)$$



Según esto, la medición simple de una dirección, el error angular debido al error de centrado del instrumento será

$$\sigma_{id} = \pm \frac{\sigma_i}{D} \rho \quad (4.21)$$

Para un ángulo, puede deducirse que el error angular es

$$\sigma_{ia} = \pm \frac{D_3}{D_1 D_2} \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \rho \quad (4.22)$$

siendo D_1 y D_2 las distancias desde los puntos 1 y 2 al punto de estación del instrumento, respectivamente, y D_3 la distancia entre los puntos 1 y 2.

Finalmente, los errores totales en la medida de direcciones y ángulos, debidos a los errores de puntería y lectura, y de centrado del prisma reflector y del instrumento son

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{pd}^2 + \sigma_{rd}^2 + \sigma_{id}^2} \quad (4.23)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_{pa}^2 + \sigma_{ra}^2 + \sigma_{ia}^2} \quad (4.24)$$

4.1.9. Errores en la medida de ángulos verticales.

El error que se produce en la medida de un ángulo cenital con una estación total se calcula mediante la expresión

$$\sigma_v = \sqrt{2\sigma_{\text{DIN}}^2 + \sigma_{\text{cv}}^2} \quad (4.25)$$

siendo σ_{cv} la precisión del compensador vertical del instrumento, que para la estación total Leica TCR 307 es $\sigma_{\text{cv}} = 2'' \approx 6.2^{\text{cc}}$

En el caso de que se aplique la regla de Bessel y tengamos un total de n medidas del valor angular, el error se calcula mediante

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{2\sigma_{\text{DIN}}^2 + \sigma_{\text{cv}}^2}{n}} \quad (4.26)$$

Si solo se aplica una vez la regla de Bessel ($n=2$), la expresión anterior será

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{\text{DIN}}^2 + \sigma_{\text{cv}}^2} \quad (4.27)$$

4.1.10. Errores en la medida de distancias.

Las distancias medidas con estación total se ven afectadas del error instrumental, que el fabricante expresa de forma $\pm(a+b \text{ ppm})$. En esta expresión, la constante **a** es fija e independiente de la distancia medida y suele variar entre 1 y 10 mm., mientras que la variable **b** (expresada en partes por millón, o mm/km) depende de la distancia medida y suele variar entre 1 y 10 ppm. También afectan a la medición de la distancia los errores de centrado del instrumento, σ_i y de centrado del prisma reflector, σ_r , ya estudiados anteriormente.

Según lo anterior, el error estimado en la medida de distancias se calcula mediante la expresión

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_r^2 + a^2 + \left(\frac{b \cdot D}{1000000}\right)^2} \quad (4.28)$$

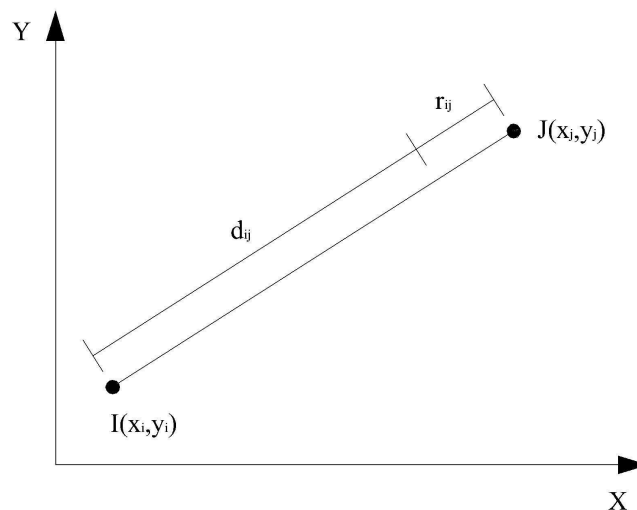
5. Ajuste de redes planimétricas, redes taquimétricas o redes espaciales.

5.1. Trilateración.

5.1.1. Ecuación básica de la distancia horizontal.

El ajuste paramétrico, por mínimos cuadrados, de la posición planimétrica de puntos del terreno por trilateración, supone establecer una ecuación de observación que relacione las magnitudes observadas (distancias) y sus errores aleatorios inherentes, con el valor mas probable de las coordenadas X e Y (los parámetros) de los puntos objeto de levantamiento.

Supongamos dos puntos $I(x_i, y_i)$ y $J(x_j, y_j)$, cuya distancia horizontal d_{ij} se ha medido con una estación total y llamaremos r_{ij} al error residual de dicha observación. Designemos por x_i, x_j, y_i, y_j a los valores mas probables de las coordenadas de dichos puntos.



Entre ambos puntos se puede establecer la siguiente ecuación básica de observación para la distancia medida.

$$\sqrt{(x_j - x_i)^2 - (y_j - y_i)^2} = d_{ij} + r_{ij} \quad (5.1)$$

El primer miembro de esta igualdad es una función no lineal de las variables x_i, y_i, x_j, y_j . La ecuación anterior podemos escribirla de la forma,

$$F(x_i, x_j, y_i, y_j) = d_{ij} + r_{ij} \quad (5.2)$$

Para poder aplicar el método de los mínimos cuadrados, tal y como se ha descrito en el apartado 1.1, es necesario linealizar esta función mediante el desarrollo en serie de Taylor hasta la primera potencia, despreciando los términos infinitesimos de segundo orden y superiores,

$$F(x_i, x_j, y_i, y_j) = F(x_{i0}, x_{j0}, y_{i0}, y_{j0}) + \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 dx_i + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 dy_i + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j \quad (5.3)$$

siendo $x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}$ los valores iniciales aproximados de las coordenadas de los puntos I y J, datos que también nos proporciona la estación total si previamente se han introducido en ella las coordenadas del punto de estación y se ha fijado una orientación determinada para establecer el sistema de coordenadas del levantamiento.

En la ecuación (5.3) los términos de la forma $\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 dx_i$ corresponden a las derivadas parciales de la función F respecto a cada una de las coordenadas planimétricas, evaluadas para los valores iniciales de dichas coordenadas. Al linealizar la función, las incógnitas pasan a ser ahora los diferenciales dx_i, dy_i, dx_j, dy_j , que una vez calculados resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente, deberán sumarse a las aproximaciones iniciales para obtener unos valores de las incógnitas x_i, y_i, x_j, y_j mas precisos,

$$\begin{aligned} x_{i1} &= x_{i0} + dx_i \\ y_{i1} &= y_{i0} + dy_i \\ x_{j1} &= x_{j0} + dx_j \\ y_{j1} &= y_{j0} + dy_j \end{aligned} \quad (5.4)$$

Con estos nuevos valores de las coordenadas, más precisos que los iniciales, se vuelve a linealizar la función F,

$$F(x_i, x_j, y_i, y_j) = F(x_{i1}, x_{j1}, y_{i1}, y_{j1}) + \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_1 dx_i + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_1 dy_i + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_1 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_1 dy_j \quad (5.5)$$

calculando nuevamente los diferenciales dx_i, dy_i, dx_j, dy_j , que deberán ser más pequeños que los obtenidos en el paso anterior, que a su vez se sumarán a las coordenadas obtenidas en el paso anterior para obtener unas nuevas coordenadas más precisas que las anteriores,

$$\begin{aligned} x_{i2} &= x_{i1} + dx_i \\ y_{i2} &= y_{i1} + dy_i \\ x_{j2} &= x_{j1} + dx_j \\ y_{j2} &= y_{j1} + dy_j \end{aligned} \quad (5.6)$$

De esta forma, se va iterando el sistema de ecuaciones hasta que los diferenciales dx_i, dy_i, dx_j, dy_j se anulen o sean inferiores a una cantidad establecida, por ejemplo $5 \cdot 10^{-4}$ para las coordenadas.

Como en este caso la función F es,

$$F(x_i, x_j, y_i, y_j) = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

la derivada

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{-1/2} \left[2(x_j - x_i)(-1) \right] \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_j}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.9)$$

y evaluada para las aproximaciones iniciales de las coordenadas,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{x_{i0} - x_{j0}}{\left[(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 \right]^{1/2}} = \frac{-\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} \quad (5.10)$$

De la misma forma, el resto de derivadas parciales son,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{-\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} \quad (5.11)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0}$$

quedando la ecuación básica de observación de la distancia,

$$d_{ij}^0 - \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{xi} - \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{yi} + \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{xj} + \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{yj} = d_{ij} + r_{ij} \quad (5.12)$$

donde si llamamos,

$$F(x_{i0}, x_{j0}, y_{i0}, y_{j0}) = d_{ij}^0 = \left[(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 \right]^{1/2} \quad (5.13)$$

entonces,

$$k_{ij} = d_{ij} - d_{ij}^0 \quad (5.14)$$

es la diferencia entre la distancia observada (medida) y la calculada por las coordenadas aproximadas. La ecuación (5.12) podremos expresarla finalmente como,

$$\frac{-\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{xi} - \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{yi} + \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{xj} + \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d_{yj} = k_{ij} + r_{ij} \quad (5.15)$$

Para definir la posición y orientación del levantamiento, es necesario conocer al menos las coordenadas planimétricas de dos puntos.

5.1.2. Fin de la iteración.

Cuando se programa un ajuste no lineal por mínimos cuadrados, se debe establecer algún criterio que determine el momento apropiado para detener el proceso de iteración. Puesto que es posible tener algún grupo de datos que no admita solución, también es importante determinar cuándo puede ocurrir esta condición. Vamos a comentar tres métodos que podrían indicar cuándo detener el proceso de iteración.

a) Limitación del número máximo de iteraciones.

El procedimiento más sencillo para detener la iteración es limitar el número de iteraciones a un valor máximo. El riesgo de este método es que si ese máximo es bajo, no se alcanzará la solución óptima al finalizar el proceso, y si es demasiado alto, se invierte tiempo de cálculo en iteraciones innecesarias.

Puesto que este método puede no asegurar la convergencia, hay que prever que el ajuste no entre en un ciclo indefinido, que podría ocurrir si la solución diverge. Cuando las aproximaciones iniciales de los parámetros incógnitas son buenas, suele ser suficiente un límite inferior a 10 iteraciones para obtener una solución, puesto que el método de mínimos cuadrados converge cuadráticamente.

b) Limitación de la corrección máxima.

Este método supone controlar el valor de las correcciones. Cuando todas las correcciones alcanzan un valor despreciable, el proceso de iteración se detiene. El término despreciable es relativo. Generalmente, se interpreta como una corrección que es menor que la mitad de la unidad más pequeña de apreciación en la medida. Por ejemplo, para distancias medidas con apreciación de 1 mm, sería apropiado aceptar la convergencia cuando el valor absoluto de las correcciones sea menor de 0.5 mm.

c) Control de la varianza de referencia del ajuste.

El mejor método para determinar la convergencia es controlar el valor de la varianza de referencia entre iteraciones. Como el método de mínimos cuadrados converge cuadráticamente, el proceso de iteración debería detenerse si la varianza de referencia se incrementa. Un incremento de la varianza de referencia indica una solución divergente, pudiendo ocurrir debido a una de las dos cosas siguientes:

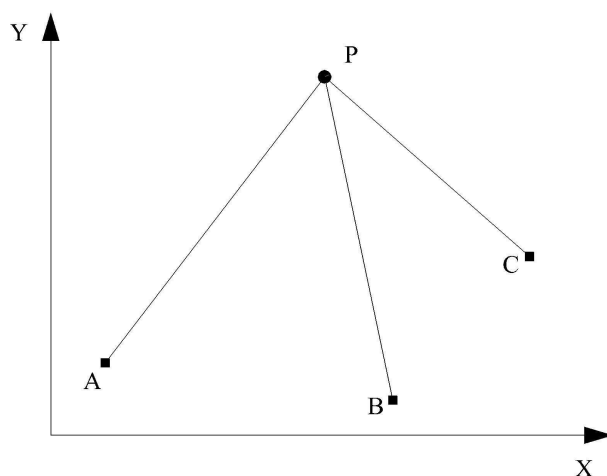
- 1.- Existen errores groseros en los datos y no es posible la solución estable.
- 2.- El valor máximo de la corrección es menor que la precisión de las medidas.

Controlando la varianza de referencia puede detectarse la convergencia o divergencia. Se admite la convergencia cuando el cambio en la varianza de referencia cae por debajo de algún límite establecido, por ejemplo menor del 1% entre iteraciones consecutivas. Si el valor de la varianza de referencia se incrementa, la solución es divergente y hay que detener el proceso de iteración.

5.2. Ajuste de un levantamiento por trilateración.

La geometría de una red topográfica, levantada por trilateración, puede resultar de formas muy variadas. Todas son igualmente adaptables al ajuste por el método de ecuaciones de observación. Sin embargo, la configuración geométrica de cada red da lugar a un problema específico de ajuste.

Consideramos, por ejemplo, el ajuste de una red simple,



Los puntos A, B y C son puntos de control cuyas coordenadas (x, y) son fijas y conocidas. El punto P es aquel cuya posición planimétrica queremos determinar midiendo las distancias d_{PA} , d_{PB} y d_{PC} . Como es lógico, con solo dos distancias al punto P podríamos determinar unas coordenadas iniciales aproximadas (x_{P0}, y_{P0}) . La tercera distancia es redundante y hace posible el cálculo y ajuste de los valores más probables de las coordenadas (x_P, y_P) .

Las ecuaciones de observación se establecen sustituyendo los valores conocidos en la ecuación básica (5.15). La ecuación para la distancia d_{PA} , por ejemplo, resulta de sustituir el subíndice i por P y el subíndice j por A. De forma similar se obtienen las otras dos ecuaciones. Hemos de observar que si algún punto es de control, sus coordenadas son invariantes y por tanto $dx=0$ y $dy=0$, anulándose dichos términos en la ecuación básica. De ahí que las tres ecuaciones de observación que podemos formar son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_{P0} - x_A}{d_{AP}^0} \right) dx_P + \left(\frac{y_{P0} - y_A}{d_{AP}^0} \right) dy_P &= (d_{PA} - d_{PA}^0) + r_{PA} \\ \left(\frac{x_{P0} - x_B}{d_{BP}^0} \right) dx_P + \left(\frac{y_{P0} - y_B}{d_{BP}^0} \right) dy_P &= (d_{PB} - d_{PB}^0) + r_{PB} \\ \left(\frac{x_{P0} - x_C}{d_{CP}^0} \right) dx_P + \left(\frac{y_{P0} - y_C}{d_{CP}^0} \right) dy_P &= (d_{PC} - d_{PC}^0) + r_{PC} \end{aligned} \quad (5.16)$$

siendo,

$$\begin{aligned} d_{PA}^0 &= \sqrt{(x_A - x_{P0})^2 + (y_A - y_{P0})^2} \\ d_{PB}^0 &= \sqrt{(x_B - x_{P0})^2 + (y_B - y_{P0})^2} \\ d_{PC}^0 &= \sqrt{(x_C - x_{P0})^2 + (y_C - y_{P0})^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

las distancias horizontales calculadas a partir de las coordenadas iniciales aproximadas.

De acuerdo con (1.57) y (1.60), el sistema de ecuaciones anterior puede escribirse en notación matricial de la forma,

$$\mathbf{Jx} + \mathbf{r} = \mathbf{k} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{k} = \ell - \ell^0$$

y en el caso de considerar los pesos de las observaciones,

$$\mathbf{P}(\mathbf{Jx} + \mathbf{r}) = \mathbf{Pk} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{k} = \ell - \ell^0$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{x_{P0} - x_A}{d_{PA}^0} & \frac{y_{P0} - y_A}{d_{PA}^0} \\ \frac{x_{P0} - x_B}{d_{PB}^0} & \frac{y_{P0} - y_B}{d_{PB}^0} \\ \frac{x_{P0} - x_C}{d_{PC}^0} & \frac{y_{P0} - y_C}{d_{PC}^0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{PA} \\ r_{PB} \\ r_{PC} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} d_{PA} - d_{PA}^0 \\ d_{PB} - d_{PB}^0 \\ d_{PC} - d_{PC}^0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

siendo,

J: matriz de los coeficientes.

x: vector de las correcciones incógnitas dx_P, dy_P .

k: vector de constantes, igual a la diferencia entre las distancias medidas y las calculadas a partir de las aproximaciones iniciales de las coordenadas.

r: vector de los residuos de las distancias medidas.

P: matriz de pesos.

El valor más probable de las correcciones (dx_P, dy_P) y, por tanto, de las coordenadas (x_P, y_P) se obtiene resolviendo la ecuación matricial (5.18) o (5.19), resultando, como se indicó en (1.59) y (1.61),

$$\mathbf{x} = (\mathbf{J}^t \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{k} \quad (5.21)$$

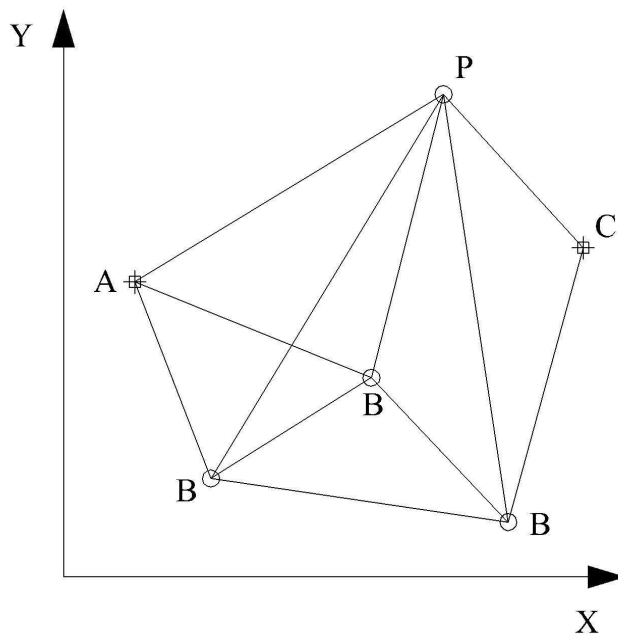
$$\mathbf{x} = (\mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^t \mathbf{P} \mathbf{k} \quad (5.22)$$

según se consideren todas las observaciones con el mismo peso o con sus pesos correspondientes.

Una vez calculadas estas correcciones (dx_P, dy_P) , se deben sumar a las aproximaciones iniciales (x_{P0}, y_{P0}) para obtener unos valores más aproximados. Los valores finales ajustados se obtienen iterando el sistema de ecuaciones hasta que las correcciones obtenidas sean despreciables ($< 5 \cdot 10^{-4}$ m.).

5.3. Formulación de la matriz de coeficientes generalizada.

En la red de trilateración de la siguiente figura se han medido todas las distancias indicadas. En ella, los puntos A y C son de control, cuyas coordenadas son fijas y conocidas.



En esta red hay 10 observaciones y 8 incógnitas (las coordenadas x e y de los puntos B,D,E,F). Los términos dx_A, dy_A, dx_C, dy_C son nulos al ser las coordenadas fijas, lo cual hace que queden ajenos al ajuste. La matriz de coeficientes de la red se forma a partir de la ecuación básica de la distancia con aquellos términos que afectan a las coordenadas a ajustar, como se indica en la tabla a continuación. En ella los coeficientes apropiados de la ecuación (5.15) se indican mediante sus correspondientes términos incógnita dx_i, dy_i, dx_j, dy_j .

Distancia IJ	dx_B	dy_B	dx_D	dy_D	dx_E	dy_E	dx_F	dy_F
AB	dx_j	dy_j	0	0	0	0	0	0
BC	dx_i	dy_i	0	0	0	0	0	0
DE	0	0	dx_i	dy_i	dx_j	dy_j	0	0
CF	0	0	0	0	0	0	dx_j	dy_j
AE	0	0	0	0	dx_j	dy_j	0	0
BE	dx_i	dy_i	0	0	dx_j	dy_j	0	0
BF	dx_i	dy_i	0	0	0	0	dx_j	dy_j
DF	0	0	dx_i	dy_i	0	0	dx_j	dy_j
BD	dx_i	dy_i	dx_j	dy_j	0	0	0	0
CD	0	0	dx_j	dy_j	0	0	0	0
EF	0	0	0	0	dx_i	dy_i	dx_j	dy_j

5.4. Triangulación.

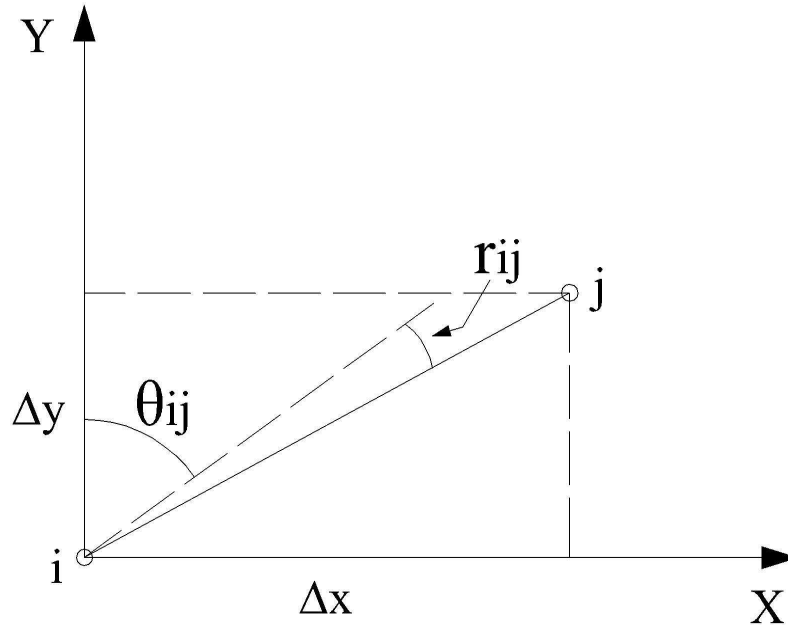
Los levantamientos topográficos realizados por el método de triangulación permiten obtener las coordenadas planimétricas de puntos del terreno a partir de la medida de ángulos horizontales. En este caso, para definir la posición y orientación del levantamiento, es necesario conocer al menos las coordenadas planimétricas de un punto y el acimut de una dirección a partir de dicho punto, o bien las coordenadas planimétricas de dos puntos

En estos levantamientos se pueden realizar tres tipos de medidas:

- La medida del acimut de una alineación, que es el ángulo horizontal medido a partir de la dirección del eje Y del sistema de coordenadas que se establezca para el levantamiento.
- La medida de la dirección de una alineación, que es el ángulo horizontal medido a partir de una dirección arbitraria.
- La medida del ángulo horizontal definido por dos alineaciones, que se puede obtener por diferencia de acimutes o de direcciones.

