

Universidad
Politécnica
de Cartagena



industriales

etsii UPCT

TEST DE INDEPENDENCIA EN SERIES TEMPORALES

Titulación: Doctorado en Tecnologías
Industriales

Alumno/a: Salvador Vera Nieto

Director/a/s: José Salvador Cánovas Peña
Antonio Guillamón Frutos

Cartagena, 10 de Septiembre de 2012

Índice

CAPÍTULO 1: Introducción a las series temporales	1
1. Definición de serie temporal. Ejemplos.....	2
2. Clasificación de las series temporales	8
3. Objetivos del análisis de series temporales	13
4. Apuntes y observaciones.....	14
5. Referencias.....	15
CAPÍTULO 2: Test para el estudio de la dependencia en series temporales	16
1. Test de M. Matilla y M. Ruíz	17
2. Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	27
3. Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón.....	36
4. Test BDS	78
CAPÍTULO 3: Estudio comparativo de los test.....	91
1. Introducción. Cómo hacer el estudio comparativo	92
2. Resultados del estudio comparativo	97
3. Conclusiones del estudio comparativo.....	108
ANEXO 1: Tablas con los resultados del estudio comparativo de los test.....	109
ANEXO 2: Programas utilizados para la realización del estudio comparativo.....	182
ANEXO 2.1: Programas realizados con Mathematica	183
ANEXO 2.2: Programas realizados con Matlab	190

PREFACIO

Las series temporales son un campo de estudio con un gran número de aplicaciones. Es difícil imaginar una rama de conocimiento que no guarde algún tipo de relación con las series temporales. El estudio de éstas está muy presente en campos tan diversos como la economía, la sociología o el medio ambiente.

Una de las cuestiones más interesantes que trata el estudio de las series temporales es la predicción de valores de un parámetro, conocidos los valores de dicho parámetro en instantes de tiempo anteriores. Pero antes de ello hay que verificar la predictibilidad de la serie temporal en cuestión; y es precisamente éste el punto en que se centra el presente documento. Es decir, se tratará la detección de la independencia en series temporales.

En el capítulo 1 se tratan algunas generalidades de series temporales. Se establece una definición formal de serie temporal, se presentan diversos ejemplos de series temporales y se fijan los objetivos del análisis de éstas.

En el capítulo 2 se presentan y desarrollan varios métodos cuyo fin es determinar si cierta serie temporal presenta o no independencia. Los test descritos se acompañan de varios ejemplos explicativos y de aplicación, y son los siguientes:

- Test de M. Matilla y M. Ruíz.
- Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán
- Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón.
- Test BDS.

Finalmente, en el capítulo 3 se muestran los resultados de un estudio comparativo entre los test presentados en el capítulo 2. Se concluye el capítulo con algunas conclusiones sobre el funcionamiento de los diferentes métodos.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LAS SERIES TEMPORALES

En este primer capítulo se presenta la definición de serie temporal, y se citan varios ejemplos de series temporales en distintos contextos, como el científico, el social o el político.

Además se describen los tipos de series temporales atendiendo a distintos criterios de clasificación.

Explicamos también cuáles son los objetivos y las finalidades de estudio de las series temporales.

1. DEFINICIÓN DE SERIE TEMPORAL. EJEMPLOS.

Una serie temporal o cronológica es la realización de n variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Cada dato representa una observación de tamaño uno de la variable X_t , que representa las posibles realizaciones en el instante t . El análisis de series temporales comprende métodos que ayudan a interpretar este tipo de datos, extrayendo información representativa, tanto referente a los orígenes o relaciones subyacentes, como a la posibilidad de extrapolar y predecir su comportamiento futuro.

Es habitual encontrar series temporales en contextos económicos, empresariales, físicos, médicos, matemáticos o biológicos. Resulta difícil imaginar una rama de las ciencias en la que no aparezcan datos que puedan ser considerados como series temporales. Enunciamos a continuación algunos ejemplos agrupados en distintos campos:

Economía y marketing

- Evolución del IPC en España.
- Evolución de la tasa de paro en España.

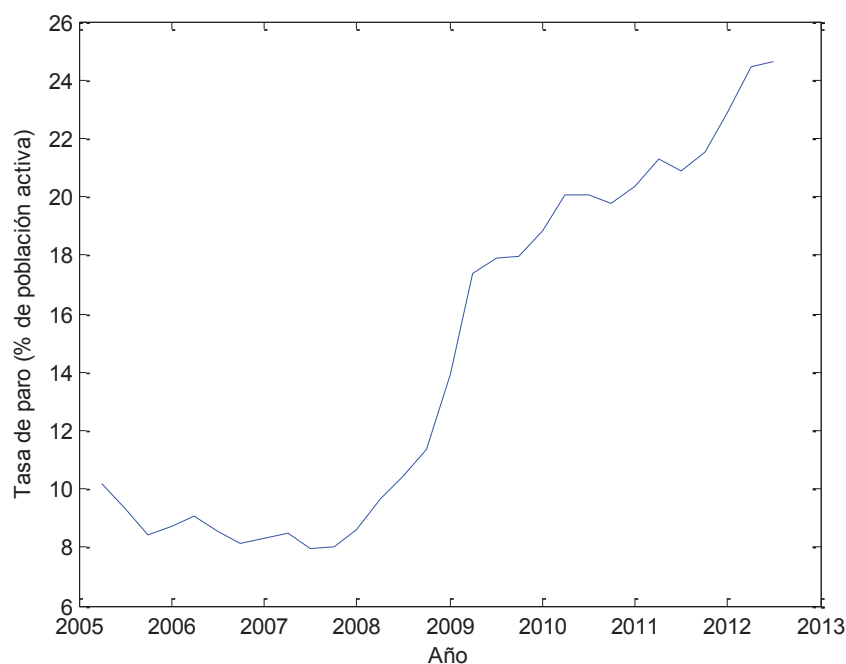


Figura 1.1. Evolución de la tasa de paro en España desde el primer trimestre de 2005 hasta el segundo trimestre de 2012 (Fuente: www.ine.es)

- Evolución de la prima de riesgo española.
- Precio de la vivienda en un cierto período de tiempo.
- Evolución del índice del precio de un bien o servicio.

- Beneficios netos anuales de una determinada empresa.
- Series de cotizaciones de bolsa, como por ejemplo el índice IBEX 35.

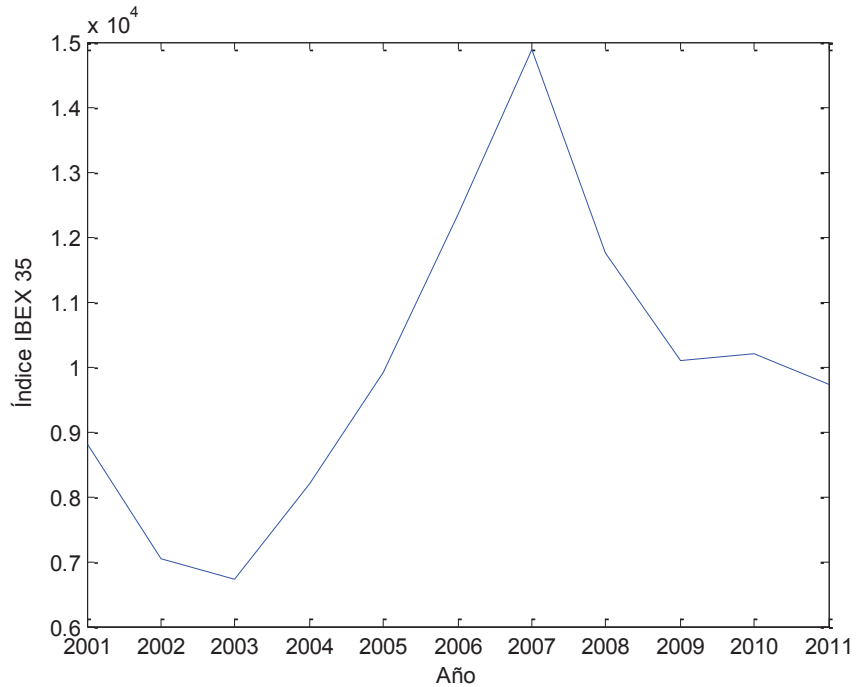


Figura 1.2. Evolución del índice IBEX 35 desde el año 2001 hasta el año 2011 (Fuente: www.ine.es)

- Series de exportaciones o importaciones.
- Existencias en un almacén.
- Gastos en publicidad de un sector.

Demografía y sociedad

- Número de habitantes en cierto país.
- Tasa de natalidad en una región o país.

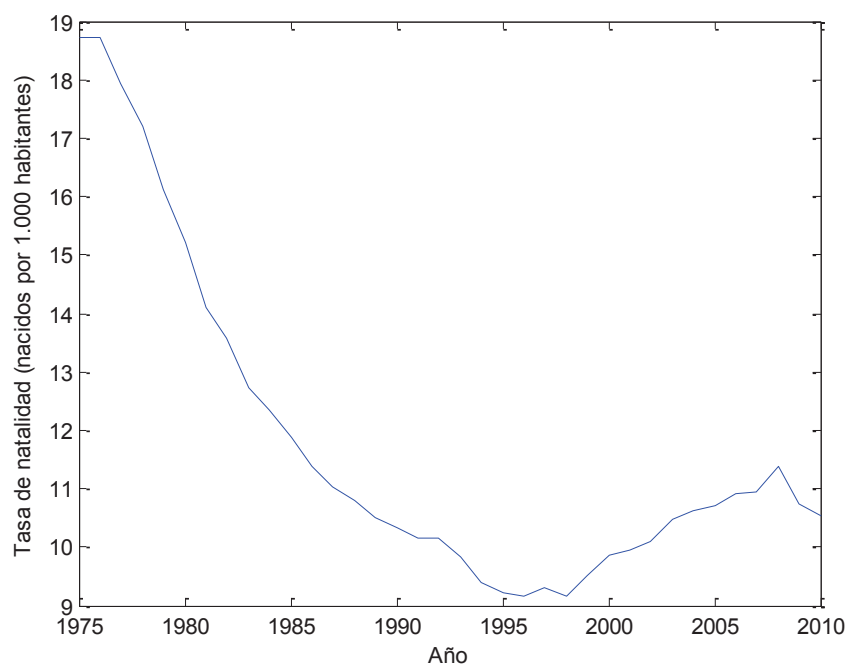


Figura 1.3. Tasa bruta de natalidad en España desde el año 1975 hasta el año 2010 (Fuente: www.ine.es)

- Consumo de drogas.

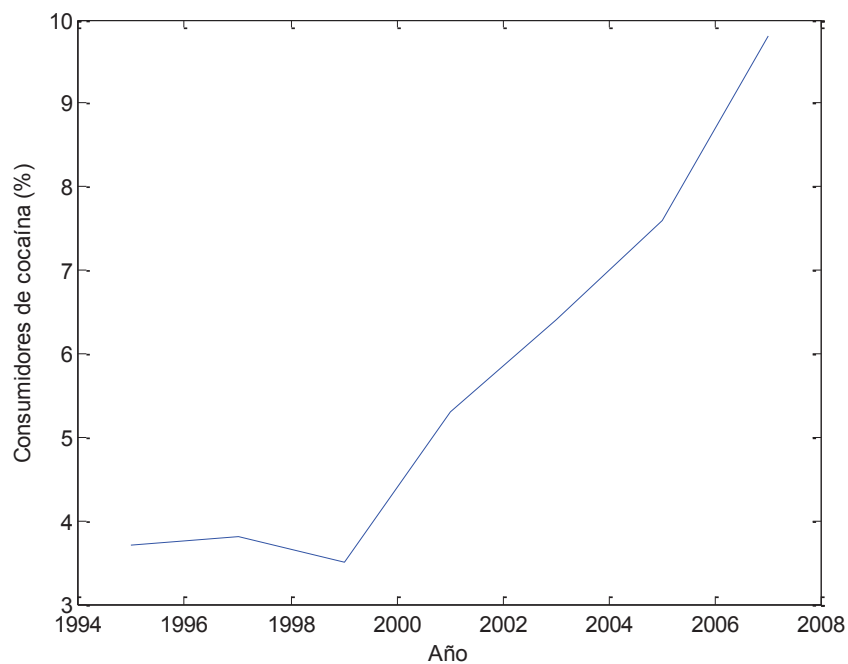


Figura 1.4. Porcentaje de consumidores de cocaína en España (población de 15 a 64 años) desde el año 1995 hasta el año 2007 (Fuente: www.ine.es)

- Número de matrimonios por año.
- Evolución de la intención de voto a cierto partido político.

Medioambiente

- Evolución de los niveles de sustancias contaminantes en una determinada ciudad.
- Lluvia recogida diariamente en cierta región.
- Evolución de la temperatura de una localidad.
- Cantidad de residuos recogidos en una región o país.
- Captación de agua dulce en un país.

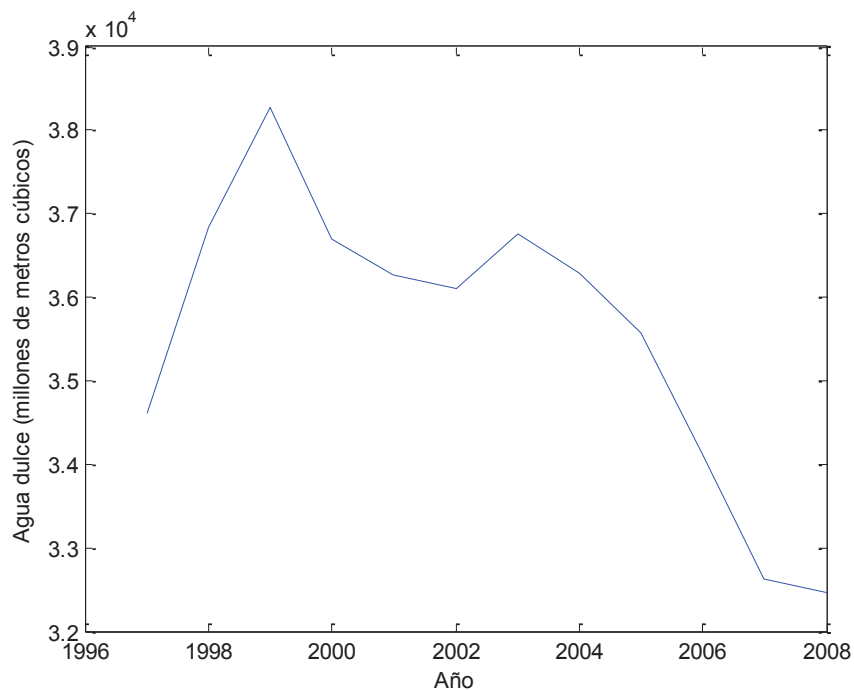


Figura 1.5. Captación de agua dulce en España desde el año 1997 hasta el año 2008 (Fuente: www.ine.es)

- Velocidad del viento en una central eólica.
- Caudal de un río.

Otros:

- Evolución de la audiencia de una determinada cadena de televisión.
- Producción de energía.

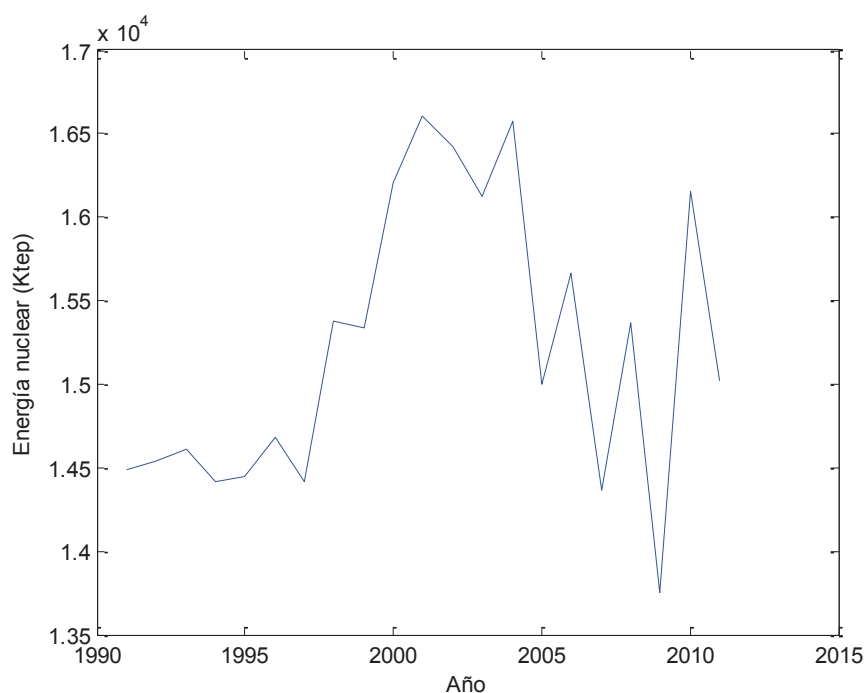


Figura 1.6. Producción de energía nuclear en España en miles de toneladas equivalentes de petróleo, desde el año 1991 hasta el año 2011 (Fuente: www.ine.es)

Una serie temporal puede interpretarse como una distribución estadística bidimensional en la que las variables son el tiempo y la característica en estudio:

Tiempo	Valor
t_1	X_{t_1}
t_2	X_{t_2}
...	...

Tabla 1.1. Interpretación de una serie temporal como una distribución estadística bidimensional

Al iniciar el estudio de una determinada serie temporal se suele proceder a la representación gráfica de la misma. Esto nos permite detectar las características más importantes de la evolución de la serie, y se eliminan los problemas de visualización que conlleva una tabla con un gran volumen de datos. En este aspecto hay que prestar una atención especial a la elección de las escalas en los ejes en los que se realiza la gráfica; una elección errónea puede conducir a asumir unas consideraciones iniciales con cierta distorsión.

Si para cada instante de tiempo se dispone de varias observaciones, los valores se pueden presentar en una tabla como la siguiente:

	Observaciones				
Tiempo	1	2	s
t_1	$X(t_{11})$	$X(t_{12})$	$X(t_{1s})$
t_2	$X(t_{21})$	$X(t_{22})$	$X(t_{2s})$
...
t_n	$X(t_{n1})$	$X(t_{n2})$	$X(t_{ns})$

Tabla 1.2. Caso en que se disponen de varias observaciones para cada instante de tiempo

Un ejemplo típico en el que se recurriría a una tabla como la anterior sería el de un conjunto de datos que estuvieran tomados en los diferentes trimestres de cada año. En este caso se tendría un año distinto en cada fila, y los trimestres de cada año se agruparían en las columnas de la tabla.

2. CLASIFICACIÓN DE LAS SERIES TEMPORALES.

Vamos a comentar los distintos tipos de series temporales que nos podemos encontrar. Hay que tener en cuenta que éstas no se clasifican, únicamente, según un único criterio. Hay diferentes clasificaciones de las series temporales atendiendo a distintos aspectos.

En función de lo predecible que sean los valores futuros se tiene la siguiente clasificación:

· Series temporales deterministas: son aquellas en las que se puede predecir con total exactitud los valores que las componen.

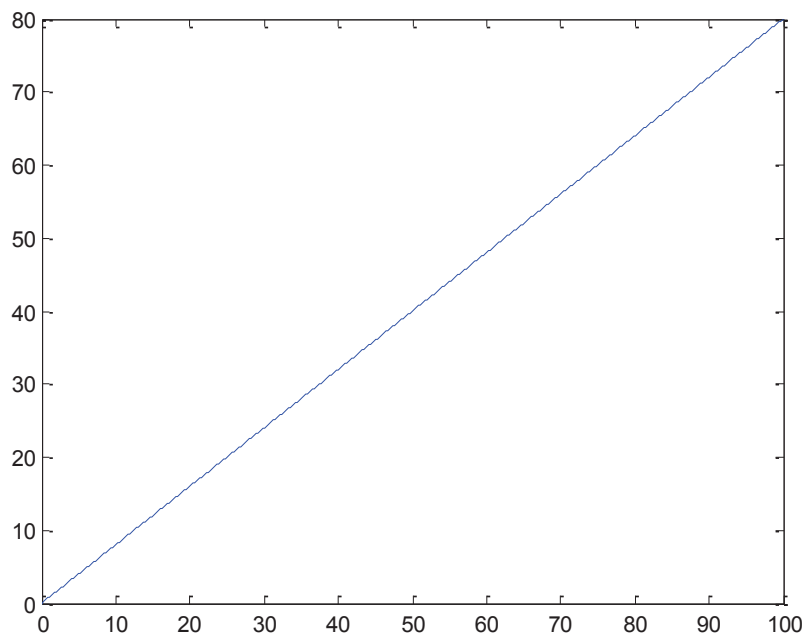


Figura 1.7. Serie temporal determinista generada con MATLAB

· Series temporales estocásticas: son aquellas en las que los valores futuros no se pueden determinar de forma exacta, o no son nada predecibles. En el caso de que se pueda determinar de manera parcial su comportamiento, se dice que existen patrones de regularidad en el tiempo; lo que hace posible el modelado, y en su caso, la predicción. Por lo tanto, si podemos encontrar patrones de regularidad en diferentes secciones de la serie temporal, podremos también describirla mediante modelos basados en distribuciones de probabilidad.

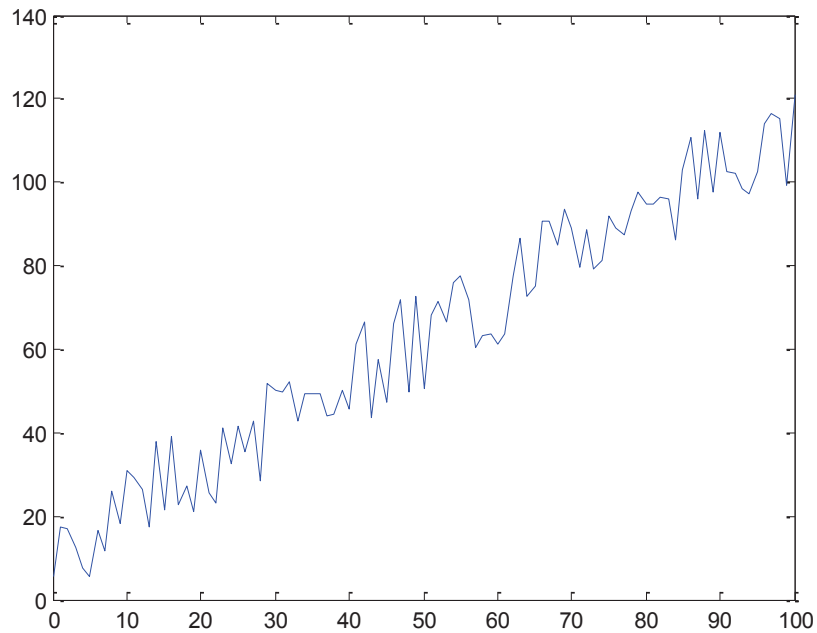


Figura 1.8. Serie temporal estocástica generada con MATLAB

Series temporales idénticamente distribuidas: son aquellas en las que todas las observaciones provienen de un mismo modelo probabilístico, aunque exista independencia en cuanto al instante en el que aparecen.

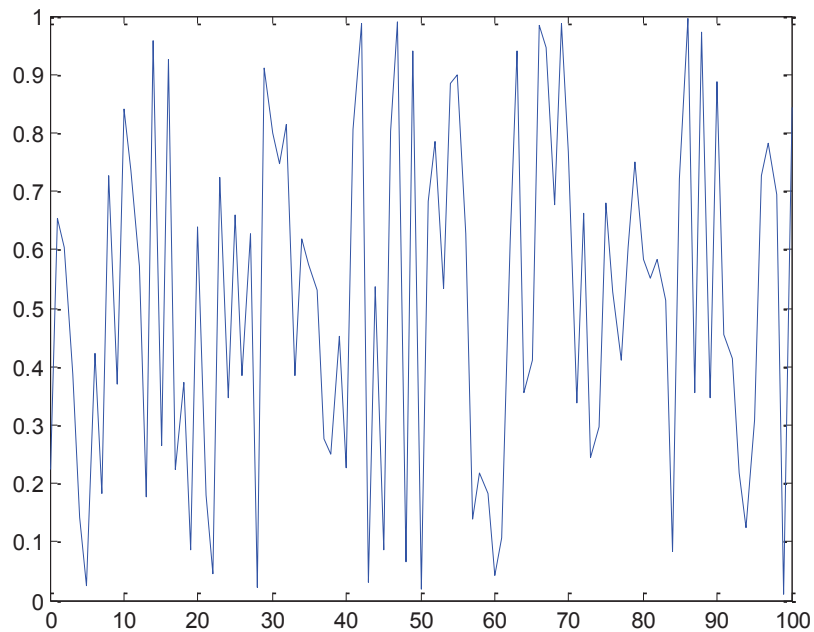


Figura 1.9. Serie temporal idénticamente distribuida generada con MATLAB

Según las variaciones que puede experimentar la media de los valores de la serie, se tiene el siguiente tipo de series:

· Series temporales con tendencia: son aquellas en las que se aprecia un patrón de comportamiento.

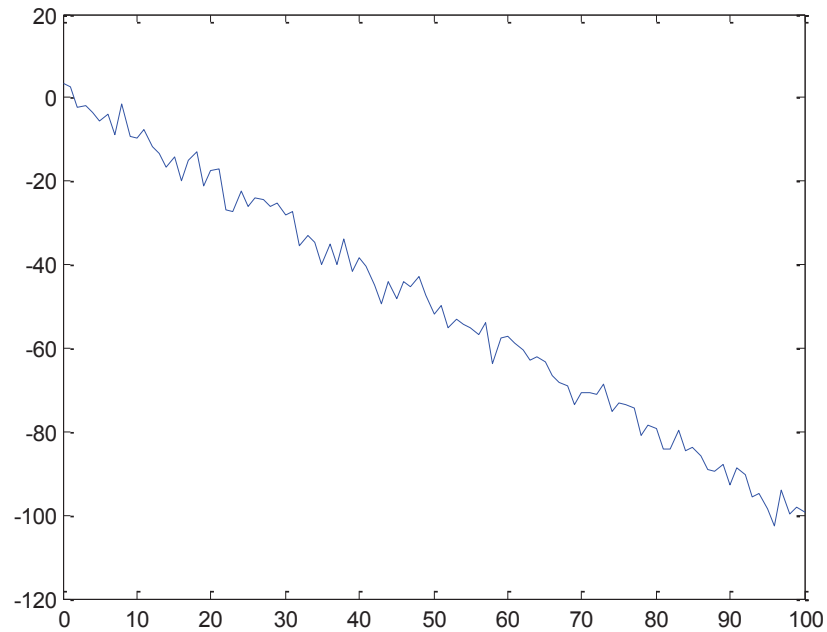


Figura 1.10. Serie temporal con tendencia descendente generada con MATLAB.

Atendiendo a los cambios que puede sufrir la variabilidad, se puede tener:

· Series temporales homocedásticas: son aquellas en las que la dispersión asociada a las variables se mantiene constante.

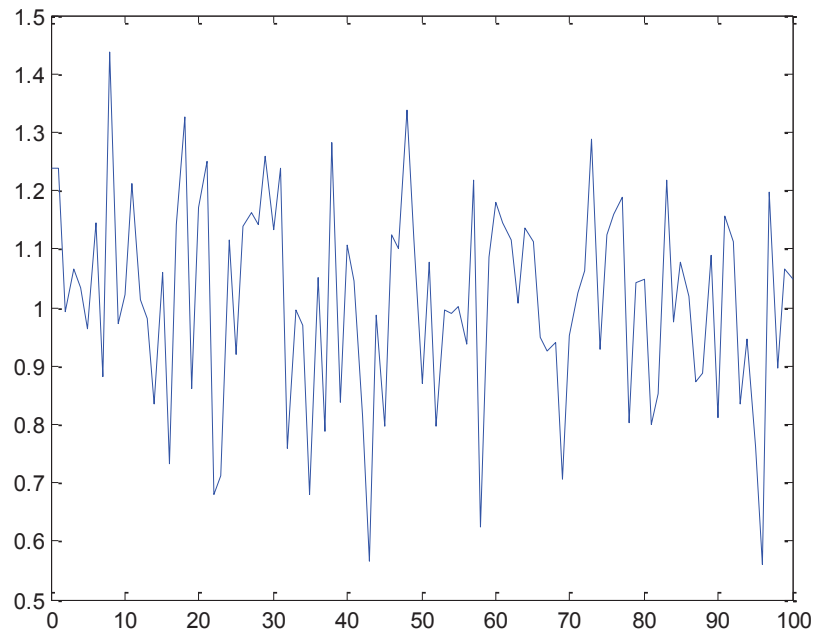


Figura 1.11. Serie temporal homocedástica generada con MATLAB

· Series temporales heterocedásticas: son aquellas para las que la variabilidad no permanece constante a lo largo del tiempo.

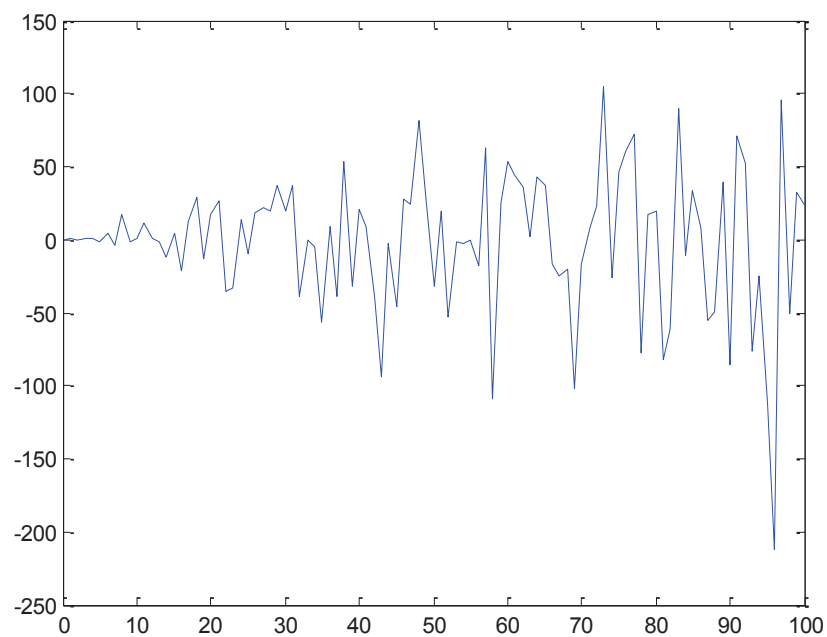


Figura 1.12. Serie temporal heterocedástica generada con MATLAB

Considerando de forma conjunta los cambios que pueden experimentar la media y la variabilidad, podemos tener:

· Series temporales estacionarias (en sentido débil): una serie es estacionaria cuando es estable, es decir, cuando la media y la variabilidad son constantes a lo largo del tiempo. Esto se refleja gráficamente en que los valores de la serie tienden a oscilar en torno a la media, que es constante; mientras que la variabilidad también permanece constante en el tiempo. Es una serie básicamente estable, sin que se aprecien aumentos o disminuciones sistemáticas de sus valores. Para este tipo de series tienen sentido conceptos como la media y la varianza.

Dependiendo de la naturaleza de las observaciones, algunos autores clasifican las series temporales en discretas y continuas. En cualquier caso, y siendo coherentes con la definición que dimos de serie temporal, nosotros entenderemos como tal las que son de tipo discreto.

3. OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES.

El análisis de series temporales puede tener objetivos muy diversos. Podemos destacar dos de ellos:

· Descripción: cuando se estudia una serie temporal, lo primero que se tiene que hacer es representarla gráficamente y considerar las medidas descriptivas básicas, para así lograr una mejor comprensión del fenómeno en estudio. Así, se tiene que considerar:

- Si los datos presentan forma creciente o decreciente (tendencia).
- Si existe influencia de ciertos períodos de cualquier unidad de tiempo (estacionalidad).
- Si aparecen observaciones extrañas o discordantes.

· Predicción: cuando se observan los valores de una serie se pretende, normalmente, no sólo explicar el pasado, sino también predecir el futuro. Se trata de encontrar características o patrones de comportamiento para que, a partir de ellos, se realicen predicciones sobre valores futuros de la variable analizada.

4. APUNTES Y OBSERVACIONES.

La diferencia esencial entre las series temporales y los análisis no temporales (estadística descriptiva, diseño de experimentos o regresión) es que en estos no importa el orden en que están tomadas las observaciones, mientras que en las series temporales el orden es muy importante, y variarlo supone cambiar la información contenida en la serie.

Hay que tener en cuenta que si se hacen predicciones para instantes de tiempo muy lejanos al del período del que se disponen datos, se corre el riesgo de cometer grandes errores. Una de las razones que podrían propiciar dichos errores sería que, entre los instantes de tiempo para los que se tienen valores, y los instantes de tiempo para los que se quieren realizar predicciones, tuviera lugar algún cambio estructural de cierta importancia. Un ejemplo sobre este aspecto sería la predicción de venta de ordenadores de sobremesa en el momento en que los ordenadores portátiles aún no se comercializaban.

Otra observación importante sobre el estudio de las series temporales es el hecho de que, en una mayoría de casos, los datos u observaciones que componen la serie se toman en instantes de tiempo equidistantes. La diferencia entre los instantes de tiempo depende de la característica en estudio y de los objetivos del análisis; dicha diferencia se denomina periodicidad de la serie. Algunos ejemplos de periodicidad son:

- Anual: se toma un dato cada año.
- Semestral: se toma un dato cada seis meses.
- Trimestral: se toma un dato cada tres meses.
- Mensual: se toma un dato cada mes.
- Semanal: se toma un dato cada semana.
- Diaria: se toma un dato cada día.

5. REFERENCIAS.

- M. A. Palacios, F. A. López Hernández, J. García Córdoba y M. Ruíz Marín. Introducción a la estadística para la empresa. Librería Escarabajal.
- F. Martín-Pliego López. Introducción a la estadística económica y empresarial. Ed. Thomson.
- J. M. Casas, J. Callealta, J. Núñez, M. Toledo y C. Ureña. Curso Básico de Estadística Descriptiva. INAP (1986).
- J. A. Hermoso Gutiérrez y A. Hernández Bastida. Curso Básico de Estadística Descriptiva y Probabilidad. Ed. Némesis (1997).
- J. C. Brocklebank y D. A. Dickey. SAS for forecasting Time Series. Wiley Inter-Science (2003).
- B. Abraham y J. Ledolter. Statistical Methods for Forecasting. Wiley (1983).
- A. Aznar y F. J. Trivez. Métodos de Predicción en Economía II. Análisis de Series Temporales. Ariel Economía (1993).
- P. J. Brockwell y R. A. Davis. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer texts in Statistics (2002).
- D. Peña Sánchez de Rivera. Análisis de series temporales. Alianza Editorial (2005).
- D. Peña, G. C. Tiao y R. S. Tsay. A course in time series analysis. John Wiley & Sons (2001).
- E. Uriel y A. Peiró. Introducción al Análisis de Series Temporales. Editorial AC (2000).

CAPÍTULO 2

TEST PARA EL ESTUDIO DE LA DEPENDENCIA EN SERIES TEMPORALES

En este capítulo vamos a explicar los siguientes test:

- Test de M. Matilla y M. Ruíz.
- Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán
- Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón.
- Test BDS.

Lo haremos respetando la notación que los propios autores de cada test utilizaron. Esto implica que un mismo parámetro puede ser representado de distinta manera, según el método que se esté describiendo.

Daremos también un resumen teórico de cada uno de ellos, explicaremos los conceptos teóricos en los que se apoyan y daremos algunos ejemplos explicativos para mostrar la forma de aplicarlos.

1. TEST DE M. MATILLA Y M. RUÍZ.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL TEST. M. MATILLA Y M. RUÍZ (2008).

En este apartado vamos a presentar la descripción del test que dieron sus propios autores en M. Matilla y M. Ruíz (2008).

Definiciones y notación.

Sea $\{X_t\}_{t \in I}$ una serie temporal de valores reales. Para un entero positivo $m \geq 2$, denotemos con S_m al grupo simétrico de orden $m!$, que es el grupo formado por todas las permutaciones de longitud m . Sea $\pi_i = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_m$. Llamemos π_i a un símbolo del grupo simétrico S_m . El entero positivo m es normalmente conocido como *dimensión de inmersión*.

Definamos ahora un patrón de orden para un símbolo $\pi_i = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_m$ en un tiempo $t \in I$ dado. Finalmente consideremos que la serie temporal está inmersa en un espacio m -dimensional, tal y como sigue:

$$X_m(t) = (X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+m}) \text{ para } t \in I \quad (2.1)$$

Entonces decimos que t es del tipo π_i si y sólo si $\pi_i = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ es el único símbolo en el grupo S_m cumpliendo las siguientes dos condiciones:

$$(a) \quad X_{t+i_1} \leq X_{t+i_2} \leq \dots \leq X_{t+i_m} \quad (2.2)$$

$$(b) \quad i_{s-1} < i_s \text{ si } X_{t+i_{s-1}} = X_{t+i_s} \quad (2.3)$$

La condición (b) garantiza la unicidad del símbolo π_i . Esto está justificado si los valores de X_t tienen una distribución continua tal que valores iguales sean muy poco comunes, con una probabilidad teórica de ocurrencia igual a 0.

Notar que para todo t , tal que t es de tipo π_i , la m -historia $X_m(t)$ es convertida en un único símbolo π_i . El símbolo π_i describe cómo la ordenación de los instantes $t + 0 < t + 1 < \dots < t + (m - 1)$ es convertida en la ordenación de los valores de la serie temporal analizada. Con objeto de ver esto, el siguiente ejemplo será de ayuda.

Tomemos como dimensión de inmersión $m = 3$. De este modo el grupo simétrico es:

$$S_3 = \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\} \quad (2.4)$$

Consideremos la serie temporal de siete valores:

$$\{X_1 = 2, X_2 = 8, X_3 = 6, X_4 = 5, X_5 = 4, X_6 = 9, X_7 = 3\} \quad (2.5)$$

Entonces para $t = 2$ tenemos que $X_{t+2} = 5 < X_{t+1} = 6 < X_{t+0} = 8$, y por tanto tenemos que el período $t = 2$ es de tipo $(2, 1, 0)$.

También, dada una serie temporal $\{X_t\}_{t \in I}$ y una dimensión de inmersión m , se puede calcular fácilmente la frecuencia relativa de un símbolo $\pi \in S_m$ mediante:

$$p(\pi) := p_\pi = \frac{\#\{t \in I \mid t \text{ es de tipo } \pi\}}{|I| - m + 1} \quad (2.6)$$

donde $|I|$ denota el cardinal del conjunto I .

Entonces para la serie temporal dada en (2.5) tenemos que la 3-historia $X_3(1) = (X_1 = 2, X_2 = 8, X_3 = 6)$ es representada por el símbolo $(0, 2, 1)$; $X_3(2) = (8, 6, 5)$ y $X_3(3) = (6, 5, 4)$ son representadas por el símbolo $(2, 1, 0)$; $X_3(4) = (5, 4, 9)$ es representado por el símbolo $(1, 0, 2)$ y finalmente $X_3(5) = (4, 9, 3)$ es representado por el símbolo $(2, 0, 1)$. Por tanto obtenemos que $p((0, 1, 2)) = 0 = p((1, 2, 0))$, $p((0, 2, 1)) = \frac{1}{5}$, $p((1, 0, 2)) = \frac{1}{5}$, $p((2, 0, 1)) = \frac{1}{5}$ y $p((2, 1, 0)) = \frac{2}{5}$.

Ahora, en este escenario, podemos definir la entropía de permutación de la serie temporal $\{X_t\}_{t \in I}$ para una dimensión de inmersión $m \geq 2$. Esta entropía es definida como la entropía de Shannon de los $m!$ distintos símbolos que siguen:

$$h(m) = - \sum_{\pi \in S_m} p_\pi \ln(p_\pi) \quad (2.7)$$

La entropía de permutación, $h(m)$, es la información contenida en la comparación de m valores consecutivos de la serie temporal. Está claro que $0 \leq h(m) \leq \ln(m!)$, donde el límite inferior se alcanza para una serie que sólo presente una permutación admisible, y el límite superior para un sistema completamente aleatorio (secuencia i.i.d.), donde las $m!$ posibles permutaciones aparecen con la misma probabilidad. Para la serie dada en (2.5) tenemos que $h(3) = -3 \frac{1}{5} \ln\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{2}{5} \ln\left(\frac{2}{5}\right) \approx 1.332179$.

Construcción y propiedades del test de independencia.

Sea $\{X_t\}_{t \in I}$ una serie temporal y sea m una determinada dimensión de inmersión. Con el objeto de construir un test para la independencia de series, vamos a considerar la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: \{X_t\}_{t \in I} \text{ i. i. d.} \quad (2.8)$$

frente a la hipótesis alternativa de que las observaciones no provienen de una secuencia i.i.d..

Ahora, para un símbolo $\pi_i = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_m$, definimos la variable aleatoria $Z_{\pi_i t}$ como sigue:

$$Z_{\pi_i t} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{t+i_1} \leq X_{t+i_2} \leq \dots \leq X_{t+i_m} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (2.9)$$

es decir, tenemos $Z_{\pi_i t} = 1$ si y sólo si t es del tipo π_i , $Z_{\pi_i t} = 0$ en los demás casos.

Entonces $Z_{\pi_i t}$ es una variable de Bernoulli con probabilidad de 'éxito' p_{π_i} , donde 'éxito' significa que t es del tipo π_i . Es sencillo notar que:

$$\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} = 1 \quad (2.10)$$

Ahora asumamos que el conjunto I es finito y de orden T . Entonces estamos interesados en conocer cuantas t 's son de tipo π_i para todos los símbolos $\pi_i \in S_m$. Sea $K = T - m + 1$. Con la intención de dar respuesta a la pregunta, construimos la siguiente variable:

$$Y_{\pi_i} = \sum_{t=1}^K Z_{\pi_i t} \quad (2.11)$$

La variable Y_{π_i} puede tomar los valores $\{0, 1, 2, \dots, K\}$. Entonces se tiene que la variable Y_{π_i} es la variable aleatoria binomial:

$$Y_{\pi_i} \sim B(K, p_{\pi_i}) \quad (2.12)$$

Para cada símbolo $\pi_i \in S_m$, vamos a denotar:

$$n_{\pi_i} = \# \{t \in I \mid t \text{ es de tipo } \pi_i\} \quad (2.13)$$

para $i = 1, 2, \dots, m!$. Entonces, bajo la hipótesis nula H_0 , la función de densidad conjunta de las $m!$ variables $(Y_{\pi_1}, Y_{\pi_2}, \dots, Y_{\pi_{m!}})$ es:

$$P(Y_{\pi_1} = a_1, Y_{\pi_2} = a_2, \dots, Y_{\pi_{m!}} = a_{m!}) = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{m!})!}{a_1! a_2! \dots a_{m!}!} p_{\pi_1}^{a_1} p_{\pi_2}^{a_2} \dots p_{\pi_{m!}}^{a_{m!}} \quad (2.14)$$

donde $a_1 + a_2 + \dots + a_{m!} = K$. En consecuencia, la distribución conjunta de las $m!$ variables $(Y_{\pi_1}, Y_{\pi_2}, \dots, Y_{\pi_{m!}})$ es una distribución multinomial.

La función de probabilidad de la distribución (14) es:

$$L(p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, \dots, p_{\pi_{m!}}) = \frac{K!}{n_{\pi_1}! n_{\pi_2}! \dots n_{\pi_{m!}}!} p_{\pi_1}^{n_{\pi_1}} p_{\pi_2}^{n_{\pi_2}} \dots p_{\pi_{m!}}^{n_{\pi_{m!}}} \quad (2.15)$$

y teniendo en cuenta $\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} L(p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, \dots, p_{\pi_{m!}}) \\ = \frac{K!}{n_{\pi_1}! n_{\pi_2}! \dots n_{\pi_{m!}}!} p_{\pi_1}^{n_{\pi_1}} p_{\pi_2}^{n_{\pi_2}} \dots (1 - p_{\pi_1} - p_{\pi_2} - \dots - p_{\pi_{m!-1}})^{n_{\pi_{m!}}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entonces el logaritmo de esta función de probabilidad es:

$$\begin{aligned} \ln(L(p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, \dots, p_{\pi_{m!}})) \\ = \ln\left(\frac{K!}{n_{\pi_1}! n_{\pi_2}! \dots n_{\pi_{m!}}!}\right) + \sum_{i=1}^{m!-1} n_{\pi_i} \ln(p_{\pi_i}) \\ + n_{\pi_{m!}} \ln(1 - p_{\pi_1} - p_{\pi_2} - \dots - p_{\pi_{m!-1}}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para determinar el estimador de probabilidad máximo \hat{p}_{π_i} de p_{π_i} para todo $i = 1, 2, \dots, m!$, resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \ln \left(L(p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, \dots, p_{\pi_{m!}}) \right)}{\partial p_{\pi_i}} = 0 \quad (2.18)$$

y obtenemos:

$$\hat{p}_{\pi_i} = \frac{n_{\pi_i}}{K} \quad (2.19)$$

Entonces el estadístico de índice de probabilidad es (ver Lehman (1986)):

$$\begin{aligned} \lambda(Y) &= \frac{\frac{K!}{n_{\pi_1}! n_{\pi_2}! \dots n_{\pi_{m!}}!} p_{\pi_1}^{n_{\pi_1}} p_{\pi_2}^{n_{\pi_2}} \dots p_{\pi_{m!}}^{n_{\pi_{m!}}}}{\frac{K!}{n_{\pi_1}! n_{\pi_2}! \dots n_{\pi_{m!}}!} \hat{p}_{\pi_1}^{n_{\pi_1}} \hat{p}_{\pi_2}^{n_{\pi_2}} \dots \hat{p}_{\pi_{m!}}^{n_{\pi_{m!}}}} = \frac{\prod_{i=1}^{m!} p_{\pi_i}^{n_{\pi_i}}}{\prod_{i=1}^{m!} \left(\frac{n_{\pi_i}}{K} \right)^{n_{\pi_i}}} = K^{\sum_{i=1}^{m!} n_{\pi_i}} \prod_{i=1}^{m!} \left(\frac{p_{\pi_i}}{n_{\pi_i}} \right)^{n_{\pi_i}} \\ &= K^K \prod_{i=1}^{m!} \left(\frac{p_{\pi_i}}{n_{\pi_i}} \right)^{n_{\pi_i}} \quad (2.20) \end{aligned}$$

Por otro lado, $G(m) = -2 \ln(\lambda(Y))$ converge asintóticamente a una distribución Chi-cuadrado con $m! - 1$ grados de libertad (ver Lehman (1986)). De ahí:

$$G(m) = -2 \ln(\lambda(Y)) = -2 \left[K \ln(K) + \sum_{i=1}^{m!} n_{\pi_i} \ln \left(\frac{p_{\pi_i}}{n_{\pi_i}} \right) \right] \sim \chi_{m!-1}^2 \quad (2.21)$$

Ahora, bajo la hipótesis nula H_0 se tendrá que todas las permutaciones tienen igual probabilidad, y por tanto $p_{\pi_i} = \frac{1}{m!}$ para todo $i = 1, 2, \dots, m!$. Entonces se deduce que:

$$\begin{aligned} G(m) &= -2K \left[\ln(K) + \sum_{i=1}^{m!} \frac{n_{\pi_i}}{K} \ln \left(\frac{p_{\pi_i}}{n_{\pi_i}} \right) \right] = -2K \left[\ln(K) + \sum_{i=1}^{m!} \frac{n_{\pi_i}}{K} \left(\ln \left(\frac{1}{m!} \right) - \ln(n_{\pi_i}) \right) \right] \\ &= -2K \left[\ln(K) + \sum_{i=1}^{m!} \frac{n_{\pi_i}}{K} \left(\ln \left(\frac{1}{m!} \right) - \ln \left(\frac{n_{\pi_i}}{K} \right) - \ln(K) \right) \right] \quad (2.22) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $h(m) = -\sum_{i=1}^{m!} p_{\pi_i} \ln(p_{\pi_i}) = -\sum_{i=1}^{m!} \frac{n_{\pi_i}}{K} \ln \left(\frac{n_{\pi_i}}{K} \right)$ tenemos que:

$$G(m) = -2K \left[\ln \left(\frac{1}{m!} \right) + h(m) \right] = -2K [h(m) - \ln(m!)] = 2K [\ln(m!) - h(m)] \quad (2.23)$$

Por tanto hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1. Sea $\{X_t\}_{t \in I}$ una serie temporal de valores reales, con $|I| = T$. Denotemos mediante $h(m)$ la entropía de permutación definida en (2.7) para una dimensión de inmersión entera $m > 2$, con $m \in \mathbb{N}$. Si la serie temporal $\{X_t\}_{t \in I}$ es i.i.d., entonces la transformación afín de la entropía de permutación:

$$G(m) = 2(T - m + 1)[\ln(m!) - h(m)] \quad (2.24)$$

está asintóticamente $\chi_{m!-1}^2$ distribuida.

Sea α un número real tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. Sea χ_α^2 tal que:

$$P(\chi_{m!-1}^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha \quad (2.25)$$

Entonces para testar:

$$H_0: \{X_t\}_{t \in I} \text{ i. i. d.} \quad (2.26)$$

la regla de decisión en la aplicación del test $G(m)$ al $100(1 - \alpha)\%$ de nivel confianza es:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq G(m) \leq \chi_\alpha^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Consistencia del test $G(m)$.

A continuación probamos que el test $G(m)$ es consistente para una amplia variedad de procesos dependientes en serie. Esto es una propiedad valiosa, ya que el test rechazará asintóticamente independencia en serie siempre que haya dependencia en serie dentro de las m -historias. Vamos a denotar mediante $\hat{G}(m)$ el estimador de $G(m)$.

Teorema 2. Sea $\{X_t\}_{t \in I}$ un proceso estrictamente estacionario, y $m > 2$ con $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_{T \rightarrow \infty} Pr(\hat{G}(m) > C) = 1$ bajo la dependencia en serie de orden $\leq m$ para todo $0 < C < \infty$, $C \in \mathbb{R}$.

De este modo, el test basado en $G(m)$ es consistente frente a toda dependencia en serie de orden $\leq m$. Ya que el Teorema 2 implica que $G(m) \rightarrow \infty$ con probabilidad tendiendo a 1 bajo la dependencia en serie de orden $\leq m$, entonces los valores críticos de la cola superior son apropiados. Subrayemos en este punto que estas condiciones sobre el proceso son menos restrictivas que las requeridas en los procedimientos de otros test (ver Hong y White (2005), Skaug y Tjøstheim (1996)).

Selección del parámetro de libertad m (dimensión de inmersión).

Es importante señalar, desde un punto de vista práctico, que el investigador tiene que elegir la dimensión de inmersión m para computar la entropía de permutación, y así calcular es estadístico $G(m)$. Afortunadamente, es fácil llevar a cabo esta elección. Notar que T debe ser más grande que el número de símbolos de permutación ($m!$) para tener al menos el mismo número de m -historias como posibles símbolos (eventos) π_i , con $i = 1, 2, \dots, m!$. Cuando la distribución χ^2 es utilizada en la práctica, y todas las frecuencias esperadas son ≥ 5 , el límite tabulado de la distribución χ^2 da, como una regla, el valor de χ_α^2 con una aproximación suficiente para propósitos habituales (ver Rohatgi (1976), capítulo 10). Por esta razón, necesitamos trabajar con conjuntos de datos que contengan, al menos, cinco veces el número de posibles eventos (símbolos). Por ejemplo, un conjunto de datos de 200 observaciones es suficiente para computar $G(4)$, porque 24 símbolos son contenidos para $m = 4$; de modo

similar, 600 observaciones es el conjunto de datos más pequeño que puede ser considerado para una dimensión de inmersión $m = 5$, ya que en este caso 120 ($=5!$) símbolos pueden ser encontrados. Por otro lado, para $m = 3$, sólo son analizados seis posibles símbolos, y entonces el nivel de información captada de estos símbolos es muy limitado, y por tanto no sugerimos el uso de $m = 3$. Calcularemos la entropía de permutación de manera que el investigador no tenga que elegir la dimensión de inmersión: para un conjunto dado de datos de T observaciones, la dimensión de inmersión será el mayor m que satisfaga $5m! \leq T$ con $m = 2, 3, 4, \dots$. Por ejemplo, en caso de $T = 500$, tomaremos $m = 4$. Por otro lado, fijémonos en que si T es demasiado larga ($T > 25200$), entonces la m seleccionada será demasiado grande (sería $m \geq 7$), y entonces el procedimiento sería demasiado costoso en términos de tiempo de computación. Por esta razón, y dada la longitud habitual de las series temporales económicas, recomendamos operar con $m = 6$ para $T > 3600$.

Como ha sido indicado antes, merece la pena notar que la posible dependencia detectada por el test $G(m)$ tiene que ser de orden $\leq m$. Esto es debido al hecho de que si la estructura de dependencia del proceso es de orden $> m$, entonces esta dependencia no estará presente en muchas m -historias, y por tanto los símbolos podrían no ser captados.

1.2 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Incluimos a continuación dos ejemplos de aplicación del test que desarrollaron M. Matilla y M. Ruíz. Se pretende mostrar la forma en que se realiza este test, explicando cada uno de los pasos que son necesarios realizar.

Comenzamos creando una serie aleatoria de 10 elementos ($T = 10$) utilizando la distribución uniforme $[0,1]$:

	Valor del elemento
X_1	0.4314
X_2	0.9106
X_3	0.1818
X_4	0.2638
X_5	0.1455
X_6	0.1361
X_7	0.8693
X_8	0.5797
X_9	0.5499
X_{10}	0.1450

Tabla 2.1. Serie de tamaño $T = 10$, cuyos elementos proceden de un conjunto de variables aleatorias distribuidas según una distribución uniforme $[0,1]$

La representación gráfica de ésta es:

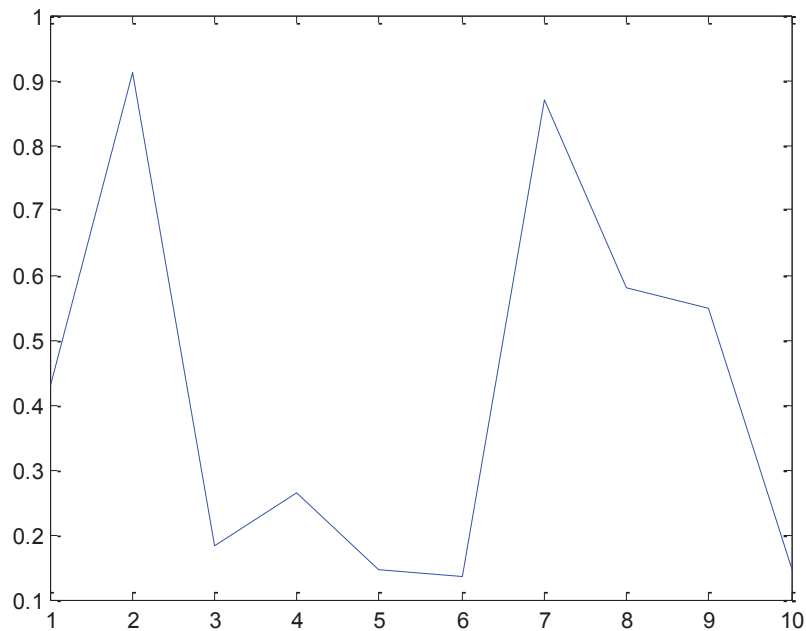


Figura 2.1. Representación gráfica de la serie temporal de la tabla 2.1

Ejemplo 1.2.1. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.1 con una dimensión de inmersión $m = 3$ y un nivel de confianza del 95%, mediante el método de M. Matilla y M. Ruíz.

En la tabla que se muestra abajo se listan todas las ventanas deslizantes tomadas, y las permutaciones asociadas a las mismas:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$X_3(1)$	(0.4314, 0.9106, 0.1818)	(2, 0, 1)
$X_3(2)$	(0.9106, 0.1818, 0.2638)	(1, 2, 0)
$X_3(3)$	(0.1818, 0.2638, 0.1455)	(2, 0, 1)
$X_3(4)$	(0.2638, 0.1455, 0.1361)	(2, 1, 0)
$X_3(5)$	(0.1455, 0.1361, 0.8693)	(1, 0, 2)
$X_3(6)$	(0.1361, 0.8693, 0.5797)	(0, 2, 1)
$X_3(7)$	(0.8693, 0.5797, 0.5499)	(2, 1, 0)
$X_3(8)$	(0.5797, 0.5499, 0.1450)	(2, 1, 0)

Tabla 2.2. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.1 ($m = 3$)

Determinamos las frecuencias absoluta y relativa de cada una de las posibles permutaciones:

Permutación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
(0, 1, 2)	0	0
(0, 2, 1)	1	1/8
(1, 0, 2)	1	1/8
(1, 2, 0)	1	1/8
(2, 0, 1)	2	1/4
(2, 1, 0)	3	3/8

Tabla 2.3. Frecuencias absolutas y relativas de las permutaciones de la serie temporal de la tabla 2.1 ($m = 3$)

Ya podemos calcular la entropía de permutación:

$$h(m) = - \sum_{\pi \in S_m} p_{\pi} \ln(p_{\pi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(3) = - \sum_{\pi \in S_3} p_{\pi} \ln(p_{\pi}) = \left[-\frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{8}\right) \right] \cdot 3 - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8} \ln\left(\frac{3}{8}\right) \approx 1.4942$$

donde p_{π} denota la frecuencia relativa de cada permutación.

Partiendo del valor de la entropía de permutación calculamos el estadístico de contraste:

$$G(m) = 2(T - m + 1)[\ln(m!) - h(m)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(3) = 2(10 - 3 + 1)[\ln(3!) - h(3)] = 16[\ln(6) - h(3)] \approx 4.7613$$

Para llevar a cabo el contraste de hipótesis tenemos en cuenta que el nivel de confianza es del 95%, y utilizamos la distribución chi-cuadrado (con un número de grados de libertad igual a $m! - 1 = 5$). El valor crítico es:

$$\chi_{5,0.95}^2 = 11.0705$$

Vamos a testar:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } \{X_t\}_{t=1}^{10} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } \{X_t\}_{t=1}^{10} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La decisión se toma en base a la siguiente regla:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq G(3) \leq \chi_{5,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Y el resultado que se tiene es:

$$G(3) = 4.7613 \leq 11.0705 = \chi_{5,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

Ejemplo 1.2.2. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.1 con una dimensión de inmersión $m = 4$ y un nivel de confianza del 95%, utilizando el método de M. Matilla y M. Ruíz.

Vamos a estudiar la misma serie temporal, pero ahora con una dimensión de inmersión mayor ($m = 4$).

En el siguiente cuadro recogemos todas las ventanas deslizantes y las permutaciones asociadas a cada una:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$X_4(1)$	(0.4314, 0.9106, 0.1818, 0.2638)	(2, 3, 0, 1)
$X_4(2)$	(0.9106, 0.1818, 0.2638, 0.1455)	(3, 1, 2, 0)
$X_4(3)$	(0.1818, 0.2638, 0.1455, 0.1361)	(3, 2, 0, 1)
$X_4(4)$	(0.2638, 0.1455, 0.1361, 0.8693)	(2, 1, 0, 3)
$X_4(5)$	(0.1455, 0.1361, 0.8693, 0.5797)	(1, 0, 3, 2)
$X_4(6)$	(0.1361, 0.8693, 0.5797, 0.5499)	(0, 3, 2, 1)
$X_4(7)$	(0.8693, 0.5797, 0.5499, 0.1450)	(3, 2, 1, 0)

Tabla 2.4. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.1 ($m = 4$)

Anotamos en una tabla la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada una de las posibles permutaciones:

Permutación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
(0, 1, 2, 3)	0	0
(0, 1, 3, 2)	0	0
(0, 2, 1, 3)	0	0
(0, 2, 3, 1)	0	0
(0, 3, 1, 2)	0	0
(0, 3, 2, 1)	1	1/7
(1, 0, 2, 3)	0	0
(1, 0, 3, 2)	1	1/7
(1, 2, 0, 3)	0	0
(1, 2, 3, 0)	0	0
(1, 3, 0, 2)	0	0
(1, 3, 2, 0)	0	0
(2, 0, 1, 3)	0	0
(2, 0, 3, 1)	0	0
(2, 1, 0, 3)	1	1/7
(2, 1, 3, 0)	0	0
(2, 3, 0, 1)	1	1/7
(2, 3, 1, 0)	0	0
(3, 0, 1, 2)	0	0
(3, 0, 2, 1)	0	0
(3, 1, 0, 2)	0	0
(3, 1, 2, 0)	1	1/7
(3, 2, 0, 1)	1	1/7
(3, 2, 1, 0)	1	1/7

Tabla 2.5. Frecuencias absolutas y relativas de las permutaciones de la serie temporal de la tabla 2.1 ($m = 4$)

Con las frecuencias relativas determinamos la entropía de permutación como sigue:

$$h(m) = - \sum_{\pi \in S_m} p_{\pi} \ln(p_{\pi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(4) = - \sum_{\pi \in S_4} p_\pi \ln(p_\pi) = \left[-\frac{1}{7} \ln\left(\frac{1}{7}\right) \right] \cdot 7 = -\ln\left(\frac{1}{7}\right) \approx 1.9459$$

Por otro lado, el estadístico de contraste es:

$$G(m) = 2(T - m + 1)[\ln(m!) - h(m)] \Rightarrow \\ \Rightarrow G(4) = 2(10 - 4 + 1)[\ln(4!) - h(4)] = 14[\ln(24) - h(4)] \approx 17.2500$$

El valor crítico para la realización del contraste de hipótesis se obtiene a partir de la distribución chi-cuadrado, tal y como se vio en el ejemplo anterior. Hay que tener presente que el nivel de confianza es del 95%; y que, según la teoría del propio test, el número de grados de libertad es $m! - 1 = 23$. El valor crítico es:

$$\chi_{23,0.95}^2 = 35.1725$$

Queremos testar:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } \{X_t\}_{t=1}^{10} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } \{X_t\}_{t=1}^{10} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La regla de decisión para el nivel de confianza fijado es:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq G(4) \leq \chi_{23,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Y el resultado que obtenemos es el siguiente:

$$G(4) = 17.2500 \leq 35.1725 = \chi_{23,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

1.3 REFERENCIAS.

Referencia principal.

- M. Matilla y M. Ruíz. A non-parametric Independence test using permutation entropy. Journal of Econometrics 144 (2008), 139-155.

Otras referencias.

- Y. Hong y H. White. Asymptotic distribution theory for nonparametric entropy measures of serial dependence. Econometrica 73 (2005), 837-901.
- E.L. Lehmann. Testing Statistical Hypothesis. Wiley, New York (1986).
- V.K. Rohatgi. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. Wiley, New York (1976).
- H.J. Skaug y D. Tjøstheim. Measures of Distance Between Densities with Application to Testing for Serial Independence. En: P. Robinson, P. Rosenblatt, M. (Eds.), Time Series Analysis in Memory of E.J. Hanan. New York, Springer (1996), 363-377.

2. TEST DE J. M. AMIGÓ, S. ZAMBRANO Y M. A. F. SANJUÁN.

2.1 DESCRIPCIÓN DEL TEST. J. M. AMIGÓ, S. ZAMBRANO Y M. A. F. SANJUÁN (2009).

Presentamos ahora la descripción del test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán que dieron sus propios autores.

Introducción.

La entropía de permutación ha atraído mucha atención entre los investigadores en el análisis de series temporales desde que fue introducida por Bandt y Pompe (2002). La entropía de permutación reemplaza las probabilidades asociadas a bloques de símbolos por las probabilidades de los correspondientes patrones de orden, en la fórmula de la entropía de Shannon. Un patrón de orden de longitud $L \geq 2$, o un L-patrón, es una permutación π de los números $\{0, 1, \dots, L - 1\}$, que será escrito como $\pi = \langle \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{L-1} \rangle$; el conjunto de todos los $L!$ L-patrones de orden será denotado por \mathcal{S}_L . Dado un bloque de símbolos de longitud L $x_k^{k+L-1} = x_k x_{k+1} \dots x_{k+L-1}$, donde los símbolos (o 'letras') x_n son tomados de un alfabeto finito y ordenado linealmente $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{|S|}\}$, decimos que x_k^{k+L-1} define (es de tipo) $\pi \in \mathcal{S}_L$ si

$$x_{\pi_0} < x_{\pi_1} < \dots < x_{\pi_{L-1}} \quad (2.28)$$

En el caso de que $x_{\pi_i} = x_{\pi_j}$, acordamos que $x_{\pi_i} < x_{\pi_j}$ si y sólo si $i < j$ (otras convenciones son, por supuesto, posibles). Hay que notar que el mundo real y los datos generados por ordenador pertenecen a alfabetos finitos, teniendo en cuenta la precisión finita de los dispositivos de observación y la representación de los números reales en los ordenadores. Esta consideración se extiende a las series temporales multivariantes, estando los datos ordenados lexicográficamente.

La entropía de permutación puede también ser extendida a sistemas dinámicos en versiones métrica (Bandt y Pompe (2002), Amigó y otros (2005)) y topológica (Bandt y otros (2002), Amigó y Kennel (2007)). Curiosamente, puede mostrarse que, bajo ciertos supuestos matemáticos, las órbitas generadas por la dinámica no pueden desarrollar todos los posibles patrones de orden. Esto es, hay siempre patrones de orden de longitud suficiente, tales que no pueden darse en cualquier órbita cualquiera que sea la condición inicial. La existencia de estos patrones de orden "prohibidos" marca la diferencia entre secuencias generadas aleatoriamente (y sin restricciones), en las que cualquier L-patrón tiene probabilidad uno de ocurrir, y secuencias generadas de forma determinista. La robustez de los patrones de orden prohibidos frente al ruido de observación y su crecimiento exponencial con la longitud (Amigó y otros (2008a)), los hace una herramienta práctica para detectar dependencia incluso en series temporales muy ruidosas (Amigó y otros (2007), Amigó y otros (2008b)).

El método propuesto por los autores en Amigó y otros (2008b), para detectar determinismo en series temporales con ruido, requiere contar patrones de orden visibles y desarrollar un test chi-cuadrado, siendo la hipótesis nula que los datos provienen de un proceso idénticamente distribuido e independiente. El fundamento de dicha hipótesis nula es que, como es usual en

física, con determinismo se quiere decir que los datos de una secuencia no son realmente independientes.

La teoría.

Supongamos que la serie temporal univariante $x_0^{N-1} = x_0 x_1 \dots x_{N-1}$ ha sido generada por un mapa determinista, es decir, $f: I \rightarrow I$, donde I es un intervalo cerrado unidimensional. Esto es, $x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$, donde $f^0(x) := x$, y $f^n(x) := f(f^{n-1}(x))$ para $n \geq 1$. Entonces, decimos que $x_0 \in I$ produce el L-patrón $\pi = \langle \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{L-1} \rangle$ si el segmento inicial x_0^{L-1} es de tipo π , es decir

$$f^{\pi_0}(x_0) < f^{\pi_1}(x_0) < \dots < f^{\pi_{L-1}}(x_0) \quad (2.29)$$

Los patrones de orden que son producidos por un $x_0 \in I$, son llamados patrones permitidos o admisibles de f . De lo contrario, son llamados patrones prohibidos de f . Los patrones de orden permitidos son el principal ingrediente de la entropía de permutación de un mapa. Por brevedad, nos referiremos solamente a las propiedades de los patrones de orden que se siguen de los resultados teóricos sobre la entropía de permutación.

Un mapa f en un intervalo unidimensional se dice monótono a trozos si hay una partición del intervalo en subintervalos tales que f es continua y estrictamente monótona en cada uno de esos subintervalos. En este caso, se puede probar (basándonos en el concepto de entropía de permutación topológica) que

$$|\{\pi \in \mathcal{S}_L: \pi \text{ es producido por } x \in I\}| \sim e^{Lh_{top}(f)} \quad (2.30)$$

donde $|\cdot|$ denota cardinalidad, \sim significa "asintóticamente cuando $L \rightarrow \infty$ ", y $h_{top}(f)$ es la entropía topológica de f . Puesto que, por otro lado, $|\mathcal{S}_L| = L!$ crece exponencialmente con L (de acuerdo con la fórmula de Stirling), concluimos que, a diferencia de las secuencias aleatorias, siempre existen patrones de orden de longitud suficiente L que están prohibidos en las series temporales deterministas, y además, su número crece exponencialmente con L .

La situación teórica en las dimensiones más altas es menos satisfactoria en el sentido de que la existencia de patrones prohibidos ha sido probada hasta ahora solo bajo la algo restrictiva condición de expansividad (Amigó y Kennel (2007)).

Una propiedad interesante de los patrones prohibidos es el hecho de que cada uno de ellos provoca un rastro más largo de patrones prohibidos, llamados patrones de extensión prohibidos. En efecto, como se muestra en Amigó y otros (2006), junto con los patrones prohibidos $\pi = \langle \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{L-1} \rangle$, todos los patrones más largos de la forma

$$\langle *, \pi_0 + n, *, \pi_1 + n, *, \dots, *, \pi_{L-1} + n, * \rangle \in \mathcal{S}_N \quad (2.31)$$

($N > L$) son también prohibidos para f . Aquí $n = 0, 1, \dots, N - L$, donde $N - L \geq 1$ es el número de comodines $* \in \{0, 1, \dots, n - 1, L + n, \dots, N - 1\}$ (con $* \in \{L, \dots, N - 1\}$ si $n = 0$ y $* \in \{0, \dots, N - L - 1\}$ si $n = N - L$). Si $\mathcal{S}_N^{out}(\pi)$ denota la familia de longitud N de patrones de extensión de $\pi \in \mathcal{S}_L$, entonces puede ser probado (Amigó y otros (2008a)) que existen

constantes $0 < c, d < 1$ tales que $(1 - d^N)N! < |\mathcal{S}_N^{out}(\pi)| < (1 - c^N)N!$. Por tanto, el número de patrones de extensión prohibidos crece exponencialmente con la longitud.

Otra propiedad de los patrones de orden para el análisis de series temporales es su robustez frente al ruido de observación. En el caso de series univariantes, esta robustez se deduce fácilmente del hecho de que los patrones de orden son definidos mediante desigualdades.

El método.

El método para diferenciar secuencias aleatorias de secuencias deterministas se basa en la existencia de patrones de orden prohibidos. Sin embargo, la implementación de este simple hecho en la práctica tiene que superar dos grandes dificultades: la finitud de las series temporales y el ruido de observación. La finitud implica falsos patrones prohibidos, es decir patrones de orden perdidos en una secuencia aleatoria finita (Amigó y otros (2007)). El ruido de observación puede destruir patrones prohibidos, aunque también puede crear nuevos patrones prohibidos. Se espera que la robustez de los patrones de orden prevalezca sobre el ruido de observación y su proliferación con el incremento de la longitud.

Consideremos una serie temporal de la forma

$$\xi_n = f^n(x_0) + \varpi_n \quad (2.32)$$

($0 \leq n \leq N - 1$) donde ϖ_n es ruido blanco, procedente de un proceso aleatorio idénticamente distribuido (i.i.d.) e independiente. Se propone en Amigó y otros (2008b) un test chi-cuadrado basado en el recuento de los patrones de orden observables o visibles. La hipótesis nula es:

$$H_0: \text{Los } \xi_n \text{ están i. i. d.} \quad (2.33)$$

Con este objetivo, tomamos ventanas deslizantes de longitud $L \geq 2$, solapándose en un único punto (el último punto de una ventana es el primer punto de la siguiente), en la secuencia $\xi_0^{N-1} = \xi_0, \dots, \xi_{N-1}$. Por brevedad, las llamaremos ventanas sin solapamiento (aunque se solapan en los puntos finales). El número de tales ventanas es

$$K = \left\lfloor \frac{N-1}{L-1} \right\rfloor \quad (2.34)$$

comprendiendo cada una las entradas

$$\eta_k := \xi_{kL-k}, \dots, \xi_{(k+1)L-(k+1)}, \quad 0 \leq k \leq K-1 \quad (2.35)$$

Hay que notar que si los valores ξ_0, \dots, ξ_{N-1} son tomados de forma independiente de la misma distribución de probabilidad, entonces los L-patrones de orden producidos por las componentes de $\eta_k \in \mathbb{R}^L$, los cuales denotamos por $\pi(\eta_k) \in \mathcal{S}_L$ serán también independientes y, además serán variables aleatorias uniformemente distribuidas. Por tanto, si uno o varios patrones de orden de longitud L no se encuentran en una muestra usando ventanas sin solapamientos, esto sería una señal estadísticamente significativa de que no hay independencia y/o igualdad de la distribución.

Dada la realización $\{\eta_k \in \mathcal{S}_L: k \geq 0\}$ correspondiente a una serie temporal arbitrariamente larga $\{\xi_n: n \geq 0\}$, supongamos que algunos patrones de orden de longitud L no aparecen en el segmento inicial ξ_0, \dots, ξ_{N-1} . Sea v_j el número de η_k 's tales que η_k es de tipo π_j ($\pi(\eta_k) = \pi_j \in \mathcal{S}_L$), $1 \leq j \leq L!$. De este modo, $v_j = 0$ significa que el patrón π_j no ha sido observado.

Con la intención de aceptar o rechazar la hipótesis nula H_0 , aplicamos un test basándonos en la distribución chi-cuadrado, con el estadístico

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{L!} \frac{\left(v_j - \frac{K}{L!}\right)^2}{\frac{K}{L!}} = \frac{L!}{K} \sum_{j: \pi_j \text{ visible}} v_j^2 - K \quad (2.36)$$

Si H_0 es cierta, entonces χ^2 converge en distribución (cuando $K \rightarrow \infty$) a una distribución chi-cuadrado con $L! - 1$ grados de libertad. Así, para un valor de K grande, se obtiene un test con nivel de significación α , rechazando H_0 si $\chi^2 > \chi_{L!-1, 1-\alpha}^2$, donde $\chi_{L!-1, 1-\alpha}^2$ es el punto crítico para la distribución chi-cuadrado con $L! - 1$ grados de libertad (Law y Kelton (2000)). Notar que como este test está basado en distribuciones, podría suceder que un mapa determinista no tenga L -patrones prohibidos, por lo que $v_j \neq 0$ para todo j , sin embargo, la hipótesis nula sería rechazada porque los v_j 's no estarían homogéneamente distribuidos.

2.2 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Consideremos la siguiente serie temporal para aplicar el método de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán:

	Valor del elemento
x_0	0.8530
x_1	0.6221
x_2	0.3510
x_3	0.5132
x_4	0.4018
x_5	0.0760
x_6	0.2399
x_7	0.1233
x_8	0.1839
x_9	0.2400
x_{10}	0.4173
x_{11}	0.0497
x_{12}	0.9027
x_{13}	0.9448
x_{14}	0.4909
x_{15}	0.4893
x_{16}	0.3377
x_{17}	0.9001
x_{18}	0.3692

Tabla 2.6. Serie de tamaño $N = 19$, cuyos elementos proceden de un conjunto de variables aleatorias distribuidas según una distribución uniforme $[0,1]$

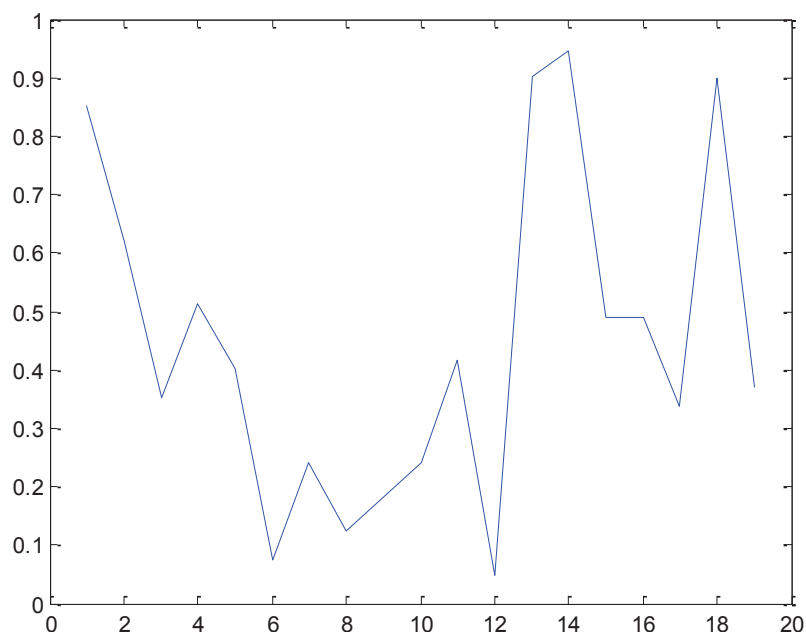


Figura 2.2. Representación gráfica de la serie temporal de la tabla 2.6

El número de ventanas con el que se va a aplicar el test es $\lfloor \frac{N-1}{L-1} \rfloor$, donde N representa el número de elementos de la serie temporal, y L el valor de la dimensión de inmersión. Con el propósito de que el cociente $\frac{N-1}{L-1}$ sea exacto, se ha tomado una serie de 19 elementos, y se van a utilizar dimensiones de inmersión de valores 3 y 4.

Ejemplo 2.2.1. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.6 con el método de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán, tomando una dimensión de inmersión $L = 3$ y un nivel de confianza del 95%.

Empecemos construyendo una tabla en la que recojamos todas las ventanas deslizantes en que se divide la serie temporal, así como las permutaciones asociadas a cada una de éstas:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(0)$	(0.8530, 0.6221, 0.3510)	(2, 1, 0)
$x_3(2)$	(0.3510, 0.5132, 0.4018)	(0, 2, 1)
$x_3(4)$	(0.4018, 0.0760, 0.2399)	(1, 2, 0)
$x_3(6)$	(0.2399, 0.1233, 0.1839)	(1, 2, 0)
$x_3(8)$	(0.1839, 0.2400, 0.4173)	(0, 1, 2)
$x_3(10)$	(0.4173, 0.0497, 0.9027)	(1, 0, 2)
$x_3(12)$	(0.9027, 0.9448, 0.4909)	(2, 0, 1)
$x_3(14)$	(0.4909, 0.4893, 0.3377)	(2, 1, 0)
$x_3(16)$	(0.3377, 0.9001, 0.3692)	(0, 2, 1)

Tabla 2.7. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.6 ($L = 3$)

Apoyándonos en la tabla anterior, damos la frecuencia absoluta de cada permutación:

Permutación	Frecuencia absoluta
(0, 1, 2)	1
(0, 2, 1)	2
(1, 0, 2)	1
(1, 2, 0)	2
(2, 0, 1)	1
(2, 1, 0)	2

Tabla 2.8. Frecuencias absolutas de las permutaciones de la serie temporal de la tabla 2.6 ($L = 3$)

A continuación, y basándonos en las frecuencias absolutas de cada permutación, determinamos el estadístico de contraste:

$$\chi^2 = \frac{L!}{\left[\frac{N-1}{L-1}\right]} \sum_{j: \pi_j \text{ visible}} v_j^2 - \left[\frac{N-1}{L-1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^2 = \frac{3!}{\left[\frac{19-1}{3-1}\right]} \sum_{j: \pi_j \text{ visible}} v_j^2 - \left[\frac{19-1}{3-1}\right] = \frac{2}{3} (1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3) - 9 = 1$$

donde v_j denota la frecuencia absoluta de cada permutación.

Recurrimos a la distribución chi-cuadrado para el cálculo del valor crítico, que se utilizará posteriormente para la realización del contraste de hipótesis. Recordemos que el nivel de confianza es del 95% y que el número de grados de libertad es $L! - 1 = 5$:

$$\chi_{5,0.95}^2 = 11.0705$$

Las hipótesis nula y alternativa del test son:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=0}^{18} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=0}^{18} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La decisión, con un 95% de confianza, se toma en base a:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq \chi^2 \leq \chi_{5,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Concluimos:

$$\chi^2 = 1 \leq 11.0705 = \chi_{5,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

Ejemplo 2.2.2. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.6 con el método de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán, tomando una dimensión de inmersión $L = 4$ y un nivel de confianza del 95%.

Estudiamos la misma serie temporal que en el ejemplo anterior, pero tomando ahora una dimensión de inmersión $L = 4$.