5.4.1. Ecuación básica de observación del acimut de una alineación.

El acimut de una alineación i-j sobre el terreno



se calcula a partir de la expresión,

$$\operatorname{tg} \theta_{ij} = \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}} \quad (5.23)$$

de donde,

$$\theta_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}} = \operatorname{arctg} \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (5.24)$$

Como sabemos, en esta expresión hemos de tener en cuenta el signo de Δx_{ij} y el signo de Δy_{ij} para definir el cuadrante en el que se encuentra el punto j respecto del punto i, y así calcular correctamente el acimut. Si tenemos en cuenta el error cometido en la medición, la ecuación de observación del acimut se define como

$$\theta_{ij} + r_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (5.25)$$

que genéricamente se puede expresar de la forma,

$$\theta_{ij} + r_{ij} = F(x_i, y_i, x_j, y_j) \quad (5.26)$$

De la misma manera que anteriormente, a partir de una aproximación inicial de las coordenadas de los puntos i y j, podemos linealizar la función F por desarrollo en serie de Taylor hasta la primera potencia,

$$\begin{aligned} F(x_i, y_i, x_j, y_j) = & F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}) + \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 dx_i + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 dy_i + \\ & + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j \end{aligned} \quad (5.27)$$

Teniendo en cuenta que la derivada de la función arctg (u) respecto de x es,

$$\frac{d}{dx} \arctg(u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad (5.28)$$

las derivadas quedarían finalmente,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 &= \frac{1}{1 + \left[\frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \right]^2} \frac{-1}{y_{j0} - y_{i0}} = \\ &= \frac{(-1)(y_{j0} - y_{i0})}{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2} = \frac{-(y_{j0} - y_{i0})}{(d_{ij}^0)^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

que podemos expresar de forma abreviada como

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{-\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \quad (5.30)$$

y las demás como

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2}; \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2}; \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{-\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \quad (5.31)$$

De esta forma, la ecuación de observación del acimut quedará así

$$-\rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_i + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_i + \rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_j - \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_j = k_{ij} + r_\theta \quad (5.32)$$

siendo,

$$F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}) = \theta_{ij}^0 = \arctg \frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \quad (5.33)$$

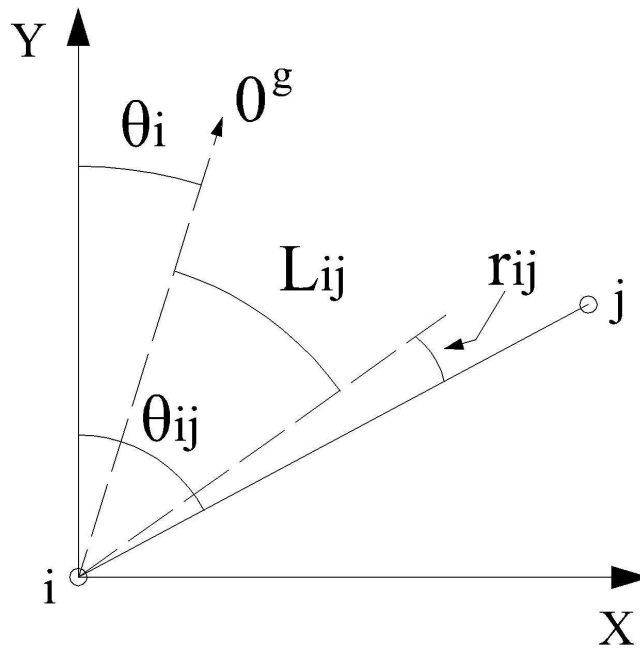
el acimut calculado a partir de las coordenadas aproximadas, teniendo en cuenta el cuadrante. Entonces

$$k_{ij} = \theta_{ij} - \theta_{ij}^0 \quad (5.34)$$

es la diferencia entre el acimut medido y el calculado a partir de las coordenadas aproximadas. En general, este valor k_{ij} es de pequeña magnitud, por lo que es más cómodo expresarlo en segundos centesimales. Por ello, y para que la ecuación (5.32) sea consistente en las unidades de medida, el primer miembro debe multiplicarse por la constante $\rho = 636619.772^{cc}$ que corresponde a los segundos centesimales que tiene un radián.

5.4.2. Ecuación básica de la dirección horizontal de una alineación.

Si consideramos la medida L_{ij} de la dirección horizontal de una alineación definida por los puntos i y j , con una estación total orientada en una dirección arbitraria, que forma un ángulo θ_i (acimut de la lectura 0^g) con la dirección de referencia (eje Y)



tendremos que

$$\theta_{ij} = L_{ij} + \theta_i \quad (5.35)$$

de donde la dirección angular horizontal será

$$L_{ij} = \theta_{ij} - \theta_i = \arctg \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}} - \theta_i = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - \theta_i \quad (5.36)$$

Si tenemos en cuenta el error en la observación de la dirección, esta ecuación queda de la forma

$$L_{ij} + r_{ij} = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - \theta_i \quad (5.37)$$

$$L_{ij} + r_{ij} = F(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i) \quad (5.38)$$

que igualmente podemos linealizar por desarrollo en serie de Taylor, de la forma

$$\begin{aligned}
 F(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i) = & F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, \theta_{i0}) + \left[\frac{dF}{dx_i} \right]_0 dx_i + \left[\frac{dF}{dy_i} \right]_0 dy_i + \\
 & + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta_i} \right]_0 d\theta_i
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

cuyas derivadas son,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{-\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} ; \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} ; \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \\
 \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{-\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} ; \left[\frac{\partial F}{\partial \theta_i} \right]_0 = -1
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

quedando finalmente la ecuación de observación de la dirección horizontal como

$$-\rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_i + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_i + \rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_j - \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_j - d\theta_i = k_{ij} + r_{ij}
 \tag{5.41}$$

siendo,

$$F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, \theta_{i0}) = L_{ij}^0 = \arctg \frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} - \theta_{i0}
 \tag{5.42}$$

Entonces,

$$k_{ij} = L_{ij} - L_{ij}^0
 \tag{5.43}$$

es la diferencia entre la dirección medida y la calculada a partir de las coordenadas aproximadas. En este caso, tenemos que

$$L_{ij}^0 = \theta_{ij}^0 - \theta_i^0
 \tag{5.44}$$

y además

$$\theta_i^0 = \theta_{i j}^0 - L_{i j}^0 \quad (5.45)$$

de donde

$$L_{i j}^0 = L_{i j} \quad (5.46)$$

y, por tanto,

$$k_{i j} = 0 \quad (5.47)$$

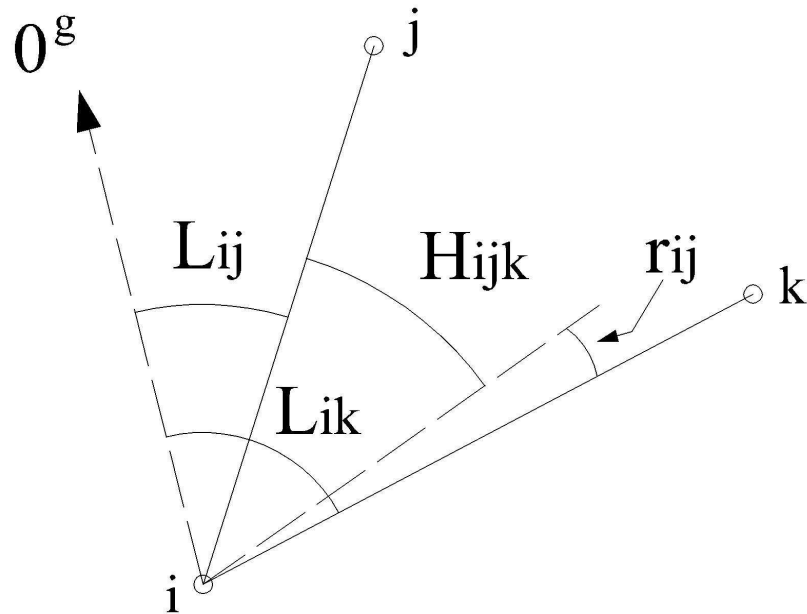
En el caso de existir más direcciones medidas desde la estación i , bastaría con calcular el valor aproximado θ_i^0 para una de ellas mediante la ecuación (5.45), en cuyo caso $k_{i j} = 0$. Este valor se utilizaría para el resto de ecuaciones de dirección desde dicha estación, con lo cual el valor $k_{i j} \neq 0$ para dichas ecuaciones.

Al igual que dijimos anteriormente, los términos del primer miembro de la ecuación (5.41) deben multiplicarse por la constante $\rho = 636619.772^{cc}$ y expresar $k_{i j}$ en segundos centesimales.

Como vemos en este caso, en la ecuación de observación (5.41) aparece la incógnita del acimut de la lectura θ_i^g en la estación i , valor que es necesario calcular, si bien no tiene una importancia fundamental en el contexto del levantamiento. Siempre que desde un mismo punto se hayan medido varias direcciones a diferentes puntos, existe una manera de eliminar el valor del acimut de la lectura θ_i^g , y es calculando los ángulos horizontales entre parejas de alineaciones, por diferencia entre dichas direcciones, dando así lugar al estudio de la ecuación básica del ángulo horizontal.

5.4.3. Ecuación básica del ángulo horizontal definido por dos alineaciones.

En la siguiente figura se muestran los elementos que constituyen la observación del ángulo horizontal delimitado por dos alineaciones que se cortan en el punto i .



La medida del ángulo horizontal que forman las alineaciones i-j e i-k, en el punto i de intersección, puede obtenerse por diferencia de acimutes o de direcciones entre ambas alineaciones, de forma que

$$H_{ijk} = L_{ik} - L_{ij} = (\theta_{ik} - \theta_i) - (\theta_{ij} - \theta_i) = \theta_{ik} - \theta_{ij} \quad (5.48)$$

donde se ha tenido en cuenta, según (5.35), que

$$\begin{aligned} L_{ik} &= \theta_{ik} - \theta_i \\ L_{ij} &= \theta_{ij} - \theta_i \end{aligned} \quad (5.49)$$

Por tanto la ecuación (5.48) carece del valor del acimut de la lectura 0^g , y puede expresarse en función de las coordenadas de los puntos como,

$$H_{ijk} = \arctg \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} - \arctg \frac{\Delta x_{ij}}{\Delta y_{ij}} = \arctg \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} - \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (5.50)$$

Teniendo en cuenta el error en la observación de las direcciones angulares, podemos definir la ecuación de observación del ángulo horizontal como

$$H_{ijk} + r_{ijk} = \arctg \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} - \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (5.51)$$

$$H_{ijk} + r_{ijk} = F(x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k) \quad (5.52)$$

que puede linealizarse por desarrollo en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} F(x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k) = & F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, x_{k0}, y_{k0}) + \left[\frac{dF}{dx_i} \right]_0 dx_i + \\ & + \left[\frac{dF}{dy_i} \right]_0 dy_i + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j + \left[\frac{\partial F}{\partial x_k} \right]_0 dx_k + \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} \right]_0 dy_k \end{aligned} \quad (5.53)$$

siendo la derivada

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_{k0} - x_{i0}}{y_{k0} - y_{i0}} \right)^2} \frac{-1}{y_{k0} - y_{i0}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \right)^2} \frac{-1}{y_{j0} - y_{i0}} \quad (5.54)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{-(y_{k0} - y_{i0})}{(y_{k0} - y_{i0})^2 + (x_{k0} - x_{i0})^2} + \frac{(y_{j0} - y_{i0})}{(y_{j0} - y_{i0})^2 + (x_{j0} - x_{i0})^2} \quad (5.55)$$

que podemos expresar de forma abreviada como,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} - \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} \quad (5.56)$$

De igual forma se obtienen el resto de derivadas,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} - \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \quad (5.57)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_{i_0, j_0, k_0} = \frac{-\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2}; \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2};$$

$$; \left[\frac{\partial F}{\partial x_k} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2}; \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} \right]_0 = \frac{-\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2}$$
(5.58)

que permiten expresar la ecuación (5.51) de observación del ángulo horizontal como,

$$\rho \left[\frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} - \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} \right] dx_i + \rho \left[\frac{\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} - \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \right] dy_i -$$

$$-\rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_j + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_j + \rho \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} dx_k - \rho \frac{\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} dy_k = k_{ijk} + r_{ijk}$$
(5.59)

siendo,

$$F(x_{i_0}, y_{i_0}, x_{j_0}, y_{j_0}, x_{k_0}, y_{k_0}) = H_{ijk}^0 = \arctg \frac{x_{k_0} - x_{i_0}}{y_{k_0} - y_{i_0}} - \arctg \frac{x_{j_0} - x_{i_0}}{y_{j_0} - y_{i_0}} \quad (5.60)$$

teniendo siempre en cuenta el cuadrante.

Entonces,

$$k_{ijk} = H_{ijk} - H_{ijk}^0 \quad (5.61)$$

es la diferencia entre el ángulo horizontal medido y el calculado a partir de las coordenadas aproximadas.

Igualmente, el primer miembro de la ecuación (5.59) debe multiplicarse por la constante $\rho = 636619.772^{cc}$ y expresar k_{ijk} en segundos centesimales.

5.5. Taquimetría.

Como se ha descrito en el tema 4, la taquimetría es el método topográfico que nos permite determinar las coordenadas espaciales de cualquier punto del terreno a partir de la medida simultánea de ángulos horizontales, ángulos verticales y distancias. Para el ajuste por mínimos cuadrados de un levantamiento taquimétrico, hemos de tener en cuenta las ecuaciones básicas de observación estudiadas hasta ahora (distancia horizontal, acimut, dirección y ángulo horizontal). Para el cálculo de la coordenada Z intervienen ahora la medida del ángulo cenital y la distancia geométrica, cuyas ecuaciones básicas de observación es necesario establecer.

5.5.1. Ecuación básica de observación del ángulo cenital.

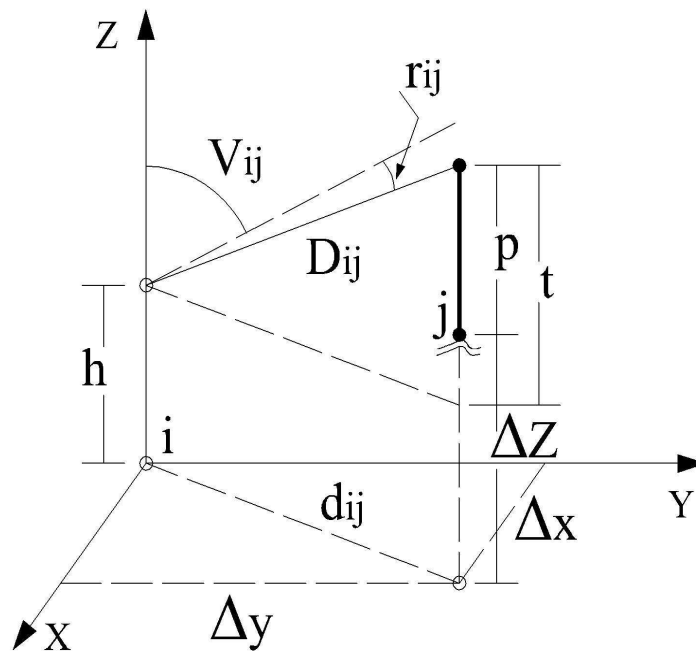
Como sabemos, en taquimetría, el cálculo del desnivel Δz_{ij} entre dos puntos del terreno se realiza mediante la expresión

$$p + \Delta z_{ij} = t + h \quad (5.62)$$

siendo p , la altura del prisma; h , la altura del instrumento y t se calcula mediante la expresión

$$t = \frac{d_{ij}}{\operatorname{tg} V_{ij}} \quad (5.63)$$

siendo d_{ij} , la distancia reducida entre los puntos y V_{ij} , el ángulo cenital medido desde el punto i hacia el punto j , según esta figura.



Por tanto, la expresión (5.62) resulta,

$$p + \Delta z_{ij} = \frac{d_{ij}}{\operatorname{tg} V_{ij}} + h \quad (5.64)$$

Reagrupando términos,

$$\frac{d_{ij}}{\operatorname{tg} V_{ij}} = p + \Delta z_{ij} - h \quad (5.65)$$

podemos despejar $\operatorname{tg} V_{ij}$,

$$\operatorname{tg} V_{ij} = \frac{d_{ij}}{\Delta z_{ij} + p - h} = \frac{\sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2}}{\Delta z_{ij} + p - h} = \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{z_j - z_i + p - h} \quad (5.66)$$

La ecuación de observación del ángulo cenital, teniendo en cuenta el error r_{ij} de dicha observación, y llamando $m = p - h$, quedará así

$$V_{ij} + r_{ij} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{z_j - z_i + m} \right] \quad (5.67)$$

que genéricamente se puede expresar como

$$V_{ij} + r_{ij} = F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \quad (5.68)$$

Si linealizamos la función F, por desarrollo en serie de Taylor,

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) + \left[\frac{dF}{dx_i} \right]_0 dx_i + \left[\frac{dF}{dy_i} \right]_0 dy_i + \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]_0 dz_i + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j + \left[\frac{\partial F}{\partial z_j} \right]_0 dz_j \quad (5.69)$$

Teniendo en cuenta que la derivada,

$$\frac{\partial \arctg(u)}{\partial x} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad (5.70)$$

podemos desarrollar las seis derivadas,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}}{z_{j0} - z_{i0} + m} \right]^2} \frac{-(x_{j0} - x_{i0})}{(z_{j0} - z_{i0} + m) \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}} = \frac{-(x_{j0} - x_{i0})(z_{j0} - z_{i0} + m)}{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0} + m)^2} \frac{1}{\sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}} \quad (5.71)$$

que expresamos de la forma,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{-\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} \quad (5.72)$$

siendo,

$$\Delta x_{ij}^0 = x_{j0} - x_{i0}$$

$$\Delta z_{ij}^0 = z_{j0} - z_{i0}$$

$$(D_{ij}^0)^2 = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0} + m)^2; \text{ dist. geom. al cuadrado} \quad (5.73)$$

$$d_{ij}^0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}; \text{ distancia reducida}$$

De la misma manera, el resto de derivadas quedarían de la forma,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{-\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} \quad (5.74)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]_0 = \frac{d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad (5.75)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} \quad (5.76)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} \quad (5.77)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_j} \right]_0 = \frac{-d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} \quad (5.78)$$

valores que, sustituidos en la ecuación (5.69), dan lugar a la ecuación de observación del ángulo cenital,

$$\begin{aligned} & -\rho \frac{\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dx_i - \rho \frac{\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dy_i + \rho \frac{d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} dz_i + \\ & + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dx_j + \rho \frac{\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dy_j - \rho \frac{d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} dz_j = k_{ij} + r_{ij} \end{aligned} \quad (5.79)$$

siendo,

$$F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) = V_{ij}^0 = \frac{\sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}}{z_{j0} - z_{i0} + p - h} \quad (5.80)$$

Entonces,

$$k_{ij} = V_{ij} - V_{ij}^0 \quad (5.81)$$

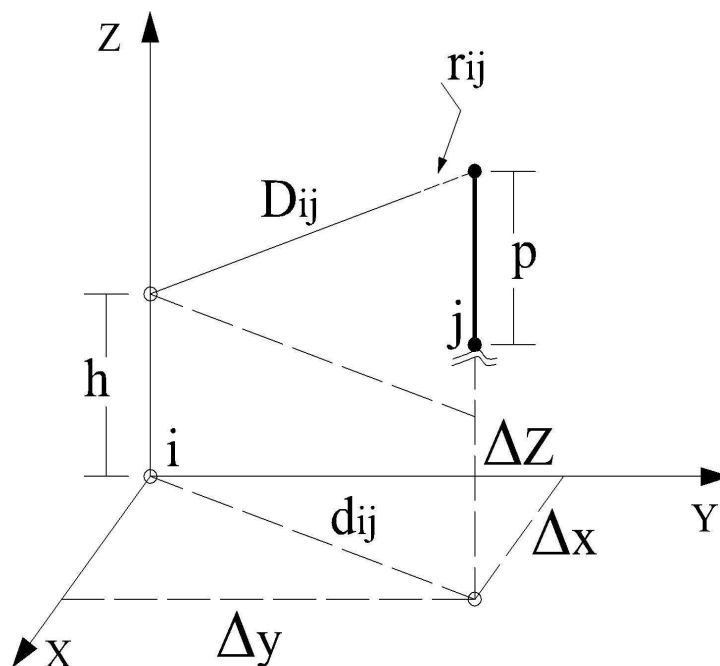
es la diferencia entre el ángulo cenital medido y el calculado a partir de las coordenadas aproximadas de los puntos i y j . Esta cantidad, al ser pequeña, se expresa normalmente en segundos centesimales.

Por otro lado, tal y como se indicó en las ecuaciones de observación angulares, los sumandos del primer término de la ecuación (5.79) deben multiplicarse por la constante $\rho = 636619.772^{cc}$.