Procedemos de forma similar a antes, y listamos todas las ventanas en que dividimos la serie temporal, asignando a cada una la permutación que le corresponda:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_4(0)$	(0.8530, 0.6221, 0.3510, 0.5132)	(2, 3, 1, 0)
$x_4(3)$	(0.5132, 0.4018, 0.0760, 0.2399)	(2, 3, 1, 0)
$x_4(6)$	(0.2399, 0.1233, 0.1839, 0.2400)	(1, 2, 0, 3)
$x_4(9)$	(0.2400, 0.4173, 0.0497, 0.9027)	(2, 0, 1, 3)
$x_4(12)$	(0.9027, 0.9448, 0.4909, 0.4893)	(3, 2, 0, 1)
$x_4(15)$	(0.4893, 0.3377, 0.9001, 0.3692)	(1, 3, 0, 2)

Tabla 2.9. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.6 ($L = 4$)

La frecuencia absoluta de cada una de las permutaciones es, por tanto:

Permutación	Frecuencia absoluta
(0, 1, 2, 3)	0
(0, 1, 3, 2)	0
(0, 2, 1, 3)	0
(0, 2, 3, 1)	0
(0, 3, 1, 2)	0
(0, 3, 2, 1)	0
(1, 0, 2, 3)	0
(1, 0, 3, 2)	0
(1, 2, 0, 3)	1
(1, 2, 3, 0)	0
(1, 3, 0, 2)	1
(1, 3, 2, 0)	0
(2, 0, 1, 3)	1
(2, 0, 3, 1)	0
(2, 1, 0, 3)	0
(2, 1, 3, 0)	0
(2, 3, 0, 1)	0
(2, 3, 1, 0)	2
(3, 0, 1, 2)	0
(3, 0, 2, 1)	0
(3, 1, 0, 2)	0
(3, 1, 2, 0)	0
(3, 2, 0, 1)	1
(3, 2, 1, 0)	0

Tabla 2.10. Frecuencias absolutas de las permutaciones de la serie temporal de la tabla 2.6 ($L = 4$)

A partir de estos resultados calculamos ya el estadístico de contraste:

$$\chi^2 = \frac{L!}{\left[\frac{N-1}{L-1}\right]} \sum_{j: \pi_j \text{ visible}} v_j^2 - \left[\frac{N-1}{L-1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^2 = \frac{4!}{\left[\frac{19-1}{4-1}\right]} \sum_{j: \pi_j \text{ visible}} v_j^2 - \left[\frac{19-1}{4-1}\right] = 4(1^2 \cdot 4 + 2^2) - 6 = 26$$

donde v_j representa la frecuencia absoluta de la permutación π_j .

Para obtener el valor crítico con el que se realiza el contraste de hipótesis, utilizamos la distribución chi-cuadrado con un nivel de confianza del 95%, y con $L! - 1 = 23$ grados de libertad:

$$\chi_{23,0.95}^2 = 35.1725$$

Deseamos realizar el contraste de hipótesis siguiente:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=0}^{18} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=0}^{18} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La regla de decisión que se tiene para el nivel de confianza elegido es:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq \chi^2 \leq \chi_{23,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Aplicamos la anterior regla de decisión:

$$\chi^2 = 26 \leq 35.1725 = \chi_{23,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

2.3 REFERENCIAS.

Referencia principal.

- J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán. Detecting determinism in time series with ordinal patterns: a comparative study. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, No. 9 (2010), 2915-2924.

Otras referencias.

- J. M. Amigó, M. B. Kennel y L. Kocarev. The permutation entropy rate equals the metric entropy rate for ergodic information sources and ergodic dynamical systems. Physica D 210 (2005), 77-95.
- J. M. Amigó, L. Kocarev y J. Szczepanski. Order patterns and chaos. Phys. Lett. A 355 (2006), 27-31.
- J. M. Amigó y M. B. Kennel. Topological permutation entropy. Physica D 231 (2007), 137-142.
- J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán. True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics. Europhys. Lett 79 (2007), 50001.
- J. M. Amigó, S. Elizalde y M. B. Kennel. Forbidden patterns and shift systems. J. Comb. Theoret. Ser. A 115 (2008a), 485-504.
- J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán. Combinatorial detection of determinism in noisy time series. Europhys. Lett. 83 (2008b), 60005.

- C. Bandt y B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), 174102.
- C. Bandt, G. Keller y B. Pompe. Entropy of interval maps via permutations. *Nonlinearity* 15 (2002), 1595-1602.
- A. M. Law y W. D. Kelton. *Simulation, Modeling and Analysis*. McGraw-Hill, Boston (2000).

3. TEST DE J. S. CÁNOVAS Y A. GUILLAMÓN.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL TEST. J.S. CÁNOVAS Y A. GUILLAMÓN (2009).

Vamos a exponer el test desarrollado por J.S. Cánovas y A. Guillamón (2009). Al igual que como se ha hecho con los test anteriores, la descripción que damos de éste es justamente la que dieron sus propios autores.

Introducción.

Recientemente varios autores han señalado que las permutaciones pueden ser una buena herramienta para estudiar las series temporales. El concepto de entropía de permutación ha sido utilizado como medida del grado de predictibilidad de una serie temporal; vamos a recordar dicho concepto.

Sea $(x_n)_{n=1}^T$, $T \in \mathbb{N}$, una secuencia procedente de datos reales o simulados. Para $m \geq 2$, sea S_m el grupo de las permutaciones de longitud m , cuyo cardinal es $m!$. Sea $x_m(r) = (x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+m-1})$, $1 \leq r \leq T - m + 1$, una ventana deslizante tomada de la secuencia $(x_n)_{n=1}^T$. Decimos que esa ventana $x_m(r)$ es de tipo $\pi \in S_m$, si y sólo si $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ es el único elemento de S_m cumpliendo las dos siguientes condiciones:

$$(c1) \ x_{r+i_1} \leq x_{r+i_2} \leq \dots \leq x_{r+i_m} \quad (2.37)$$

$$(c2) \ i_{s-1} < i_s \text{ si } x_{r+i_{s-1}} = x_{r+i_s} \quad (2.38)$$

Por ejemplo, si tenemos la serie temporal $(1.1, 1.2, 0.9, 1.2)$, entonces tenemos que $(2,3,1) \in S_3$ es la permutación asociada a $x_3(1)$ y $(2,3,1,4) \in S_4$ es la asociada a $x_4(1)$.

El entero positivo m es usualmente conocido como dimensión de inmersión. Fijemos $k \leq T - m + 1$. Para cada $\pi \in S_m$, la probabilidad de que ocurra π es estimada por la frecuencia relativa:

$$p(\pi) = \frac{\#\{x_m(j), j = 1, 2, \dots, k: x_m(j) \text{ es de tipo } \pi\}}{k} \quad (2.39)$$

Una permutación $\pi \in S_m$ con $p(\pi) > 0$ para algún $k \leq T - m + 1$ es denominada una permutación admisible de $(x_n)_{n=1}^T$. De ahí, la entropía de permutación viene dada por el número no negativo:

$$\mathcal{H}_S(x_n, m) = - \sum_{\pi \in S_m} p(\pi) \ln p(\pi) \quad (2.40)$$

La expresión anterior fue introducida en Bandt y Pompe (2002) para estudiar la complejidad de las series temporales, y fue útil para crear un test que comprobara la independencia de dichas series (ver Matilla y Ruíz (2008), y Amigó, Zambrano y Sanjuán (2007)). Sin embargo, el principal resultado que muestra que este número (o de forma más exacta, el número admisible de permutaciones) puede ser usado como una herramienta para el estudio de la

complejidad de las series temporales, procede de una definición topológica análoga que denominamos entropía de permutación topológica:

$$\mathcal{H}_T(x_n, m) = \ln \# \mathcal{A}_m \quad (2.41)$$

donde $\mathcal{A}_m = \{\pi \in S_m: \text{existe } j \text{ tal que } x_m(j) \text{ es de } \pi \text{ tipo}\}$ es el conjunto de permutaciones admisibles. La motivación de esta definición viene de Bandt, Keller y Pompe (2002) (ver también Amigó y Kennel (2007)); el principal resultado relacionado con ésta se explica más abajo.

Sea $I = [0,1]$ y $f: I \rightarrow I$ un mapa monótono a trozos y continuo, esto es, existen $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ tal que $f_{[x_i, x_{i+1}]}$ es estrictamente monótona para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Para algún $\pi \in S_m$, definimos la partición $\mathcal{P}_\pi = \{x \in I: f^{\pi(1)}(x) < f^{\pi(2)}(x) < \dots < f^{\pi(n)}(x)\}$. Entonces:

$$h(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \# \{\pi \in S_m: \mathcal{P}_\pi \neq \emptyset\} \quad (2.42)$$

donde $h(f)$ denota la entropía topológica de f (ver la definición en Bowen (1971)). Recordemos que esa entropía topológica es un número que es interpretado como una medida de la complejidad dinámica de f . En particular, si la entropía topológica es positiva, entonces f es caótico en el sentido de Li y Yorke, y fuertemente caótico en el sentido de Block y Coppel (ver Block y Coppel (1992)). Observemos que $\mathcal{P}_\pi \neq \emptyset$ nos conduce a que existe $x \in I$ para el que su órbita $Orb(x, f) = (f^n(x))_{n=0}^\infty$ contiene π como una permutación admisible. Este hecho es usado para probar el resultado siguiente que conecta nociones de entropía topológica del análisis de series temporales, con sistemas dinámicos, como sigue. Si $f: I \rightarrow I$ es continua y monótona a trozos, entonces, para algún $y \in I$ se espera que:

$$h_T(Orb(y, f)) \leq h(f) = \sup_{x \in I} h_T(Orb(x, f)) \quad (2.43)$$

donde, para una secuencia infinita $(x_n)_{n=1}^\infty$, definimos el número

$$h_T(x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{m} \mathcal{H}_T((x_n)_{n=1}^\infty, m) \quad (2.44)$$

con $\mathcal{H}_T((x_n)_{n=1}^\infty, m) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_T((x_n)_{n=1}^k, m)$.

Pero si nos fijamos en la fórmula (2.41), podemos comprobar fácilmente que lo único que importa es el número de permutaciones admisibles; el logaritmo es únicamente un factor de escala. Este hecho nos motiva a estudiar la construcción de un test para comprobar la independencia en series temporales basadas únicamente en el número de permutaciones admisibles. La principal ventaja de este test con respecto a otros (como Amigó, Zambrano y Sanjuán (2007); Amigó, Zambrano y Sanjuán (2008) o Matilla y Ruíz (2008)) es que en él se manejan funciones de distribución teóricas de las variables aleatorias W : el número de permutaciones admisibles en la serie $(x_n)_{n=1}^T$ (para un valor de m dado). Como resultado se han construido diferentes test estadísticos (asintóticos y no asíntóticos). Se debe remarcar que en las referencias mencionadas arriba sólo es construido un test asíntótico (chi-cuadrado).

Análisis estadístico.

Sea $(x_n)_{n=1}^T$, $T \in \mathbb{N}$, una secuencia y sea m una dimensión de inmersión. Vamos a considerar k ventanas deslizantes de longitud m sin solapamiento; se tiene $k = \lceil T/m \rceil$, donde $\lceil x \rceil$ denota la parte entera de un número real x . Vamos a representar los símbolos de cada ventana mediante:

$$x_m(j) = (x_{m(j-1)+1}, x_{m(j-1)+2}, \dots, x_{m(j-1)+m}) \text{ para } j = 1, 2, \dots, k \quad (2.45)$$

Proponemos el estudio de la variable aleatoria $W = \#\{\pi \in S_m: p(\pi) > 0\}$, el número de permutaciones admisibles diferentes sobre las k ventanas deslizantes. De este modo, $W = k$ significaría que cada ventana deslizante proporciona un π diferente, mientras que $W = 1$ significaría que todas las ventanas deslizantes tienen el mismo π .

Para obtener la distribución asociada a la variable aleatoria W , necesitamos recordar un problema clásico de análisis combinatorio: el problema de determinar el número de particiones de un conjunto de k objetos en j cajas, para el que la solución viene dada por el siguiente resultado (ver Hazewinkel, Enciclopedia of Mathematics).

Lema 1. El número de disposiciones de k objetos diferentes en j cajas diferentes con ninguna caja vacía ($k \geq j$) es igual a $j! S_2(k, j)$, donde:

$$S_2(k, j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^k \quad (2.46)$$

es denominado el número de Stirling de segunda especie.

Bajo la suposición de que la secuencia $(x_n)_{n=1}^T$ es obtenida de un conjunto $(X_n)_{n=1}^T$ de variables aleatorias i.i.d. (idénticamente distribuidas), podemos obtener la distribución exacta asociada a la variable aleatoria W como sigue.

Teorema 2. Sea $(X_n)_{n=1}^T$ una secuencia de variables aleatorias separadas en k ventanas deslizantes sin solapamiento ($k = \lceil T/m \rceil$). Sea m la dimensión de inmersión y sea W la variable aleatoria definida arriba. Entonces, bajo la hipótesis de que la secuencia $(X_n)_{n=1}^T$ es un conjunto de variables aleatorias i.i.d., se espera que:

$$Pr(W = j) = \begin{cases} S_2(k, j) \frac{(m!)!}{(m! - j)!} \left(\frac{1}{m!}\right)^k, & j = 1, \dots, \min(k, m!) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.47)$$

donde $S_2(k, j)$ es el correspondiente número de Stirling de segunda especie.

Demostración. Vamos a considerar el siguiente problema equivalente:

“Supongamos que k objetos (π observado en cada ventana deslizante) son distribuidos dentro de $m!$ (el cardinal de S_m) cajas con reemplazamiento, de manera que cada objeto tenga una probabilidad de $1/m!$ de estar en una caja en particular”.

Nuestro problema es calcular la probabilidad de que k objetos sean repartidos en, exactamente, j cajas (para $j = 1, \dots, k$).

· Primero calculamos el número de formas diferentes de elegir j cajas entre $m!$ ($j < m!$). Dadas $m!$ cajas ($\# S_m$), la cantidad de formas de seleccionar j de éstas (notar que hay exactamente j diferentes $\pi \in S_m$ con $p(\pi) \neq 0$) viene dada por:

$$\binom{m!}{j} = \frac{(m!)!}{(m! - j)! j!} \quad (2.48)$$

· Seguidamente, usando el Lema 1, se espera que el número de disposiciones de k objetos diferentes (esto es, π observado en cada ventana deslizante) en j cajas diferentes (sin celdas vacías), es decir $\# \{\pi_i / p(\pi_i) \neq 0\} = j$, viene dado por:

$$j! S_2(k, j) \quad (2.49)$$

· Finalmente, bajo la hipótesis de que la secuencia $(x_n)_{n=1}^T$ proceda de un conjunto $(X_n)_{n=1}^T$ de variables aleatorias i.i.d., cada objeto ($\pi \in S_m$) tiene una probabilidad de $1/m!$, y la probabilidad de cada selección posible de un conjunto de k objetos (π obtenido sobre las k ventanas deslizantes) viene dado por:

$$\left(\frac{1}{m!}\right)^k \quad (2.50)$$

Entonces, teniendo en cuenta los cálculos de arriba, obtenemos:

$$Pr(W = j) = j! S_2(k, j) \binom{m!}{j} \left(\frac{1}{m!}\right)^k = S_2(k, j) \frac{(m!)!}{(m! - j)!} \left(\frac{1}{m!}\right)^k \quad (2.51)$$

para $j = 1, \dots, \min(k, m!)$, finalizando así la demostración.

Como consecuencia del Teorema 2 podemos obtener la función de distribución de la variable aleatoria W como:

$$F_W(t) = Pr(W \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ \sum_{j=1}^{[t]} S_2(k, j) \frac{(m!)!}{(m! - j)!} \left(\frac{1}{m!}\right)^k, & \text{si } 1 \leq t \leq \min(k, m!) \\ 1, & \text{si } t > \min(k, m!) \end{cases} \quad (2.52)$$

Esta función de distribución es esencial para construir diferentes test con el objeto de comprobar si los datos son independientes. Abajo resumimos estos test.

Test 1. Sea $(x_n)_{n=1}^T$ una secuencia de valores reales que proceden de un conjunto de variables aleatorias $(X_n)_{n=1}^T$. Fijemos $\alpha \in [0, 1]$ y sea $f_{W, \alpha}$ un valor real tal que $Pr(W < f_{W, \alpha}) = \alpha$, donde F_W es la función de distribución dada por (2.52). Entonces, el test:

$$\begin{cases} H_0: (X_n)_{n=1}^T \text{ es un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: (X_n)_{n=1}^T \text{ no es un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases} \quad (2.53)$$

tiene la regla de decisión, con un $100(1 - \alpha)\%$ de nivel de confianza, que sigue: si ϖ es el número de permutaciones admisibles diferentes $\pi \in S_m$ sobre la secuencia $(x_n)_{n=1}^T$, entonces si $\varpi \geq f_{W,\alpha}$, aceptamos H_0 . En otro caso la rechazamos.

La tabla siguiente muestra los valores críticos usando diferentes dimensiones de inmersión m y niveles de confianza usuales. Notar que los valores críticos dependen del número de puntos en las series.

T	90%	95%	99%	90%	95%	99%	90%	95%	99%
1200	24	24	24	100	99	96	169	168	165
2400	24	24	24	116	115	114	299	296	291
4800	24	24	24	120	120	119	472	469	463
7200	24	24	24	120	120	120	574	571	565
	$m = 4$			$m = 5$			$m = 6$		

Tabla 2.11. Valores críticos para niveles de confianza usuales. Los valores son presentados de izquierda a derecha para $m = 4$, $m = 5$ y $m = 6$. Para $m = 4$ aceptamos la hipótesis nula si y sólo si todas las posibles permutaciones son admisibles.

La tabla muestra la dependencia entre el valor crítico, la dimensión de inmersión y el número de puntos en la serie. Asignar una permutación es equivalente a codificar las series. De ahí, cuando el número de códigos diferentes aumenta, la información obtenida de las series temporales usando las permutaciones (códigos) también incrementa. Por tanto, si tenemos una serie de datos con más de 1000 puntos, en general 24 permutaciones pueden no ser suficientes para describir la complejidad, y así, son necesarias dimensiones de inmersión mayores de 4 para construir buenos test.

Test 2. Sea $(X_n)_{n=1}^T$ una secuencia de variables aleatorias dividida en N ventanas, sin solapamiento, de longitud n ($N = [T/n]$). Sea m una dimensión de inmersión y sea ϖ_j el número de permutaciones admisibles diferentes π sobre la ventana j , $1 \leq j \leq N$. Entonces, bajo la hipótesis de que la secuencia $(X_n)_{n=1}^T$ es un conjunto de variables aleatorias i.i.d., se espera que:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\min(k,m!)} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \quad (2.54)$$

esté asintóticamente distribuido como una $\chi_{\min(k,m!)-1}^2$ cuando $N \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$), donde $k = [n/m]$, f_i representa la frecuencia observada del evento $\varpi_j = i$ (número de ventanas con exactamente i permutaciones admisibles diferentes) y e_i la frecuencia esperada ($e_i = N \cdot Pr(W = i)$) de cada posible valor de la variable aleatoria W .

El principal problema con el test χ^2 es la elección del número y tamaño de los intervalos: estos es, para una aplicación práctica del test, tenemos que dividir los datos en un número de intervalos de datos, y para cada intervalo tenemos que saber cuántas permutaciones diferentes de S_m están asociadas con cada intervalo. Aunque las reglas de agrupamiento pueden ayudar a producir buenos resultados (por ejemplo, la división en intervalos debe

realizarse de forma tal que $e_i \geq 5$ para todo i), el valor del test estadístico depende en cómo sean agrupados los datos. El test de Kolmogorov puede ser usado como un test asintótico alternativo al test χ^2 que no requiere que los datos sean agrupados en intervalos. Por otro lado, el test de Kolmogorov proporciona resultados conservadores para conjuntos de datos discretos (ver Noether (1963), Conover y Kolmogorov (1972) y Gibbons y Chakrabortis (1992)).

Test 3. Sea W_1, W_2, \dots, W_n una muestra de variables aleatorias de tamaño n de una variable aleatoria W con función de distribución $F_W(\varpi)$ dada por (2.52) y sea $F_n(\varpi)$ la función de distribución empírica, esto es $F_n(\varpi) = j/n$ si exactamente j de los n valores W_i son menores o iguales que ϖ ($\varpi = 1, \dots, \min(k, m!)$). Si la hipótesis $H_0: F_n(\varpi) = F_W(\varpi)$ es cierta, entonces se espera que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(\sqrt{n}D_n \leq t) = KS(t) \quad (2.55)$$

donde $D_n = \max|F_n(\varpi) - F_W(\varpi)|$ y $KS(t) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 t^2}$ es la función de distribución continua de la distribución de Kolmogorov.

De acuerdo con el test de Kolmogorov, para un nivel de significación α , la hipótesis H_0 debe ser rechazada si $D_n > \lambda(n)$, donde $\lambda(n)$ es el valor crítico del test de Kolmogorov correspondiente a un nivel de significación α .

3.2 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

En este apartado vamos a dar ejemplos sobre cómo obtener la función de probabilidad y la función de distribución, y sobre cómo determinar valores críticos dado un determinado nivel de confianza. También se darán ejemplos de aplicación de cada uno de los tres test que han sido presentados más arriba.

3.2.1 EJEMPLOS DE CÓMO OBTENER VALORES CRÍTICOS.

Ejemplo 3.2.1.1. Obtención de las funciones de probabilidad y de distribución del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie de 21 elementos y una dimensión de inmersión $m = 3$.

Trabajemos con la expresión analítica de la función de probabilidad de la variable aleatoria W , que denota el número de permutaciones admisibles que aparecen en la serie en cuestión. Recordemos que esta función es:

$$Pr(W = j) = \begin{cases} S_2(k, j) \frac{(m!)!}{(m! - j)!} \left(\frac{1}{m!}\right)^k, & j = 1, \dots, \min(k, m!) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $S_2(k, j)$ es el número de Stirling de segunda especie. Particularizamos para el caso de $m = 3$:

$$Pr(W = j) = \begin{cases} S_2(k, j) \frac{720}{6^k (6 - j)!}, & j = 1, \dots, \min(k, 6) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como hemos seleccionado una serie de 21 elementos, el número de ventanas deslizantes es $k = \left\lfloor \frac{T}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{21}{3} \right\rfloor = 7$, quedando por tanto:

$$Pr(W = j) = \begin{cases} S_2(7, j) \frac{5}{1944(6-j)!}, j = 1, \dots, 6 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Antes de determinar la función de probabilidad hay que calcular $S_2(7, j)$ para distintos valores de j . Tenemos en cuenta que la expresión de cálculo del número de Stirling de segunda especie es:

$$S_2(7, j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^7$$

Evaluamos para $j = 1, \dots, 6$:

$$S_2(7,1) = \frac{1}{1!} \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{1}{i} (1-i)^7 = (-1)^0 \binom{1}{0} (1-0)^7 + (-1)^1 \binom{1}{1} (1-1)^7 = 1$$

$$\begin{aligned} S_2(7,2) &= \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{i} (2-i)^7 \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1)^0 \binom{2}{0} (2-0)^7 + (-1)^1 \binom{2}{1} (2-1)^7 + (-1)^2 \binom{2}{2} (2-2)^7 \right] \\ &= \frac{1}{2} [128 - 2] = 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(7,3) &= \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^7 \\ &= \frac{1}{6} \left[(-1)^0 \binom{3}{0} (3-0)^7 + (-1)^1 \binom{3}{1} (3-1)^7 + (-1)^2 \binom{3}{2} (3-2)^7 \right. \\ &\quad \left. + (-1)^3 \binom{3}{3} (3-3)^7 \right] = \frac{1}{6} [2187 - 384 + 3] = 301 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(7,4) &= \frac{1}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^7 \\ &= \frac{1}{24} \left[(-1)^0 \binom{4}{0} (4-0)^7 + (-1)^1 \binom{4}{1} (4-1)^7 + (-1)^2 \binom{4}{2} (4-2)^7 \right. \\ &\quad \left. + (-1)^3 \binom{4}{3} (4-3)^7 + (-1)^4 \binom{4}{4} (4-4)^7 \right] \\ &= \frac{1}{24} [16384 - 8748 + 768 - 4] = 350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2(7,5) &= \frac{1}{5!} \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)^7 \\
 &= \frac{1}{120} \left[(-1)^0 \binom{5}{0} (5-0)^7 + (-1)^1 \binom{5}{1} (5-1)^7 + (-1)^2 \binom{5}{2} (5-2)^7 \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^3 \binom{5}{3} (5-3)^7 + (-1)^4 \binom{5}{4} (5-4)^7 + (-1)^5 \binom{5}{5} (5-5)^7 \right] \\
 &= \frac{1}{120} [78125 - 81920 + 21870 - 1280 + 5] = 140
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2(7,6) &= \frac{1}{6!} \sum_{i=0}^6 (-1)^i \binom{6}{i} (6-i)^7 \\
 &= \frac{1}{720} \left[(-1)^0 \binom{6}{0} (6-0)^7 + (-1)^1 \binom{6}{1} (6-1)^7 + (-1)^2 \binom{6}{2} (6-2)^7 \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^3 \binom{6}{3} (6-3)^7 + (-1)^4 \binom{6}{4} (6-4)^7 + (-1)^5 \binom{6}{5} (6-5)^7 \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^6 \binom{6}{6} (6-6)^7 \right] \\
 &= \frac{1}{720} [279936 - 468750 + 245760 - 43740 + 1920 - 6] = 21
 \end{aligned}$$

Recogemos todos estos valores en la tabla que se muestra a continuación:

j	$S_2(7,j)$
1	1
2	63
3	301
4	350
5	140
6	21

Tabla 2.12. Valores de los números de Stirling de segunda especie de la forma $S_2(7, j)$

Una vez que disponemos de los números de Stirling de segunda especie pasamos a calcular la función de probabilidad buscada.

$$Pr(W = j) = \begin{cases} S_2(7, j) \frac{5}{1944(6-j)!}, j = 1, \dots, 6 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Calculamos, por tanto, $Pr(W = j)$ para $j = 1, \dots, 6$:

$$Pr(W = 1) = S_2(7,1) \frac{5}{1944(6-1)!} = \frac{1}{46656} \approx 2.143 \cdot 10^{-5}$$

$$Pr(W = 2) = S_2(7,2) \frac{5}{1944(6-2)!} = \frac{35}{5184} \approx 6.752 \cdot 10^{-3}$$

$$Pr(W = 3) = S_2(7,3) \frac{5}{1944(6-3)!} = \frac{1505}{11664} \approx 0.1290$$

$$Pr(W = 4) = S_2(7,4) \frac{5}{1944(6-4)!} = \frac{875}{1944} \approx 0.4501$$

$$Pr(W = 5) = S_2(7,5) \frac{5}{1944(6-5)!} = \frac{175}{486} \approx 0.3601$$

$$Pr(W = 6) = S_2(7,6) \frac{5}{1944(6-6)!} = \frac{35}{648} \approx 0.0540$$

De manera más sintetizada:

j	$Pr(W = j)$
1	$2.143 \cdot 10^{-5}$
2	$6.752 \cdot 10^{-3}$
3	0.1290
4	0.4501
5	0.3601
6	0.0540

Tabla 2.13. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 21$ ($m = 3$)

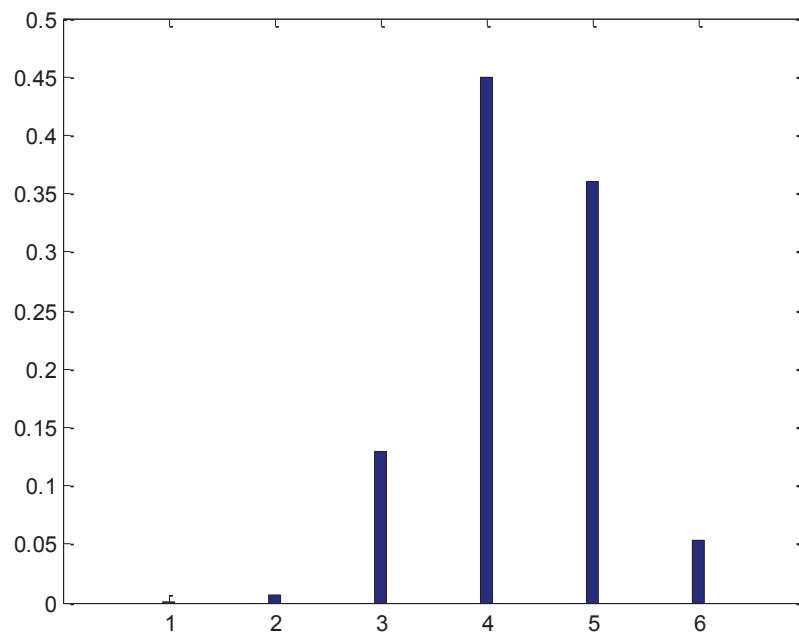


Figura 2.3. Diagrama de barras asociado a la función de probabilidad mostrada en la tabla 2.13

Para finalizar, determinamos la función de distribución de W . Es muy fácil de obtener teniendo presente la anterior función de probabilidad:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$2.143 \cdot 10^{-5}$
$2 \leq t < 3$	$6.773 \cdot 10^{-3}$
$3 \leq t < 4$	0.1358
$4 \leq t < 5$	0.5859
$5 \leq t < 6$	0.9460
$t \geq 6$	1

Tabla 2.14. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 21$ ($m = 3$)

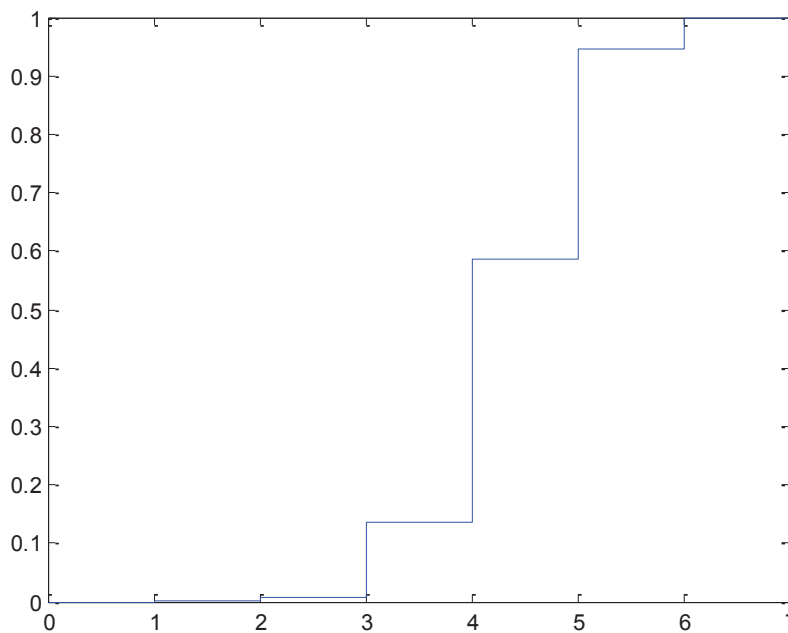


Figura 2.4. Gráfica de la función de distribución de la tabla 2.14

Ejemplo 3.2.1.2. Obtención de los valores críticos del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, necesarios para la realización del contraste de hipótesis, para una dimensión de inmersión $m = 3$ y un nivel de confianza del 95%.

En el ejemplo anterior se obtuvieron las funciones de probabilidad y de distribución, correspondientes al método que nos ocupa, para un tamaño $T = 21$ y una dimensión de inmersión $m = 3$. Ahora vamos a calcular los valores críticos requeridos para la realización del contraste de hipótesis; lo haremos para diversos tamaños de la serie.

· Serie de tamaño $T = 6$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{6}{3} \rfloor = 2$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	0.1667
2	0.8333

Tabla 2.15. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 6$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	0.1667
$t \geq 2$	1

Tabla 2.16. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 6$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 1$, ya que:

$$Pr(W = 2) = 0.8333 < 0.95 < 1 = Pr(W \geq 1)$$

· Serie de tamaño $T = 9$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 3$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	0.0278
2	0.4167
3	0.5556

Tabla 2.17. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 9$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	0.0278
$2 \leq t < 3$	0.4444
$t \geq 3$	1

Tabla 2.18. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 9$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 2$, ya que:

$$Pr(W = 3) = 0.5556 < 0.95 < 0.9722 = Pr(W \geq 2)$$

· Serie de tamaño $T = 15$ ($k = \left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{15}{3} \right\rceil = 5$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$7.716 \cdot 10^{-4}$
2	0.0579
3	0.3858
4	0.4630
5	0.0926

Tabla 2.19. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 15$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$7.716 \cdot 10^{-4}$
$2 \leq t < 3$	0.0586
$3 \leq t < 4$	0.4444
$4 \leq t < 5$	0.9074
$t \geq 5$	1

Tabla 2.20. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 15$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 2$, ya que:

$$Pr(W \geq 3) = 0.9414 < 0.95 < 0.9992 = Pr(W \geq 2)$$

· Serie de tamaño $T = 18$ ($k = \left\lceil \frac{T}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{18}{3} \right\rceil = 6$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$1.286 \cdot 10^{-4}$
2	0.0199
3	0.2315
4	0.5015
5	0.2315
6	0.0154

Tabla 2.21. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 18$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$1.286 \cdot 10^{-4}$
$2 \leq t < 3$	0.0201
$3 \leq t < 4$	0.2515
$4 \leq t < 5$	0.7531
$5 \leq t < 6$	0.9846
$t \geq 6$	1

Tabla 2.22. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 18$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 3$, ya que:

$$Pr(W \geq 4) = 0.7485 < 0.95 < 0.9799 = Pr(W \geq 3)$$

· Serie de tamaño $T = 24$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{24}{3} \rfloor = 8$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$3.572 \cdot 10^{-6}$
2	$2.268 \cdot 10^{-3}$
3	0.0690
4	0.3646
5	0.4501
6	0.1140

Tabla 2.23. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 24$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$3.572 \cdot 10^{-6}$
$2 \leq t < 3$	$2.272 \cdot 10^{-3}$
$3 \leq t < 4$	0.0713
$4 \leq t < 5$	0.4359
$5 \leq t < 6$	0.8860
$t \geq 6$	1

Tabla 2.24. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 24$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 3$, ya que:

$$Pr(W \geq 4) = 0.9287 < 0.95 < 0.9977 = Pr(W \geq 3)$$

· Serie de tamaño $T = 27$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{27}{3} \rfloor = 9$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$5.954 \cdot 10^{-7}$
2	$7.591 \cdot 10^{-4}$
3	0.0360
4	0.2776
5	0.4966
6	0.1890

Tabla 2.25. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 27$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$5.954 \cdot 10^{-7}$
$2 \leq t < 3$	$7.597 \cdot 10^{-4}$
$3 \leq t < 4$	0.0368
$4 \leq t < 5$	0.3143
$5 \leq t < 6$	0.8110
$t \geq 6$	1

Tabla 2.26. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 27$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 4$, ya que:

$$Pr(W \geq 5) = 0.6857 < 0.95 < 0.9632 = Pr(W \geq 4)$$

· Serie de tamaño $T = 39$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{39}{3} \rfloor = 13$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$4.594 \cdot 10^{-10}$
2	$9.406 \cdot 10^{-6}$
3	$2.404 \cdot 10^{-3}$
4	0.0698
5	0.4139
6	0.5139

Tabla 2.27. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 39$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$4.594 \cdot 10^{-10}$
$2 \leq t < 3$	$9.407 \cdot 10^{-6}$
$3 \leq t < 4$	$2.413 \cdot 10^{-3}$
$4 \leq t < 5$	0.0722
$5 \leq t < 6$	0.4861
$t \geq 6$	1

Tabla 2.28. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 39$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 4$, ya que:

$$Pr(W \geq 5) = 0.9278 < 0.95 < 0.9976 = Pr(W \geq 4)$$

· Serie de tamaño $T = 42$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{42}{3} \rfloor = 14$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$7.657 \cdot 10^{-11}$
2	$3.136 \cdot 10^{-6}$
3	$1.208 \cdot 10^{-3}$
4	0.0477
5	0.3682
6	0.5828

Tabla 2.29. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 42$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$7.657 \cdot 10^{-11}$
$2 \leq t < 3$	$3.136 \cdot 10^{-6}$
$3 \leq t < 4$	$1.211 \cdot 10^{-3}$
$4 \leq t < 5$	0.0490
$5 \leq t < 6$	0.4172
$t \geq 6$	1

Tabla 2.30. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 42$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 5$, ya que:

$$Pr(W \geq 6) = 0.5828 < 0.95 < 0.9510 = Pr(W \geq 5)$$

· Serie de tamaño $T = 78$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{78}{3} \rfloor = 26$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$3.517 \cdot 10^{-20}$
2	$5.901 \cdot 10^{-12}$
3	$2.980 \cdot 10^{-7}$
4	$3.951 \cdot 10^{-4}$
5	0.0516
6	0.9480

Tabla 2.31. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 78$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$3.517 \cdot 10^{-20}$
$2 \leq t < 3$	$5.901 \cdot 10^{-12}$
$3 \leq t < 4$	$2.980 \cdot 10^{-7}$
$4 \leq t < 5$	$3.954 \cdot 10^{-4}$
$5 \leq t < 6$	0.0520
$t \geq 6$	1

Tabla 2.32. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 78$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 5$, ya que:

$$Pr(W \geq 6) = 0.9480 < 0.95 < 0.9996 = Pr(W \geq 5)$$

· Serie de tamaño $T = 81$ ($k = \lfloor \frac{T}{m} \rfloor = \lfloor \frac{81}{3} \rfloor = 27$), dimensión de inmersión $m = 3$ y nivel de confianza del 95%:

Función de probabilidad:

j	$Pr(W = j)$
1	$5.862 \cdot 10^{-21}$
2	$1.967 \cdot 10^{-12}$
3	$1.490 \cdot 10^{-7}$
4	$2.636 \cdot 10^{-4}$
5	0.0431
6	0.9566

Tabla 2.33. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 81$ ($m = 3$)

Función de distribución:

	$F_W(t) = Pr(W \leq t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$5.862 \cdot 10^{-21}$
$2 \leq t < 3$	$1.967 \cdot 10^{-12}$
$3 \leq t < 4$	$1.490 \cdot 10^{-7}$
$4 \leq t < 5$	$2.637 \cdot 10^{-4}$
$5 \leq t < 6$	0.0434
$t \geq 6$	1

Tabla 2.34. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 81$ ($m = 3$)

Valor crítico: $f_{W,0.05} = 6$, ya que:

$$0.95 < 0.9566 = Pr(W \geq 6)$$

Anotamos los valores críticos obtenidos en el siguiente cuadro:

T	Valor crítico
6	1
9	2
15	2
18	3
24	3
27	4
39	4
42	5
78	5
81	6

Tabla 2.35. Valores críticos, en función del tamaño de la serie temporal, para la aplicación del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón con un nivel de confianza del 95% ($m = 3$)

Y a partir del cuadro anterior es posible confeccionar un nuevo cuadro que recoja los valores críticos para cualquier tamaño de la serie temporal:

Intervalo para T	Valor crítico
$3 \leq T < 9$	1
$9 \leq T < 18$	2
$18 \leq T < 27$	3
$27 \leq T < 42$	4
$42 \leq T < 81$	5
$81 \leq T$	6

Tabla 2.36. Valores críticos, para cualquier tamaño de la serie temporal, para la aplicación del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón con un nivel de confianza del 95% ($m = 3$)

3.2.2 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL TEST 1.

Construimos una serie temporal de 24 elementos para aplicar este test:

	Valor del elemento
x_1	0.5682
x_2	0.0123
x_3	0.5898
x_4	0.3602
x_5	0.0254
x_6	0.9786
x_7	0.1322
x_8	0.5506
x_9	0.8634
x_{10}	0.6825
x_{11}	0.0350
x_{12}	0.4402
x_{13}	0.4398
x_{14}	0.7661
x_{15}	0.9998
x_{16}	0.2575
x_{17}	0.8858
x_{18}	0.0497
x_{19}	0.3317
x_{20}	0.7296
x_{21}	0.4987
x_{22}	0.5467
x_{23}	0.2246
x_{24}	0.1230

Tabla 2.37. Serie de tamaño $T = 24$, cuyos elementos proceden de un conjunto de variables aleatorias distribuidas según una distribución uniforme $[0,1]$

Los elementos de la serie proceden de un conjunto de variables aleatorias de distribución $U[0,1]$.