5.5.2. Ecuación básica de observación de la distancia geométrica.

Según la figura, la distancia geométrica medida con una estación total entre los puntos i y j del terreno, es

$$D_{ij} = \sqrt{\Delta x_{ij}^2 + \Delta y_{ij}^2 + (\Delta z_{ij} + p - h)^2} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i + p - h)^2} \quad (5.82)$$



Teniendo en cuenta el error en la medida de la distancia, y llamando $m=p-h$

$$D_{ij}+r_{ij}=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i+m)^2} \quad (5.83)$$

ecuación de la forma

$$D_{ij}+r_{ij}=F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \quad (5.84)$$

Si linealizamos la función F desarrollándola en serie de Taylor hasta la primera potencia, tendremos,

$$\begin{aligned} F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) &= F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) + \\ &+ \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 dx_i + \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 dy_i + \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]_0 dz_i + \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 dx_j + \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 dy_j + \left[\frac{\partial F}{\partial z_j} \right]_0 dz_j \end{aligned} \quad (5.85)$$

cuyas derivadas son,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0}-x_{i0})^2 + (y_{j0}-y_{i0})^2 + (z_{j0}-z_{i0}+m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (-2)(x_{j0}-x_{i0}) \quad (5.86)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0}-x_{i0})^2 + (y_{j0}-y_{i0})^2 + (z_{j0}-z_{i0}+m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (-2)(y_{j0}-y_{i0}) \quad (5.87)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0}-x_{i0})^2 + (y_{j0}-y_{i0})^2 + (z_{j0}-z_{i0}+m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (-2)(z_{j0}-z_{i0}+m) \quad (5.88)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0}-x_{i0})^2 + (y_{j0}-y_{i0})^2 + (z_{j0}-z_{i0}+m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2)(x_{j0}-x_{i0}) \quad (5.89)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0}-x_{i0})^2 + (y_{j0}-y_{i0})^2 + (z_{j0}-z_{i0}+m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2)(y_{j0}-y_{i0}) \quad (5.90)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_j} \right]_0 = \frac{1}{2} \left((x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0} + m)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2)(z_{j0} - z_{i0} + m) \quad (5.91)$$

que podemos expresar de forma abreviada como,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right]_0 = \frac{-\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} ; \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \right]_0 = \frac{-\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} ; \left[\frac{\partial F}{\partial z_i} \right]_0 = \frac{-\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0} \quad (5.92)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_j} \right]_0 = \frac{\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} ; \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} \right]_0 = \frac{\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} ; \left[\frac{\partial F}{\partial z_j} \right]_0 = \frac{\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0}$$

quedando la ecuación de observación de la distancia geométrica (5.83) como,

$$-\frac{\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} dx_i - \frac{\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} dy_i - \frac{\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0} dz_i + \frac{\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} dx_j + \frac{\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} dy_j + \frac{\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0} dz_j = k_{ij} + r_{ij} \quad (5.93)$$

siendo,

$$F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) = D_{ij}^0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0} + m)^2} \quad (5.94)$$

Entonces,

$$k_{ij} = D_{ij} - D_{ij}^0 \quad (5.95)$$

es la diferencia entre la distancia geométrica medida y la calculada a partir de las coordenadas aproximadas.

6. Elipses y elipsoides de error.

6.1. Elipses de error.

6.1.1. Cálculo de los semiejes y orientación de la elipse estándar de error, mediante álgebra matricial.

Dada la matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{x}}$

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

su polinomio característico es

$$|\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad (6.2)$$

y sus autovalores vienen dados por,

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2} \quad (6.3)$$

$$\lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{A}) - \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}}{2}$$

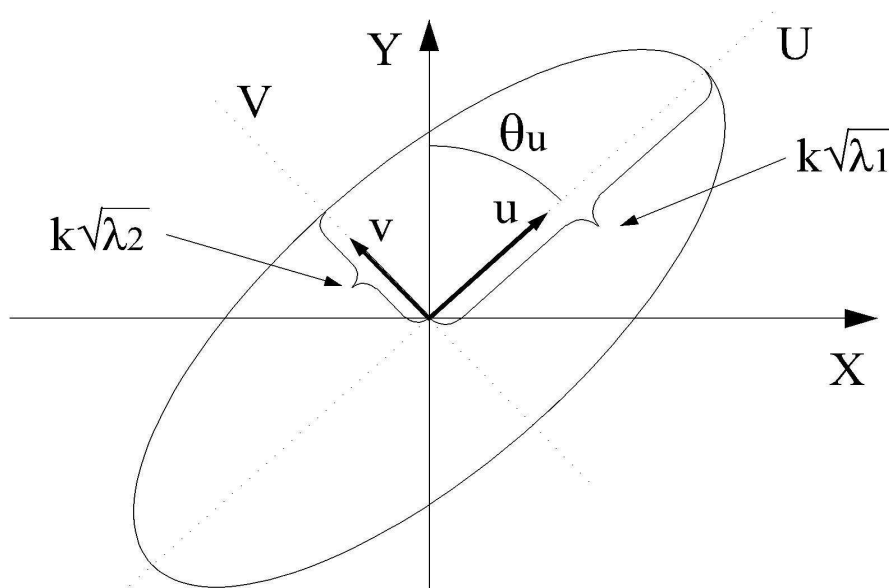
$\lambda_1 > \lambda_2$, siendo $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ la traza de la matriz y $\det(\mathbf{A}) = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$ el determinante de la matriz, cumpliéndose además que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(\mathbf{A}) \quad (6.4)$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) - 4 \det(\mathbf{A})}$$

Para determinar la probabilidad asociada a una elipse de error, es conveniente considerar las variables aleatorias independientes (no correlacionadas) U y V.



En este sistema de ejes, que contienen a los ejes principales de la elipse de error, se verifica que $\rho=0$, teniendo:

$$\left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sigma_v}\right)^2 = k^2 \quad (6.5)$$

que representa una familia de elipses cuyos ejes principales son $k\sigma_u$ y $k\sigma_v$.

Si consideramos ahora la nueva variable aleatoria

$$U = \frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \quad (6.6)$$

esta se distribuye según una distribución χ^2 con dos grados de libertad. La función densidad de probabilidad de U se puede deducir fácilmente de la función densidad de probabilidad general de la distribución χ^2 , teniendo en cuenta que para dos grados de libertad $\Gamma(n/2)=1$, obteniendo así

$$f(u) = \frac{1}{2} e^{-u/2} \quad \text{para } u > 0 \quad (6.7)$$

La probabilidad de que la posición dada por una pareja de valores (u, v) caiga

sobre o en el interior de la elipse de error es

$$P\left[\frac{u^2}{s_u^2} + \frac{v^2}{s_v^2} \leq k^2\right] = P[U \leq k^2] = \int_0^{k^2} \frac{1}{2} e^{-u/2} du = 1 - e^{-k^2/2} = 1 - \alpha \quad (6.8)$$

La probabilidad $P(U \leq k^2)$ representa el volumen bajo la superficie de la función densidad de la distribución normal bivalente dentro de la región definida por la elipse de error. En la siguiente tabla, se muestran los valores de $P(U \leq k^2)$ para distintos valores de k .

Probabilidad (1- α)	k	k^2
0.393	1.000	1.000
0.500	1.177	1.385
0.632	1.414	1.999
0.865	2.000	4.000
0.900	2.146	4.605
0.950	2.448	5.991
0.989	3.000	9.000
0.990	3.035	9.211
0.998	3.500	12.250

Como la elipse estándar de error se define para $k^2=1$, podemos ver que la probabilidad de que la posición del punto quede sobre o en el interior de la elipse estándar de error es 0.394. Si se quiere calcular el tamaño de una elipse de error de una determinada probabilidad, se elige el nivel de significación α , y a continuación se calcula el valor k .

Por ejemplo, para $\alpha=0.05$,

$$P[U \leq k^2] = P[\chi_{0.05, 2}^2 \leq k^2] = 1 - 0.05 = 0.95 \quad (6.9)$$

La función $INV(\chi_{0.05, 2}^2)$ tiene un valor de 5.9915, por tanto, $k = \sqrt{5.9915} = 2.4478$. Es decir, la elipse de error que tiene asociada un 95% de probabilidad tienen por semiejes los valores $2.4478\sigma_u$ y $2.4478\sigma_v$.

6.1.2. Cálculo de la elipse de error asociada a distintos niveles de probabilidad.

Como hemos mencionado anteriormente, cuando se cumple el test global de bondad del ajuste, definido en el apartado 1.1.11, admitimos que la varianza de referencia a priori es conocida y adoptamos el valor $\sigma_0^2=1$.

Según esta valor σ_0^2 y teniendo en cuenta (1.226)

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \frac{\mathbf{Q}^{-1}}{\sigma_0^2} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \quad (6.10)$$

En este caso, tal y como hemos venido analizando en los apartados anteriores, la expresión anterior sigue una distribución $\chi_{\alpha, 2}^2$, con dos grados de libertad

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \frac{\mathbf{Q}^{-1}}{\sigma_0^2} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \chi_{\alpha, 2}^2 \quad (6.11)$$

que también podemos expresar como,

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \sigma_0^2 \chi_{\alpha, 2}^2 \quad (6.12)$$

Según la expresión anterior, la elipse estándar de error se obtiene igualando

$$\chi_{\alpha, 2}^2 = 1 \quad (6.13)$$

que corresponde a una probabilidad $p=0.394$, como se ha indicado en la tabla.

Para valores de probabilidad distintos a $p=0.394$, obtendremos las elipses de error asociadas a dichas probabilidades a partir de los correspondientes valores de k , cuyos ejes se obtienen mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \sigma_u &= k \sqrt{\lambda_1} \\ \sigma_v &= k \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En el caso que no se cumpla el test global de bondad del ajuste, hemos de concluir que la varianza de referencia a priori es desconocida y debemos adoptar el valor estimado calculado mediante las expresiones (1.66) y (1.68), a posteriori,

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{r}^t \mathbf{r}}{m-n} ; \quad s_0^2 = \frac{\mathbf{r}^t \mathbf{P} \mathbf{r}}{m-n} \quad (6.15)$$

En este caso, la expresión (6.12) debe escribirse de la forma,

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \frac{\mathbf{Q}^{-1}}{s_0^2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (6.16)$$

La expresión

$$g \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = (m-n) \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{\alpha, m-n}^2 \quad (6.17)$$

sigue una distribución χ^2 con (m-n) grados de libertad. El cociente

$$\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \frac{\mathbf{Q}^{-1}}{\sigma_0^2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \frac{1}{2}}{(m-n) \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} \frac{1}{(m-n)}} \sim F_{\alpha, 2, m-n} \quad (6.18)$$

sigue una distribución F con 2 y (m-n) grados de libertad, que podemos expresar como

$$\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2s_0^2} \sim F_{\alpha, 2, m-n} \quad (6.19)$$

Por tanto, las elipses de error asociadas a distintas probabilidades deben calcularse teniendo en cuenta que

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = 2s_0^2 F_{\alpha, 2, m-n} \quad (6.20)$$

o bien,

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = 2 F_{\alpha, 2, m-n} \quad (6.21)$$

siendo en este caso,

$$k^2 = 2 F_{\alpha, 2, m-n} \quad (6.22)$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de $F_{\alpha, 2, m-n}$ para una probabilidad del 95% ($\alpha = 0.05$), del 99% ($\alpha = 0.01$) y distintos grados de libertad (m-n).

m-n	$\alpha = 0.05$ $k^2/2 = F_{\alpha, 2, m-n}$	k
1	199.500	19.975
2	19.000	6.164
3	9.552	4.371
4	6.944	3.727
5	5.786	3.402
6	5.143	3.207
7	4.737	3.078
8	4.459	2.986
9	4.256	2.918
10	4.103	2.865
20	3.493	2.643
30	3.316	2.575
40	3.232	2.542
50	3.183	2.523
100	3.087	2.485

m-n	$\alpha = 0.01$ $k^2/2 = F_{\alpha, 2, m-n}$	k
1	4999.500	99.995
2	99.000	14.071
3	30.817	7.851
4	18.000	6.000
5	13.274	5.152
6	10.925	4.674
7	9.547	4.370
8	8.648	4.159
9	8.022	4.005
10	7.559	3.888
20	5.849	3.420
30	5.390	3.283
40	5.179	3.218
50	5.057	3.180
100	4.824	3.106

A partir de los valores de k, se podrán calcular los semiejes de las elipses de error asociadas a distintas probabilidades, según las expresiones (6.14).

La probabilidad que corresponde a la elipse estándar de error se obtiene igualando

$$2F_{\alpha, 2, m-n} = 1 \quad (6.23)$$

y, por tanto,

$$F_{\alpha, 2, m-n} = 0.5 \quad (6.24)$$

Por ejemplo, si la red topográfica tiene 3 grados de libertad, el valor de α que cumple la ecuación (6.24) es

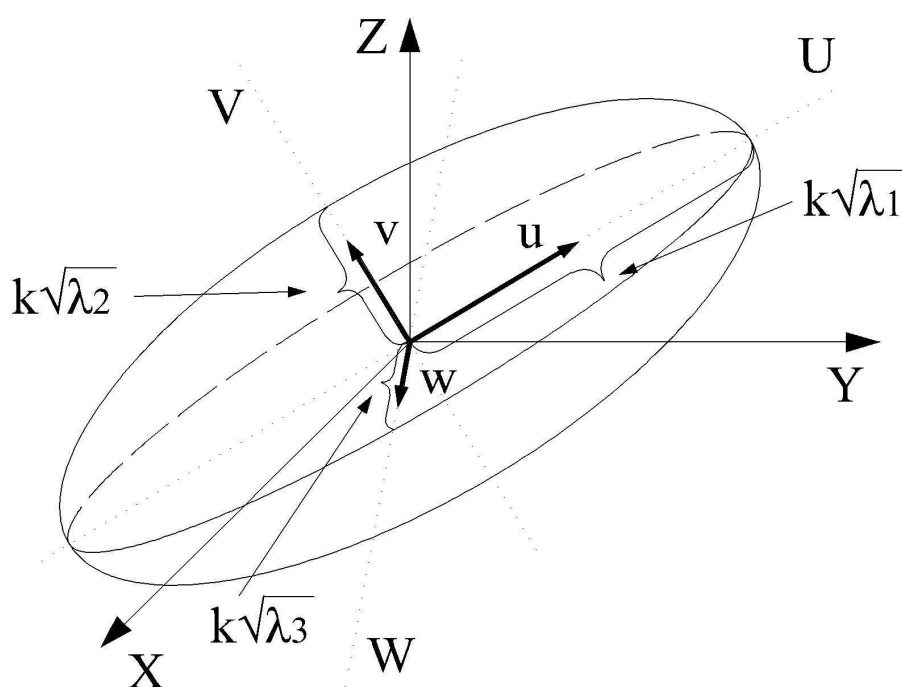
$$\text{DISTR.F.CD } (0.5; 2; 3) = 0.650 \quad (6.25)$$

y la probabilidad correspondiente a la elipse estándar de error será $(1-0.650)100 = 35\%$.

6.2. Elipsoides de error.

6.2.1. Elipsoides de error.

El error asociado al cálculo de las coordenadas espaciales de un punto (x, y, z) tras el ajuste por mínimos cuadrados, se determina mediante un elipsoide.



Anteriormente hemos analizado el cálculo de los parámetros de las elipses de error para el caso de un ajuste bidimensional donde intervienen las coordenadas planimétricas de los puntos, a través de dos métodos diferentes. Este mismo análisis se puede aplicar para el caso de un ajuste tridimensional, siendo más apropiado el método de cálculo basado en los autovalores y autovectores de la parte correspondiente a cada punto de la matriz de covarianza. En el caso bidimensional solo es necesario resolver una ecuación cuadrática para calcular los autovalores. En el caso tridimensional el polinomio característico es cúbico y tiene, por tanto, tres raíces, siendo su cálculo un poco más complejo.

Por otro lado, el cálculo de la orientación del semieje mayor, en el caso bidimensional, requiere un solo parámetro, el acimut. Sin embargo, en el caso tridimensional se requieren dos parámetros para definir su orientación: el acimut del semieje mayor sobre el plano horizontal y la elevación del mismo sobre dicho plano.

En el caso tridimensional, la parte relevante de la matriz de covarianza para cada uno de los puntos, es de la forma

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

cuya ecuación características

$$|\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.27)$$

se utiliza para el cálculo de los tres semiejes del elipsoide, a partir de los tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y para el cálculo de la orientación de dichos semiejes, a partir de los tres autovectores u, v, w .

Una vez calculadas las tres raíces, es decir, los tres autovalores de la matriz de covarianza de un punto ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$), los tres semiejes ($\sigma_u > \sigma_v > \sigma_w$) del elipsoide estándar de error de dicho punto se calculan mediante

$$\begin{aligned} \sigma_u &= k \sqrt{\lambda_1} \\ \sigma_v &= k \sqrt{\lambda_2} \\ \sigma_w &= k \sqrt{\lambda_3} \end{aligned} \quad (6.28)$$

siendo $k=1$.

La orientación de estos tres semiejes viene dada por la dirección de los autovectores de la matriz de covarianza, que se pueden calcular a partir de la ecuación característica,

$$(\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{z} = 0 \quad (6.29)$$

que aplicada al autovalor λ_1 , permite obtener el autovector \mathbf{u}

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 - \lambda_1 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda_1 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

de donde

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_y^2 - \lambda_1)(\sigma_z^2 - \lambda_1) - \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{xy}(\sigma_z^2 - \lambda_1) \\ \sigma_{xy}(\sigma_y^2 - \lambda_1) - \sigma_{xy} \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

cuya dirección se puede definir, para mayor claridad, a partir del acimut sobre el plano horizontal, θ_u , y la elevación, δ_u , sobre dicho plano

$$\theta_u = \arctg\left(\frac{u_x}{u_y}\right) \quad (6.32)$$

$$\delta_u = \arctg\left(\frac{u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}\right)$$

teniendo en cuenta el signo del numerador y del denominador para el cálculo correcto de θ_u y el del numerador para el cálculo correcto de δ_u .

La dirección de los otros dos semiejes se calcula de la misma manera.

Si se quiere determinar el elipsoide de error para una determinada probabilidad, cuando se verifica el test global de bondad del ajuste, es decir $\sigma_0^2=1$,

$$Q = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_{\alpha,3}^2 \quad (6.33)$$

se distribuye según una distribución chi-cuadrado con 3 grados de libertad.

Los valores de k y k^2 asociados a distintas probabilidades se indican en la

siguiente tabla.

Probabilidad (1- α)	k	k ²
0.199	1.000	1.000
0.500	1.538	2.366
0.739	2.000	4.000
0.900	2.500	6.251
0.950	2.795	7.815
0.971	3.000	9.000
0.990	3.368	11.345
0.999	4.000	16.000

Como el elipsoide estándar de error se define para $k^2=1$, podemos ver que la probabilidad de que la posición del punto quede en el interior del elipsoide estándar de error es 0.19875. Si se quiere calcular el tamaño de un elipsoide de error de una determinada probabilidad, se elige el nivel de significación α , y a continuación se calcula el valor k.

Por ejemplo, para $\alpha=0.05$

$$P[U \leq k^2] = P[\chi_{0.05, 3}^2 \leq k^2] = 1 - 0.05 = 0.95 \quad (6.34)$$

La función $INV(\chi_{0.05, 3}^2)$ tiene un valor de 7.8147, por tanto, $k = \sqrt{7.8147} = 2.7955$. Es decir, el elipsoide de error que tiene asociado un 95% de probabilidad tienen por semejes los valores $2.7955\sigma_u$, $2.7955\sigma_v$ y $2.7955\sigma_w$.

6.2.2. Cálculo del elipsoide de error asociado a distintos niveles de probabilidad.

Al igual que en el caso bidimensional, la expresión (6.33) se utiliza para el cálculo del elipsoide estándar de error cuando se cumple el test global de bondad del ajuste. En caso contrario, y siguiendo el mismo razonamiento, para el cálculo del

elipsoide de error asociado a distintos niveles de probabilidad podemos indicar las siguientes expresiones equivalentes a (6.20), (6.21) y (6.22).

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = 3s_0^2 F_{\alpha,3,m-n} \quad (6.35)$$

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = 3 F_{\alpha,3,m-n} \quad (6.36)$$

$$k^2 = 3 F_{\alpha,3,m-n} \quad (6.37)$$

En la tabla a continuación se muestran los valores de $F_{\alpha,3,m-n}$ para una probabilidad del 95% ($\alpha=0.05$), del 9% ($\alpha=0.01$) y distintos grados de libertad (m-n).

m-n	$\alpha = 0.05$ $k^2/3 = F_{\alpha,3,m-n}$	k
1	215.707	25.439
2	19.164	7.582
3	9.277	5.275
4	6.591	4.447
5	5.409	4.028
6	4.757	3.778
7	4.347	3.611
8	4.066	3.493
9	3.863	3.404
10	3.708	3.335
20	3.098	3.049
30	2.922	2.961
40	2.839	2.918
50	2.790	2.893
100	2.696	2.844

m-n	$\alpha = 0.01$ $k^2/3 = F_{\alpha,3,m-n}$	k
1	5403.352	127.319
2	99.166	17.248
3	29.457	9.401
4	16.694	7.077
5	12.060	6.015
6	9.780	5.417
7	8.451	5.035
8	7.591	4.772
9	6.992	4.580
10	6.552	4.434
20	4.938	3.849
30	4.510	3.678
40	4.313	3.597
50	4.199	3.549
100	3.984	3.457

A partir de los valores de k , se podrán calcular los semiejes de los elipsoides de error asociados a distintas probabilidades, según las expresiones (6.28).

La probabilidad que corresponde al elipsoide estándar de error se obtiene igualando

$$3 F_{\alpha, 3, m-n} = 1 \quad (6.38)$$

y, por tanto,

$$F_{\alpha, 3, m-n} = 0.33333 \quad (6.39)$$

Por ejemplo, si la red topográfica tiene 4 grados de libertad, el valor de α que cumple la ecuación (6.39) es

$$\text{DISTR.F.CD}(0.33333; 3; 4) = 0.803 \quad (6.40)$$

y la probabilidad correspondiente al elipsoide estándar de error será $(1-0.803)100=19.7\%$

7. Ejemplos de cálculo de redes topográficas.

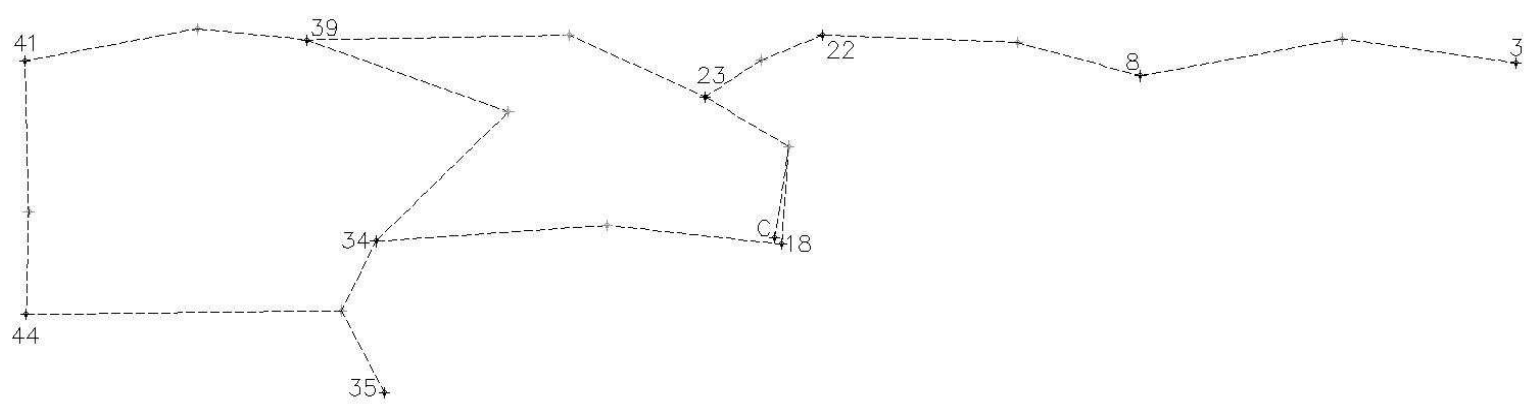
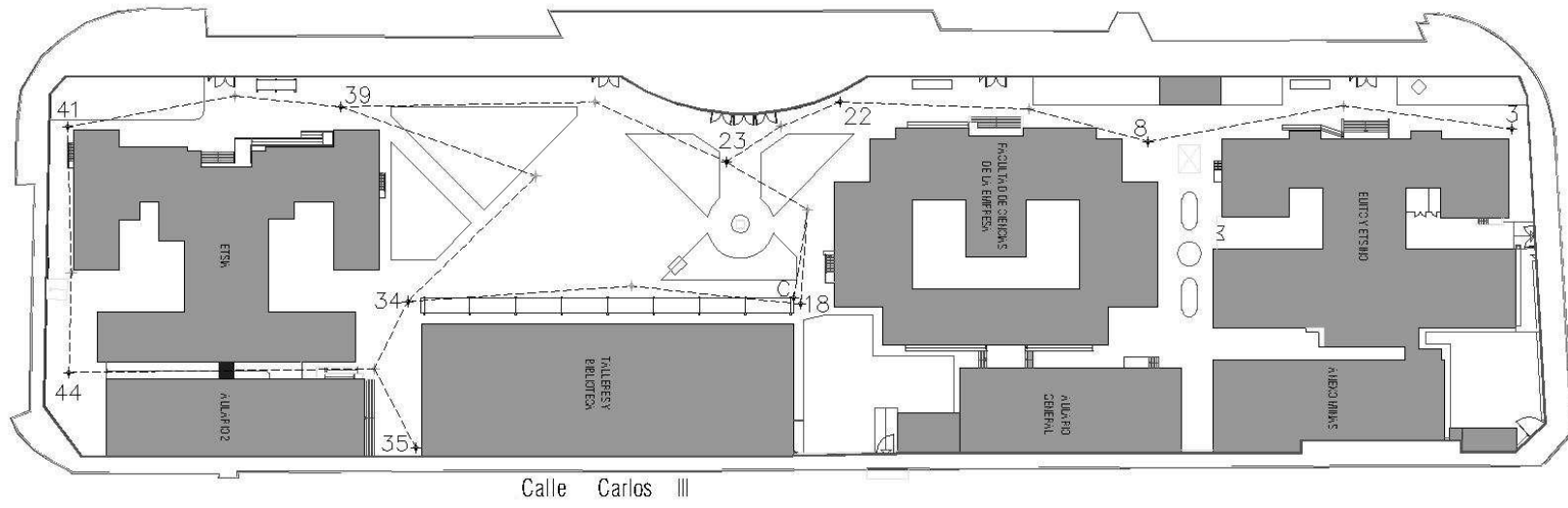
7.1. Nivelación 3 hilos.

7.1.1. Datos de campo.

Puntos de cota conocida: P23 Cota: 5.911 m.

Desniveles:

ESPALDA	Lectura superior	Lectura central	Lectura inferior	FRENTE	Lectura superior	Lectura central	Lectura inferior
P3	1.482	1.272	1.062	P8	1548	1376	1204
P8	1.320	1.177	1.033	P22	1520	1350	1180
P22	1.495	1.422	1.350	P23	1440	1391	1342
P23	1.552	1.460	1.368	PC	-1675	-1753	-1831
PC	-1.675	-1.753	-1.831	P18	1434	1352	1270
P18	1.690	1.491	1.294	P34	1584	1392	1202
P34	1.414	1.192	0.970	P39	1466	1296	1125
P39	1.466	1.296	1.125	P23	1614	1400	1185
P39	1.572	1.413	1.254	P41	1596	1488	1378
P41	1.648	1.499	1.348	P44	1545	1445	1345
P44	2.004	1.700	1.398	P35	1411	1317	1223
P35	1.396	1.285	1.175	P34	1577	1543	1509



NIVELACIÓN 3 HILOS

compensador

error en la lectura de la mira, por metro

Nivel Automático Leica NA724

0.5 "

0.04 mm/m

206264.8062

Puntos fijos Cota
P23 5.911

Espalda	DESNIVELES										Distancia FRENTE	DESNIVEL	Dist. MEDIA	$\sigma_{\Delta z}^2$	Peso			
	Lectura superior	Lectura central	Lectura inferior	Diferen.	Intervalos	Lectura definitiva	Distancia ESPAL	Frente	Lectura superior	Lectura central						Lectura inferior	Diferen.	Intervalos
P3	1.482	1.272	1.062	0.000	0.000	1.272	42.000 P8	1.548	1.376	1.204	0.000	0.000	1.376	34.400	-0.104	38.200	0.00000469	213368.96071
P8	1.320	1.177	1.033	-0.001	0.000	1.177	28.700 P22	1.520	1.350	1.180	0.000	0.000	1.350	34.000	-0.173	31.350	0.00000316	316798.32546
P22	1.495	1.422	1.350	0.001	0.000	1.422	14.500 P23	1.440	1.391	1.342	0.000	0.000	1.391	9.800	0.031	12.150	0.00000047	2109140.01745
P23	1.552	1.460	1.368	0.000	0.000	1.460	18.400 PC	-1.675	-1.753	-1.831	0.000	0.000	-1.753	15.600	3.213	17.000	0.00000093	1077358.20840
PC	-1.675	-1.753	-1.831	0.000	0.000	-1.753	15.600 P18	1.434	1.352	1.270	0.000	0.000	1.352	16.400	-3.105	16.000	0.00000082	1216236.41495
P18	1.690	1.491	1.294	0.002	0.000	1.492	39.600 P34	1.584	1.392	1.202	0.002	0.000	1.393	38.200	0.099	38.900	0.00000486	205758.96421
P34	1.414	1.192	0.970	0.000	0.000	1.192	44.400 P39	1.466	1.296	1.125	-0.001	0.000	1.296	34.100	-0.104	39.250	0.00000495	202105.73880
P39	1.466	1.296	1.125	-0.001	0.000	1.296	34.100 P23	1.614	1.400	1.185	-0.001	0.000	1.400	42.900	-0.104	38.500	0.00000476	210056.68560
P39	1.572	1.413	1.254	0.000	0.000	1.413	31.800 P41	1.596	1.488	1.378	-0.002	0.000	1.487	21.800	-0.074	26.800	0.00000231	433499.27911
P41	1.648	1.499	1.348	-0.002	0.000	1.498	30.000 P44	1.545	1.445	1.345	0.000	0.000	1.445	20.000	0.053	25.000	0.00000201	498170.43556
P44	2.004	1.700	1.398	0.002	0.000	1.701	60.600 P35	1.411	1.317	1.223	0.000	0.000	1.317	18.800	0.384	39.700	0.00000506	197549.96366
P35	1.396	1.285	1.175	0.001	0.000	1.285	22.100 P34	1.577	1.543	1.509	0.000	0.000	1.543	6.800	-0.258	14.450	0.00000067	1491153.22961

A											z	d	l	f
3	8	22	C	18	34	39	41	44	35		P3	0	-0.104	-0.104
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		P8	0	-0.173	-0.173
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		P22	-5.911	0.031	-5.880
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0		PC	5.911	3.213	9.124
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		P18	0	-3.105	-3.105
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0		P34	0	0.099	0.099
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0		P39	0	-0.104	-0.104
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0		P41	-5.911	-0.104	-6.015
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0		P44	0	-0.074	-0.074
0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0		P35	0	0.053	0.053
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0			0	0.384	0.384
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1			0	-0.258	-0.258

P											
213368.960710	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	316798.325462	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	2109140.017454	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	1077358.208397	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	1216236.414948	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	205758.964206	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	202105.738798	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	210056.685597	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	433499.279108	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	498170.435563	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	197549.963661	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1491153.229615

p ⁻¹											
0.0000046867	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0.0000031566	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0.0000004741	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0.0000009282	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0.0000008222	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0.0000048601	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0.0000049479	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0.0000047606	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000023068	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000020073	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000050620	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000006706

R	Matriz de redundancia											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0632015573	0.0632015573	0.0632015573	0.0423464899	0.0632015573	-0.0208550675	-0.0208550675	-0.0208550675	-0.0208550675	0
0	0	0	0.0559847705	0.0559847705	0.0559847705	0.0375110775	0.0559847705	-0.0184736930	-0.0184736930	-0.0184736930	-0.0184736930	0
0	0	0	0.3309246664	0.3309246664	0.3309246664	0.2217271002	0.3309246664	-0.1091975662	-0.1091975662	-0.1091975662	-0.1091975662	0
0	0	0	0.2257349976	0.2257349976	0.2257349976	0.4812247282	0.2257349976	0.2554897306	0.2554897306	0.2554897306	0.2554897306	0
0	0	0	0.3241540082	0.3241540082	0.3241540082	0.2171906042	0.3241540082	-0.1069634040	-0.1069634040	-0.1069634040	-0.1069634040	0
0	0	0	-0.0518302549	-0.0518302549	-0.0518302549	0.1191142483	-0.0518302549	0.1709445031	0.1709445031	0.1709445031	0.1709445031	0
0	0	0	-0.0451017895	-0.0451017895	-0.0451017895	0.1036511544	-0.0451017895	0.1487529439	0.1487529439	0.1487529439	0.1487529439	0
0	0	0	-0.1137351670	-0.1137351670	-0.1137351670	0.2613816768	-0.1137351670	0.3751168438	0.3751168438	0.3751168438	0.3751168438	0
0	0	0	-0.0150677862	-0.0150677862	-0.0150677862	0.0346281923	-0.0150677862	0.0496959785	0.0496959785	0.0496959785	0.0496959785	0

Test de POPE

α	Prob. (%)	α_0	α/n	$\alpha_0/2$	$t_{-}([1-\alpha]_{-}(0/2,) g-1)$
0.001	99.9	0.0000833716	0.0000833333	0.0000416858	7635.9351834920

valor critico

Residuos	Raiz Cof. Resid.	Resid. Normaliz.	Nº redundancia	g= Tr(A)
0	0	0	0	2
0	0	0	0	
0	0	0	0	
-0.0000840566	0.0002422054	0.3470468605	0.0632015573	
-0.0000744585	0.0002145487	0.3470468605	0.0559847705	
-0.0004401222	0.0012681925	0.3470468605	0.3309246664	
0.0000297547	0.0015430665	0.0192828584	0.4812247282	
-0.0004311174	0.0012422455	0.3470468605	0.3241540082	
0.0002227748	0.0006279620	0.3547583287	0.1709445031	
0.0001938547	0.0005464417	0.3547583287	0.1487529439	
0.0004888520	0.0013779860	0.3547583287	0.3751168438	
0.0000647638	0.0001825574	0.3547583287	0.0496959785	

$\tau_{-}([1-\alpha]_{-}(0/2,) g)$	Residuo crítico
1.4142135502	0.4325873189

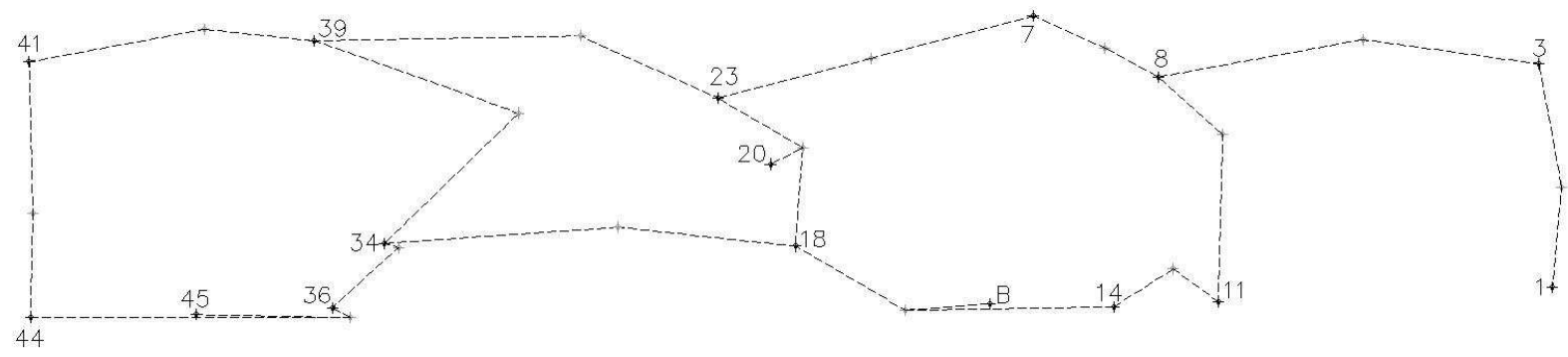
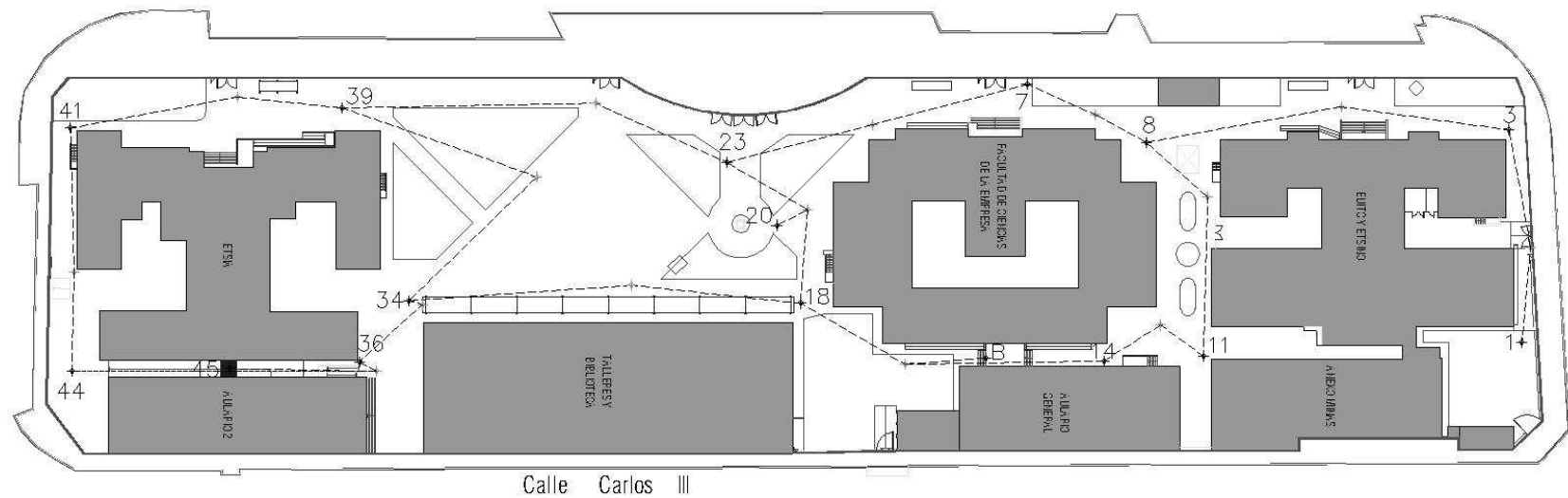
7.2. Nivelación Digital.

7.2.1. Datos de campo.

Puntos de cota conocida: P20 Cota: 6.00 m.

Desniveles:

ESPALDA	Lectura	Distancia E	FRENTE	Lectura	Distancia F
P1	1.304	22.200	P3	2.555	23.100
P3	1.216	35.780	P8	1.321	39.230
P8	1.552	17.210	P11	1.305	27.960
P11	1.321	9.750	P14	1.374	11.910
P14	1.507	48.540	PB	-2.703	25.310
PB	-2.703	25.310	P18	1.735	14.170
P18	1.518	16.090	P20	1.536	5.220
P20	1.536	5.220	P23	1.625	19.190
P23	1.543	30.210	P7	1.692	30.470
P7	1.607	13.900	P8	1.317	13.180
P18	1.493	39.570	P34	1.392	38.820
P34	1.271	36.650	P39	1.376	44.220
P39	1.274	50.940	P23	1.377	26.430
P39	1.419	20.280	P41	1.488	33.040
P41	1.674	30.630	P44	1.622	19.390
P36	1.313	16.740	P34	1.445	2.400
P45	3.586	27.150	P36	1.416	2.510
P44	1.666	60.820	P36	1.416	2510



NIVELACIÓN DIGITAL

compensador

error en la lectura de la mira, por metro

Nivel Digital Leica Sprinter 200

0.8 "

0.02 mm/m

206264.8062

Puntos fijos
P20

6

DESNIVELES

Espalda	Lectura	Distancia ESPAL	Frente	Lectura	Distancia FRENTE	DESNIVEL	Dist. MEDIA	Peso	z	d	ℓ	f	
P1	1.304	22.200	P3	2.555	23.100	-1.251	22.650	0.00000043	2348230.20567	P1	0	856443.551	856443.551
P3	1.216	35.780	P8	1.321	39.230	-0.105	37.505	0.00000117	856443.55054	P3	0	2361766.146	2361766.146
P8	1.552	17.210	P11	1.305	27.960	0.247	22.585	0.00000042	2361766.14602	P8	0	10271175.965	10271175.965
P11	1.321	9.750	P14	1.374	11.910	-0.053	10.830	0.00000010	10271175.96541	P11	0	883560.058	883560.058
P14	1.507	48.540	PB	-2.703	25.310	4.210	36.925	0.00000113	883560.05769	P14	0	3091596.352	3091596.352
PB	-2.703	25.310	P18	1.735	14.170	-4.438	19.740	0.00000032	3091596.35209	PB	0	10611338.648	10611338.648
P18	1.518	16.090	P20	1.536	5.220	-0.018	10.655	0.00000009	10611338.64833	P18	-6	8087262.043	8087256.043
P20	1.536	5.220	P23	1.625	19.190	-0.089	12.205	0.00000012	8087262.04339	P23	6	1308717.561	1308723.561
P23	1.543	30.210	P7	1.692	30.470	-0.149	30.340	0.00000076	1308717.56078	P7	0	6571125.385	6571125.385
P7	1.607	13.900	P8	1.317	13.180	0.290	13.540	0.00000015	6571125.38531	P34	0	784179.970	784179.970
P18	1.493	39.570	P34	1.392	38.820	0.101	39.195	0.00000128	784179.97035	P39	0	736821.327	736821.327
P34	1.271	36.650	P39	1.376	44.220	-0.105	40.435	0.00000136	736821.32718	P41	0	804992.586	804992.586
P39	1.274	50.940	P23	1.377	26.430	-0.103	38.685	0.00000124	804992.58589	P44	0	1694949.615	1694949.615
P39	1.419	20.280	P41	1.488	33.040	-0.069	26.660	0.00000059	1694949.61516	P36	0	1925970.804	1925970.804
P41	1.674	30.630	P44	1.622	19.390	0.052	25.010	0.00000052	1925970.80430	P45	0	13153859.760	13153859.760
P36	1.313	16.740	P34	1.445	2.400	-0.132	9.570	0.00000008	13153859.75952		0	5477656.328	5477656.328
P45	3.586	27.150	P36	1.416	2.510	2.170	14.830	0.00000018	5477656.32752		0	1201484.294	1201484.294
P44	1.666	60.820	P36	1.416	2.510	0.250	31.665	0.00000083	1201484.29432		0	0.000	0.000

A

1	3	8	11	14	B	18	23	7	34	39	41	44	36	45
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0

P

2348230.20567	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	856443.55054	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2361766.14602	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10271175.96541	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	883560.05769	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	3091596.35209	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	10611338.64833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	8087262.04339	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1308717.56078	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	6571125.38531	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	784179.97035	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	736821.32718	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	804992.58589	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1694949.61516	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1925970.80430	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13153859.75952	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5477656.32752	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1201484.29432	0