Se muestra a continuación la representación gráfica de la serie temporal que ha sido introducida en la tabla anterior:

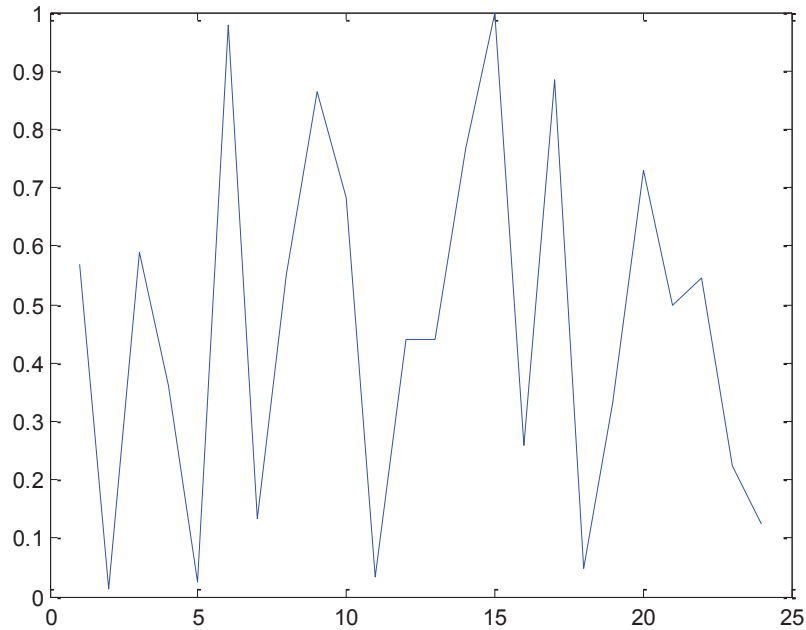


Figura 2.5. Representación gráfica de la serie temporal de la tabla 2.37

Ejemplo 3.2.2.1. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.37 haciendo uso del test 1 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón. Se utilizará una dimensión de inmersión $m = 3$ y se tomará un nivel de confianza del 95%.

Recordemos que en este método no hay solapamiento entre las ventanas móviles en que se divide la serie temporal. Lo único que nos interesa conocer es el número de permutaciones diferentes que hay en la serie temporal, y no la frecuencia de cada una de ellas.

Procedemos a identificar las distintas permutaciones que aparecen:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.5682, 0.0123, 0.5898)	(2, 1, 3)
$x_3(4)$	(0.3602, 0.0254, 0.9786)	(2, 1, 3)
$x_3(7)$	(0.1322, 0.5506, 0.8634)	(1, 2, 3)
$x_3(10)$	(0.6825, 0.0350, 0.4402)	(2, 3, 1)
$x_3(13)$	(0.4398, 0.7661, 0.9998)	(1, 2, 3)
$x_3(16)$	(0.2575, 0.8858, 0.0497)	(3, 1, 2)
$x_3(19)$	(0.3317, 0.7296, 0.4987)	(1, 3, 2)
$x_3(22)$	(0.5467, 0.2246, 0.1230)	(3, 2, 1)

Tabla 2.38. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.37 ($m = 3$)

Vemos que han aparecido todas las posibles permutaciones, esto es $\omega = 6$. En consecuencia, el estadístico de contraste tiene ese mismo valor.

Teniendo en cuenta el nivel de confianza, el valor de la dimensión de inmersión y el tamaño de la serie; y haciendo uso de la función de probabilidad, se obtiene un valor crítico $f_{W,0.05} = 3$.

Solo resta por realizar el contraste de hipótesis, que es:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{24} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{24} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

Utilizamos la regla de decisión:

$$\begin{cases} \text{Si } f_{W,0.05} \leq \omega \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

En consecuencia:

$$f_{W,0.05} = 3 \leq 6 = \omega \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

Ejemplo 3.2.2.2. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.37 haciendo uso del test 1 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón. Ahora se usará una dimensión de inmersión $m = 4$ y se tomará un nivel de confianza del 95%.

Dividimos la serie en ventanas de longitud 4 y estudiamos qué permutación le corresponde a cada ventana:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.5682, 0.0123, 0.5898, 0.3602)	(2, 4, 1, 3)
$x_3(5)$	(0.0254, 0.9786, 0.1322, 0.5506)	(1, 3, 4, 2)
$x_3(9)$	(0.8634, 0.6825, 0.0350, 0.4402)	(3, 4, 2, 1)
$x_3(13)$	(0.4398, 0.7661, 0.9998, 0.2575)	(4, 1, 2, 3)
$x_3(17)$	(0.8858, 0.0497, 0.3317, 0.7296)	(2, 3, 4, 1)
$x_3(21)$	(0.4987, 0.5467, 0.2246, 0.1230)	(4, 3, 1, 2)

Tabla 2.39. Permutaciones presentes en la serie temporal de la tabla 2.37 ($m = 4$)

El número de permutaciones diferentes es 6, y por lo tanto, el estadístico de contraste es $\omega = 6$.

Determinamos el valor crítico teniendo en cuenta la función de probabilidad, resultando $f_{W,0.05} = 4$.

El contraste de hipótesis es el mismo que en el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{24} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{24} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

Y la regla de decisión es:

$$\begin{cases} \text{Si } f_{W,0.05} \leq \omega \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Concluimos:

$$f_{W,0.05} = 4 \leq 6 = \omega \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

3.2.3 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL TEST 2.

En la aplicación de este test hay que dividir la serie temporal en ventanas de amplitud lo suficientemente grande como para poder estudiar en las mismas el número de permutaciones diferentes que aparecen. Una de las dificultades de este método es elegir el tamaño de las ventanas en que se divide la serie; en los ejemplos que vamos a desarrollar se tomarán amplitudes pequeñas para que resulte un cálculo sencillo.

Construimos una serie temporal de 48 elementos que procedan de 48 variables aleatorias con distribución $U[0,1]$:

	Valor del elemento		Valor del elemento
x_1	0.8147	x_{25}	0.6787
x_2	0.9058	x_{26}	0.7577
x_3	0.1270	x_{27}	0.7431
x_4	0.9134	x_{28}	0.3922
x_5	0.6324	x_{29}	0.6555
x_6	0.0975	x_{30}	0.1712
x_7	0.2785	x_{31}	0.7060
x_8	0.5469	x_{32}	0.0318
x_9	0.9575	x_{33}	0.2769
x_{10}	0.9649	x_{34}	0.0462
x_{11}	0.1576	x_{35}	0.0971
x_{12}	0.9706	x_{36}	0.8235
x_{13}	0.9572	x_{37}	0.6948
x_{14}	0.4854	x_{38}	0.3171
x_{15}	0.8003	x_{39}	0.9502
x_{16}	0.1419	x_{40}	0.0344
x_{17}	0.4218	x_{41}	0.4387
x_{18}	0.9157	x_{42}	0.3816
x_{19}	0.7922	x_{43}	0.7655
x_{20}	0.9595	x_{44}	0.7952
x_{21}	0.6557	x_{45}	0.1869
x_{22}	0.0357	x_{46}	0.4898
x_{23}	0.8491	x_{47}	0.4456
x_{24}	0.9340	x_{48}	0.6463

Tabla 2.40. Serie de tamaño $T = 48$, cuyos elementos proceden de un conjunto de variables aleatorias distribuidas según una distribución uniforme $[0,1]$

La representación gráfica de esta serie es la siguiente:

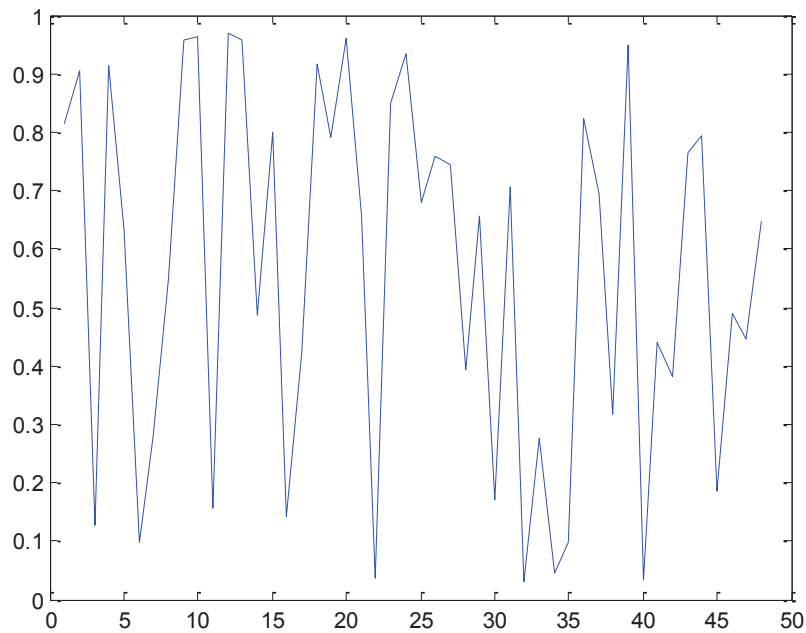


Figura 2.6. Representación gráfica de la serie temporal de la tabla 2.40

Para analizar esta serie temporal se procederá a dividirla en 4 ventanas de amplitud 12.

Ejemplo 3.2.3.1. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.40 recurriendo al test 2 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón. Se dividirá la serie en 4 ventanas de amplitud 12, y se usará en cada una de ellas una dimensión de inmersión $m = 3$. El test se aplicará con un nivel de confianza del 95%.

· Primera ventana:

	Valor del elemento
x_1	0.8147
x_2	0.9058
x_3	0.1270
x_4	0.9134
x_5	0.6324
x_6	0.0975
x_7	0.2785
x_8	0.5469
x_9	0.9575
x_{10}	0.9649
x_{11}	0.1576
x_{12}	0.9706

Tabla 2.41. Primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

Esta primera ventana la tenemos que subdividir en ventanas de 3 elementos. A cada una de éstas le asignaremos la permutación correspondiente:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.8147, 0.9058, 0.1270)	(3, 1, 2)
$x_3(4)$	(0.9134, 0.6324, 0.0975)	(3, 2, 1)
$x_3(7)$	(0.2785, 0.5469, 0.9575)	(1, 2, 3)
$x_3(10)$	(0.9649, 0.1576, 0.9706)	(2, 1, 3)

Tabla 2.42. Permutaciones presentes en la primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 3$)

El número total de permutaciones diferentes es $\omega_1 = 4$.

· Segunda ventana:

	Valor del elemento
x_{13}	0.9572
x_{14}	0.4854
x_{15}	0.8003
x_{16}	0.1419
x_{17}	0.4218
x_{18}	0.9157
x_{19}	0.7922
x_{20}	0.9595
x_{21}	0.6557
x_{22}	0.0357
x_{23}	0.8491
x_{24}	0.9340

Tabla 2.43. Segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

Hacemos lo mismo que en la primera ventana, es decir, la dividimos en otras ventanas menores de amplitud 3, y determinamos qué permutación hay que asociar a cada una de éstas:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(13)$	(0.9572, 0.4854, 0.8003)	(2, 3, 1)
$x_3(16)$	(0.1419, 0.4218, 0.9157)	(1, 2, 3)
$x_3(19)$	(0.7922, 0.9595, 0.6557)	(3, 1, 2)
$x_3(22)$	(0.0357, 0.8491, 0.9340)	(1, 2, 3)

Tabla 2.44. Permutaciones presentes en la segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 3$)

El número total de permutaciones diferentes es $\omega_2 = 3$.

· Tercera ventana:

	Valor del elemento
x_{25}	0.6787
x_{26}	0.7577
x_{27}	0.7431
x_{28}	0.3922
x_{29}	0.6555
x_{30}	0.1712
x_{31}	0.7060
x_{32}	0.0318
x_{33}	0.2769
x_{34}	0.0462
x_{35}	0.0971
x_{36}	0.8235

Tabla 2.45. Tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

Repetimos el procedimiento de las ventanas anteriores, y obtenemos las siguientes permutaciones:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(25)$	(0.6787, 0.7577, 0.7431)	(1, 3, 2)
$x_3(28)$	(0.3922, 0.6555, 0.1712)	(3, 1, 2)
$x_3(31)$	(0.7060, 0.0318, 0.2769)	(2, 3, 1)
$x_3(34)$	(0.0462, 0.0971, 0.8235)	(1, 2, 3)

Tabla 2.46. Permutaciones presentes en la tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 3$)

El número total de permutaciones diferentes es $\omega_3 = 4$.

· Cuarta ventana:

	Valor del elemento
x_{37}	0.6948
x_{38}	0.3171
x_{39}	0.9502
x_{40}	0.0344
x_{41}	0.4387
x_{42}	0.3816
x_{43}	0.7655
x_{44}	0.7952
x_{45}	0.1869
x_{46}	0.4898
x_{47}	0.4456
x_{48}	0.6463

Tabla 2.47. Cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

Las permutaciones que aparecen en esta última ventana se recogen en la tabla que sigue:

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(37)$	(0.6948, 0.3171, 0.9502)	(2, 1, 3)
$x_3(40)$	(0.0344, 0.4387, 0.3816)	(1, 3, 2)
$x_3(43)$	(0.7655, 0.7952, 0.1869)	(3, 1, 2)
$x_3(46)$	(0.4898, 0.4456, 0.6463)	(2, 1, 3)

Tabla 2.48. Permutaciones presentes en la cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 3$)

El número total de permutaciones diferentes es $\omega_4 = 3$.

Confeccionamos una tabla que recoja el número de permutaciones diferentes que han sido encontradas en cada una de las ventanas:

Ventana	Número de permutaciones diferentes
$x_{12}(1)$	4
$x_{12}(13)$	3
$x_{12}(25)$	4
$x_{12}(37)$	3

Tabla 2.49. Número de permutaciones diferentes en cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 3$)

Construimos ahora una nueva tabla en la que se detalla el número de ventanas que han aparecido con un número prefijado de permutaciones diferentes:

Número de permutaciones diferentes	Número de ventanas
1	0
2	0
3	2
4	2

Tabla 2.50. Número de ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.40, con un determinado número de permutaciones diferentes ($m = 3$)

Para calcular el estadístico de contraste necesitamos también la función de probabilidad. Obtenemos ésta a continuación:

j	$Pr(W = j)$
1	$4.630 \cdot 10^{-3}$
2	0.1620
3	0.5556
4	0.2778

Tabla 2.51. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 48$ ($m = 3$)

Ya estamos en disposición de determinar el estadístico de contraste; lo hacemos a continuación:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^{\min(k,m!)} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \\ &= \frac{(0 - 4 \cdot 4.630 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 4.630 \cdot 10^{-3}} + \frac{(0 - 4 \cdot 0.1620)^2}{4 \cdot 0.1620} + \frac{(2 - 4 \cdot 0.5556)^2}{4 \cdot 0.5556} \\ &\quad + \frac{(2 - 4 \cdot 0.2778)^2}{4 \cdot 0.2778} = 1.4 \end{aligned}$$

El valor crítico con el que se hará el contraste de hipótesis se obtiene con la distribución chi-cuadrado, teniendo en cuenta que el número de grados de libertad es $\min(k, m!) - 1 = 3$, y que tomamos un nivel de confianza del 95%:

$$\chi_{3,0.95}^2 = 7.8147$$

El contraste de hipótesis es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La decisión se toma en base a la siguiente regla:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq \chi^2 \leq \chi_{3,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Aplicamos ésta:

$$\chi^2 = 1.4 \leq 7.8147 = \chi_{3,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

Ejemplo 3.2.3.2. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.40 recurriendo al test 2 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón. Se utilizarán 4 ventanas de amplitud 12 y una dimensión de inmersión $m = 4$. El nivel de confianza será del 95%.

Las ventanas coinciden con las del ejemplo anterior; la diferencia está en que ahora la dimensión de inmersión es $m = 4$ en lugar de $m = 3$. Vamos a mostrar nuevamente las ventanas en que dividimos la serie, y a continuación determinaremos, para cada una, el número de permutaciones diferentes presentes.

· Primera ventana:

	Valor del elemento
x_1	0.8147
x_2	0.9058
x_3	0.1270
x_4	0.9134
x_5	0.6324
x_6	0.0975
x_7	0.2785
x_8	0.5469
x_9	0.9575
x_{10}	0.9649
x_{11}	0.1576
x_{12}	0.9706

Tabla 2.52. Primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.8147, 0.9058, 0.1270, 0.9134)	(3, 1, 2, 4)
$x_3(5)$	(0.6324, 0.0975, 0.2785, 0.5469)	(2, 3, 4, 1)
$x_3(9)$	(0.9575, 0.9649, 0.1576, 0.9706)	(3, 1, 2, 4)

Tabla 2.53. Permutaciones presentes en la primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 4$)

El número de permutaciones distintas es: $\varpi_1 = 2$.

· Segunda ventana:

	Valor del elemento
x_{13}	0.9572
x_{14}	0.4854
x_{15}	0.8003
x_{16}	0.1419
x_{17}	0.4218
x_{18}	0.9157
x_{19}	0.7922
x_{20}	0.9595
x_{21}	0.6557
x_{22}	0.0357
x_{23}	0.8491
x_{24}	0.9340

Tabla 2.54. Segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(13)$	(0.9572, 0.4854, 0.8003, 0.1419)	(4, 2, 3, 1)
$x_3(17)$	(0.4218, 0.9157, 0.7922, 0.9595)	(1, 3, 2, 4)
$x_3(21)$	(0.6557, 0.0357, 0.8491, 0.9340)	(2, 1, 3, 4)

Tabla 2.55. Permutaciones presentes en la segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 4$)

En la segunda ventana se tiene que $\varpi_2 = 3$.

· Tercera ventana:

	Valor del elemento
x_{25}	0.6787
x_{26}	0.7577
x_{27}	0.7431
x_{28}	0.3922
x_{29}	0.6555
x_{30}	0.1712
x_{31}	0.7060
x_{32}	0.0318
x_{33}	0.2769
x_{34}	0.0462
x_{35}	0.0971
x_{36}	0.8235

Tabla 2.56. Tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(25)$	(0.6787, 0.7577, 0.7431, 0.3922)	(4, 1, 3, 2)
$x_3(29)$	(0.6555, 0.1712, 0.7060, 0.0318)	(4, 2, 1, 3)
$x_3(33)$	(0.2769, 0.0462, 0.0971, 0.8235)	(2, 3, 1, 4)

Tabla 2.57. Permutaciones presentes en la tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.40
($m = 4$)

La cantidad de permutaciones diferentes es $\varpi_3 = 3$.

· Cuarta ventana:

	Valor del elemento
x_{37}	0.6948
x_{38}	0.3171
x_{39}	0.9502
x_{40}	0.0344
x_{41}	0.4387
x_{42}	0.3816
x_{43}	0.7655
x_{44}	0.7952
x_{45}	0.1869
x_{46}	0.4898
x_{47}	0.4456
x_{48}	0.6463

Tabla 2.58. Cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.40

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(37)$	(0.6948, 0.3171, 0.9502, 0.0344)	(4, 2, 1, 3)
$x_3(41)$	(0.4387, 0.3816, 0.7655, 0.7952)	(2, 1, 3, 4)
$x_3(45)$	(0.1869, 0.4898, 0.4456, 0.6463)	(1, 3, 2, 4)

Tabla 2.59. Permutaciones presentes en la cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 4$)

En esta última ventana se tiene $\bar{\omega}_4 = 3$.

Construimos una tabla en la que señalamos el número de permutaciones diferentes encontradas en cada una de las cuatro ventanas:

Ventana	Número de permutaciones diferentes
$x_{12}(1)$	2
$x_{12}(13)$	3
$x_{12}(25)$	3
$x_{12}(37)$	3

Tabla 2.60. Número de permutaciones diferentes en cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.40 ($m = 4$)

Ahora mostramos el número de ventanas que se han obtenido para cada posible número de permutaciones diferentes:

Número de permutaciones diferentes	Número de ventanas
1	0
2	1
3	3

Tabla 2.61. Número de ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.40, con un determinado número de permutaciones diferentes ($m = 4$)

Por otro lado, calculamos también la función de probabilidad, que es necesaria para determinar el valor del estadístico de contraste:

j	$Pr(W = j)$
1	$1.736 \cdot 10^{-3}$
2	0.1198
3	0.8785

Tabla 2.62. Función de probabilidad, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 48$ ($m = 4$)

Ya estamos en condiciones de calcular el estadístico de contraste, como así hacemos a continuación:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\min(k,m!)} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(0 - 4 \cdot 1.736 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 1.736 \cdot 10^{-3}} + \frac{(1 - 4 \cdot 0.1198)^2}{4 \cdot 0.1198} + \frac{(3 - 4 \cdot 0.8785)^2}{4 \cdot 0.8785} = 0.6482$$

Para realizar el contraste de hipótesis se utiliza la distribución chi-cuadrado. El valor crítico se determina teniendo presente que los grados de libertad son $\min(k, m!) - 1 = 2$, y que el nivel de confianza es del 95%:

$$\chi_{2,0.95}^2 = 5.9915$$

Nuestro contraste de hipótesis es:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

Y la regla de decisión a utilizar es:

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq \chi^2 \leq \chi_{2,0.95}^2 \text{ aceptamos } H_0, \\ \text{en otro caso rechazamos } H_0. \end{cases}$$

Concluyendo:

$$\chi^2 = 0.6482 \leq 5.9915 = \chi_{2,0.95}^2 \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

3.2.4 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL TEST 3.

Para aplicar este test hay que dividir la serie temporal en varias ventanas, y en cada una de esas ventanas hay que determinar el número de permutaciones diferentes que aparecen; con los resultados obtenidos se puede construir la función de distribución empírica F_n . Por otro lado, haciendo uso de la función de probabilidad teórica, se puede calcular la función de distribución teórica F_W . El resultado del test depende de si la función de distribución empírica aproxima lo suficientemente bien la función de distribución teórica.

Vamos a estudiar una serie temporal de 48 elementos que procedan de 48 variables aleatorias de distribución $U[0,1]$:

	Valor del elemento		Valor del elemento
x_1	0.8147	x_{25}	0.6787
x_2	0.9058	x_{26}	0.7577
x_3	0.1270	x_{27}	0.7431
x_4	0.9134	x_{28}	0.3922
x_5	0.6324	x_{29}	0.6555
x_6	0.0975	x_{30}	0.1712
x_7	0.2785	x_{31}	0.7060
x_8	0.5469	x_{32}	0.0318
x_9	0.9575	x_{33}	0.2769
x_{10}	0.9649	x_{34}	0.0462
x_{11}	0.1576	x_{35}	0.0971
x_{12}	0.9706	x_{36}	0.8235
x_{13}	0.9572	x_{37}	0.6948
x_{14}	0.4854	x_{38}	0.3171
x_{15}	0.8002	x_{39}	0.9502
x_{16}	0.1419	x_{40}	0.0344
x_{17}	0.4218	x_{41}	0.4387
x_{18}	0.9157	x_{42}	0.3816
x_{19}	0.7922	x_{43}	0.7655
x_{20}	0.9595	x_{44}	0.7952
x_{21}	0.6557	x_{45}	0.1869
x_{22}	0.0357	x_{46}	0.4898
x_{23}	0.8491	x_{47}	0.4456
x_{24}	0.9340	x_{48}	0.6463

Tabla 2.63. Serie de tamaño $T = 48$, cuyos elementos proceden de un conjunto de variables aleatorias distribuidas según una distribución uniforme $[0,1]$

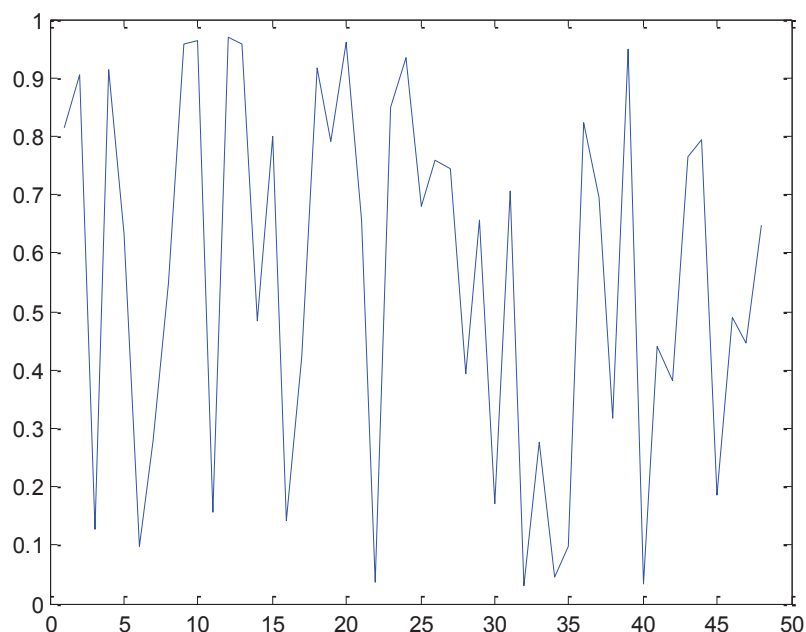


Figura 2.7. Representación gráfica de la serie temporal de la tabla 2.63

El análisis de la serie temporal se llevará a cabo dividiéndola en 4 ventanas de 12 elementos cada una.

Ejemplo 3.2.4.1. Estudio de la serie temporal de la tabla 2.63 haciendo uso del test 3 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón. Se utilizarán 4 ventanas de amplitud 12, una dimensión de inmersión $m = 3$ y un nivel de confianza del 95%.

Vamos a ir mostrando los elementos que componen cada ventana en que se ha dividido la serie, junto con el número de permutaciones diferentes encontradas en cada una.

· Primera ventana:

	Valor del elemento
x_1	0.8147
x_2	0.9058
x_3	0.1270
x_4	0.9134
x_5	0.6324
x_6	0.0975
x_7	0.2785
x_8	0.5469
x_9	0.9575
x_{10}	0.9649
x_{11}	0.1576
x_{12}	0.9706

Tabla 2.64. Primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.8147, 0.9058, 0.1270)	(3, 1, 2)
$x_3(4)$	(0.9134, 0.6324, 0.0975)	(3, 2, 1)
$x_3(7)$	(0.2785, 0.5469, 0.9575)	(1, 2, 3)
$x_3(10)$	(0.9649, 0.1576, 0.9706)	(2, 1, 3)

Tabla 2.65. Permutaciones presentes en la primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 3$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_1 = 4$.

· Segunda ventana:

	Valor del elemento
x_{13}	0.9572
x_{14}	0.4854
x_{15}	0.8002
x_{16}	0.1419
x_{17}	0.4218
x_{18}	0.9157
x_{19}	0.7922
x_{20}	0.9595
x_{21}	0.6557
x_{22}	0.0357
x_{23}	0.8491
x_{24}	0.9340

Tabla 2.66. Segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(13)$	(0.9572, 0.4854, 0.8002)	(2, 3, 1)
$x_3(16)$	(0.1419, 0.4218, 0.9157)	(1, 2, 3)
$x_3(19)$	(0.7922, 0.9595, 0.6557)	(3, 1, 2)
$x_3(22)$	(0.0357, 0.8491, 0.9340)	(1, 2, 3)

Tabla 2.67. Permutaciones presentes en la segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 3$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_2 = 3$.

· Tercera ventana:

	Valor del elemento
x_{25}	0.6787
x_{26}	0.7577
x_{27}	0.7431
x_{28}	0.3922
x_{29}	0.6555
x_{30}	0.1712
x_{31}	0.7060
x_{32}	0.0318
x_{33}	0.2769
x_{34}	0.0462
x_{35}	0.0971
x_{36}	0.8235

Tabla 2.68. Tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(25)$	(0.6787, 0.7577, 0.7431)	(1, 3, 2)
$x_3(28)$	(0.3922, 0.6555, 0.1712)	(3, 1, 2)
$x_3(31)$	(0.7060, 0.0318, 0.2769)	(2, 3, 1)
$x_3(34)$	(0.0462, 0.0971, 0.8235)	(1, 2, 3)

Tabla 2.69. Permutaciones presentes en la tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63
($m = 3$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_3 = 4$.

· Cuarta ventana:

	Valor del elemento
x_{37}	0.6948
x_{38}	0.3171
x_{39}	0.9502
x_{40}	0.0344
x_{41}	0.4387
x_{42}	0.3816
x_{43}	0.7655
x_{44}	0.7952
x_{45}	0.1869
x_{46}	0.4898
x_{47}	0.4456
x_{48}	0.6463

Tabla 2.70. Cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(37)$	(0.6948, 0.3171, 0.9502)	(2, 1, 3)
$x_3(40)$	(0.0344, 0.4387, 0.3816)	(1, 3, 2)
$x_3(43)$	(0.7655, 0.7952, 0.1869)	(3, 1, 2)
$x_3(46)$	(0.4898, 0.4456, 0.6463)	(2, 1, 3)

Tabla 2.71. Permutaciones presentes en la cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 3$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_4 = 3$.

En la tabla que mostramos a continuación resumimos los resultados que acabamos de obtener:

Ventana	Número de permutaciones diferentes
$x_{12}(1)$	4
$x_{12}(13)$	3
$x_{12}(25)$	4
$x_{12}(37)$	3

Tabla 2.72. Número de permutaciones diferentes en cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 3$)

Para obtener la función de distribución empírica es preciso conocer el número de ventanas que hay con cada uno de los posibles números de permutaciones diferentes; recogemos esta información en la tabla que sigue:

Número de permutaciones diferentes	Número de ventanas
1	0
2	0
3	2
4	2

Tabla 2.73. Número de ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.63, con un determinado número de permutaciones diferentes ($m = 3$)

Calculamos, finalmente, la función de distribución empírica:

	$F_n(t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	0
$2 \leq t < 3$	0
$3 \leq t < 4$	0.5
$t \geq 4$	1

Tabla 2.74. Función de distribución empírica asociada a la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 3$)

Por otro lado, la función de distribución teórica es:

	$F_W(t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$4.630 \cdot 10^{-3}$
$2 \leq t < 3$	0.1667
$3 \leq t < 4$	0.7222
$t \geq 4$	1

Tabla 2.75. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 48$ ($m = 3$)

Comparamos gráficamente ambas funciones de distribución:

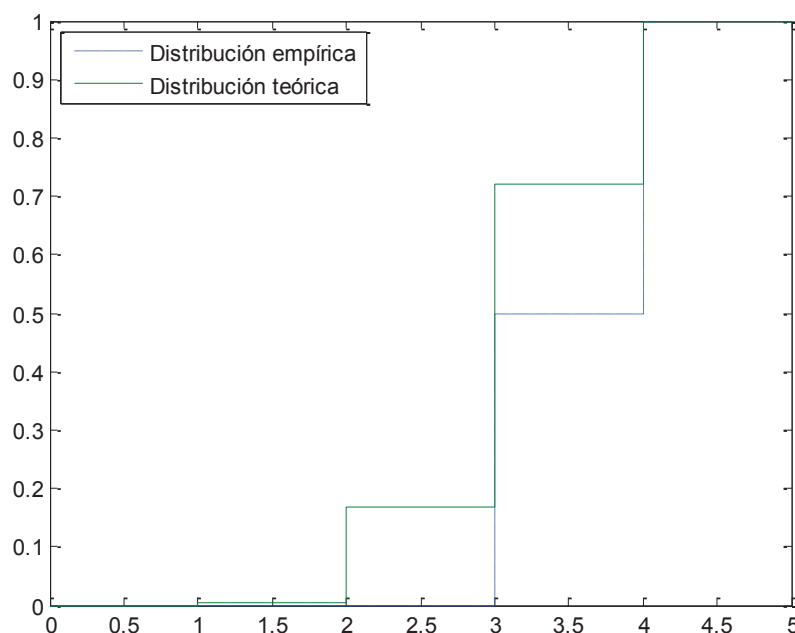


Figura 2.8. Comparación gráfica de la función de distribución empírica (de la serie temporal de la tabla 2.63) con la función de distribución teórica (de una serie temporal de tamaño $T = 48$, tomando $m = 3$)

Antes de calcular el estadístico de contraste hay que calcular antes D_n :

$$D_n = \max |F_n(\varpi) - F_W(\varpi)| = 0.2222$$

Y entonces el estadístico de contraste es:

$$\sqrt{n}D_n = \sqrt{4} \cdot 0.2222 = 0.4444$$

Pero para realizar el contraste de hipótesis no vamos a utilizar el estadístico de contraste, sino el p-valor, que es:

$$p - \text{valor} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2(\sqrt{n}D_n)^2} = 0.9891$$

Recordemos que el contraste de hipótesis a realizar es:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

La regla de decisión es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Si } p\text{-valor} \geq \alpha \Rightarrow \text{aceptamos } H_0 \\ \text{Si } p\text{-valor} < \alpha \Rightarrow \text{rechazamos } H_0 \end{cases}$$

Y concluimos finalmente:

$$p\text{-valor} = 0.9891 \geq 0.05 = \alpha \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

Ejemplo 3.2.4.2. Análisis de la serie temporal de la tabla 2.63 haciendo uso del test 3 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón; recurriendo a 4 ventanas de amplitud 12, y usando una dimensión de inmersión $m = 4$ y un nivel de confianza del 95%.

Analizamos a continuación la serie temporal haciendo uso de una dimensión de inmersión $m = 4$.

· Primera ventana:

	Valor del elemento
x_1	0.8147
x_2	0.9058
x_3	0.1270
x_4	0.9134
x_5	0.6324
x_6	0.0975
x_7	0.2785
x_8	0.5469
x_9	0.9575
x_{10}	0.9649
x_{11}	0.1576
x_{12}	0.9706

Tabla 2.76. Primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(1)$	(0.8147, 0.9058, 0.1270, 0.9134)	(3, 1, 2, 4)
$x_3(5)$	(0.6324, 0.0975, 0.2785, 0.5469)	(2, 3, 4, 1)
$x_3(9)$	(0.9575, 0.9649, 0.1576, 0.9706)	(3, 1, 2, 4)

Tabla 2.77. Permutaciones presentes en la primera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_1 = 2$.

· Segunda ventana:

	Valor del elemento
x_{13}	0.9572
x_{14}	0.4854
x_{15}	0.8002
x_{16}	0.1419
x_{17}	0.4218
x_{18}	0.9157
x_{19}	0.7922
x_{20}	0.9595
x_{21}	0.6557
x_{22}	0.0357
x_{23}	0.8491
x_{24}	0.9340

Tabla 2.78. Segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(13)$	(0.9572, 0.4854, 0.8002, 0.1419)	(4, 2, 3, 1)
$x_3(17)$	(0.4218, 0.9157, 0.7922, 0.9595)	(1, 3, 2, 4)
$x_3(21)$	(0.6557, 0.0357, 0.8491, 0.9340)	(2, 1, 3, 4)

Tabla 2.79. Permutaciones presentes en la segunda ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

Número de permutaciones diferentes: $\varpi_2 = 3$.

· Tercera ventana:

	Valor del elemento
x_{25}	0.6787
x_{26}	0.7577
x_{27}	0.7431
x_{28}	0.3922
x_{29}	0.6555
x_{30}	0.1712
x_{31}	0.7060
x_{32}	0.0318
x_{33}	0.2769
x_{34}	0.0462
x_{35}	0.0971
x_{36}	0.8235

Tabla 2.80. Tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(25)$	(0.6787, 0.7577, 0.7431, 0.3922)	(4, 1, 3, 2)
$x_3(29)$	(0.6555, 0.1712, 0.7060, 0.0318)	(4, 2, 1, 3)
$x_3(33)$	(0.2769, 0.0462, 0.0971, 0.8235)	(2, 3, 1, 4)

Tabla 2.81. Permutaciones presentes en la tercera ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

Número de permutaciones diferentes: $\overline{\omega}_3 = 3$.

· Cuarta ventana:

	Valor del elemento
x_{37}	0.6948
x_{38}	0.3171
x_{39}	0.9502
x_{40}	0.0344
x_{41}	0.4387
x_{42}	0.3816
x_{43}	0.7655
x_{44}	0.7952
x_{45}	0.1869
x_{46}	0.4898
x_{47}	0.4456
x_{48}	0.6463

Tabla 2.82. Cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.63

	Ventana deslizante	Permutación asociada
$x_3(25)$	(0.6948, 0.3171, 0.9502, 0.0344)	(4, 2, 1, 3)
$x_3(29)$	(0.4387, 0.3816, 0.7655, 0.7952)	(2, 1, 3, 4)
$x_3(33)$	(0.1869, 0.4898, 0.4456, 0.6463)	(1, 3, 2, 4)

Tabla 2.83. Permutaciones presentes en la cuarta ventana de la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

Número de permutaciones diferentes: $\overline{\omega}_4 = 3$.

Recogemos el número de permutaciones diferentes que han aparecido en las ventanas en la tabla que sigue:

Ventana	Número de permutaciones diferentes
$x_{12}(1)$	2
$x_{12}(13)$	3
$x_{12}(25)$	3
$x_{12}(37)$	3

Tabla 2.84. Número de permutaciones diferentes en cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

A continuación contabilizamos el número de ventanas con un número de permutaciones diferentes prefijado, llegando a lo siguiente:

Número de permutaciones diferentes	Número de ventanas
1	0
2	1
3	3

Tabla 2.85. Número de ventanas en que se ha dividido la serie temporal de la tabla 2.63, con un determinado número de permutaciones diferentes ($m = 4$)

Ya disponemos de la información necesaria para construir la función de distribución empírica, que resulta ser:

	$F_n(t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	0
$2 \leq t < 3$	0.25
$t \geq 3$	1

Tabla 2.86. Función de distribución empírica asociada a la serie temporal de la tabla 2.63 ($m = 4$)

Necesitamos también la función de distribución teórica, que es:

	$F_W(t)$
$t < 1$	0
$1 \leq t < 2$	$1.736 \cdot 10^{-3}$
$2 \leq t < 3$	0.1215
$t \geq 3$	1

Tabla 2.87. Función de distribución, correspondiente al método de J. S. Cánovas y A. Guillamón, para una serie temporal de tamaño $T = 48$ ($m = 4$)

Hacemos una representación gráfica conjunta de las funciones de distribución empírica y teórica:

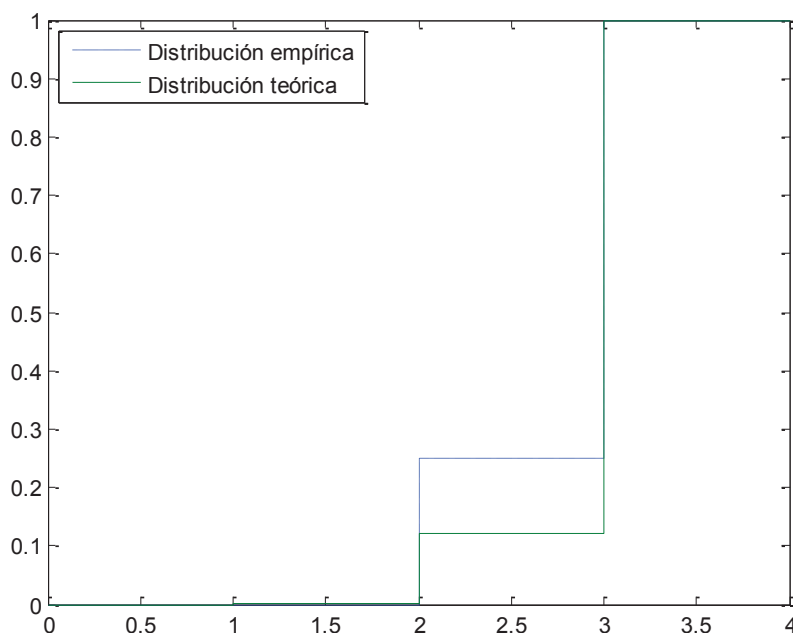


Figura 2.9. Comparación gráfica de la función de distribución empírica (de la serie temporal de la tabla 2.63) con la función de distribución teórica (de una serie temporal de tamaño $T = 48$, tomando $m = 4$)

Calculamos el parámetro D_n :

$$D_n = \max |F_n(\varpi) - F_W(\varpi)| = 0.1285$$

Y a partir de éste determinamos el estadístico de contraste:

$$\sqrt{n}D_n = \sqrt{4} \cdot 0.1285 = 0.2569$$

Con el estadístico de contraste podemos hallar el p-valor:

$$p - \text{valor} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2(\sqrt{n}D_n)^2} \approx 1$$

El contraste de hipótesis que deseamos llevar a cabo es:

$$\begin{cases} H_0: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \\ H_1: \text{la serie } (x_n)_{n=1}^{48} \text{ no proviene de un conjunto de variables aleatorias i. i. d.} \end{cases}$$

Para finalizar recurrimos a la regla de decisión siguiente:

$$\begin{cases} \text{Si } p - \text{valor} \geq \alpha \Rightarrow \text{aceptamos } H_0 \\ \text{Si } p - \text{valor} < \alpha \Rightarrow \text{rechazamos } H_0 \end{cases}$$

Concluyendo:

$$p - \text{valor} \approx 1 \geq 0.05 = \alpha \Rightarrow \text{aceptamos } H_0$$

3.3 REFERENCIAS.

Referencia principal.