R																		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3.75093E-15	-1.19625E-14	6.08079E-16	4.09169E-16	4.2132E-16	-6.42204E-16	-1.10853E-15	-2.08723E-15	-4.67034E-17	3.41311E-17	-2.1308E-17	5.60812E-17	6.3725E-17	6.9636E-16	0	-1.98769E-16	0
0	-9.06795E-17	0.136725362	0.136725362	0.136725362	0.136725362	0.128325766	0.128325766	0.136725362	0.136725362	0.008399596	0.0050216	0.008399596	-0.003377996	-0.003377996	-0.003377996	0	-0.003377996	0
0	9.06795E-17	0.031438789	0.031438789	0.031438789	0.031438789	0.029507376	0.029507376	0.031438789	0.031438789	0.001931413	0.001154673	0.001931413	-0.00077674	-0.00077674	-0.00077674	0	-0.00077674	0
0	-6.80096E-17	0.365468457	0.365468457	0.365468457	0.365468457	0.343016242	0.343016242	0.365468457	0.365468457	0.022452216	0.013422794	0.022452216	-0.009029421	-0.009029421	-0.009029421	0	-0.009029421	0
0	-2.26699E-17	0.104448736	0.104448736	0.104448736	0.104448736	0.098032025	0.098032025	0.104448736	0.104448736	0.006416711	0.003836156	0.006416711	-0.002580556	-0.002580556	-0.002580556	0	-0.002580556	0
0	0	0.028561472	0.028561472	0.028561472	0.028561472	0.053377446	0.053377446	0.028561472	0.028561472	-0.024815974	-0.01483594	-0.024815974	0.009980034	0.009980034	0.009980034	0	0.009980034	0
0	0	0.037475656	0.037475656	0.037475656	0.037475656	0.070036825	0.070036825	0.037475656	0.037475656	-0.032561169	-0.019466314	-0.032561169	0.013094855	0.013094855	0.013094855	0	0.013094855	0
0	9.06795E-17	0.246740275	0.246740275	0.246740275	0.246740275	0.231582015	0.231582015	0.246740275	0.246740275	0.01515826	0.009062188	0.01515826	-0.006096072	-0.006096072	-0.006096072	0	-0.006096072	0
0	0	0.049141252	0.049141252	0.049141252	0.049141252	0.046122305	0.046122305	0.049141252	0.049141252	0.003018947	0.001804842	0.003018947	-0.001214105	-0.001214105	-0.001214105	0	-0.001214105	0
0	0	0.025297613	0.025297613	0.025297613	0.025297613	-0.335803916	-0.335803916	0.025297613	0.025297613	0.361101528	0.215880323	0.361101528	-0.145221205	-0.145221205	-0.145221205	0	-0.145221205	0
0	0	0.016095958	0.016095958	0.016095958	0.016095958	-0.213659913	-0.213659913	0.016095958	0.016095958	0.22975587	0.539518561	0.22975587	0.30976269	0.30976269	0.30976269	0	0.30976269	0
0	0	0.024643557	0.024643557	0.024643557	0.024643557	-0.327121901	-0.327121901	0.024643557	0.024643557	0.351765458	0.210298863	0.351765458	-0.141466595	-0.141466595	-0.141466595	0	-0.141466595	0
0	0	-0.004706946	-0.004706946	-0.004706946	-0.004706946	0.062480633	0.062480633	-0.004706946	-0.004706946	-0.067187579	0.134658726	-0.067187579	0.201846305	0.201846305	0.201846305	0	0.201846305	0
0	0	-0.004142345	-0.004142345	-0.004142345	-0.004142345	0.054986049	0.054986049	-0.004142345	-0.004142345	-0.059128394	0.118506343	-0.059128394	0.177634737	0.177634737	0.177634737	0	0.177634737	0
0	0	-0.000606517	-0.000606517	-0.000606517	-0.000606517	0.008050985	0.008050985	-0.000606517	-0.000606517	-0.008657501	0.017351542	-0.008657501	0.026009044	0.026009044	0.026009044	0	0.026009044	0
0	0	-1.56289E-17	6.79689E-17	-5.84691E-18	0	5.3517E-17	-8.66037E-18	4.34841E-17	-4.34841E-17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.00664015	-0.00664015	-0.00664015	-0.00664015	0.088142246	0.088142246	-0.00664015	-0.00664015	-0.094782396	0.189964827	-0.094782396	0.284747224	0.284747224	0.284747224	0	0.284747224	0

Test de POPE

α	Prob. (%)	α_0	α/n	$\alpha_0/2$	$t_{((1-\alpha)_{(0/2,)} g-1)}$
0.001	99.9	0.0000555818	0.0000555556	0.0000277909	134.1268001474

valor critico

Residuos	Raiz	Cof. Resid.	Resid. Normaliz.	Nº redundancia
0.0000000000		0	0	0
0.0000000000		0	0	0
0.0000135120		0	0	0.1367253620
0.0000031070	0.0000553252	0.0561581764	0.0314387887	
0.0000361177	0.0006431421	0.0561581763	0.3654684575	
0.0000103222	0.0001838062	0.0561581763	0.1044487361	
-0.0000399201	0.0000709241	0.5628571940	0.0533774459	
-0.0000523794	0.0000930599	0.5628571940	0.0700368248	
0.0000243843	0.0004342072	0.0561581763	0.2467402754	
0.0000048564	0.0000864775	0.0561581763	0.0491412524	
0.0005808848	0.0006785890	0.8560186719	0.3611015284	
-0.0012390508	0.0008557011	1.4479947853	0.5395185607	
0.0005658664	0.0006610444	0.8560186719	0.3517654583	
-0.0008073852	0.0003450897	2.3396386631	0.2018463051	
-0.0007105389	0.0003036960	2.3396386631	0.1776347369	
-0.0001040362	0.0000444668	2.3396386631	0.0260090440	
0.0000000000	0	0	0	
-0.0011389889	0.0004868226	2.3396386631	0.2847472237	

$g = \text{Tr}(A)$

3

$\tau_{((1-\alpha)_{(0/2,)} g)}$
1.7319545371

Residuo crítico
2.3395086218

7.3. Planimetría.

7.3.1. Datos de campo.

Puntos de coordenadas conocidas: 21 (154.076; 53.082)
31 (74.082; 71.333)

Puntos a ajustar: 26, 34, 46. Coordenadas aproximadas:

26 (110.618; 40.167)
34 (71.498; 29.027)
46 (123.918; 67.588)

Direcciones medidas:

Estación	Pto. Visado	Dirección (g)
46	21	371.224
	26	71.443
	34	102.290
	31	147.460
26	21	212.805
	46	159.970
	31	76.184
	34	13.513
34	31	357.130
	46	12.849
	26	35.570

Distancias medidas:

Estación	Pto. Visado	Distancia
46	21	33.465
	26	30.473
	34	65.06
	31	49.974
26	21	45.336
	31	48.009
	34	40.658
34	31	42.391

7.3.2. Cálculos previos.

Tanto para el cálculo de la red planimétrica como la espacial, es necesario calcular unas coordenadas aproximadas para los puntos 26, 34 y 46, cálculos que se desarrollan a continuación.

PUNTO 26.

$$d_{21}^{31} = \sqrt{(X_{31} - X_{21})^2 + (Y_{31} - Y_{21})^2} = 82.050 \quad \theta_{21}^{31} = \arctg \frac{X_{31} - X_{21}}{Y_{31} - Y_{21}} + 400 = 314.28$$

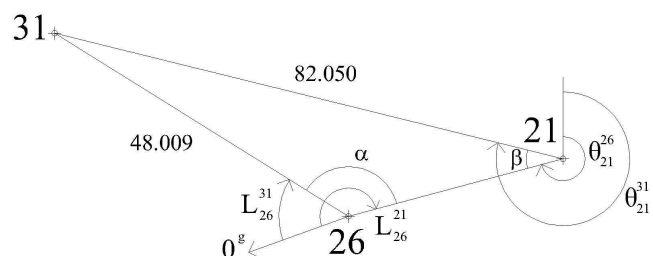
$$\alpha = L_{26}^{21} - L_{26}^{31} = 136.621$$

$$\beta \Rightarrow \frac{48.009}{\text{sen} \beta} = \frac{82.050}{\text{sen} \alpha} \Rightarrow \beta = \arcsen \frac{48.009 \text{sen} \alpha}{82.050} = 32.670$$

$$\theta_{21}^{26} = \theta_{21}^{31} - \beta = 281.610$$

$$X_{26} = X_{21} + d_{21}^{26} \text{sen} \theta_{21}^{26} = 110.618$$

$$Y_{26} = Y_{21} + d_{21}^{26} \cos \theta_{21}^{26} = 40.167$$



PUNTO 34.

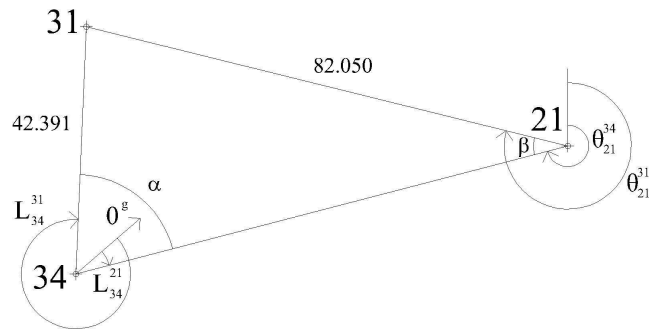
$$\alpha = 400 - L_{34}^{31} + L_{34}^{21} = 78.046$$

$$\beta \Rightarrow \frac{42.391}{\text{sen } \beta} = \frac{82.050}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \beta = \arcsen \frac{42.391 \text{ sen } \alpha}{82.050} = 32.326$$

$$\theta_{21}^{34} = \theta_{21}^{31} - \beta = 281.954$$

$$X_{34} = X_{21} + d_{21}^{34} \text{sen } \theta_{21}^{34} = 71.498$$

$$Y_{34} = Y_{21} + d_{21}^{34} \text{cos } \theta_{21}^{34} = 29.027$$



PUNTO 46.

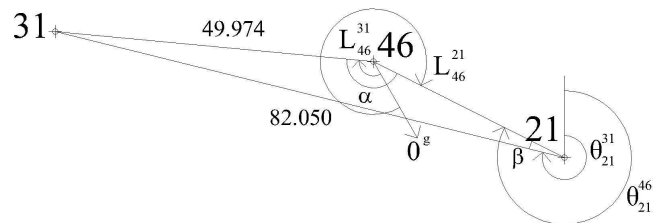
$$\alpha = 400 - L_{46}^{21} + L_{46}^{31} = 176.236$$

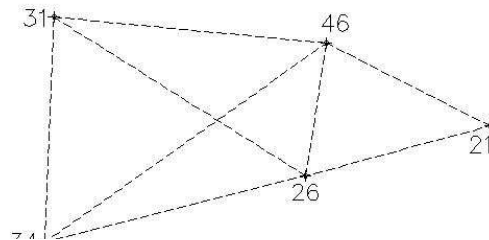
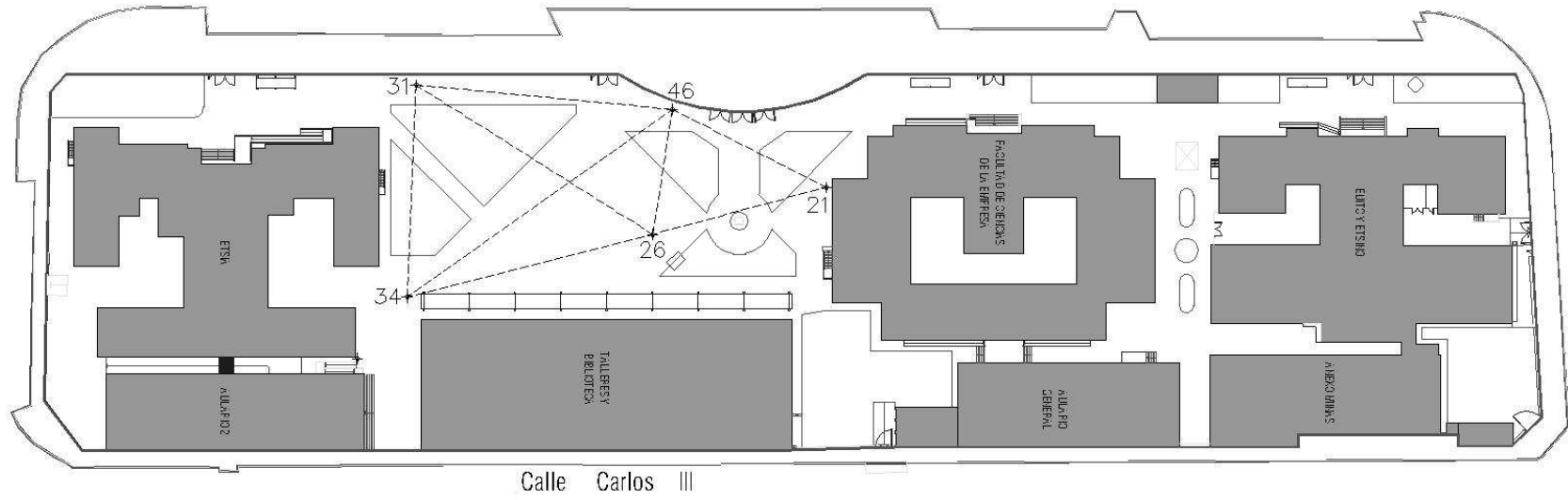
$$\beta \Rightarrow \frac{49.974}{\text{sen } \beta} = \frac{82.050}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \beta = \arcsen \frac{49.974 \text{ sen } \alpha}{82.050} = 14.262$$

$$\theta_{21}^{46} = \theta_{21}^{31} + \beta = 328.542$$

$$X_{46} = X_{21} + d_{21}^{46} \text{sen } \theta_{21}^{46} = 123.918$$

$$Y_{46} = Y_{21} + d_{21}^{46} \text{cos } \theta_{21}^{46} = 67.588$$





PLANIMETRÍA

ρ 636619.7724

Puntos fijos	X	Y	σ_{DIN}	σ_i	σ_r	a (mm.)	b (ppm)	
21	154.076	53.082	21.60493827		0.0025	0.005	0.002	2
31	74.082	71.333						

Puntos a ajustar. Coordenadas aproximadas.

	X	Y
26	110.618	40.167
34	71.498	29.027
46	123.918	67.588

Direcciones medidas:

Estación	Pto. Visado	Dirección (g)	Dist.	Desv. Estándar (cc.)	Pesos
46	21	371.224	33.465	108.51570429	0.00008492
	26	71.443	30.489	118.70792581	0.00007096
	34	102.290	65.079	58.79797048	0.00028925
	31	147.460	49.977	74.41502010	0.00018058
26	21	212.805	45.344	81.40458626	0.00015090
	46	159.970	30.489	118.70792581	0.00007096
	31	76.184	48.028	77.18466754	0.00016786
	34	13.513	40.657	90.15900888	0.00012302
34	31	357.130	42.418	86.63671787	0.00013323
	46	12.849	65.079	58.79797048	0.00028925
	26	35.570	40.657	90.15900888	0.00012302

Distancias medidas:

Estación	Pto. Visado	Distancia	Desv. Estándar (m.)	Pesos
46	21	33.465	0.00593755	28365.18963
	26	30.473	0.00593748	28365.80532
	34	65.060	0.00593860	28355.17482
	31	49.974	0.00593801	28360.75709
26	21	45.336	0.00593786	28362.17937
	31	48.009	0.00593795	28361.37655
	34	40.658	0.00593773	28363.47383
34	31	42.391	0.00593778	28363.01070

Vector x (incógnitas)

- dX₂₆
- dY₂₆
- dX₃₄
- dY₃₄
- dX₄₆
- dY₄₆
- dθ₂₆
- dθ₃₄
- dθ₄₆

Matriz P (pesos)

0.00008492	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.00007096	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.00028925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.00018058	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.00015090	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.00007096	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.00016786	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.00012302	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.00013323	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00028925	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00012302	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28365.18963	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28365.80532	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28355.17482	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28360.75709	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28362.17937	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28361.37655	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28363.47383	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28363.01070	0

Vector l (Observaciones)

371.224
71.443
102.290
147.460
212.805
159.970
76.184
13.513
357.130
12.849
35.570
33.465
30.473
65.060
49.974
45.336
48.009
40.658
42.391

$$-\rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} d x_i + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} d y_i + \rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} d x_j - \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} d y_j - d \theta_i = k_{ij} + r_{ij}$$

$$k_{ij} = L_{ij} - L_{ij}^0$$

$$L_{ij}^0 = \theta_{ij}^0 - \theta_i^0$$

$$\theta_i^0 = \theta_{ij}^0 - L_{ij}$$

Dirección I-J

Punto I	Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	d_{ij}^0	L_{ij}	θ_{ij}^0	θ_i^0	L_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	a5	k
46	123.918	67.588	21	154.076	53.082	30.158	-14.506	33.465	371.224	128.542	157.318	371.224	8245.886	17143.211	0	0	-1	0
	123.918	67.588	26	110.618	40.167	-13.300	-27.421	30.476	71.443	228.750	71.432	18794.926	-9116.098	-18794.926	9116.098	-1	109.92979009	
	123.918	67.588	34	71.498	29.027	-52.420	-38.561	65.075	102.290	259.624	102.306	5796.886	-7880.314	-5796.886	7880.314	-1	-158.23593904	
	123.918	67.588	31	74.082	71.333	-49.836	3.745	49.977	147.460	304.775	147.457	-954.553	-12702.564	0	0	-1	27.31696409	
26	110.618	40.167	21	154.076	53.082	43.458	12.915	45.336	212.805	81.610	268.805	212.805	-4000.177	13460.295	0	0	-1	0
	110.618	40.167	46	123.918	67.588	13.300	27.421	30.476	159.970	28.750	159.945	-18794.926	9116.098	18794.926	-9116.098	-1	251.73597760	
	110.618	40.167	31	74.082	71.333	-36.536	31.166	48.023	76.184	344.961	76.156	-8603.288	-10085.661	0	0	-1	279.14173523	
	110.618	40.167	34	71.498	29.027	-39.120	-11.140	40.675	13.513	282.339	13.534	4286.525	-15052.860	-4286.525	15052.860	-1	-208.78863477	
34	71.498	29.027	31	74.082	71.333	2.584	42.306	42.385	357.130	3.884	46.754	357.130	-14992.049	915.696	0	0	-1	0
	71.498	29.027	46	123.918	67.588	52.420	38.561	65.075	12.849	59.624	12.870	-5796.886	7880.314	5796.886	-7880.314	-1	-209.81161001	
	71.498	29.027	26	110.618	40.167	39.120	11.140	40.675	35.570	82.339	35.585	-4286.525	15052.860	4286.525	-15052.860	-1	-152.17049325	

$$-\frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d x_i - \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d y_i + \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} d x_j + \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} d y_j = k_{ij} + r_{ij}$$

$$k_{ij} = d_{ij} - d_{ij}^0$$

Distancia I-J

Punto I	Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	d_{ij}	d_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	k
46	123.918	67.588	21	154.076	53.082	30.158	-14.506	33.465	33.465	-0.901	0.433	0	0	-0.00034028
	123.918	67.588	26	110.618	40.167	-13.300	-27.421	30.473	30.476	0.436	0.900	-0.436	-0.900	-0.00324060
	123.918	67.588	34	71.498	29.027	-52.420	-38.561	65.060	65.075	0.806	0.593	-0.806	-0.593	-0.01539567
	123.918	67.588	31	74.082	71.333	-49.836	3.745	49.974	49.977	0.997	-0.075	0	0	-0.00251369
26	110.618	40.167	21	154.076	53.082	43.458	12.915	45.336	45.336	-0.959	-0.285	0	0	-0.00046423
	110.618	40.167	31	74.082	71.333	-36.536	31.166	48.009	48.023	0.761	-0.649	0	0	-0.01389925
	110.618	40.167	34	71.498	29.027	-39.120	-11.14	40.658	40.675	0.962	0.274	-0.962	-0.274	-0.01722588
34	71.498	29.027	31	74.082	71.333	2.584	42.306	42.391	42.385	-0.061	-0.998	0	0	0.00615964

Puntos a ajustar. Coordenadas aproximadas.

	X	Y	θ_i^0
26	110.618	40.167	268.805
34	71.498	29.027	46.754
46	123.918	67.588	157.318

***** Iteración 0 *****

0 - Matriz J (Matriz Jacobiana)

X ₂₆	Y ₂₆	X ₃₄	Y ₃₄	X ₄₆	Y ₄₆	θ ₂₆	θ ₃₄	θ ₄₆	
0	0	0	0	0	8245.886	17143.211	0	0	-1
-18794.926	9116.098	0	0	0	18794.926	-9116.098	0	0	-1
0	0	-5796.886	7880.314	0	5796.886	-7880.314	0	0	-1
0	0	0	0	0	-954.553	-12702.564	0	0	-1
-4000.177	13460.295	0	0	0	0	0	-1	0	0
-18794.926	9116.098	0	0	0	18794.926	-9116.098	-1	0	0
-8603.288	-10085.661	0	0	0	0	0	-1	0	0
4286.525	-15052.860	-4286.525	15052.860	0	0	0	-1	0	0
0	0	-14992.049	915.696	0	0	0	0	-1	0
0	0	-5796.886	7880.314	0	5796.886	-7880.314	0	-1	0
4286.525	-15052.860	-4286.525	15052.860	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	-0.901	0.433	0	0	0
-0.436	-0.900	0	0	0	0.436	0.900	0	0	0
0	0	-0.806	-0.593	0	0.806	0.593	0	0	0
0	0	0	0	0	0.997	-0.075	0	0	0
-0.959	-0.285	0	0	0	0	0	0	0	0
0.761	-0.649	0	0	0	0	0	0	0	0
0.962	0.274	-0.962	-0.274	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.061	-0.998	0	0	0	0	0	0

0 - Vector I₀ (Observaciones aproximadas)

371.224
71.432
102.306
147.457
212.805
159.945
76.156
13.534
357.130
12.870
35.585
33.465
30.476
65.075
49.977
45.336
48.023
40.675
42.385

0 - Vector k=-I₀

0
109.930
-158.236
27.317
0
251.736
279.142
-208.789
0
-209.812
-152.170
-0.00034028
-0.00324060
-0.01539567
-0.00251369
-0.00046423
-0.01389925
-0.01722588
0.00615964

0 - Matriz N=J^TPJ (Ecuaciones normales)

143571.87058390	-21397.42507634	-30760.62286375	8417.99553706	-55498.63033763	13160.22656712	2.85225309	-0.52777604	1.33270991
-21397.42507634	151324.41376114	8417.99553706	-57924.69334402	13160.22656712	-34748.90635279	0.86899042	1.85337510	-0.64640392
-30760.62286375	8417.99553706	98604.56760968	-21408.29991132	-37837.19892686	12889.90699427	0.52777604	4.19886747	1.67661236
8417.99553706	-57924.69334402	-21408.29991132	132171.60961425	12889.90699427	-45877.77342209	-1.85337510	-4.25439002	-2.27919451
-55498.63033763	13160.22656712	-37837.19892686	12889.90699427	150511.68310690	-25055.38822521	-1.33270991	-1.67661236	-3.53719385
13160.22656712	-34748.90635279	12889.90699427	-45877.77342209	-25055.38822521	140210.99531080	0.64640392	2.27919451	3.76365805
2.85225309	0.86899042	0.52777604	-1.85337510	-1.33270991	0.64640392	0.00051272	0	0
-0.52777604	1.85337510	4.19886747	-4.25439002	-1.67661236	2.27919451	0	0.00054539	0
1.33270991	-0.64640392	1.67661236	-2.27919451	-3.53719385	3.76365805	0	0	0.00062564

0 - Matriz N⁻¹

0.00001296	0.00000093	9.52496E-06	-3.59393E-06	4.89848E-06	6.30968E-07	-0.08454119	-0.07955954	-0.04136980
0.00000093	0.00001001	6.62903E-07	5.25488E-06	-4.41395E-07	4.38062E-06	-0.01049717	-0.01690209	-0.00311573
0.00000952	0.00000066	2.5357E-05	-6.25321E-06	5.10563E-06	2.61929E-06	-0.09284798	-0.23228604	-0.09722892
-0.00000359	0.00000525	-6.25321E-06	1.72339E-05	-3.1458E-07	3.124E-06	0.07506448	0.14722102	0.07205373
0.00000490	-0.00000044	5.10563E-06	-3.1458E-07	1.051E-05	-1.178E-07	-0.00542768	-0.00271951	0.03441046
0.00000063	0.00000438	2.61929E-06	3.124E-06	-1.178E-07	1.16584E-05	-0.01734267	-0.05915545	-0.06325622
-0.08454119	-0.01049717	-0.09284798	0.07506448	-0.00542768	-0.01734267	2813.15957361	1310.03130509	765.15876288
-0.07955954	-0.01690209	-0.23228604	0.14722102	-0.00271951	-0.05915545	1310.03130509	4989.63010817	1651.31096347
-0.04136980	-0.00311573	-0.09722892	0.07205373	0.03441046	-0.06325622	765.15876288	1651.31096347	2781.39728794

0 - Vector JtPk	0 - Vector x	
-1792.61923850	-0.009762	
638.76526126	-0.000863	
1618.48244230	0.011911	
-1289.73377710	-0.010584	
-593.94361783	-0.005528	
202.17971327	-0.001807	
-0.03899029	-82.888893	
0.07941896	-44.599193	
0.03303811	-18.146622	

$$-\rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_i + \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_i + \rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_j - \rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_j - d\theta_i = k_{ij} + r_{ij}$$

$$k_{ij} = L_{ij} - L_{ij}^0$$

$$L_{ij}^0 = \theta_{ij}^0 - \theta_i^0$$

$$\theta_i^0 = \theta_{ij}^0 - L_{ij}$$

Dirección I-J		Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	d_{ij}^0	L_{ij}	θ_{ij}^0	θ_i^0	L_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	a5	k
46		123.912	67.586	21	154.076	53.082	30.164	-14.504	33.470	371.224	128.534	157.316	371.218	8242.790	17142.052	0	0	-1	58.40861645
		123.912	67.586	26	110.608	40.166	-13.304	-27.420	30.477	71.443	228.759	102.290	71.443	18793.048	-9118.403	-18793.048	9118.403	-1	3.59378775
		123.912	67.586	34	71.510	29.016	-52.403	-38.570	65.067	102.290	259.607	102.291	5799.782	-7879.834	-5799.782	7879.834	-1	-6.10615734	
26		123.912	67.586	31	74.082	71.333	-49.830	3.747	49.971	147.460	304.778	147.462	-955.219	-12703.888	0	0	-1	-19.06786188	
		110.608	40.166	21	154.076	53.082	43.468	12.916	45.346	212.805	81.613	268.797	212.816	-3998.750	13457.616	0	0	-1	-110.3175868
		110.608	40.166	46	123.912	67.586	13.304	27.420	30.477	159.970	28.759	159.962	-18793.048	9118.403	18793.048	-9118.403	-1	80.65770513	
34		110.608	40.166	31	74.082	71.333	-36.526	31.167	48.016	76.184	344.970	76.174	-8605.987	-10085.850	0	0	-1	103.55324921	
		110.608	40.166	34	71.510	29.016	-39.098	-11.150	40.657	13.513	282.315	13.518	4294.103	-15057.977	-4294.103	15057.977	-1	-52.33472489	
		71.510	29.016	31	74.082	71.333	2.572	42.317	42.395	357.130	3.865	46.749	357.116	-14988.839	911.053	0	0	-1	143.6165919
		71.510	29.016	46	123.912	67.586	52.403	38.570	65.067	12.849	59.607	12.857	-5799.782	7879.834	5799.782	-7879.834	-1	-84.13439935	
		71.510	29.016	26	110.608	40.166	39.098	11.150	40.657	35.570	82.315	35.566	-4294.103	15057.977	4294.103	-15057.977	-1	42.57311573	

$$-\frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} dx_i - \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} dy_i + \frac{\Delta x_{ij}^0}{d_{ij}^0} dx_j + \frac{\Delta y_{ij}^0}{d_{ij}^0} dy_j = k_{ij} + r_{ij}$$

$$k_{ij} = d_{ij} - d_{ij}^0$$

Distancia I-J		Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	d_{ij}	d_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	k
46		123.912	67.586	21	154.076	53.082	30.164	-14.50419259	33.465	33.470	-0.901	0.433	0	0	-0.00453839
		123.912	67.586	26	110.6082382	40.16613713	-13.304	-27.42005546	30.473	30.477	0.437	0.900	-0.437	-0.900	-0.00423887
		123.912	67.586	34	71.50991081	29.01641568	-52.403	-38.5697769	65.060	65.067	0.805	0.593	-0.805	-0.593	-0.00655171
26		123.912	67.586	31	74.082	71.333	-49.830	3.746807413	49.974	49.971	0.997	-0.075	0	0	0.00286288
		110.608	40.166	21	154.076	53.082	43.468	12.91586287	45.336	45.346	-0.959	-0.285	0	0	-0.01006743
		110.608	40.166	31	74.082	71.333	-36.526	31.16686287	48.009	48.016	0.761	-0.649	0	0	-0.00703292
34		110.608	40.166	34	71.50991081	29.01641568	-39.098	-11.14972145	40.658	40.657	0.962	0.274	-0.962	-0.274	0.00095274
		71.510	29.016	31	74.082	71.333	2.572	42.31658432	42.391	42.395	-0.061	-0.998	0	0	-0.00368069

0 - Nuevas coordenadas aproximadas para la iteración 1

	X	Y	θ_i^0
26	110.608	40.166	268.7966223
34	71.510	29.016	46.7491131
46	123.912	67.586	157.3159159

***** Iteración 1 *****

1 - Matriz J (Matriz Jacobiana)

X_{26}	Y_{26}	X_{34}	Y_{34}	X_{46}	Y_{46}	θ_{26}	θ_{34}	θ_{46}	
0	0	0	0	0	8242.790	17142.052	0	0	-1
-18793.048	9118.403	0	0	0	18793.048	-9118.403	0	0	-1
0	0	-5799.782	7879.834	0	5799.782	-7879.834	0	0	-1
0	0	0	0	0	-955.219	-12703.888	0	0	-1
-3998.750	13457.616	0	0	0	0	0	-1	0	0
-18793.048	9118.403	0	0	0	18793.048	-9118.403	-1	0	0
-8605.987	-10085.850	0	0	0	0	0	-1	0	0
4294.103	-15057.977	-4294.103	15057.977	0	0	0	-1	0	0
0	0	-14988.839	911.053	0	0	0	0	-1	0
0	0	-5799.782	7879.834	5799.782	-7879.834	0	0	-1	0
4294.103	-15057.977	-4294.103	15057.977	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	-0.901	0.433	0	0	0
-0.437	-0.900	0	0	0	0.437	0.900	0	0	0
0	0	-0.805	-0.593	0	0.805	0.593	0	0	0
0	0	0	0	0	0.997	-0.075	0	0	0
-0.959	-0.285	0	0	0	0	0	0	0	0
0.761	-0.649	0	0	0	0	0	0	0	0
0.962	0.274	-0.962	-0.274	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.061	-0.998	0	0	0	0	0	0

1 - Vector l_0 (Observaciones aproximadas)

371.218
71.443
102.291
147.462
212.816
159.962
76.174
13.518
357.116
12.857
35.566
33.470
30.477
65.067
49.971
45.346
48.016
40.657
42.395

1 - Vector $k=-l_0$

58.4086
3.594
-6.106
-19.068
-110.318
80.658
103.553
-52.335
143.617
-84.134
42.573
-0.00453839
-0.00423887
-0.00655171
0.00286288
-0.01006743
-0.00703292
0.00095274
-0.00368069

1 - Matriz $N=J^T P J$ (Ecuaciones normales)

143577.99628160	-21415.46532702	-30771.01407099	8442.43482150	-55491.70253642	13161.50838334	2.85142452	-0.52870909	1.33257670
-21415.46532702	151364.02647937	8442.43482150	-57968.25651821	13161.50838334	-34751.78037688	0.86989283	1.85400515	-0.64656735
-30771.01407099	8442.43482150	98613.32246000	-21440.74514491	-37849.38318321	12899.24076103	0.52870909	4.20021102	1.67744988
8442.43482150	-57968.25651821	-21440.74514491	132217.92825213	12899.24076103	-45880.63938581	-1.85400515	-4.25426346	-2.27905572
-55491.70253642	13161.50838334	-37849.38318321	12899.24076103	150515.31126419	-25068.67937442	-1.33257670	-1.67744988	-3.53751498
13161.50838334	-34751.78037688	12899.24076103	-45880.63938581	-25068.67937442	140216.96060835	0.64656735	2.27905572	3.76402027
2.85142452	0.86989283	0.52870909	-1.85400515	-1.33257670	0.64656735	0.00051272	0	0
-0.52870909	1.85400515	4.20021102	-4.25426346	-1.67744988	2.27905572	0	0.00054539	0
1.33257670	-0.64656735	1.67744988	-2.27905572	-3.53751498	3.76402027	0	0	0.00062564

1 - Matriz N^{-1}

0.00001296	0.00000093	9.52795E-06	-3.59332E-06	4.89878E-06	6.31159E-07	-0.08454753	-0.07957020	-0.04138303
0.00000093	0.00001001	6.61929E-07	5.25657E-06	-4.41829E-07	4.38112E-06	-0.01050241	-0.01689712	-0.00311397
0.00000953	0.00000066	2.53645E-05	-6.24903E-06	5.10727E-06	2.62055E-06	-0.09289468	-0.23234211	-0.09726872
-0.00000359	0.00000526	-6.24903E-06	1.72263E-05	-3.15346E-07	3.12499E-06	0.07503968	0.14711726	0.07200811
0.00000490	-0.00000044	5.10727E-06	-3.15346E-07	1.05104E-05	-1.17395E-07	-0.00543635	-0.00272438	0.03440142
0.00000063	0.00000438	2.62055E-06	3.12499E-06	-1.17395E-07	1.16589E-05	-0.01735317	-0.05916813	-0.06326634
-0.08454753	-0.01050241	-0.09289468	0.07503968	-0.00543635	-0.01735317	2813.30294223	1310.29245894	765.31003962
-0.07957020	-0.01689712	-0.23234211	0.14711726	-0.00272438	-0.05916813	1310.29245894	4989.66550342	1651.44966211
-0.04138303	-0.00311397	-0.09726872	0.07200811	0.03440142	-0.06326634	765.31003962	1651.44966211	2781.53643520

1 - Vector $J^T P k$

0.00226511
-0.28969498
0.11991674
0.56034995
-0.05184283
-0.21555671
-0.00001203
-0.00001405
-0.00000553

1 - Vector x

0.000001
0.000000
0.000003
0.000003
0.000000
0.000000
-0.018703
-0.022827
-0.006456

1 - Coordenadas definitivas

	X	Y	θ_i°
26	110.608	40.166	268.797
34	71.510	29.016	46.749
46	123.912	67.586	157.316

Residuos	Raiz Cof. Resid.	Resid. Norm.	Nº redundancia	Traza R
58.43368433	57.31937552	1.01944035	0.27900868	10
3.59989493	97.81115327	0.03680454	0.67891800	
-6.12967308	35.69043050	0.17174556	0.36845029	
-19.07531045	49.08703953	0.38860177	0.43512343	
-110.33124309	47.82555906	2.30695146	0.34516151	
80.64078488	93.21536750	0.86510183	0.61661715	
103.50726990	51.68716231	2.00257211	0.44843893	
-52.40945359	59.19899788	0.88530981	0.43113219	
143.55432469	62.19628659	2.30808514	0.51537688	
-84.19126209	36.34551666	2.31641396	0.38209999	
42.48806745	70.23537209	0.60493831	0.60686699	
-0.00453960	0.00494360	0.91827894	0.69322080	
-0.00423929	0.00465937	0.90984248	0.61581287	
-0.00655015	0.00435330	1.50464030	0.53736477	
0.00286446	0.00497270	0.57603596	0.70129859	
-0.01006927	0.00469357	2.14533248	0.62480800	
-0.00703238	0.00494552	1.42196860	0.69366784	
0.00095343	0.00417597	0.22831205	0.49462380	
-0.00367841	0.00433095	0.84933041	0.53200928	

Test de POPE					
α	Prob. (%)	α_0	α/n	$\alpha_0/2$	$t_{1-\alpha_0/2, g-1}$
0.001	99.9	0.00005266	0.00005263	0.00002633	7.16744589

$T_{1-\alpha_0/2, g}$	r normalizado crítico
2.91706181	3.80913488

¡ Todos los residuos normalizados cumplen !

Elipse de error [26]:

Matriz de covarianza:

0.00001296	0.00000093
0.00000093	0.00001001

Autovalores:	0.00001323	0.00000974
Autovectores:	0.96075727	-0.27739047
	0.27739047	0.96075727

Elipse estandar (p=0.394)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.00363714	0.00312149

Elipse 95% (p=0.95)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.00890281	0.00764062

Acimut semieje mayor

82.106

Elipse de error [34]:

Matriz de covarianza:

0.00002536	-0.00000625
-0.00000625	0.00001723

Autovalores:	0.00002875	0.00001384
Autovectores:	0.87901765	0.47678922
	-0.47678922	0.87901765

Elipse estandar (p=0.394)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.00536200	0.00371978

Elipse 95% (p=0.95)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.01312481	0.00910507

Acimut semieje mayor

131.640

Elipse de error [46]:

Matriz de covarianza:

0.00001051	-0.00000012
-0.00000012	0.00001166

Autovalores:	0.00001167	0.00001050
Autovectores:	-0.09983077	0.99500443
	0.99500443	0.09983077

Elipse estandar (p=0.394)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.00341615	0.00323985

Elipse 95% (p=0.95)

<u>Semieje mayor</u>	<u>Semieje menor</u>
0.00836187	0.00793033

Acimut semieje mayor

393.634

7.4. Red Espacial.

7.4.2. Datos de campo.

Puntos de coordenadas conocidas: 21 (154.076; 53.082; 5.915)
31 (74.082; 71.333; 5.868)

Puntos a ajustar: 26, 34, 46. Coordenadas aproximadas:

26 (110.618; 40.167; 6.077)
34 (71.498; 29.027; 6.116)
46 (123.918; 67.588; 5.873)

Distancias geométricas medidas:

Estación	Alt. Instr.	Pto. Visado	Alt. Prisma	Distancia
46	1.578	21	1.500	33.465
		26	1.500	30.473
		34	1.500	65.060
		31	2.600	49.984
26	1.513	21	1.500	45.336
		31	1.500	48.010
		34	1.500	40.658
34	1.556	31	1.500	42.392

Ángulos verticales medidos:

Estación	Alt. Instr.	Pto. Visado	Alt. Prisma	Ang. Cenital
46	1.578	21	1.500	100.069
		26	1.500	99.742
		34	1.500	99.836
		31	2.600	98.699
26	1.513	21	1.500	100.246
		31	1.500	100.291
		34	1.500	99.956
34	1.556	31	1.500	100.457

Ángulos medidos:

Estación	Pto. Antec.	Pto. Consec.	Ángulo (g)
46	21	26	100.219
	26	34	30.847
	34	31	45.170
26	34	31	62.671
	31	46	83.786
	46	21	52.835
34	31	46	55.719
	46	26	22.721

7.4.1. Cálculos previos.

PUNTO 26.

$$\Delta Z_{26}^{21} = D_{26}^{21} \cos V_{26}^{21} + h - p_{21} = -0.162$$

$$Z_{26} = Z_{21} + \Delta Z_{21}^{26} = 6.077$$

PUNTO 34.

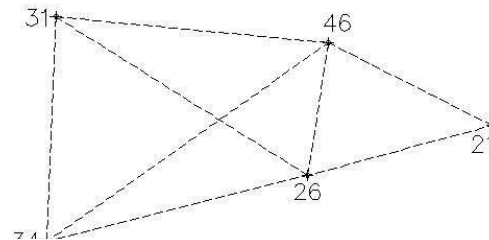
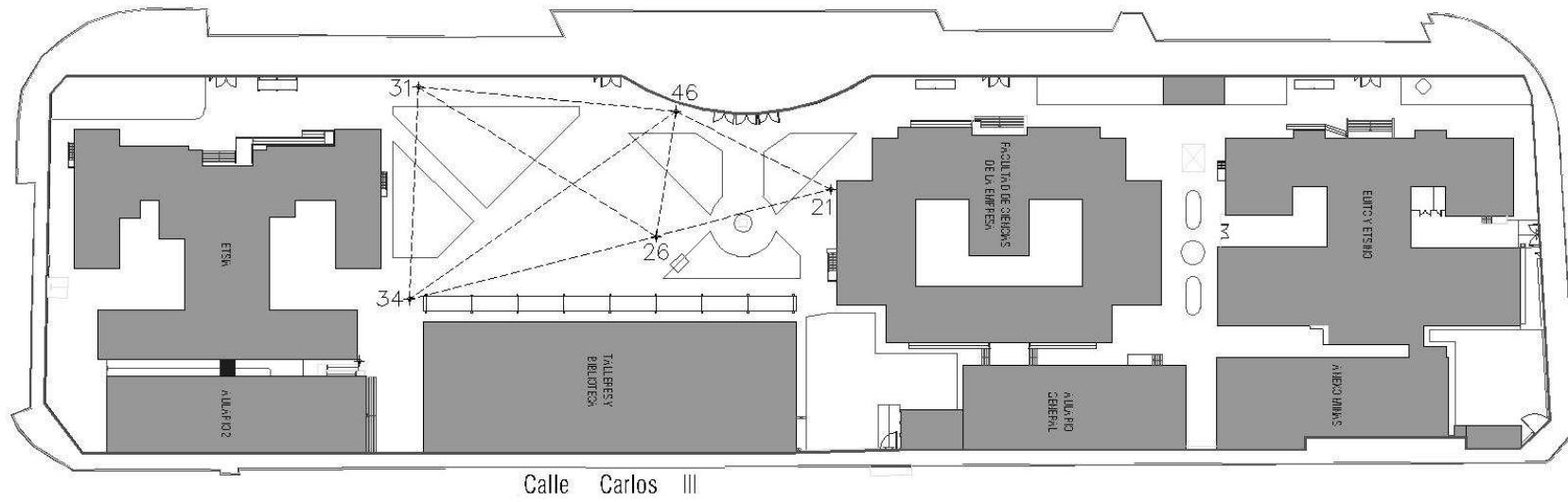
$$\Delta Z_{34}^{31} = D_{34}^{31} \cos V_{34}^{31} + h - p_{31} = -0.248$$

$$Z_{34} = Z_{31} + \Delta Z_{31}^{34} = 6.116$$

PUNTO 46.

$$\Delta Z_{46}^{21} = D_{46}^{21} \cos V_{46}^{21} + h - p_{21} = 0.042$$

$$Z_{46} = Z_{21} + \Delta Z_{21}^{46} = 5.873$$



RED ESPACIAL

ρ 636619.7724

Puntos fijos	X	Y	Z	σ_{DIN}	σ_i	σ_r	a (mm.)	b (ppm)	σ_{cv}
21	154.076	53.082	5.915	21.60493827		0.0025	0.005	0.002	2 6.17283951
31	74.082	71.333	5.868						

Puntos a ajustar. Coordenadas aproximadas.