- J. S. Cánovas y A. Guillamón. Permutations and time series analysis. Chaos 19 (2009), 043103.

Otras referencias.

- J.M. Amigó, S. Zambrano y M.A.F. Sanjuán. True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics. Europhys. Lett. EPL 79 (2007), Art. 50001, 5pp.
- J.M. Amigó, S. Zambrano y M.A.F. Sanjuán. Combinatorial detection of determinism in noisy time series. Europhys. Lett. EPL 83 (2008), Art. 60005, 6pp.
- J.M. Amigó y M.B. Kennel. Topological permutation entropy. Phys. D 231 (2007), 137-142.
- C. Bandt y B. Pompe. Permutation entropy-a natural complexity measure for time series. Phys. Rev. Lett. 88 (2002), 174102.
- C. Bandt, G. Keller y B. Pompe. Entropy of interval maps via permutations. Nonlinearity 15 (2002), 1595-1602.
- L.S. Block y W.A. Coppel. Dynamics in one dimensión. Lecture Notes in Math. 1513, Springer, Berlin, (1992).

- R. Bowen. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 401-414.
- J.S. Cánovas. Estimating topological entropy from individual orbits. Int. J. Comput. Math.
- W.J. Conover. A Kolmogorov goodness-of-fit test for discontinuous distributions. J. Amer. Statist. Assoc. 67 (1972), 591-596.
- J.D. Gibbons y S. Chakrabortis. Nonparametric statistical inference. (Third Edition) Marcel Dekker, New York (1992).
- M. Hazewinkel. Encyclopaedia of Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- M. Matilla y M. Ruíz. A non-parametric Independence test using permutation entropy. Journal Econometrics 144 (2008), 139-155.
- G.E. Noether. Note on the Kolmogorov Statistics in the discrete case. Metrika 7 (1963), 115-116.

4. TEST BDS.

Este test fue ideado y desarrollado por Brock, Dechert y Scheinkman en 1986; de ahí que fuera denominado test BDS (Brock, Dechert, Scheinkman). Después de que en 1987 apareciera la primera publicación de este trabajo, LeBaron se sumó al grupo; éste fue el primero en desarrollar un programa informático que permitiera un cálculo viable del estadístico BDS; primero lo hizo en lenguaje Fortran, y más tarde (1997) en lenguaje C. LeBaron analizó las propiedades de algunas muestras finitas simples (Brock, Hsieh y LeBaron (1991)) y aplicó el test a series temporales financieras (Scheinkman y LeBaron (1989)). El trabajo revisado fue publicado en 1996 por Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron

En este apartado se va a explicar en qué consiste el test BDS. Veremos qué pasos hay que seguir para la determinación del estadístico BDS, y qué fórmulas y expresiones matemáticas hay que utilizar para ello.

4.1 DESCRIPCIÓN DEL TEST.

Daremos dos descripciones del test que son, en esencia, equivalentes. La primera descripción es la de Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996); el interés de ésta radica en que sus autores fueron los que desarrollaron y estudiaron por vez primera el test BDS. La segunda descripción, que se debe a Kanzler (1999), se ha incluido por presentar una notación que es, en algunos aspectos, más cómoda; ésta es, además, la notación utilizada en otras muchas publicaciones.

4.1.1 DESCRIPCIÓN DEL TEST. BROCK, DECHERT, SCHEINKMAN Y LEBARON (1996).

Vamos a exponer la descripción dada en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996).

Definiciones y notación.

Sea $\{u_t\}$ un proceso estocástico estrictamente estacionario de variables aleatorias reales con función de distribución F . Llamemos $(u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+m-1})$ a una m -historia, y denotémosla mediante u_t^m . Denotemos su función de distribución mediante F_m . Cuando $\{u_t\}$ sea independiente, entonces $F_m(x_1, \dots, x_m) = \prod_{k=1}^m F(x_k)$. Designemos ζ_i^j a $\sigma - \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_j\}$, siendo $1 \leq i < j < \infty$. El proceso estocástico $\{u_t\}$ es absolutamente regular (ver Denker y Keller (1983)) si:

$$\beta_k = \sup_{n \geq 1} \{E[\sup\{|P(A|\zeta_1^n) - P(A)| \mid A \in \zeta_{n+k}^\infty\}]\} \quad (2.56)$$

converge a cero.

Para $x \in \mathbb{R}^m$ vamos a usar la norma máxima $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq m} \{|x_k|\}$. Cuando sea importante especificar la dimensión de un espacio, usaremos la notación $\|\cdot\|_m$ para esta norma. La función característica del conjunto A es χ_A , y para el caso concreto en que $A = [0, \epsilon)$ denotaremos la función característica mediante χ_ϵ . Si $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ es diferenciable, entonces $(D\phi)_x \in \mathbb{R}^m$ es el vector de las derivadas parciales de ϕ evaluadas en $x \in \mathbb{R}^m$. La derivada direccional de ϕ en x según la dirección v es:

$$(D\phi)_x \cdot v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \epsilon v) - \phi(x)}{\epsilon} \quad (2.57)$$

La integral de correlación.

En Grassberger y Procaccia (1983) la integral de correlación fue introducida como un método para medir la dimensión fractal de un conjunto de datos determinista. Es una medida de la frecuencia con la que las pautas temporales se repiten en los datos. La integral de correlación para una dimensión de inmersión m viene dada por:

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n \chi_{\epsilon}(\|u_s^m - u_t^m\|) \quad (2.58)$$

y

$$C_m(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{m,n}(\epsilon) \quad (2.59)$$

Si los datos son generados por un proceso estocástico estrictamente estacionario que es absolutamente regular, entonces el límite anterior existe. En este caso, el límite de dado en (2.59) es:

$$C_m(\epsilon) = \iint \chi_{\epsilon}(\|u - v\|) dF_m(u) dF_m(v) \quad (2.60)$$

(En la expresión (2.60) hay de hecho $2m$ variables de integración. La notación utilizada consiste en escribir un símbolo de integral por cada vector de variables en el integrando.) Cuando el proceso es independiente, y puesto que $\chi_{\epsilon}(\|u - v\|) = \prod_{i=1}^m \chi_{\epsilon}(u_i - v_i)$, la expresión (2.60) implica que:

$$C_m(\epsilon) = C_1(\epsilon)^m \quad (2.61)$$

Distribución asintótica de la integral de correlación.

$C_{m,n}$ es un U-estadístico generalizado (ver Serfling (1980, capítulo 5), y Denker y Keller (1983)) con núcleo simétrico $\chi_{\epsilon}(\|x - y\|)$. Definimos:

$$K(\epsilon) = \int \left(\int \chi_{\epsilon}(\|u - v\|) dF(u) \right)^2 dF(v) = \int [F(u + \epsilon) - F(u - \epsilon)]^2 dF(u) \quad (2.62)$$

y sea $C(\epsilon) = C_1(\epsilon)$. Cuando el proceso $\{u_t\}$ es independiente, entonces el proceso $\{u_t^m\}$ es absolutamente regular con $\beta_k = 0$ para $k > m$, y por el Teorema 1 de Denker y Keller (1983) tenemos para el U-estadístico generalizado:

Teorema1. Sea $\{u_t\}$ i.i.d. (idénticamente distribuido). Si $K(\epsilon) > C(\epsilon)^2$, entonces:

$$\sqrt{n} \frac{C_{m,n}(\epsilon) - C_1(\epsilon)^m}{\sigma_m(\epsilon)} \quad (2.63)$$

converge a una distribución $N(0,1)$, donde:

$$\frac{1}{4}\sigma_m^2 = K^m - C^{2m} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} [K^{m-i}C^{2i} - C^{2m}] \quad (2.64)$$

(La dependencia de ϵ de los términos de la ecuación ha sido suprimida para mayor claridad en la notación.)

(La demostración está en la sección 7 de Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996).)

Para $m = 1$, este teorema fue demostrado de forma independiente por Denker y Keller (1986). En la expresión (2.64), si $K(\epsilon) = C(\epsilon)^2$ entonces $\sigma_m(\epsilon) = 0$, y tenemos un caso de degeneración. Una discusión sobre las propiedades asintóticas del U-estadístico para casos de degeneración puede ser encontrada en Serfling (1980, capítulo 5). Dechert (1989) mostró que $K(\epsilon) = C(\epsilon)^2$ si y sólo si $F(u + \epsilon) - F(u - \epsilon)$ es constante para todo u . Este es el caso de una distribución uniforme circular. También es el caso de $\epsilon = 0$, además de cuando el cierre del apoyo de las variables aleatorias es compacto y ϵ es suficientemente grande. Para todos los demás casos $K(\epsilon) > C(\epsilon)^2$.

Nótese que C_1 , C y K aparecen en el estadístico (2.63), y por tanto, cuando la función de distribución es desconocida, el estadístico no puede ser calculado. Esto lleva al estudio de las propiedades de:

$$T_{m,n}(\epsilon) = C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n}(\epsilon)^m \quad (2.65)$$

Resulta que $\lambda_1 C_{1,n}(\epsilon) + \lambda_2 C_{m,n}(\epsilon)$ es un U-estadístico generalizado con núcleo $\lambda_1 \chi_\epsilon(\|u_1 - v_1\|) + \lambda_2 \chi_\epsilon(\|u - v\|)$, para $u, v \in \mathbb{R}^m$ y para todo λ_1, λ_2 . Nuevamente, por Denker y Keller (1983, Teorema 1) esta combinación lineal es asintóticamente normal, y entonces $C_{1,n}$ y $C_{m,n}$ son, en conjunto, asintóticamente normales. Ahora, por el método delta (Pollard (1984), Apéndice A) la varianza asintótica de $\sqrt{n}T_{m,n}$ es la misma que la varianza asintótica de la combinación lineal:

$$\sqrt{n} \left[C_{m,n}(\epsilon) - C_1(\epsilon)^m - mC_1(\epsilon)^{m-1} (C_{1,n}(\epsilon) - C_1(\epsilon)) \right] \quad (2.66)$$

Estos son los pasos clave de la prueba de:

Teorema 2. Sea $\{u_t\}$ i.i.d. Si $K(\epsilon) > C(\epsilon)^2$, entonces para $m \geq 2$:

$$\sqrt{n} \frac{T_{m,n}(\epsilon)}{V_m} \quad (2.67)$$

converge a una distribución $N(0,1)$. La varianza asintótica viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}V_m^2 = & m(m-2)C^{2m-2}(K - C^2) + K^m - C^{2m} \\ & + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [C^{2j}(K^{m-j} - C^{2m-2j}) - mC^{2m-2}(K - C^2)] \end{aligned} \quad (2.68)$$

(La dependencia de ϵ de los términos de la ecuación ha sido suprimida por mayor claridad en la notación.)

Las constantes C y K en la expresión (2.68) para el cálculo de la varianza de $T_{m,n}(\epsilon)$ pueden ser consistentemente estimadas por:

$$C_n(\epsilon) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \chi_\epsilon(|u_s - u_t|) \quad (2.69)$$

$$K_n(\epsilon) = \frac{1}{n^3} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \chi_\epsilon(|u_r - u_s|) \chi_\epsilon(|u_s - u_t|) \quad (2.70)$$

Sea $V_{m,n}^2(\epsilon)$ el valor de la varianza dada en la expresión (2.68), evaluada con $C_n(\epsilon)$ y $K_n(\epsilon)$ en lugar de $C(\epsilon)$ y $K(\epsilon)$. $C_n(\epsilon)$ es un V-estadístico (ver Serfling (1980, Capítulo 5)), al igual que $K_n(\epsilon)$. C_n y K_n convergen a C y K , respectivamente. De modo que $V_{m,n}$ converge a V_m , y por el Teorema de Slutsky y el Teorema 2, el estadístico BDS presentado en Brock, Dechert y Scheinkman (1987):

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n} \frac{T_{m,n}(\epsilon)}{V_{m,n}(\epsilon)} \quad (2.71)$$

converge a una distribución $N(0,1)$.

La expresión (2.71) es un estadístico de distribución libre. De modo que tiene la ventaja de no necesitar suposiciones sobre la distribución al usarlo como un estadístico para variables aleatorias i.i.d. Por otro lado tiene la desventaja de no ser el estadístico más potente para testar una hipótesis paramétrica. Sin embargo, presenta una potencia buena frente a varias alternativas que son comunes en economía.

4.1.2 DESCRIPCIÓN DEL TEST. KANZLER (1999).

Presentamos otra descripción del test BDS, concretamente la que realizó Kanzler (1999).

La siguiente explicación del test generaliza la dada por LeBaron (1997).

Consideremos una serie temporal x de un número infinito de observaciones siguiendo cierta distribución F :

$$x \sim F \quad (2.72)$$

Elijamos un tamaño arbitrario de la distancia dimensional ϵ , con la condición de que no exceda la extensión de la serie temporal (si existe):

$$0 < \epsilon < \max(x) - \min(x) \quad (2.73)$$

Consideremos ahora la probabilidad de que un par de observaciones X_i, X_j estén separadas por una distancia inferior a ϵ :

$$P_1 \equiv P(|X_i - X_j| \leq \epsilon) \text{ para enteros } i \neq j \quad (2.74)$$

Una relación similar en dimensión 2 estaría definida por dos observaciones y por sus respectivos vecinos inmediatamente anteriores. Aquí la probabilidad de ‘cercanía’ está definida como la probabilidad de que dos observaciones estén ‘cerca’, así como la de sus dos predecesores. La probabilidad de que dos historias de dos observaciones estén separadas por una distancia menor de ϵ es:

$$P_2 \equiv P(|X_i - X_j| \leq \epsilon, |X_{i-1} - X_{j-1}| \leq \epsilon) \text{ para enteros } i \neq j \quad (2.75)$$

Está claro que las probabilidades para dimensión 2 son diferentes. Sin embargo si la serie temporal es i.i.d., hay una relación bien definida entre las dos: la probabilidad de que dos historias de dos observaciones estén cerca entre sí es igual al cuadrado de la probabilidad de que dos observaciones estén próximas entre sí:

$$P_2 = P_1^2 \text{ si } x \sim F(i.i.d.) \quad (2.76)$$

La relación anterior se generaliza para otras dimensiones, y el test BDS para una dimensión de inmersión m es un test en donde la hipótesis nula establece que las probabilidades para dimensión 1 y para dimensión m son iguales:

$$H_0: P_m = P_1^m \quad H_1: P_m \neq P_1^m \quad (2.77)$$

Testar la hipótesis nula de arriba es equivalente a testar si la serie temporal es i.i.d., frente a todas las demás alternativas:

$$H_0: x \sim F(i.i.d.) \quad (2.78)$$

Para obtener el estadístico del test, la probabilidad P_m es estimada por la integral de correlación $C_{m,n}(\epsilon)$ en el espacio finito. Sea I la función de Heavside que hace que la variable $I_\epsilon(X_i, X_j)$ tome el valor 1 si las observaciones X_i y X_j están a una distancia inferior a ϵ , y tome el valor 0 en caso contrario:

$$I_\epsilon(X_i, X_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } |X_i - X_j| \leq \epsilon \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.79)$$

En una muestra de n observaciones, la integral de correlación de dimensión m es calculada como la media de todos los productos de m historias:

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=m}^n \sum_{t=s+1}^n \prod_{j=0}^{m-1} I_\epsilon(X_{s-j}, X_{t-j}) \quad (2.80)$$

Como se mostró en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996), el estadístico BDS para dimensión de inmersión m y distancia dimensional ϵ es estimado de forma consistente en una muestra de n observaciones por:

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n-m+1} \frac{C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m}{\sigma_{m,n}(\epsilon)} \quad (2.81)$$

donde la varianza estimada de $C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m$ viene dada por:

$$\sigma_{m,n}^2(\epsilon) = 4 \left[K^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2m-2} \right] \quad (2.82)$$

El parámetro C en la integral de correlación de dimensión 1 es:

$$C = C_{1,n}(\epsilon) \quad (2.83)$$

El parámetro K es la probabilidad de que una terna de observaciones se encuentren a una distancia inferior a ϵ , y se calcula:

$$K_n(\epsilon) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n \sum_{s=t+1}^n \sum_{r=s+1}^n [I_\epsilon(X_t, X_s)I_\epsilon(X_s, X_r) + I_\epsilon(X_t, X_r)I_\epsilon(X_r, X_s) + I_\epsilon(X_s, X_t)I_\epsilon(X_t, X_r)] \quad (2.84)$$

Actualmente hay muchas formas de estimar K_n y C de forma consistente, sin embargo las expresiones mostradas son los estimadores más eficientes.

Finalmente, Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) muestra que el estadístico BDS converge a una distribución normal estándar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{m,n}(\epsilon) \sim N(0,1) \text{ para cada } m, \epsilon \quad (2.85)$$

En principio, aplicar el test BDS es sencillo: fijar el parámetro de distancia ϵ y la dimensión de inmersión m , calcular $C_{1,n}$ y K_n según las ecuaciones (2.80) y (2.84), utilizar estos estimadores para calcular $\sigma_{m,n}$ según (2.82), utilizar (2.80) para calcular $C_{m,n}$ y $C_{1,n-m+1}$, e introducir todos estos estimadores en (2.81) para calcular el estadístico BDS. El nivel de significación de la hipótesis nula es evaluado haciendo uso de la distribución normal.

En la práctica está lejos de ser fácil implementar las expresiones anteriores para obtener el estadístico BDS de una manera viable, en cuanto a coste computacional se refiere. En el siguiente capítulo se dará una explicación detallada sobre el modo de obtener un algoritmo que permita el cálculo eficaz del estadístico BDS.

4.2 COMENTARIOS SOBRE EL CÁLCULO DE LOS DISTINTOS PARÁMETROS.

En las dos descripciones del test BDS que han sido desarrolladas, las expresiones de cálculo presentan ciertas diferencias. Algunas se deben, simplemente, a la distinta notación utilizada en uno y otro caso. Pero otras atañen, directamente, a los valores que son calculados; no resulta lo mismo utilizando las fórmulas de Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996), que haciendo uso de las expresiones de Kanzler (1999). Se ha de señalar también que los resultados de unas y otras no difieren en cantidades importantes. De todos modos, las fórmulas de Kanzler (1999) son preferibles, y a continuación se detallará el porqué; también se introducirán las modificaciones pertinentes en las expresiones en donde se ha estimado oportuno.

Cálculo de $C_{m,n}(\epsilon)$.

En Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) se estableció:

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n \chi_{\epsilon}(\|u_s^m - u_t^m\|)$$

Aquí se pretende promediar los valores que toma la función característica $\chi_{\epsilon}(\|u_s^m - u_t^m\|)$ para cada par de m-historias u_s^m y u_t^m , siendo $1 \leq s < t \leq n$. Pero el número total de m-historias que aparecen en la serie temporal es $n - m + 1$; y por tanto, el número de parejas diferentes será $\binom{n-m+1}{2}$, y no $\binom{n}{2}$. Además habría que sustituir en los sumatorios $n - 1$ por $n - m$, y n por $n - m + 1$. Teniendo en cuenta esto quedaría:

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n-m+1}{2}} \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \chi_{\epsilon}(\|u_s^m - u_t^m\|)$$

Ésta última sí es una fórmula equivalente a la dada en Kanzler (1999), que es:

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=m}^n \sum_{t=s+1}^n \prod_{j=0}^{m-1} I_{\epsilon}(X_{s-j}, X_{t-j})$$

Cálculo de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$.

Lo primero que hay que señalar es que en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) no se habla de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$, sino de $C_{m,n}(\epsilon)$ particularizada para $m = 1$. Lo mejor es utilizar la primera notación, $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$, ya que el valor al que hacemos referencia no se calcula a partir de los n elementos de la serie, sino que se hace a partir de $n - m + 1$ elementos de la misma; tal y como explicamos a continuación.

El test BDS se apoya en la idea de que un proceso es independiente si se cumple:

$$C_m(\epsilon) = C_1(\epsilon)^m$$

siendo $C_m(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{m,n}(\epsilon)$. Por tanto, para llevar a cabo el test hay que evaluar cuán próximos están ambos términos en la serie temporal en estudio. Para ello hay utilizar el mismo número de historias para cada uno de ellos; y como $C_{m,n}(\epsilon)$ se calcula utilizando $n - m + 1$ m-historias, entonces ése será también el número de elementos que habrá que emplear para el cálculo del segundo término, que por ello denominamos $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$, y no $C_{1,n}(\epsilon)$.

Hay otra cuestión que hay que tratar sobre el cálculo de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$. Se trata de que, como para su cálculo sólo se utilizan $n - m + 1$ elementos, y no los n elementos de la serie completa; hay que descartar $m - 1$ elementos. Está claro que los elementos de los que vamos a prescindir tendrán que ser del inicio de la serie temporal, o del final de la misma. Hay autores que hacen lo primero, pero hay otros que prefieren lo segundo. Aquí vamos a descartar los $m - 1$ primeros elementos, tal y como se hace en Kanzler (1999). En cualquier caso, la

diferencia entre eliminar elementos del principio o del final de la serie es pequeña; y más aún si la serie temporal en estudio es grande, y el valor de m pequeño.

Con todo lo dicho, la fórmula de cálculo de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$ es:

$$C_{1,n-m+1}(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n-m+1}{2}} \sum_{s=m}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n \chi_{\epsilon}(|u_s^1 - u_t^1|)$$

Y utilizando la notación de Kanzler (1999) sería:

$$C_{1,n-m+1}(\epsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=m}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n I_{\epsilon}(X_s, X_t)$$

Cálculo de $T_{m,n}(\epsilon)$.

$T_{m,n}(\epsilon)$ se define en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) del modo que sigue:

$$T_{m,n}(\epsilon) = C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n}(\epsilon)^m$$

Introduciendo el cambio de $C_{1,n}(\epsilon)$ por $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$, queda:

$$T_{m,n}(\epsilon) = C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m$$

En Kanzler (1999) no se define $T_{m,n}(\epsilon)$, y se habla directamente de $C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m$, que es precisamente su valor.

Cálculo de $C_n(\epsilon)$.

Comenzamos con la expresión matemática de $C_n(\epsilon)$ presentada en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996):

$$C_n(\epsilon) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \chi_{\epsilon}(|u_s - u_t|)$$

Las modificaciones que se van a llevar a término son similares a las hechas en la fórmula de $C_{m,n}(\epsilon)$. Es decir, en lugar de promediar la función característica $\chi_{\epsilon}(|u_s - u_t|)$ para $1 \leq s \leq n$ y $1 \leq t \leq n$, se hará para $1 \leq s < t \leq n$. Así, pasaremos de promediar n^2 términos a promediar $\binom{n}{2}$ términos. Este cambio se introduce para eliminar las comparaciones de un elemento de la serie consigo mismo (por ejemplo, no tendría sentido calcular $\chi_{\epsilon}(|u_1 - u_1|)$), y para evitar repetir comparaciones de dos elementos (por ejemplo, calcular $\chi_{\epsilon}(|u_1 - u_2|)$, es lo mismo que calcular $\chi_{\epsilon}(|u_2 - u_1|)$).

Con las modificaciones indicadas queda:

$$C_n(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n \chi_{\epsilon}(|u_s - u_t|)$$

Quedando algo muy parecido a la fórmula de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$. La diferencia está en que el cálculo de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$ se lleva a cabo contando a partir del elemento de la serie en la posición m , mientras que el cálculo de $C_n(\epsilon)$ se realiza contando a partir del primer elemento de la serie. Nótese también que $C_n(\epsilon)$ se puede expresar fácilmente haciendo uso de la fórmula de $C_{m,n}(\epsilon)$; de hecho $C_n(\epsilon) = C_{1,n}(\epsilon)$.

Finalmente, con la notación de Kanzler (1999) escribiríamos:

$$C_n(\epsilon) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n I_\epsilon(X_s, X_t)$$

Cálculo de $K_n(\epsilon)$.

La fórmula que da Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) es:

$$K_n(\epsilon) = \frac{1}{n^3} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \chi_\epsilon(|u_r - u_s|) \chi_\epsilon(|u_s - u_t|)$$

Los cambios a introducir son análogos a los acometidos en $C_n(\epsilon)$. En este caso estamos comprando ternas de valores de la serie temporal. Con la intención de suprimir las ternas repetidas y las ternas en donde un elemento se compara consigo mismo, sustituimos los sumatorios $1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$ y $1 \leq t \leq n$ por $1 \leq r < s < t \leq n$. De esta manera, el número de ternas sería $\binom{n}{3}$, y no n^3 .

La expresión queda como se muestra a continuación:

$$K_n(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=r+1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^n \chi_\epsilon(|u_r - u_s|) \chi_\epsilon(|u_s - u_t|)$$

Por otro lado, en Kanzler (1999) se da:

$$K_n(\epsilon) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n \sum_{s=t+1}^n \sum_{r=s+1}^n [I_\epsilon(X_t, X_s) I_\epsilon(X_s, X_r) + I_\epsilon(X_t, X_r) I_\epsilon(X_r, X_s) + I_\epsilon(X_s, X_t) I_\epsilon(X_t, X_r)]$$

Cálculo de $V_{m,n}(\epsilon)$.

La desviación típica de $T_{m,n}(\epsilon)$ se denota como $V_{m,n}(\epsilon)$ en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996); mientras que en Kanzler (1999) se denota con $\sigma_{m,n}(\epsilon)$. De aquí en adelante adoptaremos la primera opción, es decir, representaremos la desviación típica mediante $V_{m,n}(\epsilon)$. Sin embargo, en ambas referencias, las expresiones de cálculo son totalmente equivalentes. La diferencia entre ambas está en que la fórmula dada en Kanzler (1999) está mucho más simplificada; y por tanto será más cómoda de manejar.

En Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996), $V_{m,n}(\epsilon)$ se presenta como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}(K_n - C_n^2) + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [C_n^{2j}(K_n^{m-j} - C_n^{2m-2j}) - mC_n^{2m-2}(K_n - C_n^2)]$$

Con la intención de conseguir una mayor claridad se ha suprimido la dependencia de ϵ de los términos de la expresión.

Ahora vamos a ver qué proceso es el que simplifica la fórmula anterior, y conduce a la fórmula que da Kanzler (1999).

Operamos dentro del sumatorio:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}(K_n - C_n^2) + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [C_n^{2j}K_n^{m-j} - C_n^{2m} - mC_n^{2m-2}K_n + mC_n^{2m}]$$

Agrupamos términos dentro del sumatorio:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}(K_n - C_n^2) + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} [C_n^{2j}K_n^{m-j} + (m-1)C_n^{2m} - mC_n^{2m-2}K_n]$$

Descomponemos el sumatorio en tres nuevos sumatorios:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}(K_n - C_n^2) + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j}K_n^{m-j} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} (m-1)C_n^{2m} - 2 \sum_{j=1}^{m-1} mC_n^{2m-2}K_n$$

El segundo y tercer sumatorios son muy fáciles de calcular:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}(K_n - C_n^2) + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j}K_n^{m-j} + 2(m-1)^2C_n^{2m} - 2(m-1)mC_n^{2m-2}K_n$$

Operamos ahora en el primer término del segundo miembro:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = m(m-2)C_n^{2m-2}K_n - m(m-2)C_n^{2m} + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j}K_n^{m-j} + 2(m-1)^2C_n^{2m} - 2(m-1)mC_n^{2m-2}K_n$$

Agrupamos el primer término con el último teniendo en cuenta que tienen como factores comunes $mC_n^{2m-2}K_n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}V_{m,n}^2 = & -m(m-2)C_n^{2m} + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + 2(m-1)^2 C_n^{2m} \\ & + (m-2-2(m-1))mC_n^{2m-2}K_n \end{aligned}$$

Simplificamos el paréntesis que ha resultado, y volvemos a operar:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = -m(m-2)C_n^{2m} + K_n^m - C_n^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + 2(m-1)^2 C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n$$

Agrupamos ahora los términos que tienen como factor común C_n^{2m} :

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + [-m(m-2) - 1 + 2(m-1)^2]C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n$$

Operamos dentro del corchete:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + [-m^2 + 2m - 1 + 2m^2 - 4m + 2]C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n$$

Tras estas últimas operaciones, simplificamos:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + [m^2 - 2m + 1]C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n$$

Teniendo en cuenta que $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$, queda:

$$\frac{1}{4}V_{m,n}^2 = K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + (m-1)^2 C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n$$

Despejamos $V_{m,n}^2$:

$$V_{m,n}^2 = 4 \left[K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + (m-1)^2 C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n \right]$$

Y ha resultado, finalmente, la fórmula que da Kanzler (1999). Tal y como comentábamos antes, ésta es mucho más sencilla que la expresión de partida.

Para terminar, se puede despejar el valor de la desviación típica $V_{m,n}$:

$$V_{m,n} = 2 \sqrt{K_n^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C_n^{2j} K_n^{m-j} + (m-1)^2 C_n^{2m} - m^2 C_n^{2m-2} K_n}$$

Cálculo de $W_{m,n}(\epsilon)$.

El estadístico de contraste se presenta en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) como sigue:

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n} \frac{T_{m,n}(\epsilon)}{V_{m,n}(\epsilon)}$$

Pero aquí hay que volver a hacer un cambio. Hay que tener en cuenta que en el cálculo de $C_{m,n}(\epsilon)$ se utilizan $n - m + 1$ m-historias; y que el cálculo de $C_{1,n-m+1}(\epsilon)$ se basa en $n - m + 1$ elementos de la serie. En consecuencia, en la fórmula de $W_{m,n}(\epsilon)$ hay que sustituir \sqrt{n} por $\sqrt{n - m + 1}$. Resulta:

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n - m + 1} \frac{T_{m,n}(\epsilon)}{V_{m,n}(\epsilon)}$$

En Kanzler (1999) se expone:

$$W_{m,n}(\epsilon) = \sqrt{n - m + 1} \frac{C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m}{V_{m,n}(\epsilon)}$$

Evidentemente, esta expresión es idéntica a la anterior, ya que $T_{m,n}(\epsilon) = C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n-m+1}(\epsilon)^m$.

4.3 RECOMENDACIONES EN LA ELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS ϵ Y m . KANZLER (1999).

Uno de los problemas que presenta el test BDS es la elección de los parámetros ϵ y m . En Kanzler (1999) podemos encontrar algunas recomendaciones en esta elección. En su trabajo realizó diversas simulaciones con el objeto de estudiar los resultados que proporcionaban distintos valores de ϵ y m . Utilizó series temporales de tamaños 50, 100, 250, 500, 750 y 1000; tomando 25000 muestras para cada uno de dichos tamaños.

El valor del parámetro ϵ , al igual que en Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996), se expresa en función de la desviación típica de los elementos de la serie:

$$\epsilon = r\sigma$$

siendo r una constante. En Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996) se toma $r = 0.5$ (o equivalentemente $\epsilon/\sigma = 0.5$); pero Kanzler (1999) estudia distintos valores de la relación ϵ/σ , para intentar determinar el valor más apropiado para la misma.

Las principales conclusiones que, en este aspecto, obtiene Kanzler (1999) son recogidas en M. Matilla García y J. Rodríguez Ruíz (2005), y son:

- Cuanto menor sea la dimensión de inmersión m , mejores serán las propiedades de las muestras pequeñas, cualesquiera que sean los valores del tamaño de la muestra n , y el valor de la relación ϵ/σ .
- Aumentar el tamaño muestral siempre mejora las propiedades de la muestra pequeña, cualquiera que sea la dimensión m y la relación ϵ/σ .
- La variación de la relación ϵ/σ modifica drásticamente la forma de la distribución, siendo poco evidente cuál es el valor de la relación que ofrece, en general, mejores propiedades.

Por lo que se refiere a la elección del valor de ϵ/σ , en Kanzler (1999), se concluye que $\epsilon/\sigma = 1.5$ proporciona buenos resultados para valores pequeños de la dimensión de inmersión m ; sin embargo, la relación $\epsilon/\sigma = 2$ resulta más apropiada para valores de m mayores. Aunque no queda del todo claro a partir de qué valor de m es conveniente pasar de $\epsilon/\sigma = 1.5$ a $\epsilon/\sigma = 2$.

4.4 REFERENCIAS.

Referencias principales.

- W.A. Brock, W.D. Dechert, J.A. Scheinkman y B. LeBaron. A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews* 15 (1996), 197-235.
- L. Kanzler. Very fast and correctly sized estimation of the BDS statistic. Department of Economics of Oxford University (1999).
- M. Matilla García y J. Rodríguez Ruíz. Aplicabilidad del test BDS al análisis de series económicas. *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 23, número 002 (2005).

Otras referencias.

- W.A. Brock, W.D. Dechert y J.A. Scheinkman. A Test for Independence Based On the Correlation Dimension. Department of Economics, University of Wisconsin at Madison, University of Houston, and University of Chicago (1987).
- W.D. Dechert. An Application of Chaos Theory to Stochastic and Deterministic Observations. Department of Economics, University of Houston (1989).
- M. Denker y G. Keller. On U-Statistics and von Mises Statistics for Weakly Dependent Processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 64 (1983), 505-522.
- M. Denker y G. Keller. Rigorous Statistical Procedures for Data from Dynamical Systems. *Journal of Statistical Physics*, 44 (1986), 67-93.
- P. Grassberger y I. Procaccia. Measuring the Strangeness of Strange Attractors. *Physics*, 9D, 189 (1983).
- D. Pollard. *Convergence of Stochastic Processes*. Springer-Verlag. New York (1984).
- R.J. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, New York (1980).

CAPÍTULO 3

ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS TEST

Vamos a llevar a cabo un estudio comparativo de los test que fueron presentados y explicados en el capítulo anterior. Estos son:

- Test de M. Matilla y M. Ruíz.
- Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán
- Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón.
- Test BDS.

El objeto del estudio es determinar qué test funciona mejor en la detección de dependencia en series temporales. Para ello se aplicarán todos los test a diversas series temporales; se recurrirá a series de diferentes tipos, pretendiendo que el estudio sea lo más completo posible.

En las pruebas que se llevarán a cabo se irán variando los tamaños de las series temporales, y se emplearán varios niveles de confianza. También, y dependiendo del test que se esté aplicando, se utilizarán distintos valores para los parámetros característicos de cada método.

1. INTRODUCCIÓN. CÓMO HACER EL ESTUDIO COMPARATIVO.

El método para llevar a cabo el estudio comparativo consistirá en aplicar los métodos que fueron presentados en el capítulo 2 a las mismas series temporales. Recordemos que los test que fueron introducidos, descritos y explicados en el capítulo anterior, fueron los siguientes:

- Test de M. Matilla y M. Ruíz.
- Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán
- Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón.
- Test BDS.

Al aplicar los métodos a las mismas series, podremos comparar los resultados que se obtienen con unos y otros, y finalmente se podrá dilucidar cuál ofrece un mejor funcionamiento en cada caso.

En el estudio se incluirán series de diferentes tipos. El propósito es abarcar una gran variedad de casos con el objeto de que la completitud del estudio sea lo mayor posible. Las series que se tratarán serán de los siguientes tipos:

- Series temporales deterministas.
- Series temporales idénticamente distribuidas.
- Series temporales estocásticas.

A la hora de aplicar los test a las mismas series temporales hay que superar una dificultad; ésta es decidir cuáles serán los tamaños de las series que serán testadas. El buen funcionamiento de algunos de los test es más fácilmente observable para unos determinados tamaños de la serie que para otros. A esto último se une el hecho de que, según cuál sea el tamaño de la serie, para algunos test puede llegar a ser bastante complicado la elección de los parámetros característicos necesarios para su aplicación. También hay que tener presente que los valores escogidos para los tamaños de las series tienen que ser representativos del rango de valores dentro del cual se realiza el estudio.

Una vez escogidos los tamaños de las series temporales, se tendrán en cuenta las recomendaciones que los autores de cada test hacen para la aplicación de sus test; dichas recomendaciones hacen alusión a los parámetros con que debe aplicarse cada test. En unos pocos casos no se podrá respetar algunos de esos criterios por las dificultades ofrecidas por el tamaño de la serie. En otros casos también se introducirán pequeñas variaciones en las reglas para la elección de los parámetros, con el fin de mejorar el funcionamiento del test en cuestión.

1.1 DISCUSIÓN SOBRE LOS VALORES DE LOS DIFERENTES PARÁMETROS DEL ESTUDIO COMPARATIVO.

En este apartado vamos a enumerar y comentar los parámetros que hay que fijar para realizar el estudio comparativo. Discutiremos en cada caso los criterios que se seguirán para fijar estos; también concretaremos valores para algunos de ellos.

Dimensión de inmersión (m).

Cada test sigue un criterio diferente para fijar el valor del parámetro m . A continuación mostramos la regla que vamos a seguir para fijarlo en cada uno de los test:

- Test de M. Matilla y M. Ruíz: se tomarán los dos mayores valores de m que verifiquen $5m! \leq T$, siendo T el tamaño de la serie. Los autores del test recomiendan que el valor de este parámetro esté dentro del rango $4 \leq m \leq 6$; en nuestro estudio respetaremos esta consideración, y tomaremos siempre dos valores para m que estando dentro de dicho rango, aunque no cumplan la restricción $5m! \leq T$, sean los que más cerca estén de cumplirla.
- Test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán: en este caso elegiremos, dado el tamaño de la serie T , los dos mayores valores de m que cumplan la condición $5m! \lesssim \left\lfloor \frac{T-1}{m-1} \right\rfloor$. Además se tendrá que cumplir $4 \leq m \leq 7$, de modo que si se da la situación en que la condición $5m! \lesssim \left\lfloor \frac{T-1}{m-1} \right\rfloor$ no la cumplan dos valores dentro de ese rango, entonces se tomarán los dos valores que más se aproximen a cumplirla.
- Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón: para aplicar el test 1 de este método se tomarán, sin ninguna restricción adicional, los dos valores de m que mejor cumplan $m(m!) \approx T$. Para los test 2 y 3 se aplicará dicha condición a cada una de las ventanas en que se divida la serie temporal; pero para estos test no se tomarán dos valores para m , sino uno sólo.
- Test BDS: en cada prueba se tomarán los valores $m = 2, 3, \dots, 7, 8$.

Tamaño de la serie temporal (T).

Como ya se ha comentado, una de las dificultades de nuestro estudio comparativo es la definición de las longitudes de las series que van a ser estudiadas.

El test BDS no ofrece ningún problema en relación al tamaño de la serie temporal; cualquiera que sea ese tamaño, su aplicación no entraña dificultades. En la otra cara de la moneda tenemos el método de J. S. Cánovas y A. Guillamón; concretamente los test 2 y 3 descritos en dicho método requieren la división de la serie temporal en varias ventanas, las cuales tienen que subdividirse en nuevas ventanas de longitud m ; con el fin de que estas divisiones no conduzcan a la pérdida de elementos, se escogerán los valores de T de nuestro estudio comparativo atendiendo precisamente a estos test.