	X	Y	Z
26	110.618	40.167	6.077
34	71.498	29.027	6.116
46	123.918	67.588	5.873

Distancias geométricas medidas:

Estación	Alt. Instr.	Pto. Visado	Alt. Prisma	Distancia	Desv. Est. (m.)	Pesos	Pesos agrupados
46	1.578	21	1.500	33.465	0.00593755	28365.18963	28365.1896
	1.578	26	1.500	30.473	0.00593748	28365.80532	28365.8053
	1.578	34	1.500	65.060	0.00593860	28355.17482	28355.1748
	1.578	31	2.600	49.984	0.00593801	28360.75387	28360.7539
26	1.513	21	1.500	45.336	0.00593786	28362.17937	28362.1794
	1.513	31	1.500	48.010	0.00593795	28361.37625	28361.3762
	1.513	34	1.500	40.658	0.00593773	28363.47383	28363.4738
34	1.556	31	1.500	42.392	0.00593778	28363.01042	28363.0104

Angulos verticales medidos:

Estación	Alt. Instr.	Pto. Visado	Alt. Prisma	Ang. Cenital	Desv. Est. (cc.)	Pesos	Pesos agrupados
46	1.578	21	1.500	100.069	31.17131154	0.0010292	0.0010292
	1.578	26	1.500	99.742	31.17131154	0.0010292	0.0010292
	1.578	34	1.500	99.836	31.17131154	0.0010292	0.0010292
	1.578	31	2.600	98.699	31.17131154	0.0010292	0.0010292
26	1.513	21	1.500	100.246	31.17131154	0.0010292	0.0010292
	1.513	31	1.500	100.291	31.17131154	0.0010292	0.0000428
	1.513	34	1.500	99.956	31.17131154	0.0010292	0.0000678
34	1.556	31	1.500	100.457	31.17131154	0.0010292	0.0001316

Angulos medidos:

Estación	Pto. Antec.	Pto. Consec.	Angulo (g)	D1	D2	D3	Desv. Est. (cc.)	Pesos	Pesos agrupados
46	21	26	100.219	33.465	30.489	45.344	152.9112147	0.0000428	0.0001067
	26	34	30.847	30.489	65.079	40.657	121.4804650	0.0000678	0.0001039
	34	31	45.170	65.079	49.977	42.418	87.1663316	0.0001316	
26	34	31	62.671	40.657	48.028	42.418	109.7872907	0.0000830	
	31	46	83.786	48.028	30.489	49.977	133.0460139	0.0000565	
	46	21	52.835	30.489	45.344	33.465	132.3006909	0.0000571	
34	31	46	55.719	42.418	65.079	49.977	96.8107869	0.0001067	
	46	26	22.721	65.079	40.657	30.489	98.0997142	0.0001039	

Vector x (incógnitas)

- dx_{26}
- dy_{26}
- dz_{26}
- dx_{34}
- dy_{34}
- dz_{34}
- dx_{46}
- dy_{46}
- dz_{46}

Matriz P (pesos)

28365.18963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	28365.80532	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	28355.17482	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	28360.75387	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	28362.17937	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	28361.37625	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	28363.47383	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	28363.01042	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0010292	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.27682E-05	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6.77621E-05	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001316	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.29652E-05	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.64932E-05	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.713E-05	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001067	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001039

Vector l (Observaciones)

- 33.465
- 30.473
- 65.060
- 49.984
- 45.336
- 48.010
- 40.658
- 42.392
- 100.069
- 99.742
- 99.836
- 98.699
- 100.246
- 100.291
- 99.956
- 100.457
- 100.219
- 30.847
- 45.170
- 62.671
- 83.786
- 52.835
- 55.719
- 22.721

Distancia I-J

Punto I	Xi	Yi	Zi	Punto J	Xj	Yj	Zj	Alt. Instr.	Alt.prisma	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔZ_{ij}^{0+m}	D_{ij}	D_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
46	123.918	67.588	5.873	21	154.076	53.082	5.915	1.578	1.500	30.158	-14.506	-0.036	33.465	33.465	-0.9012	0.4335	0.0011	0	0	0	-0.0003596
	123.918	67.588	5.873	26	110.618	40.167	6.077	1.578	1.500	-13.3	-27.421	0.126	30.473	30.477	0.4364	0.8997	-0.0041	-0.4364	-0.8997	0.0041	-0.0035011
	123.918	67.588	5.873	34	71.498	29.027	6.116	1.578	1.500	-52.42	-38.561	0.165	65.06	65.076	0.8055	0.5926	-0.0025	-0.8055	-0.5926	0.0025	-0.0156048
	123.918	67.588	5.873	31	74.082	71.333	5.868	1.578	2.600	-49.836	3.745	1.017	49.984	49.987	0.9970	-0.0749	-0.0203	0	0	0	-0.0028604
26	110.618	40.167	6.077	21	154.076	53.082	5.915	1.513	1.500	43.458	12.915	-0.175	45.336	45.337	-0.9586	-0.2849	0.0039	0	0	0	-0.0008020
	110.618	40.167	6.077	31	74.082	71.333	5.868	1.513	1.500	-36.536	31.166	-0.222	48.01	48.023	0.7608	-0.6490	0.0046	0	0	0	-0.0134124
	110.618	40.167	6.077	34	71.498	29.027	6.116	1.513	1.500	-39.12	-11.14	0.026	40.658	40.675	0.9618	0.2739	-0.0006	-0.9618	-0.2739	0.0006	-0.0172342
34	71.498	29.027	6.116	31	74.082	71.333	5.868	1.556	1.500	2.584	42.306	-0.304	42.392	42.386	-0.0610	-0.9981	0.0072	0	0	0	0.0060695

Vertical I-J

Punto I	Xi	Yi	Zi	Punto J	Xj	Yj	Zj	Alt. Instr.	Alt.prisma	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔZ_{ij}^0+m	D_{ij}^0	d_{ij}^0	V_{ij}	V_{ij}^0
46	123.918	67.588	5.873	21	154.076	53.082	5.915	1.578	1.500	30.158	-14.506	-0.036	33.465	33.465	100.069	100.068
	123.918	67.588	5.873	26	110.618	40.167	6.077	1.578	1.500	-13.3	-27.421	0.126	30.477	30.476	99.742	99.737
	123.918	67.588	5.873	34	71.498	29.027	6.116	1.578	1.500	-52.42	-38.561	0.165	65.076	65.075	99.836	99.839
26	123.918	67.588	5.873	31	74.082	71.333	5.868	1.578	2.600	-49.836	3.745	1.017	49.987	49.977	98.699	98.705
	110.618	40.167	6.077	21	154.076	53.082	5.915	1.513	1.500	43.458	12.915	-0.175	45.337	45.336	100.246	100.246
	110.618	40.167	6.077	31	74.082	71.333	5.868	1.513	1.500	-36.536	31.166	-0.222	48.023	48.023	100.291	100.294
34	110.618	40.167	6.077	34	71.498	29.027	6.116	1.513	1.500	-39.12	-11.14	0.026	40.675	40.675	99.956	99.959
	71.498	29.027	6.116	31	74.082	71.333	5.868	1.556	1.500	2.584	42.306	-0.304	42.386	42.385	100.457	100.457

a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
18.4416	-8.8704	19023.2351		0	0	5.1630082
37.6887	77.7038	20888.6949	-37.6887	-77.7038	-20888.6949	52.0055465
19.9806	14.6980	9782.7401	-19.9806	-14.6980	-9782.7401	-25.8409731
258.3846	-19.4167	12733.1062	0	0	0	-56.8563481
51.9563	15.4406	14041.9042	0	0	0	2.6423578
-46.6229	39.7704	13256.3043	0	0	0	-32.9414914
9.6219	2.7400	15651.2840	-9.6219	-2.7400	-15651.2840	-33.0665050
6.5674	107.5231	15019.2149	0	0	0	4.0020949

Angulo IJK

Punto I	Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	Punto K	Xk	Yk	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔX_{ik}^0	ΔY_{ik}^0	d_{ij}^0	d_{ik}^0	H_{ijk}	θ_{ij}^0	θ_{ik}^0	H_{ijk}^0
46	123.918	67.588	21	154.076	53.082	26	110.618	40.167	30.158	-14.506	-13.300	-27.421	33.465	30.476	100.219	128.542	228.750	100.208
	123.918	67.588	26	110.618	40.167	34	71.498	29.027	-13.300	-27.421	-52.420	-38.561	30.476	65.075	30.847	228.750	259.624	30.874
	123.918	67.588	34	71.498	29.027	31	74.082	71.333	-52.420	-38.561	-49.836	3.745	65.075	49.977	45.170	259.624	304.775	45.151
26	110.618	40.167	34	71.498	29.027	31	74.082	71.333	-39.120	-11.140	-36.536	31.166	40.675	48.023	62.671	282.339	344.961	62.622
	110.618	40.167	31	74.082	71.333	46	123.918	67.588	-36.536	31.166	13.300	27.421	48.023	30.476	83.786	344.961	28.750	83.789
	110.618	40.167	46	123.918	67.588	21	154.076	53.082	13.300	27.421	43.458	12.915	30.476	45.336	52.835	28.750	81.610	52.860
34	71.498	29.027	31	74.082	71.333	46	123.918	67.588	2.584	42.306	52.420	38.561	42.385	65.075	55.719	3.884	59.624	55.740
	71.498	29.027	46	123.918	67.588	26	110.618	40.167	52.420	38.561	39.120	11.140	65.075	40.675	22.721	59.624	82.339	22.715

a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
10549.0406	-26259.3088	0	0	-18794.9262	9116.0978	109.9297901
-12998.0400	1235.7841	18794.9262	-9116.0978	-5796.8862	7880.3137	-268.1657291
-6751.4392	-4822.2502	5796.8862	-7880.3137	0	0	185.5529031
-12889.8126	4967.1989	4286.5251	-15052.8600	0	0	487.9303700
-10191.6387	19201.7589	0	0	18794.9262	-9116.0978	-27.4057576
14794.7489	4344.1968	-18794.9262	9116.0978	0	0	-251.7359776
9195.1625	6964.6172	0	0	5796.8862	-7880.3137	-209.8116100
1510.3612	7172.5463	-5796.8862	7880.3137	4286.5251	-15052.8600	57.6411168

Puntos a ajustar. Coordenadas aproximadas.

	X	Y	Z
26	110.618	40.167	6.077
34	71.498	29.027	6.116
46	123.918	67.588	5.873

***** Iteración 0 *****

0 - Matriz J (Matriz Jacobiana)

X ₂₆	Y ₂₆	Z ₂₆	X ₃₄	Y ₃₄	Z ₃₄	X ₄₆	Y ₄₆	Z ₄₆	
0	0	0	0	0	0	0	-0.9012	0.4335	0.0011
-0.4364	-0.8997	0.0041	0	0	0	0	0.4364	0.8997	-0.0041
0	0	0	-0.8055	-0.5926	0.0025	0.8055	0.5926	-0.0025	
0	0	0	0	0	0	0	0.9970	-0.0749	-0.0203
-0.9586	-0.2849	0.0039	0	0	0	0	0	0	0
0.7608	-0.6490	0.0046	0	0	0	0	0	0	0
0.9618	0.2739	-0.0006	-0.9618	-0.2739	0.0006	0	0	0	0
0	0	0	-0.0610	-0.9981	0.0072	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	18.4416	-8.8704	19023.2351
-37.6887	-77.7038	-20888.6949	0	0	0	0	37.6887	77.7038	20888.6949
0	0	0	-19.9806	-14.6980	-9782.7401	19.9806	14.6980	9782.7401	
0	0	0	0	0	0	0	258.3846	-19.4167	12733.1062
51.9563	15.4406	14041.9042	0	0	0	0	0	0	0
-46.6229	39.7704	13256.3043	0	0	0	0	0	0	0
9.6219	2.7400	15651.2840	-9.6219	-2.7400	-15651.2840	0	0	0	0
0	0	0	6.5674	107.5231	15019.2149	0	0	0	0
-18794.9262	9116.0978	0	0	0	0	10549.0406	-26259.3088	0	0
18794.9262	-9116.0978	0	-5796.8862	7880.3137	0	-12998.0400	1235.7841	0	0
0	0	0	5796.8862	-7880.3137	0	-6751.4392	-4822.2502	0	0
-12889.8126	4967.1989	0	4286.5251	-15052.8600	0	0	0	0	0
-10191.6387	19201.7589	0	0	0	0	18794.9262	-9116.0978	0	0
14794.7489	4344.1968	0	0	0	0	-18794.9262	9116.0978	0	0
0	0	0	9195.1625	6964.6172	0	5796.8862	-7880.3137	0	0
4286.5251	-15052.8600	0	1510.3612	7172.5463	0	-5796.8862	7880.3137	0	0

0 - Vector I₀ (Observaciones aproximadas)

33.465
30.477
65.076
49.987
45.337
48.023
40.675
42.386
100.068
99.737
99.839
98.705
100.246
100.294
99.959
100.457
100.208
30.874
45.151
62.622
83.789
52.860
55.740
22.715

0 - Vector k=I-I₀

-0.00035964
-0.00350106
-0.01560485
-0.00286037
-0.00080198
-0.01341237
-0.01723418
0.00606946
5.16300825
52.00554646
-25.84097312
-56.85634814
2.64235784
-32.94149143
-33.06650495
4.00209487
109.92979009
-268.16572913
185.55290312
487.93037000
-27.40575763
-251.73597760
-209.81161001
57.64111676

0 - Matriz N=J^TPJ (Ecuaciones normales)

147205.1915	-25976.4043	1006.1871	-37526.9419	21860.3154	-137.5524	-59696.1337	27988.3281	-759.0582
-25976.4043	96025.4445	2253.6015	-4489.1245	-24423.8539	-39.1701	25779.7857	-53920.3030	-1564.9725
1006.1871	2253.6015	1084964.4474	-137.5524	-39.1701	-252109.8494	-759.0582	-1564.9725	-449068.8488
-37526.9419	-4489.1245	-137.5524	62213.4953	16223.1671	369.9203	-13676.8856	-24185.0110	-143.2546
21860.3154	-24423.8539	-39.1701	16223.1671	82057.3620	1603.5388	-13488.0365	-4268.7426	-105.3804
-137.5524	-39.1701	-252109.8494	369.9203	1603.5388	582764.0909	-143.2546	-105.3804	-98494.4319
-59696.1337	25779.7857	-759.0582	-13676.8856	-13488.0365	-143.2546	144481.8843	-26247.0450	4046.6316
27988.3281	-53920.3030	-1564.9725	-24185.0110	-4268.7426	-105.3804	-26247.0450	93568.9961	1298.6931
-759.0582	-1564.9725	-449068.8488	-143.2546	-105.3804	-98494.4319	4046.6316	1298.6931	1086879.4408

0 - Matriz N⁻¹

0.00001242	0.00000245	-0.00000002	0.00001060	-0.00000364	0.00000000	0.00000570	0.00000187	-0.00000002
0.00000245	0.00001946	-0.00000003	0.00000683	0.00000460	-0.00000003	0.00000093	0.00001271	0.00000000
-0.00000002	-0.00000003	0.00000133	-0.00000001	-0.00000002	0.00000068	-0.00000001	-0.00000001	0.00000061
0.00001060	0.00000683	-0.00000001	0.00002990	-0.00000495	-0.00000001	0.00000741	0.00001034	-0.00000003
-0.00000364	0.00000460	-0.00000002	-0.00000495	0.00001553	-0.00000005	-0.00000081	0.00000294	-0.00000001
0.00000000	-0.00000003	0.00000068	-0.00000001	-0.00000005	0.00000209	-0.00000001	-0.00000001	0.00000047
0.00000570	0.00000093	-0.00000001	0.00000741	-0.00000081	-0.00000001	0.00001040	0.00000362	-0.00000004
0.00000187	0.00001271	-0.00000001	0.00001034	0.00000294	-0.00000001	0.00000362	0.00002128	-0.00000002
-0.00000002	0.00000000	0.00000061	-0.00000003	-0.00000001	0.00000047	-0.00000004	-0.00000002	0.00000122

0 - Vector J^{Pk}

-1817.86784
430.46079
-2063.83764
1040.80930
-832.79796
854.46664
-287.58687
-502.10742
217.02628

0 - Vector dx

-0.010015	Continuar iterando
0.000585	
-0.002013	
0.011598	
-0.010729	
0.000518	
-0.006374	
-0.001338	
-0.000566	

Distancia I-J

Punto I	Xi	Yi	Zi	Punto J	Xj	Yj	Zj	Alt. Instr.	Alt.prisma	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔZ_{ij}^0+m	D_{ij}	D_{ij}^0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
46	123.912	67.587	5.872	21	154.076	53.082	5.915	1.578	1.500	30.164	-14.505	-0.035	33.465	33.471	-0.9012	0.4334	0.0011	0	0	0	-0.0055103
	123.912	67.587	5.872	26	110.608	40.168	6.075	1.578	1.500	-13.304	-27.419	0.125	30.473	30.476	0.4365	0.8997	-0.0041	-0.4365	-0.8997	0.0041	-0.0034736
	123.912	67.587	5.872	34	71.510	29.016	6.117	1.578	1.500	-52.402	-38.570	0.166	65.060	65.067	0.8054	0.5928	-0.0026	-0.8054	-0.5928	0.0026	-0.0067840
	123.912	67.587	5.872	31	74.082	71.333	5.868	1.578	2.600	-49.830	3.746	1.018	49.984	49.981	0.9970	-0.0750	-0.0204	0	0	0	0.0033461
26	110.608	40.168	6.075	21	154.076	53.082	5.915	1.513	1.500	43.468	12.914	-0.173	45.336	45.346	-0.9586	-0.2848	0.0038	0	0	0	-0.0102631
	110.608	40.168	6.075	31	74.082	71.333	5.868	1.513	1.500	-36.526	31.165	-0.220	48.010	48.015	0.7607	-0.6491	0.0046	0	0	0	-0.0054187
	110.608	40.168	6.075	34	71.510	29.016	6.117	1.513	1.500	-39.098	-11.151	0.029	40.658	40.658	0.9617	0.2743	-0.0007	-0.9617	-0.2743	0.0007	0.0004606
34	71.510	29.016	6.117	31	74.082	71.333	5.868	1.556	1.500	2.572	42.317	-0.305	42.392	42.396	-0.0607	-0.9981	0.0072	0	0	0	-0.0039455

Vertical I-J

Punto I	Xi	Yi	Zi	Punto J	Xj	Yj	Zj	Alt. Instr.	Alt.prisma	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔZ_{ij}^0+m	D_{ij}^0	d_{ij}^0	V_{ij}	V_{ij}^0
46	123.912	67.587	5.872	21	154.076	53.082	5.915	1.578	1.500	30.164	-14.505	-0.035	33.471	33.470	100.069	100.067
	123.912	67.587	5.872	26	110.608	40.168	6.075	1.578	1.500	-13.304	-27.419	0.125	30.476	30.476	99.742	99.740
	123.912	67.587	5.872	34	71.510	29.016	6.117	1.578	1.500	-52.402	-38.570	0.166	65.067	65.067	99.836	99.837
	123.912	67.587	5.872	31	74.082	71.333	5.868	1.578	2.600	-49.830	3.746	1.018	49.981	49.970	98.699	98.704
26	110.608	40.168	6.075	21	154.076	53.082	5.915	1.513	1.500	43.468	12.914	-0.173	45.346	45.346	100.246	100.243
	110.608	40.168	6.075	31	74.082	71.333	5.868	1.513	1.500	-36.526	31.165	-0.220	48.015	48.015	100.291	100.292
	110.608	40.168	6.075	34	71.510	29.016	6.117	1.513	1.500	-39.098	-11.151	0.029	40.658	40.658	99.956	99.955
34	71.510	29.016	6.117	31	74.082	71.333	5.868	1.556	1.500	2.572	42.317	-0.305	42.396	42.395	100.457	100.457

a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
18.1415	-8.7235	19020.3080	0	0	0	16.2401897
37.2762	76.8270	20888.7177	-37.2762	-76.8270	-20888.7177	22.4750936
20.1156	14.8061	9784.0658	-20.1156	-14.8061	-9784.0658	-14.8141715
258.5947	-19.4416	12734.6837	0	0	0	-47.8986320
51.3450	15.2547	14038.9769	0	0	0	31.1020114
-46.2153	39.4328	13258.5137	0	0	0	-7.0379660
10.5619	3.0124	15658.0950	-10.5619	-3.0124	-15658.0950	6.5445422
6.5447	107.6608	15015.6658	0	0	0	-2.8449320

Angulo IJK																		
Punto I	Xi	Yi	Punto J	Xj	Yj	Punto K	Xk	Yk	ΔX_{ij}^0	ΔY_{ij}^0	ΔX_{ik}^0	ΔY_{ik}^0	d_{ij}^0	d_{ik}^0	H_{ijk}	θ_{ij}^0	θ_{ik}^0	H_{ijk}^0
46	123.912	67.587	21	154.076	53.082	26	110.608	40.168	30.164	-14.505	-13.304	-27.419	33.470	30.476	100.219	128.534	228.758	100.224
	123.912	67.587	26	110.608	40.168	34	71.510	29.016	-13.304	-27.419	-52.402	-38.570	30.476	65.067	30.847	228.758	259.606	30.847
	123.912	67.587	34	71.510	29.016	31	74.082	71.333	-52.402	-38.570	-49.830	3.746	65.067	49.970	45.170	259.606	304.777	45.172
26	110.608	40.168	34	71.510	29.016	31	74.082	71.333	-39.098	-11.151	-36.526	31.165	40.658	48.015	62.671	282.313	344.969	62.657
	110.608	40.168	31	74.082	71.333	46	123.912	67.587	-36.526	31.165	13.304	27.419	48.015	30.476	83.786	344.969	28.758	83.789
	110.608	40.168	46	123.912	67.587	21	154.076	53.082	13.304	27.419	43.468	12.914	30.476	45.346	52.835	28.758	81.615	52.856
34	71.510	29.016	31	74.082	71.333	46	123.912	67.587	2.572	42.317	52.402	38.570	42.395	65.067	55.719	3.865	59.606	55.740
	71.510	29.016	46	123.912	67.587	26	110.608	40.168	52.402	38.570	39.098	11.151	65.067	40.658	22.721	59.606	82.313	22.707

a1	a2	a3	a4	a5	a6	k
10551.0869	-26260.1832	0	0	-18793.7048	9118.6495	-50.5127071
-12993.8251	1238.8915	18793.7048	-9118.6495	-5799.8798	7879.7580	-3.6285819
-6754.9977	-4824.3533	5799.8798	-7879.7580	0	0	-15.1302739
-12900.5994	4971.3988	4294.5985	-15057.6427	0	0	144.5358287
-10187.7040	19204.8935	0	0	18793.7048	-9118.6495	-32.6646210
14795.3642	4339.1319	-18793.7048	9118.6495	0	0	-212.8893363
9188.8916	6968.5943	0	0	5799.8798	-7879.7580	-214.8235356
1505.2812	7177.8847	-5799.8798	7879.7580	4294.5985	-15057.6427	141.7573742

0 - Nuevas coordenadas aproximadas para la iteración 1

	X	Y	Z
26	110.608	40.168	6.075
34	71.510	29.016	6.117
46	123.912	67.587	5.872

***** Iteración 1 *****

1 - Matriz J (Matriz Jacobiana)