Para que los test 2 y 3 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón proporcionen buenos resultados, es indispensable que la serie temporal se divida en un número de ventanas lo suficientemente grande; fijemos este número en, como mínimo, 20. Teniendo en cuenta esto último y que las ventanas serán de longitud $m(m!)$, calculamos a continuación los valores de T en función de la dimensión de inmersión m y del número de ventanas N :

- Para $m = 3$, $m(m!) = 18$:

$$N = 20 \Rightarrow T = Nm(m!) = 360$$

$$N = 40 \Rightarrow T = Nm(m!) = 720$$

$$N = 60 \Rightarrow T = Nm(m!) = 1080$$

$$N = 80 \Rightarrow T = Nm(m!) = 1440$$

· Para $m = 4$, $m(m!) = 96$:

$$N = 20 \Rightarrow T = Nm(m!) = 1920$$

$$N = 40 \Rightarrow T = Nm(m!) = 3840$$

$$N = 60 \Rightarrow T = Nm(m!) = 5760$$

$$N = 80 \Rightarrow T = Nm(m!) = 7680$$

$$N = 100 \Rightarrow T = Nm(m!) = 9600$$

· Para $m = 5$, $m(m!) = 600$:

$$N = 20 \Rightarrow T = Nm(m!) = 12000$$

$$N = 25 \Rightarrow T = Nm(m!) = 15000$$

$$N = 30 \Rightarrow T = Nm(m!) = 18000$$

El valor de dimensión de inmersión $m = 3$ es muy poco utilizado, pero si se desea aplicar los test 2 y 3 de J. S. Cánovas y A. Guillamón a series de tamaño relativamente pequeño, no queda otra alternativa que recurrir a dicho valor de m .

Los tamaños de las series temporales de nuestro estudio comparativo serán, por tanto, 360, 720, 1080, 1440, 1920, 3840, 5760, 7680, 9600, 12000, 15000 y 18000.

Nivel de confianza.

En cuanto al nivel de confianza para realizar los test, se utilizarán los valores más habituales, es decir, los niveles de confianza del 90%, del 95% y del 99%.

Otros parámetros.

Además de los parámetros ya comentados, hay test que requieren la concreción de los valores de otros parámetros:

· Test de J. S. Cánovas y A. Guillamón: para los test 2 y 3 hay que elegir el número de ventanas en que ha de dividirse la serie temporal; pero éste ya fue fijado en el momento en que se determinaron los tamaños T de las series temporales.

· Test BDS: para este test necesitamos escoger el valor de la relación ϵ/σ . Aplicaremos el test con los valores más habituales de ϵ/σ , que son 0.5, 1, 1.5 y 2.

En la siguiente tabla mostramos un resumen de los parámetros escogidos para realizar el estudio comparativo de los test:

T	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS $m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$
			T1	T2	T3	
360	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 3,$ $N = 20$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
720	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 5, 6$	$m = 3,$ $N = 40$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
1080	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 5, 6$	$m = 3,$ $N = 60$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
1440	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 5, 6$	$m = 3$ $N = 80$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
1920	$m = 4, 5$	$m = 4, 5$	$m = 5, 6$	$m = 4,$ $N = 20$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
3840	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 5, 6$	$m = 4,$ $N = 40$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
5760	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 6, 7$	$m = 4,$ $N = 60$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
7680	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 6, 7$	$m = 4$ $N = 80$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
9600	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 6, 7$	$m = 4$ $N = 100$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
12000	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 6, 7$	$m = 5,$ $N = 20$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
15000	$m = 5, 6$	$m = 4, 5$	$m = 6, 7$	$m = 5$ $N = 25$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	
18000	$m = 5, 6$	$m = 5, 6$	$m = 6, 7$	$m = 5,$ $N = 30$	$m = 2, \dots, 8$ ϵ/σ $= 0.5, 1, 1.5, 2$	

Tabla 3.1. Parámetros del estudio comparativo.

1.2 SERIES TEMPORALES A ESTUDIAR.

Ya comentamos que en nuestro estudio se iba a tratar series temporales deterministas, idénticamente distribuidas y estocásticas.

A continuación presentamos, de forma concreta, cuáles son las series que vamos a analizar:

- Series temporales deterministas:
 - Serie $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$, $x_1 = 0.45$.
 - Serie $x_{n+2} = 4x_n(1 - x_n)$, $x_1 = 0.45$, $x_2 = 0.3$.
- Series temporales idénticamente distribuidas (i.i.d.):
 - Serie $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$.
 - Serie $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$.
- Series temporales estocásticas:
 - Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
 - Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.
 - Serie $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
 - Serie $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.

Analizar las series temporales deterministas es simple: se generan mediante un programa de cálculo, y seguidamente se estudian con cada uno de los métodos. Sin embargo, para el análisis de las series temporales idénticamente distribuidas y de las series temporales estocásticas, hay que realizar repeticiones; en nuestro estudio comparativo realizaremos 400 repeticiones para las series de estos tipos.

2. RESULTADOS DEL ESTUDIO COMPARATIVO.

Mostramos ahora los resultados obtenidos del estudio comparativo realizado; lo hacemos distinguiendo los tipos de series temporales analizadas (deterministas, idénticamente distribuidas y estocásticas).

Presentaremos, en primer lugar, los resultados completos del análisis de las series deterministas.

Todos los resultados concernientes a las series idénticamente distribuidas (i.i.d.) y estocásticas, se recogen en el Anexo 1; aquí presentaremos un resumen de dichos resultados. Para ello tenemos que concretar, para cada uno de los métodos, el valor que ha de tener cada uno de los parámetros (recordemos que para la mayoría de los métodos se han obtenido resultados para diferentes valores de un mismo parámetro). El nivel de confianza elegido es del 95%. En la tabla que se muestra a continuación damos los valores de los parámetros para los que vamos a presentar los resultados:

T	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS
			T1	T2	T3	
360	$m = 4$	$m = 4$	$m = 4$	$m = 3,$ $N = 20$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
720	$m = 5$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 3,$ $N = 40$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
1080	$m = 5$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 3,$ $N = 60$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
1440	$m = 5$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 3$ $N = 80$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
1920	$m = 5$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 4,$ $N = 20$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
3840	$m = 6$	$m = 5$	$m = 5$	$m = 4,$ $N = 40$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
5760	$m = 6$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 4,$ $N = 60$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
7680	$m = 6$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 4$ $N = 80$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
9600	$m = 6$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 4$ $N = 100$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
12000	$m = 6$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 5,$ $N = 20$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
15000	$m = 6$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 5$ $N = 25$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	
18000	$m = 6$	$m = 6$	$m = 6$	$m = 5,$ $N = 30$	$m = 5$ ϵ/σ $= 1, 1.5$	

Tabla 3.2. Valores asignados a los parámetros para la comparación del funcionamiento de los test en el análisis de las series temporales idénticamente distribuidas y de las series temporales estocásticas.

2.1 RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LAS SERIES TEMPORALES DETERMINISTAS.

Recordemos que las series deterministas que incluye nuestro estudio son:

- Serie $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+2} = 4x_n(1 - x_n), x_1 = 0.45, x_2 = 0.3$.

Seguidamente comentamos cada una de éstas.

Serie $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$, $x_1 = 0.45$.

En líneas generales se puede afirmar que todos los métodos detectan que ésta serie no es idénticamente distribuida (i.i.d.).

Sólo para los dos tamaños menores (360 y 720) se da algún fallo para alguno de los métodos. Para el resto de tamaños (1080, 1440, 1920, 3840, 5760, 7680, 9600, 12000, 15000 y 18000) todos los test proporcionan los resultados esperados.

Para $T = 360$ falla el test 3 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón (para los tres niveles de confianza) y falla también el test BDS, aunque sólo para los valores de los parámetros característicos que se citan a continuación:

- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3,4$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7$.

En el caso de $T = 720$ sólo falla el test BDS, y sólo para unos valores muy concretos de los parámetros: nivel de confianza del 99%, $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.

Serie $x_{n+2} = 4x_n(1 - x_n)$, $x_1 = 0.45$, $x_2 = 0.3$.

Los métodos detectan, salvo excepciones, que esta serie no es idénticamente distribuida (i.i.d.). Para esta serie la eficacia de los test disminuye ligeramente en comparación con la serie determinista anterior. Pero los resultados siguen siendo satisfactorios.

Para el tamaño $T = 360$ no funciona correctamente el test 3 del método de J. S. Cánovas y A. Guillamón (para los niveles de confianza del 95% y del 99%). Para este tamaño tampoco se obtienen los resultados esperados con el test BDS en los casos siguientes:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Para el resto de tamaños de la serie únicamente se obtienen resultados insatisfactorios para el test BDS, y solamente para determinados valores de los parámetros del test. A continuación se presentan, para cada tamaño de la serie temporal, los parámetros que hacen fallar el test BDS:

· $T = 720$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

· $T = 1080$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7$.

· $T = 1440$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6$.

· $T = 1920$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4, 5$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6, 7$.

· $T = 3840$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4, 5$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4, 5$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5, 6$.

· $T = 5760$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4, 5$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4, 5$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4, 5$.

· $T = 7680$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 4$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.

· $T = 9600$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.

· $T = 12000$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.

· $T = 15000$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3, 4$.

· $T = 18000$:

- Nivel de confianza del 90%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 95%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.
- Nivel de confianza del 99%: para $\epsilon/\sigma = 1.5$ y $m = 3$.

2.2 RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LAS SERIES TEMPORALES IDÉNTICAMENTE DISTRIBUIDAS.

Las series temporales idénticamente distribuidas (i.i.d.) que han sido analizadas son:

- Serie $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$.
- Serie $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$.

Como se comentó con anterioridad, los resultados obtenidos del estudio de las dos series anteriores se detallan en el Anexo 1; pero aquí se dará en resumen de dichos resultados.

Para cada serie temporal se va a tomar del Anexo 1 los porcentajes de rechazo de la hipótesis nula (para los tamaños y parámetros señalados en la Tabla 3.2, y para un nivel de confianza del 95%). Seguidamente se hará una representación gráfica de todos esos porcentajes con el objeto de comparar el funcionamiento de los test utilizados.

En el test BDS se han considerado dos posibilidades: caso 1 ($m = 5$ y $\epsilon/\sigma = 1$) y caso 2 ($m = 5$ y $\epsilon/\sigma = 1.5$).

Serie $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

T	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	6.5	8.25	1	5	0.25	25.5	10.5
720	10.25	4	2.75	5.25	0	20.25	9.75
1080	8.25	4	3.75	3.75	0.75	13.25	7.75
1440	6.25	4.5	5	4.25	0	10.5	3.25
1920	5.75	4	4.75	2.25	0.75	5.5	4.25
3840	20	6	1.75	3.5	0.75	8.25	7.75
5760	14.75	4.75	3.25	2.75	1	5.5	4.25
7680	11.75	4.25	3.75	2.25	1.25	4.5	5.75
9600	9.5	4	2.75	2.75	1	5.75	4.75
12000	7.75	3.5	4.75	1.25	2.75	4.5	4
15000	10.25	3.5	4	1.5	2.25	4.5	4
18000	8.75	4.25	1.5	1.25	1.75	4.25	4.25

Tabla 3.3. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

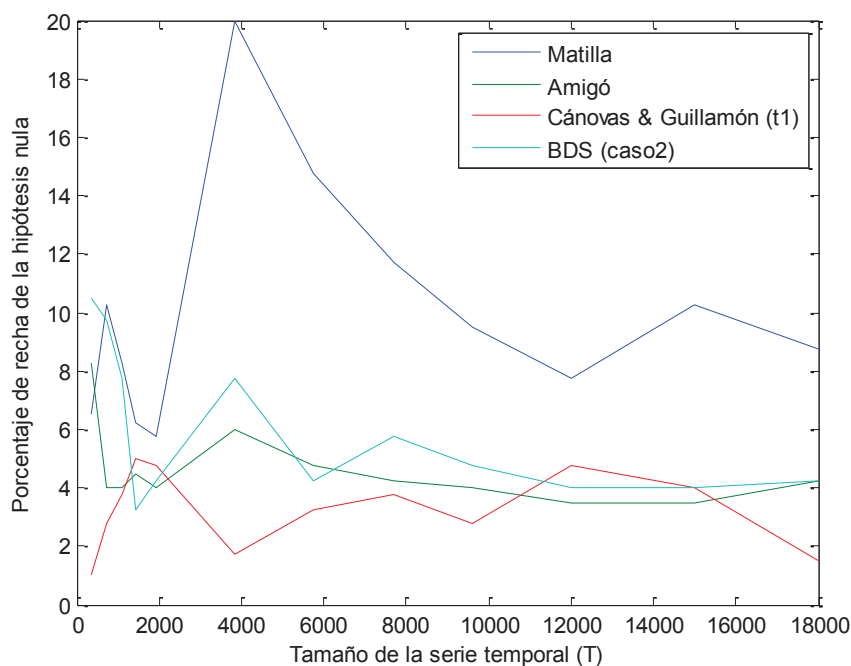


Figura 3.1. Comparación gráfica del funcionamiento de los test en el análisis de la serie $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$.

Serie $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	6.5	3	1	5	0	7.75	6.75
720	8.75	5.75	4.25	3.25	0	4.75	6.5
1080	9.25	5	4	3.5	0.25	5.75	4.25
1440	6.75	4.25	5.5	3.5	0.5	4	2.5
1920	8.25	3.5	2.75	2.75	1	7	5.5
3840	20.5	3.75	2.25	4.25	0.75	6	6
5760	13.25	6	4.25	3.5	0.25	7.25	7
7680	10	4	5	3.75	1	4.5	3.5
9600	11	3.75	5.5	4	1	5.25	6
12000	8.25	5.25	4.75	1.75	2.25	6.25	6
15000	9.5	4	3.25	2.25	1.75	5.5	6
18000	7.25	4.75	2.5	2.5	1.25	4	5

Tabla 3.4. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

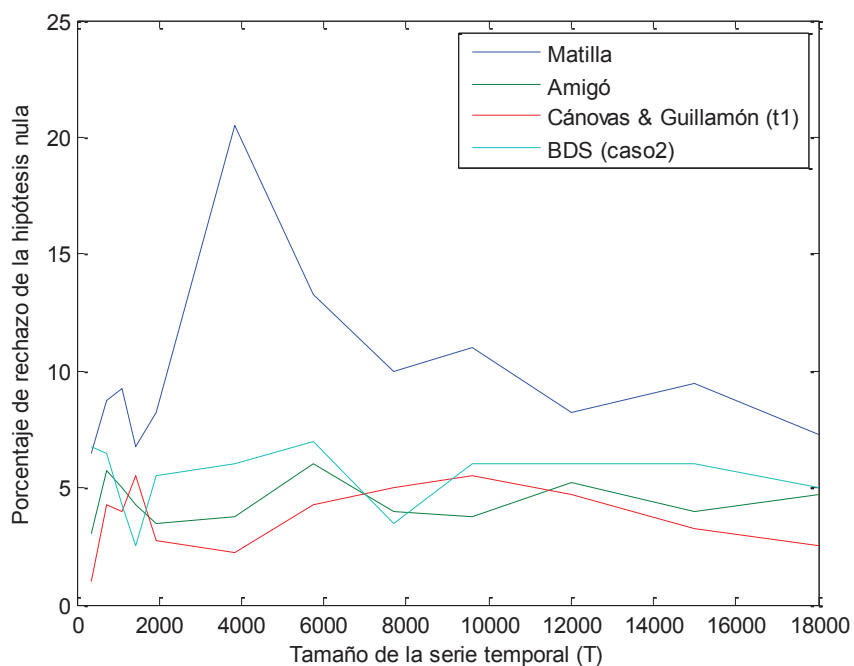


Figura 3.2. Comparación gráfica del funcionamiento de los test en el análisis de la serie $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$.

2.3 RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LAS SERIES TEMPORALES ESTOCÁSTICAS.

Las series temporales estocásticas que han formado parte de nuestro estudio son:

- Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.

Volvemos a recordar que los resultados completos obtenidos para éstas se pueden consultar en el Anexo 1, y que aquí daremos únicamente un resumen de esos resultados.

Del mismo modo que se hizo para los resultados de las series idénticamente distribuidas (i.i.d.), vamos a presentar una comparación gráfica de los test para algunos casos concretos (tomando un nivel de confianza del 95%, y tomando los tamaños y parámetros de la Tabla 3.2).

Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	54.75	20.25	2.75	6	0	82.5	57.25
720	96	43	14.5	3.75	0	96.75	81.75
1080	99.5	63.5	21	2.75	0.25	100	94.5
1440	100	84	30.5	3.75	0.75	100	97.5
1920	100	92.25	33	2.75	3	100	100
3840	100	100	17.5	5,25	3	100	100
5760	100	100	92.75	5.75	4.25	100	100
7680	100	100	99.25	3	7	100	100
9600	100	100	99.75	5.75	4.75	100	100
12000	100	100	100	11.75	61.75	100	100
15000	100	100	99.5	14	71.5	100	100
18000	100	100	99.75	15	73.75	100	100

Tabla 3.5. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

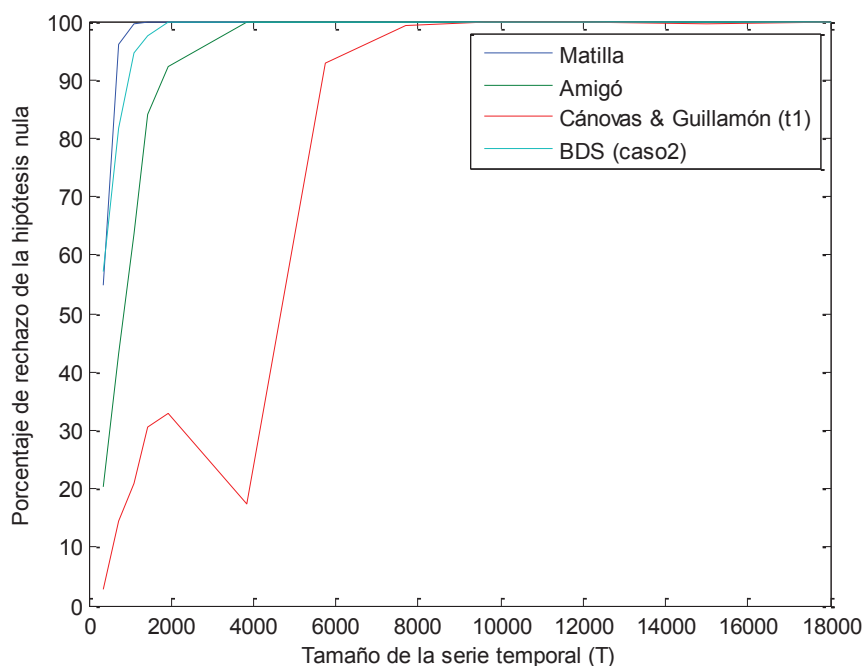


Figura 3.3. Comparación gráfica del funcionamiento de los test en el análisis de la serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.

Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	46.25	15.75	3	3.75	0	51.5	53.25
720	87.75	37	11.25	4	0	81.5	85
1080	98.75	62.25	16.25	4.5	1	90.5	94.25
1440	100	74	26	3.5	0	98	99.75
1920	100	86.25	21.5	4	1.75	99.75	99.5
3840	100	99	13.75	5.5	3.25	100	100
5760	100	100	87	6.75	1.5	100	100
7680	100	100	93.5	2.75	5.25	100	100
9600	100	100	97.25	3.5	4.75	100	100
12000	100	100	98	6.75	41.5	100	100
15000	100	100	98.5	8.25	59.5	100	100
18000	100	100	97.25	9.25	61	100	100

Tabla 3.6. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

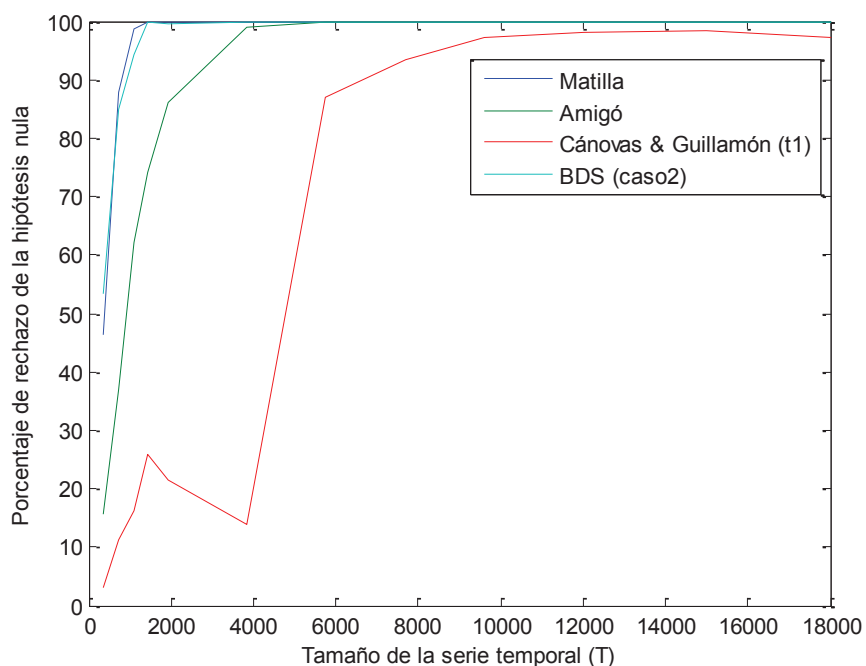


Figura 3.4. Comparación gráfica del funcionamiento de los test en el análisis de la serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.

Serie $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	100	99.75	29.5	8	0.5	100	100
720	100	100	99.75	18	5	100	100
1080	100	100	100	18	5.75	100	100
1440	100	100	100	23	8	100	100
1920	100	100	100	82	93.5	100	100
3840	100	100	99.25	99.5	100	100	100
5760	100	100	100	100	100	100	100
7680	100	100	100	100	100	100	100
9600	100	100	100	100	100	100	100
12000	100	100	100	100	100	100	100
15000	100	100	100	100	100	100	100
18000	100	100	100	100	100	100	100

Tabla 3.7. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

Serie $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

	M. Matilla y M. Ruíz	J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán	J. S. Cánovas y A. Guillamón			BDS	
			T1	T2	T3	Caso 1	Caso 2
360	100	99.75	29.5	12.25	1	100	100
720	100	100	100	16	3.5	100	100
1080	100	100	100	16.25	5	100	100
1440	100	100	100	24	7	100	100
1920	100	100	100	76.5	88.5	100	100
3840	100	100	99.5	96.5	100	100	100
5760	100	100	100	99.75	100	100	100
7680	100	100	100	100	100	100	100
9600	100	100	100	100	100	100	100
12000	100	100	100	100	100	100	100
15000	100	100	100	100	100	100	100
18000	100	100	100	100	100	100	100

Tabla 3.8. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán; de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1, 2 y 3) y para el test BDS. Los valores de los parámetros son los recogidos en la Tabla 3.2.

3. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO COMPARATIVO.

En general, todos los métodos proporcionan buenos resultados en el análisis de series temporales deterministas. Únicamente el método de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3) y el test BDS fallan para ciertos valores de los parámetros; el primero para tamaños de la serie pequeños (del orden de 360 elementos) y el segundo para algunas combinaciones de los valores de ϵ/σ y m .

En cuanto a las series temporales idénticamente distribuidas (i.i.d.), podemos afirmar que los métodos que ofrecen un mejor comportamiento son el test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán, el test de J. S. Cánovas y A. Guillamón y el test BDS; siendo los dos primeros ligeramente mejores que el test BDS.

Finalmente, en el estudio de las series temporales estocásticas, el mejor test es, sin duda, el test BDS; después de éste tendríamos el test de M. Matilla y M. Ruíz, y luego el test de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán. El método de J. S. Cánovas y A. Guillamón sólo presenta buenos resultados para tamaños de la serie temporal suficientemente grandes, especialmente en el caso de los test 2 y 3, que no ofrecen resultados satisfactorios para valores pequeños de la longitud de la serie.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, se podría afirmar que el método que presenta el mejor funcionamiento en nuestro estudio comparativo es el test BDS. Hay que tener en consideración que este test ha de aplicarse siempre para un rango de valores de ϵ/σ y m ; en caso contrario se puede llegar a conclusiones erróneas (véase los resultados del análisis de las series temporales deterministas).

ANEXO 1

TABLAS CON LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS TEST

En este anexo se presentan los resultados que han sido obtenidos haciendo uso de los programas de cálculo Mathematica y Matlab.

En concreto, las series temporales de las que presentamos aquí los resultados son las siguientes:

· Series temporales idénticamente distribuidas (i.i.d.):

- Serie $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$.
- Serie $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$.

· Series temporales estocásticas:

- Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1,1]$, $x_1 = 0.45$.
- Serie $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0,1)$, $x_1 = 0.45$.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	10	29.25	12.25	8.25	8	10
	95%	6.5	20.75	8.25	5.75	1	5
	99%	1.75	9.5	1.5	1.5	0.25	1

Tabla A1.1. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	10.25	0.75
	95%	5	0.25
	99%	1.75	0.25

Tabla A1.2. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	71.75	74.25	86.25	90	92.5	95.5	99.25
			1	29.5	28.75	31.25	35.25	39.25	46.5	52.25
			1.5	16.5	15.5	17.75	16.5	19.25	17.75	19.5
			2	18.25	17.25	16.75	16.5	16.25	17.5	16.25
	95%	ϵ/σ	0.5	65.25	70.25	84.25	88.25	90.5	93.75	99
			1	23.5	23	24.5	25.5	32.25	38	43.75
			1.5	11	10.5	11.5	10.5	11.5	12	13.5
			2	9.5	9.25	11	10	11.5	11.25	10
	99%	ϵ/σ	0.5	57.25	63	78.5	83.5	87.25	92.75	98.75
			1	11.75	12.75	15	16.25	21.25	26.5	33.75
			1.5	2.25	2.75	2.5	3.25	3.75	4	4.75
			2	1.5	3	2.25	2.5	2.75	4	2.75

Tabla A1.3. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	7.25	16.5	8	9.75	9.25	6.75
	95%	4.25	10.25	4	6	2.75	3
	99%	2	3.5	1	0.75	0.25	1.5

Tabla A1.4. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	8.25	0.75
	95%	5.25	0
	99%	2.5	0

Tabla A1.5. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	60	72.75	75.25	81.5	91	93	96.25
			1	22.25	27.5	25.5	27.25	32.75	39.5	45.25
			1.5	13	16	14.75	14.75	16	13.75	14.25
			2	13.5	14.5	14.75	14	15	14.5	14.5
	95%	ϵ/σ	0.5	54.5	67.25	71.25	78.75	89.25	91.75	96
			1	15.25	16.75	19.25	20.25	25	31.25	34
			1.5	7.75	9	8.5	9.75	7.75	8.25	8.75
			2	8.75	8.25	9.75	9.75	9	8.25	7.75
	99%	ϵ/σ	0.5	45	55.5	62.5	72.75	84.5	89	93.75
			1	5	8	8.5	10.5	13.25	16.5	22.5
			1.5	2.25	2	3	2.75	3.75	3.75	3.25
			2	1.75	2.5	2	2.5	2.75	3.5	2.75

Tabla A1.6. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	7	14	9.25	8.5	8	7.25
	95%	3	8.25	4	4.5	3.75	4.75
	99%	0.5	3.5	0.25	1	0.5	1.25

Tabla A1.7. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	6.25	0.75
	95%	3.75	0.75
	99%	2.25	0.25

Tabla A1.8. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	57.5	62	72	79.75	87.25	91.25	93.75	
			1	19	20.5	21.5	22.5	22.75	25.25	30.75	
			1.5	13.25	12.75	13.75	12.25	12.25	12.75	12.25	
			2	12.5	12.75	13	14	12.25	11.75	11.5	
	95%	ϵ/σ	0.5	50	56.5	68.5	77.25	83.25	89.5	93	
			1	11.75	11.75	12	13.25	15.5	19.25	22.75	
			1.5	7	8.25	7.25	7.75	6.5	5.75	5.25	
			2	7.5	7.5	7.25	7.75	6.25	5.75	5.25	
	99%	ϵ/σ	0.5	37.75	42.5	59.5	70.75	79	86	92	
			1	3.75	1.5	3.5	4.25	6.5	8.5	11.5	
			1.5	1.75	2	2	1	2	2.25	1.75	
			2	2.25	1.5	2	1.25	1.5	1.25	1.25	

Tabla A1.9. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	7.25	10.5	5.75	9.5	10.5	11.25
	95%	3.5	6.25	4.5	5.25	5	4.75
	99%	1	2.75	1	1	1	0.75

Tabla A1.10. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	6.5	0.5
	95%	4.25	0
	99%	2	0

Tabla A1.11. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	55	59.5	70.75	73.25	81.25	90	93.25
			1	15	15.5	18	18.5	20	24.25	26.75
			1.5	11.25	9.25	9.25	10.5	11	10.5	9.75
			2	11.75	10.5	9.25	9.5	9	9.25	9.5
	95%	ϵ/σ	0.5	47	53.25	66.25	70	79.5	88.75	91.5
			1	7.5	10	9.75	10.5	12.75	17.5	19
			1.5	5	5.25	4.25	3.25	4.25	4.25	5.25
			2	5.5	4	4	3.75	4.25	3.75	4
	99%	ϵ/σ	0.5	35.5	43.25	52.25	58.75	74.75	84.5	88
			1	2.75	2	2.25	2.5	4.5	5.5	9.5
			1.5	1.75	1.25	0.5	1	0.75	1	1
			2	1	1	0.5	0.5	0.75	0.75	1

Tabla A1.12. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	6,5	9,25	9	9,75	8,75	9,5
	95%	3,5	5,75	4	4,75	4,75	5,25
	99%	1,25	1,75	0	0,75	0,25	1,25

Tabla A1.13. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 20$	$m = 4, N = 20$
Nivel de confianza	90%	2.75	2
	95%	2.25	0.75
	99%	2	0.25

Tabla A1.14. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	43.5	57.75	63.75	74	79.75	87.75	93.75
			1	11.25	12.75	11	10.25	13.5	16.75	20.5
			1.5	11.25	9.75	11.25	9.5	9	9.75	10
			2	10.5	9.5	10.75	9.5	10	9.25	8.25
	95%	ϵ/σ	0.5	34.75	49.75	57.5	68.5	76.75	86.5	92.75
			1	5.75	6.5	6.25	5.5	8	10	13.25
			1.5	6.75	6	5.25	4.25	4.75	4.75	4.25
			2	5.75	6.75	5	4	4.75	4.25	4
	99%	ϵ/σ	0.5	23.5	35.25	45.25	60	71.75	80.75	91.25
			1	2.25	1.25	2.5	2.5	2.5	3.75	5
			1.5	1.25	0.75	1.25	1	1	1	0.5
			2	1.75	1	1.5	1.5	1	1.25	0.5

Tabla A1.15. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	9.25	28	9.5	10.5	1.75	9.75
	95%	5.25	20	4.25	6	1.75	4
	99%	1.5	8.75	1.75	1.75	0	1

Tabla A1.16. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	3.5	2
	95%	3.5	0.75
	99%	3.5	0.25

Tabla A1.17. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	32	43.5	51	63.75	76.75	84	89.5
			1	13.5	13	15.25	15	16	18	19
			1.5	12.75	12.25	12.75	13.75	13	13	11.75
			2	13.25	11.5	12.5	13.25	13	12.25	12.75
	95%	ϵ/σ	0.5	24.5	36.25	46	57.25	71.25	80.25	87.5
			1	7.5	6.25	7.5	8.25	9.25	10	12.75
			1.5	6.25	6.5	6.25	7.75	7.75	7.5	8.25
			2	6.5	6.75	6.5	8.25	7.75	8.5	8.25
	99%	ϵ/σ	0.5	13.25	21.25	33.5	45.25	60.5	73.5	84.25
			1	2.75	1.5	2.25	2.75	3.5	4.75	5.25
			1.5	1.5	0.5	1.25	1.5	2	1.5	1.75
			2	1.75	0.5	0.75	1.25	1.5	1.5	1.5

Tabla A1.18. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	10.25	20	9.5	8.25	7.5	7.25
	95%	5.75	14.75	5.25	4.75	3.25	4.5
	99%	0.75	5.25	1.75	1.25	1	1

Tabla A1.19. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 60$	$m = 4, N = 60$
Nivel de confianza	90%	4.25	1.75
	95%	2.75	1
	99%	1.75	0

Tabla A1.20. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	29	35.75	46.75	59.75	70.5	76.25	84.25
			1	13	12.25	11	12.25	13.5	14.5	16.25
			1.5	8.5	8	8	9	8.25	9.25	8.75
			2	9.25	9	8.75	8	7.75	9	8.25
	95%	ϵ/σ	0.5	21.5	28.5	39	50.75	63.5	71.5	82.75
			1	6.5	6.25	6.5	5.5	7	8	8.75
			1.5	6.25	3.25	4.25	4.25	4.25	4.5	4.5
			2	6.25	3.75	3.25	4.75	4	4.5	4.75
	99%	ϵ/σ	0.5	11.25	17	25.75	38	51.25	64	78.5
			1	2.5	1.5	1.75	1.75	1.5	2	2.75
			1.5	1.25	1	0.5	0.25	0.5	0.5	0.5
			2	0.75	1	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5

Tabla A1.21. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	12.5	18.25	7	8.5	10	7.75
	95%	7	11.75	2.5	4.25	3.75	4.5
	99%	3.75	4.5	0.25	0.5	0.75	1

Tabla A1.22. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	2.25	1.75
	95%	2.25	1.25
	99%	1.75	0.25

Tabla A1.23. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	20.75	28.5	37	48	60.5	72	87
			1	11.75	11.5	11.5	11.25	11.75	11.75	14.25
			1.5	11	11.25	10.25	7.25	8.25	9	9.75
			2	12	10.5	9	7.5	8.5	9.25	9.25
	95%	ϵ/σ	0.5	14	20	30	40.25	53.25	67.5	83.25
			1	5	5.75	5.5	4.5	4.5	5	5.75
			1.5	5.25	5.5	6	5.75	4.5	4.5	5
			2	5.75	5.75	5.75	5.75	4.25	4.25	4.25
	99%	ϵ/σ	0.5	6.75	10.75	18	29.5	43.75	59.25	78
			1	0.75	1.75	1.5	0.75	0.75	1	1.25
			1.5	0.75	1.5	1.5	1.25	1	1.25	1.25
			2	1	1.25	1	1.5	1.25	1.25	1.5

Tabla A1.24. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	12.25	18.5	9.25	10.5	8.5	10
	95%	7	9.5	4.25	4	2.75	2.75
	99%	2	3.5	1	1.25	0	1

Tabla A1.25. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	2.75	1.25
	95%	2.75	1
	99%	2.25	0.25

Tabla A1.26. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	22.75	27.5	35.25	48.5	56.5	72.25	81.5
			1	12.75	11.5	10.5	10.5	10.25	11	12.75
			1.5	11.75	10.25	10	10.25	8.25	9	9
			2	11.75	10	10.75	9.5	8.25	8.25	8.25
	95%	ϵ/σ	0.5	15	19.5	27.25	39.5	51.25	67.75	77.25
			1	6.25	5.25	6.5	5.75	5.25	5.25	5.25
			1.5	7.5	5.5	5	4.75	4.5	4	3.75
			2	7.5	5.5	5.5	4.5	3.75	3.5	3.5
	99%	ϵ/σ	0.5	6.5	9	15.75	26.5	39.5	57.25	74
			1	1	1	1	0.25	0.75	0.5	0.25
			1.5	1	1.5	2	2	2	2	2
			2	1.25	1.25	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

Tabla A1.27. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	12.5	14.25	9.75	7.5	9	11.75
	95%	6.25	7.75	4	3.5	4.75	5.75
	99%	1.25	2.75	0.75	1.25	0.75	0.5

Tabla A1.28. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 20$	$m = 5, N = 20$
Nivel de confianza	90%	1.25	5.5
	95%	1.25	2.75
	99%	1.25	0.25

Tabla A1.29. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	20.25	27.75	36.5	46.25	59.5	65.25	78.75
			1	11	11.5	11.25	11	11	12.5	13.5
			1.5	9.25	9.75	9	10	9.75	8.75	8.75
			2	9.75	9.25	9.5	10.25	8.5	9.5	8.5
	95%	ϵ/σ	0.5	13.75	18.5	28.5	39.25	50.25	60	74.75
			1	4.75	5.5	5.5	4.5	5	5	6.25
			1.5	4.75	5	6.5	4	4.25	5.25	4.5
			2	4.5	5	6.25	4.5	4	5	4.5
	99%	ϵ/σ	0.5	4.75	9.5	15.25	26.75	36.75	51	67.25
			1	1	2	1.75	1.5	1	0.75	1
			1.5	1.75	1.25	1	0.75	0.75	0.75	0.75
			2	1.75	1.5	1	1	0.75	0.75	0.5

Tabla A1.30. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	9.5	14.75	7	9.25	7.75	8
	95%	5	10.25	3.5	3.5	4	4.5
	99%	2.25	3.25	0.75	0.75	1	0.75

Tabla A1.31. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 25$	$m = 5, N = 25$
Nivel de confianza	90%	1.5	3.5
	95%	1.5	2.25
	99%	1.5	0.25

Tabla A1.32. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	20.75	25.25	32.25	45.75	52.5	66.25	77.75
			1	10.75	9.75	9.25	10	10.75	9.75	11.75
			1.5	11	10.5	9.25	9	9	8	8
			2	10.25	9.25	8.75	9.25	8	8.25	7.75
	95%	ϵ/σ	0.5	11.25	17	24	36	47.5	59.25	73.75
			1	4.75	4.75	3.75	4.5	5	5.5	6
			1.5	6	5.5	3.75	4	4	4.25	3.75
			2	5.5	5.25	3.75	4	4.25	4	4.25
	99%	ϵ/σ	0.5	4.5	7.5	14	23.5	34.5	50.75	64.75
			1	1.5	1.25	1.25	1	1.25	1.25	1.75
			1.5	1.25	0.5	1.25	1.25	0.75	1.25	1
			2	1	0.5	1.5	0.75	1	1.5	1

Tabla A1.33. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	10.75	13.5	10.25	9.75	7.75	8.75
	95%	5.25	8.75	4.5	4.25	1.5	3
	99%	1	1.25	0.75	1.25	0.25	0.75

Tabla A1.34. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	1.5	4.25
	95%	1.25	1.75
	99%	1.25	0

Tabla A1.35. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	21.5	22	27	36.5	47	63.25	75.75	
			1	11	10.75	10	11.75	11.75	11.5	11.75	
			1.5	10.75	9.25	8	8.25	8.5	8.5	7.25	
			2	11	9.5	8.25	8	8.25	8.25	7.75	
	95%	ϵ/σ	0.5	11	14.75	19	27	37.75	57.5	71.25	
			1	5.75	4.25	5.5	4.25	5.25	5.5	6.25	
			1.5	6.25	5.5	4.5	4.25	4.25	4	5	
			2	6	5.25	4.5	4.5	3.75	4.25	4.5	
	99%	ϵ/σ	0.5	3	5.5	9.25	16.75	27.25	45.25	62.25	
			1	2	1.75	1	0.5	0.75	0.75	1.25	
			1.5	2	2.25	1.25	1.5	1.5	1	1	
			2	2	2.25	1.5	1.5	1.5	1	1	

Tabla A1.36. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	10.75	29	7.75	8.75	7.75	6.5
	95%	6.5	17.75	3	4.75	1	3.25
	99%	1.25	7	0.5	1	0	0.25

Tabla A1.37. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	8.75	0.5
	95%	5	0
	99%	2.5	0

Tabla A1.38. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	17.5	20.25	26.25	38.5	49.5	64.25	80.25
			1	12	10.75	12	13.75	16.75	18.5	19
			1.5	11.25	11	12.5	12.5	13.25	11.75	13.75
			2	11	13	14.5	16.25	15	15	14.75
	95%	ε/σ	0.5	10.25	13.5	19.75	29.25	43.5	57.5	77
			1	5.75	7	7.75	7.75	8.25	9.75	10.25
			1.5	5.25	6.75	7.25	6.75	6.25	6.5	6.25
			2	5.75	7.75	7.75	8	8	8.25	7.5
	99%	ε/σ	0.5	3.5	5.25	8.75	16.75	28.25	46.5	66.75
			1	0.75	2.25	2	2	1.75	2.25	3
			1.5	0.5	1.25	2	3	2.5	2.25	1.25
			2	1	1.75	2.25	2.5	2.5	2.75	2.25

Tabla A1.39. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	9.25	14.5	9.75	11.5	11	7.75
	95%	3.75	8.75	5.75	5.75	4.25	4.75
	99%	1.75	3	1.5	0.75	0.75	0.5

Tabla A1.40. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	5.5	0.75
	95%	3.25	0
	99%	1	0

Tabla A1.41. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	16	16.75	20	24.5	37.25	53.75	63.75
			1	11.5	11	11.5	9.25	10	12.25	12.75
			1.5	11.75	11	10.25	10.75	12	11.5	10.5
			2	12.25	12.25	14	12.25	13	13.75	12.75
	95%	ε/σ	0.5	9.75	10	13.5	17.25	29.25	43.75	56.5
			1	5.75	5.75	5.25	4.75	5	6.25	6.75
			1.5	6.5	6	7	6.5	6.25	6.25	6.25
			2	7.25	6.5	7.75	7	7.5	7.5	6.5
	99%	ε/σ	0.5	2.75	2.5	4.25	8.5	18.5	29	44.5
			1	1.5	1.75	1.5	1.25	1.5	1.5	1.5
			1.5	2	2	2	1.75	1	0.75	0.75
			2	3	2.75	2.5	1.25	1.25	1.5	1.5

Tabla A1.42. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	7.25	15.25	10.25	7.75	7.75	6.25
	95%	5	9.25	5	3.5	4	4
	99%	1.5	3	2	0.5	0.5	0.25

Tabla A1.43. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	4.25	0.5
	95%	3.5	0.25
	99%	1.25	0

Tabla A1.44. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	11.5	12.25	15.5	19	30	37.75	59.75
			1	8.75	8	11	12.5	13	12.25	13.25
			1.5	9	9.5	10	12	11.25	10.25	10.75
			2	10.5	10.5	10	11.5	11.25	11.25	11.75
	95%	ε/σ	0.5	6.75	6.25	9.25	11	20.75	29	51
			1	4.25	5	5.75	5.75	6	7.75	7
			1.5	5.25	4.75	4.5	4.25	5	5.25	6.25
			2	4.75	6.5	4.75	4.25	4.75	5	5.5
	99%	ε/σ	0.5	1.25	1.5	1.25	4.5	9	17.25	33.25
			1	1	1.25	0.5	0.75	1.25	1.75	1.75
			1.5	0.75	0.25	0.5	0.25	0.5	1.5	1.25
			2	1.25	0.5	0.25	0.25	0.5	0.75	1

Tabla A1.45. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	7.75	11.5	8.75	12.5	9.5	9.75
	95%	3.5	6.75	4.25	6	5.5	4.5
	99%	1.25	1.5	1.25	1.25	0.75	1.5

Tabla A1.46. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	5	1
	95%	3.5	0.5
	99%	2.5	0.25

Tabla A1.47. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	10.5	12.25	12.25	17	22.25	33	53.5	
			1	10.5	9	8.75	8.5	10	10	10	
			1.5	10.75	8.75	9.5	10	9.5	9	8.75	
			2	11.75	8.5	9.25	9.5	9.5	10.5	10.25	
	95%	ε/σ	0.5	6.25	6.25	6	9.5	15.75	25.25	45.25	
			1	5.5	3.75	3	4	4.75	5.5	6.5	
			1.5	5.5	3.25	2.75	2.5	4.5	4.75	5.75	
			2	5.5	3	3.25	3.5	5	5	5	
	99%	ε/σ	0.5	1	0.5	0.75	2.5	5.75	12.75	29	
			1	1	0.25	0.5	0.75	1	1.75	2.25	
			1.5	1	0.25	0.25	0.75	0.75	0.75	1.25	
			2	0.75	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	1	

Tabla A1.48. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	9.25	15.5	7	11	7.5	8.75
	95%	6.25	8.25	3.5	5.5	2.75	5
	99%	2.25	3.5	0	1.25	0	0.75

Tabla A1.49. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 20$	$m = 4, N = 20$
Nivel de confianza	90%	3.75	2.5
	95%	2.75	1
	99%	2.75	0

Tabla A1.50. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	10.5	11.75	12.75	16.5	22.75	33.5	49.75
			1	9.25	11.25	10.5	12.5	12.5	13	14.5
			1.5	8	11.75	10.5	10.25	11.25	12.75	13.5
			2	8.5	10.25	11	12	11.75	12.75	11.5
	95%	ε/σ	0.5	5	6.5	7	9.5	14	25.25	41.75
			1	3.5	4.75	5	7	7.25	6.25	7.5
			1.5	4.75	4.75	5.75	5.5	5.75	6.25	5.75
			2	5.5	5.25	5.75	5.75	5.5	6.5	5.75
	99%	ε/σ	0.5	1.25	0.5	1.5	3.25	6.25	12.75	27.75
			1	1	1	0.75	1.25	1.25	1.5	2
			1.5	1.5	1	1.25	1	2	1.25	1.5
			2	2	1.75	1.5	1.5	1.5	1.5	1.25

Tabla A1.51. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	12.5	27.5	11	8.5	2.25	8.75
	95%	7.5	20.5	6	3.75	2.25	4.5
	99%	2	7	1.25	1.25	0.5	0.75

Tabla A1.52. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	4.5	1.25
	95%	4.25	0.75
	99%	4.25	0.25

Tabla A1.53. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	10.5	11.25	13.75	14.25	17.25	24.5	37.25
			1	9.5	11.5	12.25	10.25	12.25	11.25	10.25
			1.5	9.5	11.5	11	10	11	11.25	11.25
			2	8.5	12.5	12.75	11.75	11.5	12.25	12
	95%	ε/σ	0.5	6.25	6.5	9	8	11.5	16.25	28.75
			1	5.75	5.5	6.5	6	6.5	5	5.25
			1.5	5.5	6.25	6	6	6.25	5.75	5.75
			2	4.25	7.25	6.25	6.25	6.5	6	7.5
	99%	ε/σ	0.5	1.75	2	2.25	2	2.75	5	16.25
			1	1.5	1.5	2.25	1.5	1.75	1.75	1.5
			1.5	1	1.5	1.25	1.5	1.25	1.25	1.75
			2	1.25	1.75	1.75	1.75	1.5	1.5	1

Tabla A1.54. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	12.25	20.5	9.75	11.5	8.75	5.75
	95%	6.75	13.25	5	6	4.25	3
	99%	3.25	5.5	1.25	2	0.25	0.75

Tabla A1.55. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 60$	$m = 4, N = 60$
Nivel de confianza	90%	4.75	1.5
	95%	3.5	0.25
	99%	2.5	0

Tabla A1.56. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	10.75	11.75	12.75	16	18.5	20.5	28.25	
			1	10	10.25	12	12.5	13.75	13.5	13.5	
			1.5	9.75	10.25	13	11	13	12	10	
			2	9.25	8.75	10	9	9.25	10.25	9.75	
	95%	ε/σ	0.5	4.25	5.25	8.25	8	9	13	21.5	
			1	4.75	5.75	6	7.25	7.5	7.25	7.25	
			1.5	4.5	5	6.25	7	6.75	7	6.5	
			2	4.25	4.75	6	6	6.5	5.5	6	
	99%	ε/σ	0.5	1.25	1.25	2	1.25	2.75	6	10.25	
			1	1	0.75	1.25	1.5	2	2.25	2.25	
			1.5	0.75	1	1	1.25	2	2	1.75	
			2	0.75	1	1.5	2.5	2.25	2.5	2.25	

Tabla A1.57. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	10.5	17	10.75	8	10	10.25
	95%	5.25	10	6.25	4	5	4.75
	99%	2	3.5	2	0.75	1	0.5

Tabla A1.58. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	5.5	2
	95%	3.75	1
	99%	3.5	0.5

Tabla A1.59. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	8	8.5	8.75	8.5	10.5	13.5	23	
			1	8.75	8	9	8	7	7.5	7	
			1.5	8.75	10	9	8	7	7.25	7	
			2	9.75	9	9.5	9	8.25	8	8.5	
	95%	ϵ/σ	0.5	3.75	5	5.75	4.25	5	6.5	15.5	
			1	4.25	4	5.25	4.5	3.5	3	3	
			1.5	4.5	4	3.75	3.5	2.75	2.75	3.25	
			2	5	4.25	4.25	3.5	3	3	3	
	99%	ϵ/σ	0.5	1.75	1.25	1.25	1.75	0.75	1.75	4.75	
			1	1.75	1	1.25	1	1	0.5	0.5	
			1.5	1.5	0.75	1.5	1.25	1.25	0.75	0.75	
			2	0.5	0.5	1	0.75	1	1	0.75	

Tabla A1.60. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	8.5	17.5	7.25	8.25	10.25	10
	95%	5	11	3.5	3.75	5.5	5
	99%	2	2.75	1	1.5	1	0.75

Tabla A1.61. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	4.5	1.75
	95%	4	1
	99%	4	0.25

Tabla A1.62. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	9.25	11.25	12.75	13	13.25	17.5	24
			1	8.75	11.25	11	10.75	9.75	10	10.25
			1.5	9.25	10.75	10.5	11.25	10.75	10.75	11
			2	10.25	10.75	10.75	11	10.25	10.5	10.25
	95%	ε/σ	0.5	5	5.25	7	8.25	7.25	8.75	14.75
			1	5.25	5	5.25	5.25	5.25	4.5	5.25
			1.5	5.5	5	5.25	6	5.25	5.25	5.75
			2	5.5	5.25	5.5	5.25	5.5	5.5	5
	99%	ε/σ	0.5	1.25	1	2	1.75	1.5	2.75	6
			1	2	0.75	1.75	1.75	2	1.5	1.5
			1.5	1.75	1.25	1.75	2	2.25	2.25	2
			2	1	1	2.25	2.5	2	2	2.75

Tabla A1.63. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	10.75	16	8.5	9.5	10	10.25
	95%	7	8.25	4.25	5.25	4.75	4.75
	99%	3.25	3.75	0.75	1.5	0.25	1.5

Tabla A1.64. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 20$	$m = 5, N = 20$
Nivel de confianza	90%	1.75	4.25
	95%	1.75	2.25
	99%	1.75	0

Tabla A1.65. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	9.5	10.75	10.75	10.75	11.5	12.25	18.25
			1	9.25	10.5	11	9.5	10.25	10	10
			1.5	8.5	10.25	10.75	10.25	10.75	11.25	11.25
			2	7.75	10.75	10.5	10.25	11	10.75	11.25
	95%	ε/σ	0.5	6	8	6.5	6.5	5.75	7.25	11.5
			1	4.75	6.25	6	6.25	6.5	6.25	6.25
			1.5	4.5	5.75	5.5	6	6.25	6.25	6
			2	4.5	5.75	4.75	5.25	5.5	5.5	5
	99%	ε/σ	0.5	1.75	1.75	1.75	1.75	2.25	3.25	5.25
			1	1.75	1.75	2.25	2.75	2.5	1.75	1.5
			1.5	2.25	2	2.25	2.75	2.25	1.75	1.75
			2	1	2	2	2	2	1.25	1.25

Tabla A1.66. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	10.25	16	8	10	8.75	7.5
	95%	5.75	9.5	5.25	4	3.25	3.25
	99%	2	3.5	1	0.75	1	0.5

Tabla A1.67. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 25$	$m = 5, N = 25$
Nivel de confianza	90%	2.25	3.5
	95%	2.25	1.75
	99%	2	0.25

Tabla A1.68. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	9.5	9.75	10.5	11.75	11.5	13.25	19	
			1	9.25	10	10.25	11.5	12	12.75	13.25	
			1.5	10.25	9.5	11	11.75	12.25	13	12.25	
			2	10.5	10.25	10	11	12	11.5	11.75	
	95%	ε/σ	0.5	5.75	4.75	5.75	5.75	6.5	7.75	12.25	
			1	5.75	5.25	6.25	5.5	6	6.5	6.75	
			1.5	5.25	5.5	6.75	6	6	6	6.5	
			2	4.75	5.75	6.75	6.5	6	6.25	7	
	99%	ε/σ	0.5	1.75	2.25	1.75	2	1.75	1.75	3.25	
			1	1.25	2	1.75	2	2.25	1	1	
			1.5	1.5	1.5	2	2	1.75	1.25	1	
			2	1.75	1.25	1.25	2	2	1.5	1.5	

Tabla A1.69. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_n = \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	10.75	12.5	8.5	10.25	9.75	7.75
	95%	7.5	7.25	4.25	4.75	2.5	3.5
	99%	2.25	2.25	0.75	1.25	0.5	0.5

Tabla A1.70. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	2.5	4.25
	95%	2.5	1.25
	99%	2	0.5

Tabla A1.71. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	8.5	9	10.25	10.5	10.25	10.75	13.5
			1	8.75	8	10	10.25	10.5	9	8.75
			1.5	8.25	8.75	9.5	9	8.75	9.25	9.5
			2	8.5	9	9.5	7.75	8.75	9.25	9.25
	95%	ε/σ	0.5	5.5	4.25	6	6.75	5.5	6.5	9.75
			1	5.75	4.75	5	4	4	4	4.25
			1.5	5.25	5.25	5.5	5	4.5	3.5	3.75
			2	5.75	5.5	5.25	5.75	4.5	4.75	5.25
	99%	ε/σ	0.5	1	1.25	0.75	1.5	1.5	2.75	3.5
			1	1	1	0.75	0.75	0.75	0.5	1
			1.5	0.75	1.25	1	0.5	0.5	0.75	0.5
			2	0.75	1	1.25	0.75	1.25	0.5	0.25

Tabla A1.72. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	64.5	80.75	28.75	22.75	17	17.25
	95%	54.75	73.75	20.25	14.5	2.75	9.75
	99%	32.5	53	7	4	0.25	2.75

Tabla A1.73. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	8.75	0.75
	95%	6	0
	99%	1.25	0

Tabla A1.74. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	99	97.25	95	90.25	87.5	90.25	100
			1	94.5	91	88.25	86	81.5	78.25	76.5
			1.5	80.25	74.75	69.75	65.25	59	56.25	52.75
			2	79.75	73	68.25	65	61	57.5	52.25
	95%	ϵ/σ	0.5	98.75	97.25	93.75	89.25	85	87.75	99.75
			1	92	87.75	85.75	82.5	76	71.75	69.25
			1.5	75.75	69	63.25	57.25	50.5	47.25	44.5
			2	74.5	68	61.5	57	51.25	48.75	45
	99%	ϵ/σ	0.5	98	96.75	91.75	85.75	82	83.25	99.5
			1	86.75	82.25	78.5	73.75	65.75	61.75	56.25
			1.5	61.75	56.75	50.75	44.25	38.75	36	31.75
			2	61.75	54.25	48.5	43	36.5	32	29.25

Tabla A1.75. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	96	99	57.25	48.5	29	24.5
	95%	92	96	43	36.5	14.5	16
	99%	82.25	90	20.75	17.75	6	4.25

Tabla A1.76. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	6.75	0.5
	95%	3.75	0
	99%	0.75	0

Tabla A1.77. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	99	95	92	92	
			1	100	99.5	98.75	97.5	97.25	95	93.25	
			1.5	96	92	90.5	87.5	84.5	80.25	77.25	
			2	96	93.5	90.25	87	83.5	79.75	77.5	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	99	93.5	90.25	91.5	
			1	100	99	98.75	96.75	94.75	92.5	89	
			1.5	94.25	90.25	85.75	81.75	77.75	75.25	71.5	
			2	94.75	89.5	86	81.25	78.25	73.75	69	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	99.75	98.25	91.25	87.75	90	
			1	97.75	97.75	96	91.75	89.5	85.75	81.5	
			1.5	87.5	83	76.25	70.75	67	60.5	54.25	
			2	87.75	81	74	70	61.75	55.5	52.25	

Tabla A1.78. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	99.5	99.75	73.25	69	32.25	28.75
	95%	98.75	99.5	63.5	54.25	21	22.25
	99%	96.25	98.75	42.75	36.5	8.25	5.5

Tabla A1.79. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	4.25	0.5
	95%	2.75	0.25
	99%	1.75	0

Tabla A1.80. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	99.25	94.75	90.5	
			1	100	100	100	100	99.75	99.75	98.25	
			1.5	99	98.75	97.75	96	95.25	93.5	90.75	
			2	99	99	97.5	96	94.5	91.75	89.5	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	99	93.25	88	
			1	100	100	100	100	99.75	99	97.25	
			1.5	98.75	98.25	96.75	94.5	92.25	90.5	85.75	
			2	99	98.25	96.5	93.75	91	88.25	85.25	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	98.25	91.5	85.25	
			1	100	99.75	99.75	98.75	98.5	96.25	93.75	
			1.5	97.5	95.25	92.5	88.5	82.25	77	71.25	
			2	97.5	94.25	91	86.25	79.75	76	71.5	

Tabla A1.81. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	91	86.25	40.75	46
	95%	99.75	100	84	76.25	30.5	29.25
	99%	99.5	99.5	63.25	51	13	13.25

Tabla A1.82. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	8.25	1.75
	95%	3.75	0.75
	99%	1.25	0

Tabla A1.83. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	99.75	98.5	93.5	
			1	100	100	100	100	100	100	99.5	
			1.5	99.75	99.5	98.75	98.25	97.75	96.75	96.25	
			2	99.75	99.5	98.75	97.5	97	96.25	95	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	99.75	99.75	98.25	91.5	
			1	100	99.75	100	100	100	99.75	99.25	
			1.5	99.75	99.25	98.25	97.5	96.25	94.5	92.25	
			2	99.75	99.25	97.25	96.5	96.25	94.5	92.5	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	99.75	99.5	96.25	89.75	
			1	99.75	99.75	99.75	99.5	98.75	98.75	98.5	
			1.5	99	98	96.25	94.5	91.25	87.25	82.25	
			2	98.5	96.75	95.75	93.75	90	86.5	82	

Tabla A1.84. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		<i>m</i>		<i>m</i>		<i>m</i>	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	96.75	94.75	51	60.5
	95%	100	100	92.25	89.25	33	44.75
	99%	100	100	81	73.5	11	19

Tabla A1.85. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 20	<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 20
Nivel de confianza	90%	2.75	3.75
	95%	2.75	3
	99%	2.5	1

Tabla A1.86. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				<i>m</i>							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	99.75	97.5	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	99.75	99.75	99.75	
			2	100	100	100	99.75	99.75	99.5	98.75	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	99.75	97.5	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	99.75	99	98	
			2	100	100	100	99.75	99.25	98.25	97.5	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	99.75	96.5	
			1	100	100	100	100	100	100	99.75	
			1.5	100	99.75	99.5	98.75	97	95.5	92.5	
			2	99.75	99.5	99.25	98.5	97	95.25	91.5	

Tabla A1.87. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	17.5	90
	95%	100	100	100	100	17.5	82
	99%	100	100	100	100	3	61.5

Tabla A1.88. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	6	4,5
	95%	5,25	3
	99%	5,25	1,5

Tabla A1.89. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	99.75
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.90. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	96.25	82.5
	95%	100	100	100	100	92.75	74.75
	99%	100	100	100	100	79.75	46.5

Tabla A1.91. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 60$	$m = 4, N = 60$
Nivel de confianza	90%	8.5	7.5
	95%	5.75	4.25
	99%	3.5	1.5

Tabla A1.92. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.93. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	95.25
	95%	100	100	100	100	99.25	90.75
	99%	100	100	100	100	94.5	68.25

Tabla A1.94. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	4.25	11.75
	95%	3	7
	99%	2	1.75

Tabla A1.95. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.96. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.75	97.25
	95%	100	100	100	100	99.75	95.25
	99%	100	100	100	100	97.25	87.25

Tabla A1.97. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	7	11.75
	95%	5.75	4.75
	99%	4.25	2.25

Tabla A1.98. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.99. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		<i>m</i>		<i>m</i>		<i>m</i>	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	99.5
	99%	100	100	100	100	99.25	97.75

Tabla A1.100. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		<i>m</i> = 5, <i>N</i> = 20	<i>m</i> = 5, <i>N</i> = 20
Nivel de confianza	90%	12.25	77
	95%	11.75	61.75
	99%	11.25	30.5

Tabla A1.101. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				<i>m</i>							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.102. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.75	100
	95%	100	100	100	100	99.5	100
	99%	100	100	100	100	98.25	100

Tabla A1.103. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 25$	$m = 5, N = 25$
Nivel de confianza	90%	14.25	80.75
	95%	14	71.5
	99%	13.75	42.75

Tabla A1.104. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.105. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.75	100
	95%	100	100	100	100	99.75	100
	99%	100	100	100	100	97.5	100

Tabla A1.106. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	15.5	86
	95%	15	73.75
	99%	14	51.25

Tabla A1.107. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.108. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	55.5	74.75	26.25	19.5	11.5	14.5
	95%	46.25	66.75	15.75	13.5	3	7.75
	99%	27	49.5	6.5	4.75	0.25	2.5

Tabla A1.109. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	7.25	0.25
	95%	3.75	0
	99%	1.5	0

Tabla A1.110. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	77	69.25	62.25	62.5	62.75	69.25	79.25	
			1	83.5	74	65.5	60.75	54.5	52.75	49.5	
			1.5	87	78	70.5	63.75	58.75	53	49.75	
			2	86.75	79.75	73	66.5	60.5	55.5	50	
	95%	ε/σ	0.5	70	62.25	56.5	54.25	55	63.75	78.5	
			1	76.25	66.5	57.25	51.5	49	45.75	41.5	
			1.5	80.25	70.5	61	53.25	48.75	44.75	42.25	
			2	82.25	73.25	62.75	55.75	49.75	46	42.75	
	99%	ε/σ	0.5	57	46.25	43	43	44.25	51.75	66.75	
			1	59.75	50	41.25	36.75	33.5	30.25	28.5	
			1.5	65.5	52.75	41.75	36.75	33	31	28.75	
			2	69.5	55.75	44.5	37.25	33.25	31	27.5	

Tabla A1.111. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	88	93	53	38	24.25	18
	95%	82.75	87.75	37	23.75	11.25	11
	99%	71.25	76.75	17.25	11.25	3.75	2.25

Tabla A1.112. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	5.5	0.75
	95%	4	0
	99%	0.75	0

Tabla A1.113. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	94.5	91.25	86.25	77.5	68.5	65	72.25	
			1	97.5	95	89.75	86.5	82.5	78.75	74.75	
			1.5	98.25	97	92.75	90	86.5	82.75	79	
			2	98	96.25	94.25	91.5	87	85	82.25	
	95%	ϵ/σ	0.5	92.5	87.25	80.75	71.75	63.5	62.25	65.5	
			1	96	90.75	87.25	81.5	75.25	70.5	66	
			1.5	96	94	88.5	85	79.75	76.25	72	
			2	96.25	93.5	89	86.5	82.5	78.25	74.25	
	99%	ϵ/σ	0.5	84.5	77.25	68.25	60.25	55	53.25	57.5	
			1	87.25	81.5	74.75	65.25	57.5	52.25	49	
			1.5	90.75	84	80.5	72.5	64.5	57.75	51.25	
			2	91.25	86.75	80.75	75.25	67	60.5	55.75	

Tabla A1.114. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	99.25	99	73.25	58.25	24.75	18
	95%	97.75	98.75	62.25	43.5	16.25	13.75
	99%	93.5	95.5	37.75	20	5.75	3

Tabla A1.115. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	7	1.5
	95%	4.5	1
	99%	2.5	0.5

Tabla A1.116. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				m						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	99.25	98	95	91.75	85.25	79.25	73.5
			1	99.75	99.25	98	95.75	91.25	88.25	86.25
			1.5	99.75	99.5	98.75	96	94	92.5	89.25
			2	99.75	99.5	98.75	97.25	95.25	92.75	90.25
	95%	ε/σ	0.5	98.75	96	90	86.5	80.75	72.25	66.5
			1	99.25	99	95.5	90.5	87	84.75	80.25
			1.5	99.5	99	96.75	94.25	91	88.25	85.5
			2	99.5	99.5	97.5	95.25	92.25	89.5	87.75
	99%	ε/σ	0.5	96.75	91.25	83.5	78.75	70.5	61	59
			1	98.75	93.5	87.25	82.25	77.5	70.75	65.25
			1.5	99	95.25	91.5	87	83.5	77.25	71.75
			2	99.5	97	93	88	83.75	80.25	74.75

Tabla A1.117. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	99.75	100	81.5	73.5	38.5	30.75
	95%	99.5	100	74	59.5	26	16.5
	99%	98.5	99.5	53	36.75	9	6.25

Tabla A1.118. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	6	1
	95%	3.5	0
	99%	1.25	0

Tabla A1.119. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

			BDS							
			m							
			2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	99	95.5	92.25	81.75	71.25
			1	100	100	99.75	99.25	98	97	96.5
			1.5	100	100	99.75	99.75	99.25	98.75	97.25
			2	100	100	100	100	99.75	98.25	97.75
	95%	ε/σ	0.5	100	99.25	98	92.5	87.5	79	67.5
			1	100	100	99.75	98	96.25	96.5	93
			1.5	100	100	99.75	99.75	98	97.25	94.5
			2	100	100	100	99.5	98	97	95.25
	99%	ε/σ	0.5	99.75	98	93.5	86.25	77.25	70	59.5
			1	100	99.5	96.25	93.25	89	82.75	78.75
			1.5	99.75	99.75	98.5	96.25	92	89.75	87
			2	99.75	99.75	98.5	96.75	93.75	91.5	89

Tabla A1.120. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		<i>m</i>		<i>m</i>		<i>m</i>	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	90.75	87.5	40.5	43.25
	95%	100	100	86.25	79	21.5	31
	99%	99.5	100	70.25	58.25	6	11.5

Tabla A1.121. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 20	<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 20
Nivel de confianza	90%	4	3
	95%	4	1.75
	99%	3.75	0.75

Tabla A1.122. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS						
				<i>m</i>						
				2	3	4	5	6	7	8
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	99.75	98.5	97.5	92.5	85
			1	100	100	100	99.75	99.25	97.75	96.75
			1.5	100	100	100	99.75	99.5	99.25	97.75
			2	100	100	100	99.75	99.5	99.5	98.5
	95%	ε/σ	0.5	100	100	99.5	97.75	95.5	89.5	82
			1	100	100	100	99.75	98.5	97.5	95.25
			1.5	100	100	100	99.5	99	97.75	97.5
			2	100	100	100	99.5	99	98.75	97.75
	99%	ε/σ	0.5	100	99.5	98	95.75	89	82	74.75
			1	100	99.75	99.5	97.5	95.75	93.25	90.25
			1.5	100	100	99.5	99	97	96.25	92.75
			2	100	100	99.75	99.25	98	96.75	95.5

Tabla A1.123. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	99.25	13.75	80.5
	95%	100	100	100	99	13.75	65.75
	99%	100	100	99.75	97.75	2.25	37.75

Tabla A1.124. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	5.5	4.25
	95%	5.5	3.25
	99%	5.5	1

Tabla A1.125. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	99.75	98.25	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	99.75	99.5	97.5	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	99.75	99.5	98.5	93.75	
			1	100	100	100	100	100	100	99.75	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.126. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		<i>m</i>		<i>m</i>		<i>m</i>	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	91.75	66
	95%	100	100	100	100	87	56.75
	99%	100	100	100	100	64.75	28.75

Tabla A1.127. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 60	<i>m</i> = 4, <i>N</i> = 60
Nivel de confianza	90%	8	2.25
	95%	6.75	1.5
	99%	3.75	0.25

Tabla A1.128. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				<i>m</i>							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	99.5
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.129. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	97.25	83.75
	95%	100	100	100	100	93.5	76.75
	99%	100	100	100	100	81.75	49

Tabla A1.130. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	3.5	9
	95%	2.75	5.25
	99%	2.5	1

Tabla A1.131. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.132. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99	94
	95%	100	100	100	100	97.25	86
	99%	100	100	100	100	89.25	67

Tabla A1.133. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	4.25	8.5
	95%	3.5	4.75
	99%	3	0.5

Tabla A1.134. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.135. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99	98.5
	95%	100	100	100	100	98	96.75
	99%	100	100	100	100	89	85.75

Tabla A1.136. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 20$	$m = 5, N = 20$
Nivel de confianza	90%	7.25	53.75
	95%	6.75	41.5
	99%	6.75	18.25

Tabla A1.137. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.138. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		<i>m</i>		<i>m</i>		<i>m</i>	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.25	100
	95%	100	100	100	100	98.5	99.25
	99%	100	100	100	100	93	96

Tabla A1.139. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		<i>m</i> = 5, <i>N</i> = 25	<i>m</i> = 5, <i>N</i> = 25
Nivel de confianza	90%	8.25	68.25
	95%	8.25	59.5
	99%	8	28.75

Tabla A1.140. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				<i>m</i>							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.141. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = 0.3x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99	100
	95%	100	100	100	100	97.25	100
	99%	100	100	100	100	91.5	99.75

Tabla A1.142. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	9.25	75.25
	95%	9.25	61
	99%	7.5	39.75

Tabla A1.143. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.144. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	100	100	100	99.75	62.25	95.75
	95%	100	100	99.75	99.5	29.5	92.75
	99%	100	100	99.5	99	10.25	78

Tabla A1.145. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	12.25	1.25
	95%	8	0.5
	99%	6	0

Tabla A1.146. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.147. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	99.5
	95%	100	100	100	100	99.75	99.25
	99%	100	100	100	100	98.5	99

Tabla A1.148. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	24	9.5
	95%	18	5
	99%	8.5	0.25

Tabla A1.149. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.150. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.151. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	25	9.5
	95%	18	5.75
	99%	9.5	1.25

Tabla A1.152. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.153. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.154. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	31.25	11.75
	95%	23	8
	99%	14	2

Tabla A1.155. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.156. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.157. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 20$	$m = 4, N = 20$
Nivel de confianza	90%	86	95.25
	95%	82	93.5
	99%	77.75	84

Tabla A1.158. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.159. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.25	100
	95%	100	100	100	100	99.25	100
	99%	100	100	100	100	96.25	100

Tabla A1.160. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	99.75	100
	95%	99.5	100
	99%	98.75	99.25

Tabla A1.161. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.162. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.163. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 60$	$m = 4, N = 60$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.164. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.165. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.166. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.167. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.168. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.169. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.170. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.171. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.172. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 20$	$m = 5, N = 20$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.173. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.174. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.175. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 25$	$m = 5, N = 25$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.176. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.177. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \delta_n$, siendo $\delta_n \sim iid, U[-1, 1]$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.178. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.179. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.180. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 360$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	4	5
Nivel de confianza	90%	100	100	99.75	99.75	58	96.75
	95%	100	100	99.75	99.75	29.5	92.25
	99%	100	100	99.5	97	9.25	77

Tabla A1.181. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 20$	$m = 3, N = 20$
Nivel de confianza	90%	17	3.25
	95%	12.25	1
	99%	8.25	0

Tabla A1.182. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	100
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			2	100	100	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.183. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 720$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	98.25	99.25

Tabla A1.184. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 40$	$m = 3, N = 40$
Nivel de confianza	90%	21.5	7.25
	95%	16	3.5
	99%	9.25	1

Tabla A1.185. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ϵ/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.186. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1080$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.187. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 60$	$m = 3, N = 60$
Nivel de confianza	90%	23.25	8.25
	95%	16.25	5
	99%	7	0.25

Tabla A1.188. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.189. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1440$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.190. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 3, N = 80$	$m = 3, N = 80$
Nivel de confianza	90%	31.5	12
	95%	24	7
	99%	14	3.5

Tabla A1.191. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.192. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 1920$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		4	5	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.193. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 20$	$m = 4, N = 20$
Nivel de confianza	90%	80.75	91
	95%	76.5	88.5
	99%	71.75	76

Tabla A1.194. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.195. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 3840$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	5	6
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	99.5	100
	95%	100	100	100	100	99.5	100
	99%	100	100	100	100	96.5	100

Tabla A1.196. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 40$	$m = 4, N = 40$
Nivel de confianza	90%	98	100
	95%	96.5	100
	99%	94.5	98.25

Tabla A1.197. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.198. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 5760$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.199. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 60$	$m = 4, N = 60$
Nivel de confianza	90%	99.75	100
	95%	99.75	100
	99%	99.75	100

Tabla A1.200. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.201. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 7680$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.202. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 80$	$m = 4, N = 80$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.203. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.204. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 9600$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.205. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 4, N = 100$	$m = 4, N = 100$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.206. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.207. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 12000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.208. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 20$	$m = 5, N = 20$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.209. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.210. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 15000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	4	5	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.211. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 25$	$m = 5, N = 25$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.212. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.213. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

Serie: $x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n \sim iid, N(0, 1)$, $x_1 = 0.45$.

Tamaño: $T = 18000$.

Número de repeticiones: 400.

		M. Matilla y M. Ruíz		J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1)	
		m		m		m	
		5	6	5	6	6	7
Nivel de confianza	90%	100	100	100	100	100	100
	95%	100	100	100	100	100	100
	99%	100	100	100	100	100	100

Tabla A1.214. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de M. Matilla y M. Ruíz; de J. M. Amigó, S. Zambrano y M. A. F. Sanjuán y de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 1).

		J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2)	J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 3)
		$m = 5, N = 30$	$m = 5, N = 30$
Nivel de confianza	90%	100	100
	95%	100	100
	99%	100	100

Tabla A1.215. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para los test de J. S. Cánovas y A. Guillamón (test 2 y 3).

				BDS							
				m							
				2	3	4	5	6	7	8	
Nivel de confianza	90%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	100
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	95%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	
	99%	ε/σ	0.5	100	100	100	100	100	100	100	
			1	100	100	100	100	100	100	100	
			1.5	100	100	100	100	100	100	100	
			2	100	100	100	100	100	100	100	

Tabla A1.216. Porcentajes de rechazo de la hipótesis nula para el test BDS.

ANEXO 2

PROGRAMAS UTILIZADOS PARA LA REALIZACIÓN DEL ESTUDIO COMPARATIVO

Aquí vamos a mostrar los programas que han sido utilizados para llevar a cabo el estudio comparativo que ha sido presentado.

Todos los programas utilizados han sido programados por el autor del presente documento, a excepción del programa del test BDS en Matlab, que fue realizado por L. Kanzler.

ANEXO 2.1

PROGRAMAS REALIZADOS CON MATHEMATICA

(*Cálculo de los valores de los números de Stirling de segunda especie, de la función de probabilidad y de la función de distribución.*)

```
ClearAll[T,m,Nconfianza,k,tope,prob,vectorStirlingS2,f,vectorProbabilidad,g,t,vectorFDistribucion,h,suma,NconfianzaReal,Vcritico]
```

```
T=12; (*tamaño de la serie*)
```

```
m=4; (*dimensión de inmersión*)
```

```
Nconfianza=95; (*nivel de confianza*)
```

```
k=IntegerPart[T/m]; (*número de ventanas deslizantes*)
```

```
tope=Min[m!,k];
```

```
prob[k_,m_,t_]:=StirlingS2[k,t]*((m!)/(m!-t!))*(1/m!)^k; (*función de probabilidad*)
```

```
vectorStirlingS2=Array[f,{tope}];
```

```
vectorProbabilidad=Array[g,{tope}];
```

```
For[t=1,t\[LessSlantEqual]tope,t++,
```

```
f[t]=StirlingS2[k,t];
```

```
g[t]=prob[k,m,t];
```

```
];
```

```
("Vector de números de Stirling de segunda especie")
```

```
vectorStirlingS2
```

```
("Vector de los valores de la función de probabilidad")
```

```
vectorProbabilidad
```

```
N[vectorProbabilidad]
```

```
vectorFDistribucion=Array[h,{tope}];
```

```
h[1]=g[1];
```

```
For[t=2,t\[LessSlantEqual]tope,t++,
```

```
h[t]=h[t-1]+g[t];
```

```
];
```

```
("Vector de los valores de la función de distribución")
```

```
vectorFDistribucion
```

```
N[vectorFDistribucion]
```

```
(*Cálculo del valor crítico.*)
```

```
ClearAll[T,m,Nconfianza,k,tope,prob,suma,t,NconfianzaReal,Vcritico]
```

```
T=360; (*tamaño de la serie*)
```

```
m=4; (*dimensión de inmersión*)
```

```
Nconfianza=99; (*nivel de confianza*)
```

```
k=IntegerPart[T/m]; (*número de ventanas deslizantes*)
```

```
tope=Min[m!,k];
```

```
prob[k_,m_,t_]:=StirlingS2[k,t]*((m!)/(m!-t!))*(1/m!)^k; (*función de probabilidad*)
```

```
suma=0;
```

```
For [t=tope,t\[GreaterSlantEqual]1,t--,
```

```
suma=suma+prob[k,m,t];
```

```
If[suma\[GreaterSlantEqual]Nconfianza/100,Break[]]
```

```
];
```

$N_{\text{confianzaReal}}=100*\text{suma};$

$V_{\text{critico}}=t;$

("Valor crítico para el nivel de confianza fijado")

V_{critico}

("Valor real del nivel de confianza")

$N[N_{\text{confianzaReal}}]$

(*Cálculo del vector de probabilidades.

Cada componente i del vector nos da la probabilidad $Pr(W=i)$.

Se incluye la opción de exportar los resultados a un fichero externo.*)

```
ClearAll[T,m,k,tope,prob,vectorProbabilidad,f,t]
```

```
T=120; (*tamaño de la serie*)
```

```
m=4; (*dimensión de inmersión*)
```

```
k=IntegerPart[T/m]; (*número de ventanas deslizantes*)
```

```
tope=Min[m!,k];
```

```
prob[k_,m_,t_]:=N[StirlingS2[k,t]*((m!)/(m!-t!))*(1/m!)^k]; (*función de probabilidad*)
```

```
vectorProbabilidad=Array[f,{tope}];
```

```
For[t=1,t\[LessSlantEqual]tope,t++,
```

```
f[t]=prob[k,m,t];
```

```
];
```

```
("Vector de los valores de la función de probabilidad")
```

```
vectorProbabilidad
```

(*Cálculo del vector cuyas componentes son los valores del número de permutaciones diferentes, a partir de los que hay una probabilidad mayor o igual a $N_{\text{confianza}}/100$ de encontrar el valor del estadístico de contraste (bajo la suposición de que la serie temporal proceda de un conjunto de variables aleatorias iid.)

Cada componente i del vector se corresponde con una serie temporal de tamaño igual a $m \cdot i$.