X ₂₆	Y ₂₆	Z ₂₆	X ₃₄	Y ₃₄	Z ₃₄	X ₄₆	Y ₄₆	Z ₄₆	
0	0	0	0	0	0	0	-0.9012	0.4334	0.0011
-0.4365	-0.8997	0.0041	0	0	0	0	0.4365	0.8997	-0.0041
0	0	0	-0.8054	-0.5928	0.0026	0.8054	0.5928	-0.0026	
0	0	0	0	0	0	0.9970	-0.0750	-0.0204	
-0.9586	-0.2848	0.0038	0	0	0	0	0	0	
0.7607	-0.6491	0.0046	0	0	0	0	0	0	
0.9617	0.2743	-0.0007	-0.9617	-0.2743	0.0007	0	0	0	
0	0	0	-0.0607	-0.9981	0.0072	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	18.1415	-8.7235	19020.3080	
-37.2762	-76.8270	-20888.7177	0	0	0	37.2762	76.8270	20888.7177	
0	0	0	-20.1156	-14.8061	-9784.0658	20.1156	14.8061	9784.0658	
0	0	0	0	0	0	258.5947	-19.4416	12734.6837	
51.3450	15.2547	14038.9769	0	0	0	0	0	0	
-46.2153	39.4328	13258.5137	0	0	0	0	0	0	
10.5619	3.0124	15658.0950	-10.5619	-3.0124	-15658.0950	0	0	0	
0	0	0	6.5447	107.6608	15015.6658	0	0	0	
-18793.7048	9118.6495	0	0	0	0	10551.0869	-26260.1832	0	
18793.7048	-9118.6495	0	-5799.8798	7879.7580	0	-12993.8251	1238.8915	0	
0	0	0	5799.8798	-7879.7580	0	-6754.9977	-4824.3533	0	
-12900.5994	4971.3988	0	4294.5985	-15057.6427	0	0	0	0	
-10187.7040	19204.8935	0	0	0	0	18793.7048	-9118.6495	0	
14795.3642	4339.1319	0	0	0	0	-18793.7048	9118.6495	0	
0	0	0	9188.8916	6968.5943	0	5799.8798	-7879.7580	0	
4294.5985	-15057.6427	0	1505.2812	7177.8847	0	-5799.8798	7879.7580	0	

1 - Vector l_0 (Observaciones aproximadas)

33.471
30.476
65.067
49.981
45.346
48.015
40.658
42.396
100.067
99.740
99.837
98.704
100.243
100.292
99.955
100.457
100.224
30.847
45.172
62.657
83.789
52.856
55.740
22.707

1 - Vector $k=-l_0$

-0.00551031
-0.00347357
-0.00678398
0.00334615
-0.01026310
-0.00541874
0.00046060
-0.00394550
16.24018974
22.47509356
-14.81417150
-47.89863204
31.10201142
-7.03796605
6.54454221
-2.84493195
-50.51270710
-3.62858188
-15.13027387
144.53582867
-32.66462101
-212.88933627
-214.82353564
141.75737422

1 - Matriz $N=J^T P J$ (Ecuaciones normales)

147248.4270	-26005.4067	1008.1939	-37540.8327	21873.2376	-151.0721	-59725.6396	28014.1844	-750.7529
-26005.4067	96063.8206	2233.7193	-4481.2476	-24444.1281	-43.0874	25806.5836	-53934.8028	-1547.3156
1008.1939	2233.7193	1085160.5619	-151.0721	-43.0874	-252329.3226	-750.7529	-1547.3156	-449069.8194
-37540.8327	-4481.2476	-151.0721	62207.4356	16214.7011	384.1088	-13662.1511	-24199.6981	-144.2584
21873.2376	-24444.1281	-43.0874	16214.7011	82092.1017	1609.6837	-13483.2156	-4280.7800	-106.1811
-151.0721	-43.0874	-252329.3226	384.1088	1609.6837	582900.5633	-144.2584	-106.1811	-98521.1325
-59725.6396	25806.5836	-750.7529	-13662.1511	-13483.2156	-144.2584	144520.1782	-26271.5486	4036.6208
28014.1844	-53934.8028	-1547.3156	-24199.6981	-4280.7800	-106.1811	-26271.5486	93601.7551	1284.2148
-750.7529	-1547.3156	-449069.8194	-144.2584	-106.1811	-98521.1325	4036.6208	1284.2148	1086833.8705

1 - Matriz N^{-1}

0.00001242	0.00000245	-0.00000002	0.00001060	-0.00000364	0.00000000	0.00000570	0.00000187	-0.00000002
0.00000245	0.00001945	-0.00000003	0.00000682	0.00000461	-0.00000003	0.00000092	0.00001271	0.00000000
-0.00000002	-0.00000003	0.00000133	-0.00000001	-0.00000002	0.00000068	-0.00000001	-0.00000001	0.00000061
0.00001060	0.00000682	-0.00000001	0.00002990	-0.00000494	-0.00000001	0.00000741	0.00001034	-0.00000003
-0.00000364	0.00000461	-0.00000002	-0.00000494	0.00001552	-0.00000005	-0.00000081	0.00000295	-0.00000001
0.00000000	-0.00000003	0.00000068	-0.00000001	-0.00000005	0.00000209	-0.00000001	-0.00000001	0.00000047
0.00000570	0.00000092	-0.00000001	0.00000741	-0.00000081	-0.00000001	0.00001039	0.00000362	-0.00000004
0.00000187	0.00001271	-0.00000001	0.00001034	0.00000295	-0.00000001	0.00000362	0.00002127	-0.00000002
-0.00000002	0.00000000	0.00000061	-0.00000003	-0.00000001	0.00000047	-0.00000004	-0.00000002	0.00000122

1 - Vector $J^T P k$

2.27169985
5.46573489
-26.59078338
2.29186590
1.22830547
-1.54381835
-4.96408711
-6.52223741
22.93314086

1 - Vector dx

0.000021
0.000046
-0.000023
0.000019
0.000010
-0.000011
-0.000042
-0.000056
0.000011

No iterar más

Coordenadas definitivas

	X	Y	Z
26	110.608	40.168	6.075
34	71.510	29.016	6.117
46	123.912	67.587	5.872

Vector residuos	Vector $l^{\wedge}=l-r$ (Observaciones ajustadas)
-0.00552375	33.471
-0.00335380	30.476
-0.00669562	65.067
0.00338389	49.981
-0.01022965	45.346
-0.00540446	48.015
0.00044896	40.658
-0.00393448	42.396
16.02913121	100.067
21.78129892	99.740
-15.02440368	99.838
-48.03039178	98.704
31.41739602	100.243
-6.73928834	100.292
6.73215959	99.955
-2.68691800	100.457
-51.57130100	100.224
-4.03875269	30.847
-15.71832762	45.172
144.64007882	62.657
-33.06745815	83.789
-213.67727147	52.856
-215.26846126	55.741
142.46613201	22.707

Redundancias	α	$\chi^2_{1-\alpha/2,g}$	$r^{\wedge}Pr$	$\chi^2_{\alpha/2,g}$	S_0^2	S_0
15	0.05	6.26213780	23.10433192	27.48839286	1.54028879	1.24108372
			↓			
			Si cumple χ^2			

Varianza utilizada
1

Cofactor incógnitas x ($Q_x=\Sigma_x$)

Covarianza incógnitas x (Σ_x)

0.00001242	0.00000245	-0.00000002	0.00001060	-0.00000364	0.00000000	0.00000570	0.00000187	-0.00000002
0.00000245	0.00001945	-0.00000003	0.00000682	0.00000461	-0.00000003	0.00000092	0.00001271	0.00000000
-0.00000002	-0.00000003	0.00000133	-0.00000001	-0.00000002	0.00000068	-0.00000001	-0.00000001	0.00000061
0.00001060	0.00000682	-0.00000001	0.00002990	-0.00000494	-0.00000001	0.00000741	0.00001034	-0.00000003
-0.00000364	0.00000461	-0.00000002	-0.00000494	0.00001552	-0.00000005	-0.00000081	0.00000295	-0.00000001
0.00000000	-0.00000003	0.00000068	-0.00000001	-0.00000005	0.00000209	-0.00000001	-0.00000001	0.00000047
0.00000570	0.00000092	-0.00000001	0.00000741	-0.00000081	-0.00000001	0.00001039	0.00000362	-0.00000004
0.00000187	0.00001271	-0.00000001	0.00001034	0.00000295	-0.00000001	0.00000362	0.00002127	-0.00000002
-0.00000002	0.00000000	0.00000061	-0.00000003	-0.00000001	0.00000047	-0.00000004	-0.00000002	0.00000122

Desv. Estandar incógnitas.

	(m.) (cc.)	(mm.)
Sx26 (m.)	0.0035247	3.5
Sx26 (m.)	0.0044103	4.4
Sx26 (m.)	0.0011547	1.2
Sx34 (m.)	0.0054684	5.5
Sy34 (m.)	0.0039397	3.9
Sx34 (m.)	0.0014457	1.4
Sx46 (m.)	0.0032240	3.2
Sx46 (m.)	0.0046124	4.6
Sx46 (m.)	0.0011028	1.1

Cofactor de Observ. Ajustadas $Q_i = \Sigma_i$

Covarianza de Observ. Ajustadas Σ_{ij}

0.000010	0.000000	-0.000002	-0.000008	0.000003	-0.000006	-0.000001	-0.000002	0.000408	0.000391	0.000210	-0.001730	0.000009	0.000536	0.000093	0.000270	-0.114681	0.013285	-0.004608	0.039407	-0.066966	0.157105	-0.098316	0.014274
0.000000	0.000017	0.000007	0.000004	0.000005	0.000002	-0.000007	0.000000	-0.000590	0.000292	-0.000184	0.000593	0.000066	0.000222	0.000215	0.000077	-0.171631	-0.063625	-0.058823	0.022631	-0.087133	-0.087279	-0.026276	0.128127
-0.000002	0.000007	0.000017	0.000005	0.000001	-0.000001	0.000009	0.000005	-0.000442	-0.000006	-0.000036	0.000870	0.000033	0.000097	-0.000161	-0.000180	-0.076728	-0.051916	-0.080289	0.032291	0.052802	-0.054758	-0.125703	-0.033176
-0.000008	0.000004	0.000005	0.000010	-0.000005	0.000004	-0.000001	0.000001	-0.001107	-0.000513	-0.000343	0.001719	-0.000091	-0.000611	-0.000112	-0.000369	-0.050949	-0.070640	-0.031448	-0.027768	0.114195	-0.089411	0.096221	-0.015787
0.000003	0.000005	0.000001	-0.000005	0.000014	-0.000004	-0.000003	-0.000001	0.000310	0.000247	0.000093	-0.001130	-0.000363	0.000654	0.000237	0.000327	0.246607	-0.009928	-0.022609	0.038627	-0.081320	-0.162431	-0.086645	0.052621
-0.000006	0.000002	-0.000001	0.000004	-0.000004	0.000013	0.000003	0.000006	-0.000040	-0.000304	-0.000281	0.000987	0.000420	-0.000617	-0.000059	-0.000318	-0.027132	0.122430	0.074183	-0.052588	-0.154312	-0.062873	0.068740	0.084470
-0.000001	-0.000007	0.000009	-0.000001	-0.000003	0.000003	0.000018	0.000003	0.000198	-0.000239	0.000180	-0.000081	0.000070	-0.000261	-0.000132	-0.000077	0.065893	0.149210	-0.040893	-0.084466	-0.009547	0.022081	-0.116687	-0.055197
-0.000002	0.000000	0.000005	0.000001	-0.000001	0.000006	0.000003	0.000015	0.000259	-0.000206	-0.000392	0.000311	0.000388	-0.000042	-0.000620	-0.000660	-0.004368	-0.044965	0.152601	0.178644	-0.087420	-0.016802	-0.046991	-0.046259
0.000408	-0.000590	-0.000442	-0.001107	0.000310	-0.000040	0.000198	0.000259	439.9334	239.6905	138.6861	294.3892	163.5850	154.5100	42.2613	134.4344	9.8563	6.1097	5.9159	3.0691	-8.1114	3.8549	-4.9686	-1.0674
0.000391	0.000292	-0.000006	-0.000513	0.000247	-0.000304	-0.000239	-0.000206	239.6905	577.7304	166.2245	160.4189	-211.3543	-199.5748	-167.0223	-65.8548	-7.0210	-0.326220	-2.4860	0.804093	-4.8408	3.1996	-4.2331	4.3629
0.000210	-0.000184	-0.000036	-0.000343	0.000093	-0.000281	0.000180	-0.000392	138.6861	166.2245	226.3410	92.8069	-9.3628	-8.8206	237.6189	-237.8465	1.3415	1.9116	-3.6970	-2.8930	1.9222	2.7483	-3.1262	-0.940805
-0.001730	0.000593	0.000870	0.001719	-0.001130	0.000987	-0.000081	0.000311	294.3892	160.4189	92.8069	197.6067	109.5471	103.3406	28.2792	89.9531	-8.1594	-14.0511	-4.2565	-4.6153	23.2837	-18.4910	20.3041	-4.6172
0.000009	0.000066	0.000033	-0.000091	-0.000363	0.000420	0.000070	0.000388	163.5850	-211.3543	-9.3628	109.5471	262.8154	248.1625	143.4476	143.4787	-12.7694	1.8065	3.8040	1.5403	-4.3737	6.7206	0.849792	1.0268
0.000536	0.000222	0.000097	-0.000611	0.000654	-0.000617	-0.000261	-0.000042	154.5100	-199.5748	-8.8206	103.3406	248.1625	234.4386	135.4894	135.5392	2.0636	-6.2341	-2.0580	6.6036	1.1306	1.9500	-7.7566	-1.5001
0.000093	0.000215	-0.000161	-0.000112	0.000237	-0.000059	-0.000132	-0.000620	42.2613	-167.0223	237.6189	28.2792	143.4476	135.4894	505.4911	-331.2644	0.214426	2.9452	-5.0580	-6.0023	-1.0881	-1.1554	0.231229	4.1453
0.000270	0.000077	-0.000180	-0.000369	0.000327	-0.000318	-0.000077	-0.000660	134.4344	-65.8548	-237.8465	89.9531	143.4787	135.5392	-331.2644	471.2446	1.4298	4.9607	-9.2664	-10.5418	1.0352	1.0354	-0.437374	4.5459
-0.114681	-0.171631	-0.076728	-0.050949	0.246607	-0.027132	0.065893	-0.004368	9.8563	-7.0210	1.3415	-8.1594	-12.7694	2.0636	0.214426	1.4298	12659.5903	655.4625	579.8611	-164.7792	765.6975	-6222.7618	109.9515	-1256.381
0.013285	-0.063625	-0.051916	-0.070640	-0.009928	0.122430	0.149210	-0.044965	6.1097	-0.326220	1.9116	-14.0511	1.8065	-6.2341	2.9452	4.9607	655.4625	4355.9431	-136.3237	-2792.0441	-3281.4498	426.4052	-459.8183	1717.5508
-0.004608	-0.058823	-0.080289	-0.031448	-0.022609	0.074183	-0.040893	0.152601	5.9159	-2.4860	-3.6970	-4.2565	3.8040	-2.0580	-5.0580	-9.2664	579.8611	-136.3237	2605.3684	2017.6963	-1565.6162	249.1391	409.6637	-315.7564
0.039407	0.022631	0.032291	-0.027768	0.038627	-0.052588	-0.084466	0.178644	3.0691	0.804093	-2.8930	-4.6153	1.5403	6.6036	-6.0023	-10.5418	-164.7792	-2792.0441	2017.6963	3956.5738	142.8399	227.3675	-823.3644	-1307.370
-0.066966	-0.087133	0.052802	0.114195	-0.081320	-0.154312	-0.009547	-0.087420	-8.1114	-4.8408	1.9222	23.2837	-4.3737	1.1306	-1.0881	1.0352	765.6975	-3281.4498	-1565.616	142.8399	6083.8789	-147.4364	1132.3873	-2945.269
0.157105	-0.087279	-0.054758	-0.089411	-0.162431	-0.062873	0.022081	-0.016802	3.8549	3.1996	2.7483	-18.4910	6.7206	1.9500	-1.1554	1.0354	-6222.7618	426.4052	249.1391	227.3675	-147.4364	5787.8737	-715.4584	-506.3363
-0.098316	-0.026276	-0.125703	0.096221	-0.086645	0.068740	-0.116687	-0.046991	-4.9686	-4.2331	-3.1262	20.3041	0.849792	-7.7566	0.231229	-0.437374	109.9515	-459.8183	409.6637	-823.3644	1132.3873	-715.4584	2887.5442	150.7953
0.014274	0.128127	-0.033176	-0.015787	0.052621	0.084470	-0.055197	-0.046259	-1.0674	4.3629	-0.940805	-4.6172	1.0268	-1.5001	4.1453	4.5459	-1256.3808	1717.5508	-315.7564	-1307.3696	-2945.2691	-506.3363	150.7953	2535.0878

Desv. Estandar Observaciones Ajustadas

	(m.) (cc.)	(mm.)
SD ₄₆₂₁ (m.)	0.003099694	3.1
SD ₄₆₂₆ (m.)	0.004140528	4.1
SD ₄₆₃₄ (m.)	0.004125615	4.1
SD ₄₆₃₁ (m.)	0.003148322	3.1
SD ₂₆₂₁ (m.)	0.003785521	3.8
SD ₂₆₃₁ (m.)	0.003600993	3.6
SD ₂₆₃₄ (m.)	0.004298861	4.3
SD ₃₄₃₁ (m.)	0.003869825	3.9
SV ₄₆₂₁ (cc.)	21.0	
SV ₄₆₂₆ (cc.)	24.0	
SV ₄₆₃₄ (cc.)	15.0	
SV ₄₆₃₁ (cc.)	14.1	
SV ₂₆₂₁ (cc.)	16.2	
SV ₂₆₃₁ (cc.)	15.3	
SV ₂₆₃₄ (cc.)	22.5	
SV _{E29E18} (cc.)	21.7	
SH ₄₆₋₂₁₋₂₆ (cc.)	112.5	
SH ₄₆₋₂₆₋₃₄ (cc.)	66.0	
SH ₄₆₋₃₄₋₃₁ (cc.)	51.0	
SH ₂₆₋₃₄₋₃₁ (cc.)	62.9	
SH ₂₆₋₃₁₋₄₆ (cc.)	78.0	
SH ₂₆₋₄₆₋₂₁ (cc.)	76.1	
SH ₃₄₋₃₁₋₄₆ (cc.)	53.7	
SH ₃₄₋₄₆₋₂₆ (cc.)	50.3	

Residuos	Raiz Cof.Resid.	Resid. Norm.	Nº redund.	Traza R
-0.0055238	0.0050642	-1.0907404	0.7274643	15
-0.0033538	0.0042556	-0.7880989	0.5136974	
-0.0066956	0.0042716	-1.5674878	0.5173750	
0.0033839	0.0050347	0.6721163	0.7188901	
-0.0102296	0.0045747	-2.2361254	0.5935652	
-0.0054045	0.0047214	-1.1446606	0.6322337	
0.0004490	0.0040959	0.1096118	0.4758372	
-0.0039345	0.0045035	-0.8736460	0.5752484	
16.0291312	23.0589949	0.6951357	0.5472309	
21.7812989	19.8474247	1.0974370	0.4054135	
-15.0244037	27.3003601	-0.5503372	0.7670552	
-48.0303918	27.8216458	-1.7263677	0.7966278	
31.4173960	26.6239607	1.1800422	0.7295166	
-6.7392883	27.1516495	-0.2482092	0.7587213	
6.7321596	21.5907287	0.3118079	0.4797605	
-2.6869180	22.3697569	-0.1201139	0.5150061	
-51.5713010	103.5482942	-0.4980410	0.4585717	
-4.0387527	101.9880401	-0.0396003	0.7048320	
-15.7183276	70.6583394	-0.2224554	0.6570967	
144.6400788	89.9815284	1.6074419	0.6717421	
-33.0674581	107.7838711	-0.3067941	0.6563021	
-213.6772715	108.2386209	-1.9741315	0.6693300	
-215.2684613	80.5281581	-2.6732073	0.6919075	
142.4661320	84.1930289	1.6921369	0.7365747	

Test de POPE

α	Prob. (%)	α_0	α/n	$\alpha_0/2$	$t_{1-\alpha_0/2, g-1}$
0.001	99.9	0.00004169	0.00004167	0.00002084	5.85688941

$T_{1-\alpha_0/2, g}$ 3.263810315 $r_{\text{normalizado crítico}}$ **4.05066184** ¡ Todos los residuos normalizados cumplen !

Elipsoide de error punto 26

Matriz de covarianza			
0.00001242	0.00000245	-0.00000002	
0.00000245	0.00001945	-0.00000003	
-0.00000002	-0.00000003	0.00000133	
Autovalores:			
0.00002022	0.00001166	0.00000133	
Autovectores:			
0.29954948	0.95408010	0.00112670	
0.95407919	-0.29955092	0.00146242	
-0.00173277	-0.00063689	0.99999830	

Elipsoide estandar (p=0.199) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.00449661	0.00341400	0.00115472

Elipsoide 95% (p=0.95) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.01257019	0.00954377	0.00322799

Acimut semieje mayor: 19.367
Elevación semieje mayor: -0.110

Elipsoide de error punto 34

Matriz de covarianza			
0.00002990	-0.00000494	-0.00000001	
-0.00000494	0.00001552	-0.00000005	
-0.00000001	-0.00000005	0.00000209	
Autovalores:			
0.00003144	0.00001399	0.00000209	
Autovectores:			
0.95501908	0.29654260	0.00101878	
-0.29654428	0.95501089	0.00396122	
0.00020173	-0.00408515	0.99999164	

Elipsoide estandar (p=0.199) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.00560699	0.00373989	0.00144561

Elipsoide 95% (p=0.95) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.01567426	0.01045480	0.00404117

Acimut semieje mayor: 119.167
Elevación semieje mayor: 0.013

Elipsoide de error punto 46

Matriz de covarianza			
0.00001039	0.00000362	-0.00000004	
0.00000362	0.00002127	-0.00000002	
-0.00000004	-0.00000002	0.00000122	
Autovalores:			
0.00002237	0.00000930	0.00000122	
Autovectores:			
0.28952936	0.95715762	0.00469440	
0.95716786	-0.28953350	0.00021266	
-0.00156273	-0.00443176	0.99998896	

Elipsoide estandar (p=0.199) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.00472974	0.00304938	0.00110268

Elipsoide 95% (p=0.95) en metros

Semieje mayor	Semieje media	Semieje menor
0.01322192	0.00852449	0.00308251

Acimut semieje mayor: 18.700
Elevación semieje mayor: -0.099