Se incluye la opción de exportar los resultados a un fichero externo.*)

```
ClearAll[m,Nconfianza,tope,prob,vectorVcriticos,k,t,suma]
```

```
m=3; (*dimensión de inmersión*)
```

```
Nconfianza=95; (*nivel de confianza*)
```

```
tope=Min[m!,k];
```

```
prob[k_,m_,t_]:=N[StirlingS2[k,t]*((m!)/(m!-t!))*(1/m!)^k]; (*función de probabilidad*)
```

```
vectorVcriticos={1}; (*vector de valores críticos*)
```

```
k=2; (*número de ventanas deslizantes*)
```

```
t=1;
```

```
While[t<m!,
```

```
suma=0;
```

```
For [t=tope,t\[GreaterSlantEqual]1,t--,
```

```
suma=suma+prob[k,m,t];
```

```
If[suma\[GreaterSlantEqual]Nconfianza/100,Break[]]
```

```
];
```

```
vectorVcriticos=Append[vectorVcriticos,t];
```

```
k=k+1;
```

```
];
```


("Vector de valores críticos")

vectorVcriticos

ANEXO 2.2

PROGRAMAS REALIZADOS CON MATLAB

```

% MÉTODO 1
% TEST 1
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% M. Matilla-García, M. Ruíz
% A NON-PARAMETRIC INDEPENDENCE TEST USING PERMUTATION ENTROPY
% Journal of Econometrics 144 (2008), 139-155
%
% Realizamos el test a través de los pasos que se exponen a
continuación:
%
% PASO 0: Se introducen los parámetros de entrada de la función, que
% son la serie temporal, la dimensión de inmersión y el nivel de
confianza.
%
% PASO 1: Cálculos previos.
% PASO 2: Calculamos H (entropía de permutación) y el estadístico de
% contarste.
% PASO 3: Realizamos el contraste de hipótesis.

function t1=test_1(serie_temp,m,nivel_confianza)

% PASO 1
% CÁLCULOS PREVIOS

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
nivel_significacion=1-nivel_confianza/100; % nivel de significación

% PASO 2
% CALCULAMOS H (ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN) Y EL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE

% La serie temporal se divide en varios tramos, cumpliendo:
%
% 1) El primer tramo se construye a partir del primer elemento de la
% serie.
% 2) Cada tramo tiene el mismo número de elementos, y este es igual
a
% la dimensión de inmersión m.
% 3) Cada tramo abarca un conjunto de elementos consecutivos.
% 4) El desplazamiento de un tramo hasta el siguiente es de un sólo
% elemento, de modo que hay un solapamiento de m-1 elementos entre
tramos
% consecutivos.
%
% A cada tramo se le asocia una permutación, dependiendo ésta del
orden de
% los elementos que componen dicho tramo.

% Para calcular la entropía de permutación H, hay que determinar
primero la
% frecuencia absoluta de cada una de las posibles permutaciones.

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);
Fabs_permutacion=zeros(factorial(m),1);

```

```

trozo_serie1=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_serie1);
M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
Npermutaciones_diferentes=1;
Fabs_permutacion(1)=1;

for cont1=2:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            Fabs_permutacion(cont2)=Fabs_permutacion(cont2)+1;
            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;
        Fabs_permutacion(Npermutaciones_diferentes)=1;

    end

end

% Una vez calculadas las frecuencias absolutas de las permutaciones
% calculamos las frecuencias relativas.

Frel_permutacion=Fabs_permutacion/(T-m+1);

% Con las frecuencias relativas ya se puede calcular la entropía de
% permutación H.
% La expresión matemática de la entropía de permutación es:
%
%       $H = -\sum(fr\_pi * \ln(fr\_pi))$ 
%
% donde fr_pi es la frecuencia relativa de cada permutación.

H=0; % entropía de permutación

for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

    incremento_H=-
Frel_permutacion(cont3)*log(Frel_permutacion(cont3));
    H=H+incremento_H;
end

```

```
end

% Calculamos el estadístico de contraste G.
% Su fórmula de cálculo es:
%
%       $G=2*(T-m+1)*(ln(m!)-H)$ 
%
% Vemos que el estadístico de contraste depende del tamaño de la serie
T,
% de la dimensión de inmersión m y de la entropía de permutación H.

G=2*(T-m+1)*(log(factorial(m))-H); % estadístico de contraste

% PASO 3
% REALIZAMOS EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

grados_libertad=factorial(m)-1; % grados de libertad
chi_cuadrado=chi2inv(1-nivel_significacion,grados_libertad); % valor
crítico

% Si el estadístico de contraste es menor o igual al valor crítico, no
% rechazamos la hipótesis nula; en este caso la variable t1 toma el
valor
% 1.
% En caso contrario se rechaza la hipótesis nula, y la variable t1
toma el
% valor 0.

if G<=chi_cuadrado

    t1=1;

else

    t1=0;

end
```

```

% MÉTODO 1
% TEST 1. CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE (G).
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% M. Matilla-García, M. Ruíz
% A NON-PARAMETRIC INDEPENDENCE TEST USING PERMUTATION ENTROPY
% Journal of Econometrics 144 (2008), 139-155

function G=calcula_EC_Matilla(serie_temp,m)

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);
Fabs_permutacion=zeros(factorial(m),1);

trozo_serie1=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_serie1);
M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
Npermutaciones_diferentes=1;
Fabs_permutacion(1)=1;

for cont1=2:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            Fabs_permutacion(cont2)=Fabs_permutacion(cont2)+1;
            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;
        Fabs_permutacion(Npermutaciones_diferentes)=1;

    end

end

Frel_permutacion=Fabs_permutacion/(T-m+1);

H=0; % entropía de permutación

```

```
for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

    incremento_H=-
    Frel_permutacion(cont3)*log(Frel_permutacion(cont3));
    H=H+incremento_H;

end

G=2*(T-m+1)*(log(factorial(m))-H); % estadístico de contraste
```

```

% MÉTODO 2
% TEST 2
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. M. Amigó, S. Zambrano, M. A. F. Sanjuán
% DETECTING DETERMINISM IN TIME SERIES WITH ORDINAL PATTERNS: A
% COMPARATIVE STUDY
% International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, No. 9
(2010),
% 2915-2924
%
% Damos los siguientes pasos para aplicar el test:
%
% PASO 0: Se introducen los parámetros de entrada de la función, que
% son la serie temporal, la dimensión de inmersión y el nivel de
confianza.
%
% PASO 1: Cálculos previos.
% PASO 2: Calculamos el estadístico de contraste.
% PASO 3: Realizamos el contraste de hipótesis.

function t2=test_2(serie_temp,m,nivel_confianza)

% PASO 1
% CÁLCULOS PREVIOS

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
k=fix((T-1)/(m-1)); % número de tramos
nivel_significacion=1-nivel_confianza/100; % nivel de significación

% PASO 2
% CALCULAMOS EL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE

% La serie se divide en tramos bajo las siguientes condiciones:
%
% 1) El primer tramo comienza en el primer elemento de la serie.
% 2) Todos los tramos tienen la misma longitud, siendo ésta la
% dimensión de inmersión m.
% 3) Los tramos abarcan elementos consecutivos.
% 4) El solapamiento entre dos tramos consecutivos será de un solo
% elemento, de modo que el desplazamiento entre ellos es de m-1
% elementos.
%
% Asignamos una permutación a cada tramo en función del orden de los
% elementos que lo integran.

% Para determinar el estadístico de contraste hay que calcular la
% frecuencia absoluta de todas las posibles permutaciones.

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);
Fabs_permutacion=zeros(factorial(m),1);

trozo_seriel=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_seriel);
M_permutaciones(1,:)=permutacion1;

```



```

Npermutaciones_diferentes=1;
Fabs_permutacion(1)=1;

for cont1=m:m-1:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            Fabs_permutacion(cont2)=Fabs_permutacion(cont2)+1;
            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;
        Fabs_permutacion(Npermutaciones_diferentes)=1;

    end

end

% Después de determinar la frecuencia absoluta de cada permutación ya
se
% puede calcular el estadístico de contraste.
% El estadístico de contraste es:
%
%     ESTADISTICO_CONTRASTE=(m!/k)*SUM(fa_pi^2)-k
%
% donde fa_pi denota la frecuencia absoluta de cada permutación.
% Observamos que el estadístico de contraste depende de la dimensión
de
% inmersión m, del número de ventanas deslizantes k y de la frecuencia
% absoluta de cada permutación fa_pi.

suma_auxiliar=0;

for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

    suma_auxiliar=suma_auxiliar+Fabs_permutacion(cont3)^2;

end

Estadistico_contraste=(factorial(m)/k)*suma_auxiliar-k; % estadístico
de contraste

```

```
% PASO 3
% REALIZAMOS EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

grados_libertad=factorial(m)-1; % grados de libertad
chi_cuadrado=chi2inv(1-nivel_significacion,grados_libertad); % valor
crítico

% No rechazamos la hipótesis nula cuando el estadístico de contraste
es
% menor o igual al valor crítico; caso en el que asignamos a la
variable t2
% el valor unidad.
% En otro caso la hipótesis nula se rechaza, y t2 adquiere el valor
nulo.

if Estadistico_contraste<=chi_cuadrado

    t2=1;

else

    t2=0;

end
```

```

% MÉTODO 2
% TEST 2. CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE.
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. M. Amigó, S. Zambrano, M. A. F. Sanjuán
% DETECTING DETERMINISM IN TIME SERIES WITH ORDINAL PATTERNS: A
% COMPARATIVE STUDY
% International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 20, No. 9
(2010),
% 2915-2924

function Estadistico_contraste=calcula_EC_Amigo(serie_temp,m)

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
k=fix((T-1)/(m-1)); % número de tramos

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);
Fabs_permutacion=zeros(factorial(m),1);

trozo_serie1=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_serie1);
M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
Npermutaciones_diferentes=1;
Fabs_permutacion(1)=1;

for cont1=m:m-1:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            Fabs_permutacion(cont2)=Fabs_permutacion(cont2)+1;
            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;
        Fabs_permutacion(Npermutaciones_diferentes)=1;

    end

end
end

```

```
suma_auxiliar=0;

for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

    suma_auxiliar=suma_auxiliar+Fabs_permutacion(cont3)^2;

end

Estadistico_contraste=(factorial(m)/k)*suma_auxiliar-k; % estadístico
de contraste
```

```

% MÉTODO 3
% TEST 3-1
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. S. Cánovas, A. Guillamón
% PERMUTATIONS AND TIME SERIES ANALYSIS
% Chaos 19 (2009), 043103
%
% Los pasos que hay que seguir para hacer el test son:
%
% PASO 0: Se introducen los parámetros de entrada de la función, que
% son la serie temporal, la dimensión de inmersión y el nivel de
% confianza.
%
% PASO 1: Cálculos previos.
% PASO 2: Calculamos el estadístico de contraste, que es el número de
% permutaciones diferentes que aparecen en la serie.
% PASO 3: Realizamos el contraste de hipótesis.

function t3_1=test_3_1(serie_temp,m,nivel_confianza)

% PASO 1
% CÁLCULOS PREVIOS

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
k=fix(T/m); % número de tramos

% PASO 2
% CALCULAMOS EL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE, QUE ES EL NÚMERO DE
PERMUTACIONES
% DIFERENTES QUE APARECEN EN LA SERIE

% Dividimos la serie temporal en tramos siguiendo los siguientes
puntos:
%
% 1) El primer tramo empieza en el primer elemento de la serie
temporal.
% 2) Los tramos contienen todos la misma cantidad de elementos, que
viene
% marcada por la dimensión de inmersión m.
% 3) Los tramos se construyen tomando elementos consecutivos.
% 4) No hay solapamiento entre tramos consecutivos, ni tampoco
elementos
% libres entre ellos.
%
% A los tramos se les hace corresponder una permutación que indique el
% orden de los elementos del mismo.

% Determinamos el número de permutaciones distintas que aparecen en la
% serie temporal.

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);

trozo_seriel=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_seriel);

```

```

M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
Npermutaciones_diferentes=1;

for cont1=m+1:m:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;

    end

end

% Y ya tenemos el estadístico de contraste, que es simplemente la
% cantidad
% de permutaciones distintas que hay en la serie temporal.

Estadistico_contraste=Npermutaciones_diferentes; % estadístico de
contraste

% PASO 3
% REALIZAMOS EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

% Con el fin de determinar el valor crítico, necesario para realizar
el
% contraste de hipótesis, hay que recurrir a la función de
distribución de
% probabilidad.
% Pero los valores críticos para todos los posibles tamaños de la
serie ya
% han sido previamente calculados y almacenados en un fichero.
% De modo que sólo hay que leer el valor necesario del fichero
% correspondiente.

valores_criticos=load(strcat('VECTORM',num2str(m),'nc',num2str(nivel_c
onfianza),'.txt'));
T_valores_criticos=length(valores_criticos);

if k>T_valores_criticos

```

```
valor_critico=valores_criticos(T_valores_limite);  
  
else  
  
    valor_critico=valores_criticos(k);  
  
end  
  
% No rechazamos la hipótesis nula si el estadístico de contraste es  
% mayor o  
% igual al valor crítico; en esta situación t3_1 toma el valor 1.  
% Si el estadístico de contraste es menor que el valor crítico,  
% entonces se  
% rechaza la hipótesis nula; aquí t3_1 tomaría el valor 0.  
  
if Estadistico_contraste>=valor_critico  
  
    t3_1=1;  
  
else  
  
    t3_1=0;  
  
end
```

```

% MÉTODO 3
% TEST 3-1. CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE.
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. S. Cánovas, A. Guillamón
% PERMUTATIONS AND TIME SERIES ANALYSIS
% Chaos 19 (2009), 043103

function Estadistico_contraste=calcula_EC_CyG1(serie_temp,m)

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
% k=fix(T/m); % número de tramos

M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);

trozo_serie1=serie(1:m);
[trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_serie1);
M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
Npermutaciones_diferentes=1;

for cont1=m+1:m:T-m+1

    trozo_serie=serie(cont1:cont1+m-1);
    [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_serie);

    testigo=1;

    for cont2=1:Npermutaciones_diferentes

        if isequal(M_permutaciones(cont2,:),permutacion)

            testigo=0;
            break

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;

    end

end

Estadistico_contraste=Npermutaciones_diferentes; % estadístico de
contraste

```



```

% MÉTODO 3
% TEST 3-2
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
%   J. S. Cánovas, A. Guillamón
%   PERMUTATIONS AND TIME SERIES ANALYSIS
%   Chaos 19 (2009), 043103
%
% Seguimos los siguientes pasos para hacer el test:
%
% PASO 0: Se introducen los parámetros de entrada de la función, que
% son la serie temporal, la dimensión de inmersión y el nivel de
% confianza.
%
% PASO 1: Cálculos previos.
% PASO 2: Calculamos el estadístico de contraste.
% PASO 3: Realizamos el contraste de hipótesis.

function t3_2=test_3_2(serie_temp,m,nivel_confianza)

% PASO 1
% CÁLCULOS PREVIOS

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
nivel_significacion=1-nivel_confianza/100; % nivel de significación

% PASO 2
% CALCULAMOS EL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE

% Vamos a dividir la serie temporal en varias partes (ventanas).
% La primera ventana se construye desde el primer elemento de la
% serie.
% Se hará de tal manera que, entre ellas, no haya solapamientos ni
% elementos libres.
% El tamaño de las ventanas se tomará igual a m*m!.
% En caso de que sólo se pueda tomar una ventana, ésta abarcará toda
% la
% serie temporal; así se evita una gran pérdida de elementos.

% De los criterios para la división de la serie en ventanas se deduce
% que,
% en caso de haber elementos sobrantes, estos serán los del final de
% la
% serie.

if(T>=m*factorial(m)*2)

    Tventana=m*factorial(m);
    Nventanas=fix(T/Tventana);

else

    Tventana=T;
    Nventanas=1;

```

```

end

% En cada ventana hacemos una subdivisión en tramos, cumpliendo:
%
% 1) Comenzamos la subdivisión desde el primer elemento de la
ventana.
% 2) Cada tramo abarca el mismo número de elementos, que es igual a
% la dimensión de inmersión m.
% 3) Los elementos que incluye cada trama son elementos
consecutivos.
% 4) El desplazamiento que hay entre dos tramos consecutivos es de m
% elementos, no existiendo solapamiento entre ellos.
%
% A todos los tramos se les hace corresponder una permutación que
marca el
% orden de sus elementos.

% Ahora se va a determinar el número de permutaciones diferentes que
hay en
% cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie.

k=Tventana/m; % número de tramos en que se divide cada ventana
Nmax_permutaciones_diferentes=min(fix(k),factorial(m)); % número
máximo de permutaciones diferentes en cada ventana

% Introducimos un vector en cuyos elementos se almacenen el número de
% permutaciones diferentes de cada ventana.

v_Npermutaciones_diferentes=zeros(Nventanas,1);

for cont1=1:Nventanas

    ventana=serie((cont1-1)*Tventana+1:cont1*Tventana);
    M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);

    trozo_ventana1=ventana(1:m);
    [trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_ventana1);
    M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
    Npermutaciones_diferentes=1;

    for cont2=m+1:m:Tventana-m+1

        trozo_ventana=ventana(cont2:cont2+m-1);
        [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_ventana);

        testigo=1;

        for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

            if isequal(M_permutaciones(cont3,:),permutacion)

                testigo=0;
                break

            end

        end

    end

end

```

```

end

if testigo

Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;

end

end

v_Npermutaciones_diferentes(cont1)=Npermutaciones_diferentes;

end

% Calculamos ya el estadístico de contraste.
% Para ello es necesario disponer de la función de probabilidad.
% La función de probabilidad ha sido calculada previamente; sus
valores
% están almacenados en un fichero externo, y únicamente tenemos que
% tomarlos del mismo.

probabilidad=load(strcat('VPROB_T',num2str(Tventana),'m',num2str(m),'.'
txt'));
probabilidad=probabilidad';

% El cálculo del estadístico de contraste se lleva a cabo de la
siguiente
% forma:
%
%
%

$$\text{ESTADÍSTICO\_CONTRASTE} = \sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} (f_i - e_i)^2 / e_i$$

%
% donde f_i representa el número de ventanas con exactamente i
% permutaciones diferentes; y e_i es la frecuencia esperada, es decir,
% e_i=n*Pr(W=i), siendo n el número de ventanas y W la variable
aleatoria
% que indica el número de permutaciones diferentes.

Estadistico_contraste=0; % estadístico de contraste

for cont4=1:Nmax_permutaciones_diferentes

fi=0;
ei=Nventanas*probabilidad(cont4);

for cont5=1:Nventanas

if v_Npermutaciones_diferentes(cont5)==cont4

fi=fi+1;

end

```

```
end

    Estadistico_contraste=Estadistico_contraste+((fi-ei)^2/ei);

end

% PASO 3
% REALIZAMOS EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

grados_libertad=Nmax_permutaciones_diferentes-1; % grados de libertad
chi_cuadrado=chi2inv(1-nivel_significacion,grados_libertad); % valor
crítico

% Aceptamos la hipótesis nula siempre que el estadístico de contraste
sea
% menor o igual al valor crítico; en dicho caso la variable t3_2
adopta el
% valor unidad.
% Rechazamos la hipótesis nula en caso contrario; situación en la que
t3_2
% toma el valor nulo.

if Estadistico_contraste<=chi_cuadrado

    t3_2=1;

else

    t3_2=0;

end
```

```

% MÉTODO 3
% TEST 3-3
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. S. Cánovas, A. Guillamón
% PERMUTATIONS AND TIME SERIES ANALYSIS
% Chaos 19 (2009), 043103
%
% Aplicamos el test siguiendo los pasos siguientes:
%
% PASO 0: Se introducen los parámetros de entrada de la función, que
% son la serie temporal, la dimensión de inmersión y el nivel de
% confianza.
%
% PASO 1: Cálculos previos.
% PASO 2: Calculamos el estadístico de contraste.
% PASO 3: Realizamos el contraste de hipótesis.

function t3_3=test_3_3(serie_temp,m,nivel_confianza)

% PASO 1
% CÁLCULOS PREVIOS

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie
nivel_significacion=1-nivel_confianza/100; % nivel de significación

% PASO 2
% CALCULAMOS EL ESTADÍSTICO DE CONTRASTE

% Dividimos la serie en varias ventanas.
% La primer ventana empieza en el primer elemento de la serie.
% Entre las ventanas no habrá solapamientos, ni tampoco quedarán
% elementos
% sueltos.
% Las ventanas serán de tamaño m*m!.
% Si sólo se pudiera tomar una ventana, ésta englobaría toda la serie
% temporal; así se evita una gran pérdida de elementos.

% Si hubiera elementos sobrantes por no ser exacta la división
T/Tventana,
% dichos elementos serán los del final de la serie.

%if (T>=m*factorial(m)*2)
%
% Tventana=m*factorial(m);
% Nventanas=fix(T/Tventana);
%
%else
%
% Tventana=T;
% Nventanas=1;
%
%end

Tventana=12;
Nventanas=4;

```

```

% Cada una de las ventanas que conforman la serie temporal se
subdivide, a
% su vez, en varios tramos. Estos cumplen lo siguiente:
%
% 1) El primer tramo empieza en el primer elemento de la ventana.
% 2) Los tramos son de igual amplitud, y ésta viene fijada por el
valor
% de la dimensión de inmersión m.
% 3) Los elementos abarcados por los tramos son elementos
consecutivos.
% 4) No hay solapamiento entre tramos consecutivos, siendo el
% desplazamiento de un tramo al siguiente de m elementos.
%
% Asociamos a cada tramo una permutación. Dicha permutación informa
del
% orden de los elementos que componen el tramo.
%
% A continuación se cuenta el número de permutaciones diferentes
presentes
% en cada una de las ventanas en que se ha dividido la serie.

k=Tventana/m; % número de tramos en que se divide cada ventana
Nmax_permutaciones_diferentes=min(fix(k),factorial(m)); % número
máximo de permutaciones diferentes en cada ventana

% Construimos un vector para almacenar en sus componentes el número de
% permutaciones distintas encontradas en cada ventana.

v_Npermutaciones_diferentes=zeros(Nventanas,1);

for cont1=1:Nventanas

    ventana=serie((cont1-1)*Tventana+1:cont1*Tventana);
    M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);

    trozo_ventana1=ventana(1:m);
    [trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_ventana1);
    M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
    Npermutaciones_diferentes=1;

    for cont2=m+1:m:Tventana-m+1

        trozo_ventana=ventana(cont2:cont2+m-1);
        [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_ventana);

        testigo=1;

        for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

            if isequal(M_permutaciones(cont3,:),permutacion)

                testigo=0;
                break

```

```

        end

    end

    if testigo

        Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
        M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;

    end

end

v_Npermutaciones_diferentes(cont1)=Npermutaciones_diferentes;

end

% Determinamos la función de distribución teórica FW.

% Para calcular esta función hay que recurrir a la función de
probabilidad.
% Los posibles valores que puede adquirir la función de probabilidad
están
% almacenados en un archivo, del que únicamente hay que ir leyendo
dichos
% valores.

probabilidad=load(strcat('VPROB_T',num2str(Tventana),'m',num2str(m),'
.txt'));
probabilidad=probabilidad';

% La función de distribución se calcula del modo siguiente:
%
%       $F_W(t)=Pr(W\leq t)$ 
%
% donde W es la variable aleatoria que indica el número de
permutaciones
% diferentes que pueden darse.

suma_FW=0;
FW=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1); % función de distribución
teórica

for cont4=1:Nmax_permutaciones_diferentes

    suma_FW=suma_FW+probabilidad(cont4);
    FW(cont4)=suma_FW;

end

% Determinamos la función de distribución empírica Fn.

% La expresión de cálculo de la función de distribución empírica es:
%
%       $F_n(t)=j/n,$ 
%
```

```

% donde j es el número de ventanas que presentan un número de
permutaciones
% diferentes menor o igual a t, y n es el número total de ventanas.

auxiliar_Fn=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1);
Fn=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1); % función de distribución
empírica

for cont5=1:Nventanas

    posicion=v_Npermutaciones_diferentes(cont5);
    auxiliar_Fn(posicion)=auxiliar_Fn(posicion)+1/Nventanas;

end

Fn(1)=auxiliar_Fn(1);

for cont6=2:Nmax_permutaciones_diferentes

    Fn(cont6)=Fn(cont6-1)+auxiliar_Fn(cont6);

end

% Calculamos el estadístico de contraste.
% El estadístico de contraste es:
%
%     ESTADÍSTICO_CONTRASTE=sqrt(n)*D_n
%
% donde n es el número total de ventanas, y D_n=max{abs(F_n-F_W)}.

Dn=max(abs(Fn-FW)); % distancia máxima entre Fn y FW
Estadistico_contraste=sqrt(Nventanas)*Dn; % estadístico de contraste

% PASO 3
% REALIZAMOS EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS

% Para realizar el contraste de hipótesis vamos a utilizar el p-valor.
% El p-valor se calcula con la función de distribución continua de la
% distribución de Kolmogorov, y depende del valor del estadístico de
% contraste.

suma_pValor=0;

for cont7=1:10

    suma_pValor=suma_pValor+(-1)^(cont7+1)*exp(-
2*(cont7*Estadistico_contraste)^2);

end

pValor=2*suma_pValor; % p-valor

% Si el nivel de significación del test es menor o igual al p-valor,
no se
% rechaza la hipótesis nula, y la variable t3_3 toma el valor 1.
% En otro caso se rechaza la hipótesis nula y t3_3 toma el valor 0.

```



```
if nivel_significacion<=pValor
    t3_3=1;
else
    t3_3=0;
end
```

```

% MÉTODO 3
% TEST 3-2 Y TEST 3-3.
%
% La referencia utilizada ha sido:
%
% J. S. Cánovas, A. Guillamón
% PERMUTATIONS AND TIME SERIES ANALYSIS
% Chaos 19 (2009), 043103

function valores_t2yt3=calcula_EC_CyG2y3(serie_temp,m)

serie=serie_temp; % serie temporal
T=length(serie); % número de elementos de la serie

Tventana=m*factorial(m);
Nventanas=fix(T/Tventana);

k=Tventana/m; % número de tramos en que se divide cada ventana
Nmax_permutaciones_diferentes=min(fix(k),factorial(m)); % número
máximo de permutaciones diferentes en cada ventana

v_Npermutaciones_diferentes=zeros(Nventanas,1);

for cont1=1:Nventanas

    ventana=serie((cont1-1)*Tventana+1:cont1*Tventana);
    M_permutaciones=zeros(factorial(m),m);

    trozo_ventanal=ventana(1:m);
    [trozo_ordenado1,permutacion1]=sort(trozo_ventanal);
    M_permutaciones(1,:)=permutacion1;
    Npermutaciones_diferentes=1;

    for cont2=m+1:m:Tventana-m+1

        trozo_ventana=ventana(cont2:cont2+m-1);
        [trozo_ordenado,permutacion]=sort(trozo_ventana);

        testigo=1;

        for cont3=1:Npermutaciones_diferentes

            if isequal(M_permutaciones(cont3,:),permutacion)

                testigo=0;
                break

            end

        end

        if testigo

            Npermutaciones_diferentes=Npermutaciones_diferentes+1;
            M_permutaciones(Npermutaciones_diferentes,:)=permutacion;

```

```
end

end

v_Npermutaciones_diferentes(cont1)=Npermutaciones_diferentes;

end

probabilidad=load(strcat('VPROB_T', num2str(Tventana), 'm', num2str(m), '.txt'));
probabilidad=probabilidad';

Estadistico_contraste_t2=0; % estadistico de contraste del test 2

for cont4=1:Nmax_permutaciones_diferentes

    fi=0;
    ei=Nventanas*probabilidad(cont4);

    for cont5=1:Nventanas

        if v_Npermutaciones_diferentes(cont5)==cont4

            fi=fi+1;

        end

    end

    Estadistico_contraste_t2=Estadistico_contraste_t2+((fi-ei)^2/ei);

end

suma_FW=0;
FW=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1); % función de distribución teórica

for cont6=1:Nmax_permutaciones_diferentes

    suma_FW=suma_FW+probabilidad(cont6);
    FW(cont6)=suma_FW;

end

auxiliar_Fn=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1);
Fn=zeros(Nmax_permutaciones_diferentes,1); % función de distribución empírica

for cont7=1:Nventanas

    posicion=v_Npermutaciones_diferentes(cont7);
    auxiliar_Fn(posicion)=auxiliar_Fn(posicion)+1/Nventanas;

end
```

```
Fn(1)=auxiliar_Fn(1);

for cont8=2:Nmax_permutaciones_diferentes

    Fn(cont8)=Fn(cont8-1)+auxiliar_Fn(cont8);

end

Dn=max(abs(Fn-FW)); % distancia máxima entre Fn y FW
Estadistico_contraste_t3=sqrt(Nventanas)*Dn; % estadístico de
contraste del test 3

suma_pValor=0;

for cont9=1:10

    suma_pValor=suma_pValor+(-1)^(cont9+1)*exp(-
2*(cont9*Estadistico_contraste_t3)^2);

end

pValor_t3=2*suma_pValor; % p-valor

valores_t2yt3=[Estadistico_contraste_t2,pValor_t3];
```

```

function [w, sig, c, c1, k] = bds (series, maxdim, distance, flag,
maxram)

%BDS Brock, Dechert & Scheinkman test for independence based on the
correlation dimension
%
% [W, SIG, C, C1, K] = BDS (SERIES, MAXDIM, DISTANCE, METHOD, MAXRAM)
%
% uses      - time-series vector SERIES (1),
%            - dimensional distance
%            * either defined as fraction DISTANCE of the standard
deviation of SERIES
%            if FLAG = 0,
%            * or defined such that the one dimensional correlation
integral of SERIES
%            is equal to DISTANCE if FLAG = 1 (2),
%            - not more than MAXRAM megabytes of memory for the
computation (3),
%
% to compute - BDS statistics W for each dimension between 2 and
MAXDIM (4),
%            - significance levels SIG at which the null hypotheses of
no dependence are
%            rejected ASYMPTOTICALLY (use companion function
BDSSIG.M for finite
%            samples) against (almost) any type of linear and non-
linear dependence (5),
%            - correlation integral estimates C for each dimension M
between 2 and MAXDIM,
%            - first-order correlation integral estimates C1 computed
over the last N-M+1
%            observations, and
%            - parameter estimate K (6).
%
% (1) SERIES is normally a vector of residuals obtained from a
regression, but it can also
%     be any other stationary time series.
% (2) The default settings are DISTANCE = 1.5 and FLAG = 0. The BDS
statistic appears to
%     be most efficient estimated if the measure of dimensional
distance EPSILON is chosen
%     such that the first-order correlation integral estimate (C1)
lies around 0.7 (see
%     Kanzler, 1998, forthcoming). For settings DISTANCE = 0.7 and
FLAG = 1, the
%     programme will chose EPSILON accordingly. Unfortunately, the
cost of finding optimal
%     EPSILON is quite high in terms of CPU time and required memory.
For a near-normal
%     distribution, the default settings achieve the same without any
extra computational
%     burden.
% (3) The default setting is MAXRAM = 150, which is recommended for a
system with 192MB
%     physical RAM installed. The programme is highly optimised as to
maximise speed given
%     available memory, so it is very important to specify MAXRAM
correctly as the amount

```



```

if nargin < 5
    maxram = 150;
elseif maxram > 500
    disp('Are you sure you have so much memory available?')
    error('If so, you need to edit the code, otherwise try again with a
lower value.')
end

if nargin < 4
    flag = 0;
elseif ~any(flag == [0 1])
    error('Unknown method for determining dimensional distance; try
again with 0 or 1.')
end

if nargin < 3
    distance = 1.5;
elseif distance < 0
    error('The dimensional distance parameter must be positive.')
elseif flag == 1 & distance > 1
    error('The correlation integral cannot exceed 1.')
end

if nargin < 2
    maxdim = 2;
elseif maxdim < 1
    error('The dimension needs to be at least 1.');
```

```

end

if nargin < 1
    error('Cannot compute the BDS statistic on nothing.')
end

[rows,cols] = size(series);
if rows > 1 & cols == 1
    n = rows;
    series = series';
elseif cols > 1 & rows == 1
    n = cols;
elseif cols > 1 & rows > 1
    n = cols*rows;
    series = series(:)'; % transformation into a row vector
    disp(sprintf('\aTransformed matrix input into a single column.'))
else
    error('Cannot compute the BDS statistic on a scalar!')
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Determination of and preparations for fastest method
given MAXRAM %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fastbuild    = 0.000016 * (1:52) .* pow2(1:52); % memory requirements
slowbuild    = 0.000045          * pow2(1:52); % for the various
holdinfo     = 0.000005          * pow2(1:52); % algorithms in
wordtable    = 0.000008 * n^2 ./ (1:52); % megabytes for
bitandop     = 0.000024 * n^2 ./ (1:52); % given N

```

```

[ram1, bits1] = min(fastbuild + holdinfo + wordtable + bitandop); %
number of bits for
[ram2, bits2] = min(fastbuild + holdinfo + wordtable);           %
which each of six
[ram3, bits3] = min(slowbuild + holdinfo + wordtable + bitandop); %
methods uses minimum
[ram4, bits4] = min(slowbuild + holdinfo + wordtable);           %
memory; this memory
[ram5, bits5] = min(                                           wordtable + bitandop); % is
given by
[ram6, bits6] = min(                                           wordtable);           %
ram1, ram2,..., ram6

if ram1 < maxram | ram2 < maxram
    if ram1 < maxram
        method = 1;
        bits = bits1; ram = ram1;
    else
        method = 2;                                           % maximum number
of rows to put
        bits = bits2; ram = ram2;                               % through BITAND
and bit-counting
        stepping = floor((maxram-ram)*bits/n/0.000024); % algorithm
without exceeding MAXRAM
    end

    % Vector BITINFO lists the number of bits set for each integer
between 0 and 2^bits
    % (corresponding to the indices of the vector shifted by 1). See
Kanzler (1998) for an
    % explanation.
    bitinfo = uint8(sum(rem(floor((0:pow2(bits)-1)'*pow2(1-
bits:0)),2),2));

elseif ram3 < maxram | ram4 < maxram
    if ram3 < maxram
        method = 3;
        bits = bits3; ram = ram3;
    else
        method = 4;
        bits = bits4; ram = ram4;
        stepping = floor((maxram - ram) * bits / n / 0.000024);
    end

    bitinfo(1:pow2(bits), :) = uint8(0);                       % the same as above,
but created through
    for bit = 1 : bits                                         % a loop, which
consumes less memory
        bitinfo(1:pow2(bits)) = sum([bitinfo, ...
kron(ones(pow2(bits)-bit),1), [zeros(pow2(bit-1),1);
ones(pow2(bit-1),1)]]),2);
    end

elseif ram5 < maxram | ram6 < maxram
    if ram5 < maxram
        method = 5;
        bits = bits5; ram = ram5;
    else

```



```

        method = 6;
        bits = bits6; ram = ram6;
        stepping = floor((maxram - ram) * bits / n / 0.000024);
    end

else
    disp('Insufficient amount of memory. Allocate more memory to the
system')
    disp('or reduce the number of observations, then try again.')
    error(' ')
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Determination of dimensional distance EPSILON
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% The empirical investigation by Kanzler (1998) shows that choosing
EPSILON such that the
% first-order correlation integral is around 0.7 yields the most
efficient estimation of
% low-dimensional BDS statistics. Hence the objective here is to
choose EPSILON such that,
% say, 70% of all observations lie within distance EPSILON to each
other. If desired, the
% programme first determines EPSILON as to fulfil this or a similar
requirement.
%
% The conceptually simplest way of setting up the calculation of
distance among all
% observations is to define a two-dimensional table D (for "distance")
of length and width
% N and assign to each co-ordinate (x,y) the result of the problem
ABS(x-y).
%
% In principle, the entire table could thus be created with the
following one-line
% statement:
%           D = ABS( SERIES(ONES(1000,1),:) ' -
SERIES(ONES(1000,1),:) )
%
% Since the lower triangle of the table only replicates the upper
triangle and since the
% diagonal values represent own values (ones) which are not desired to
be included in the
% calculation, only the upper triangle receives further attention.
%
% Unfortunately, sewing all the row vectors of the upper triangle
together to form one
% single (row) vector makes indexing very messy. To aid understanding
of the vector-space
% indexing used here (as well as in the optional sub-function further
below), one may wish
% to refer to the following exemplary matrix table (N=7):
%
%
%           Using this example, it is easy
to verify
%           * * * *c o l u m n* * * *   that column vector I is
defined by the
%           I   1   2   3   4   5   6   7   following indices in vector
space:

```

```

%                                     I+(0 : I-2)*N - CUMSUM(1 :
I-1)
% * 1 * 1 2 3 4 5 6
% * 2 . * 7 8 9 10 11 More generally, column vector
I starting only
% r 3 . . * 12 13 14 15 in row J is:
% o 4 . . . * 16 17 18 I+(J-1 : I-2)*N - SUM(1:J-
1)-CUMSUM(J : I-1)
% w 5 . . . . * 19 20
% * 6 . . . . . * 21 Row vector I is given by
indices:
% * 7 . . . . . * 1+(I-1)*(N-1)-SUM(1:I-2) :
I*(N-1)-SUM(1:I-1)
%
% (A formal derivation of the above formulae is beyond the scope of
this script.)
%
% To calculate a percentile of the distribution of distance values,
the row vector is
% sorted (unfortunately, this requires a lot of time and RAM in
MATLAB).

if ~flag
    demeaned = series-sum(series)/n; % fastest
algorithm for
    epsilon = distance * sqrt(demeaned*demeaned'/(n-1)); % computing
the standard
    clear demeaned % to save memory % deviation
of SERIES

elseif 0.000008 * 3 * sum(1:n-1) < maxram % check memory requirements
for DIST and sorting
    dist(1:sum(1:n-1)) = 0;
    for i = 1 : n-1
        dist(1+(i-1)*(n-1)-sum(0:i-2):i*(n-1)-sum(1:i-1)) =
abs(series(i+1:n)-series(i));
    end
    sorted = sort(dist);
    epsilon = sorted(round(distance*sum(1:n-1))); % DISTANCEth
percentile of SORTED series
    clear dist sorted
else
    error('Insufficient RAM to compute EPSILON; allocate more memory or
use METHOD = 1.')
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation and storage of one-dimensional distance
information %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Similarly to the above, a two-dimensional table C (for "close") of
length and width N
% can be defined by assigning to each co-ordinate (x,y) the result of
the problem
% ABS(x-y) <= EPSILON; (x,y) assumes the value 1 if the statement is
true and 0 otherwise.
%
% Formally, for given EPSILON:
%
%                                     C(x,y) = 1 if ABS(x-y) <= EPSILON
%                                     = 0 otherwise

```

```

%
% Once again, the resulting information needs to be stored in the most
% efficient way.
% In this implementation, this is done by chopping each row of the
% table into "words" of
% several bits, the precise number of bits per word being determined
% by the above
% algorithms. One "word" is thus represented by one integer. This
% slashes the size of the
% table by the number of bits. See Kanzler (1998) for more details.
%
% The below routine stores all rows of the upper triangle of the
% conceptual table
% (described in Kanzler, 1998) left-aligned and assigns zeros to all
% other elements.
%
% As will also be explained further below, the computation of
% parameter K requires the sum
% of each FULL row, i.e. each row including the elements in the lower
% triangle and on the
% diagonal. The "missing" bits correspond to the sums over each column
% in the upper
% triangle, and these sums are also computed and stored in the below
% loop. And to make
% matters simple, diagonal values are allocated to the column sums by
% initialising them
% with value 1. See also Kanzler (1998).

colsum(1:n)           = 1;
rowsum(1:n)           = 0;
nwords                = ceil((n-1)/bits);
wrmtx(1:n-1,1:nwords) = 0; % initialisation of bit-
word table

for row = 1 : n-1
    bitvec           = abs(series(1+row:n) - series(row)) <=
epsilon;
    rowsum(row)      = sum(bitvec);
    colsum(1+row:n)  = colsum(1+row:n) + bitvec;
    nwords           = ceil((n-row)/bits);
    wrmtx(row,1:nwords) = (reshape([bitvec,zeros(1,nwords*bits-
n+row)],...%transformation
                                bits, nwords)' *pow2(0:bits-
1)')'; %into bit-words
end
clear series bitvec

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation of one-dimensional correlation
estimates %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% C1(1), the fraction (or estimated probability) of pairs in SERIES
% being "close" in the
% first dimension is just the average over ALL unique elements. C1(1)
% is hence the most
% efficient estimator of C(1), and the resulting estimate is used in
% the computation of
% SIGMA(M) further below.
%

```

```

% However, for the difference term  $C(M) - C(1)^M$  of the BDS statistic
(see further below)
% to follow SIGMA asymptotically, both  $C(M)$  and  $C(1)$  need to be
estimated over the same
% length vector, and so MAXDIM different  $C(1)$ 's need to be estimated
here:
%
%
%           N      N
%    $C(1)(M) = 2 / (N-M+1) / (N-M) * \sum_{S=M}^N \sum_{T=S+1}^N B(S,T)$ 
%
% Each  $C(1)(M)$  is easily computed from the sum of all bits set in rows  $M$ 
to  $N-1$  divided by
% the appropriate total number of bits.

bitsum(maxdim:-1:1) = cumsum([sum(rowsum(maxdim:n-1)), rowsum(maxdim-
1:-1:1)]);
c1(maxdim:-1:1) = bitsum(maxdim:-1:1) ./ cumsum([sum(1:n-maxdim),
n-maxdim+1 : n-1]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation of parameter K
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% A parameter needed to estimate SIGMA(M) is  $K$ , which is defined as:
%
%
%           N      N      N
%    $K = 6 / N / (N-1) / (N-2) * \sum_{T=1}^N \sum_{T=T+1}^N \sum_{R=S+1}^N \{C(T,S)*C(S,R) + C(T,R)*C(R,S)$ 
+  $C(S,T)*C(T,R)\} / 3$ 
%
% As is readily apparent, a literary computation of the above would be
very processing
% intensive, e.g.:
%
%           HT(1 : N) = 0;
%           FOR T = 1 : N
%               HS(1 : N-T) = 0;
%               FOR S = T+1 : N
%                   HR(1 : N-S) = 0;
%                   FOR R = S + 1 : N
%                       HR(R-S) = (C(T,S)*C(S,R) + C(T,R)*C(R,S) +
C(S,T)*C(T,R)) / 3;
%                   END
%                   HS(S-T) = SUM(HR(1 : N-S));
%               END
%               HT(T) = SUM(HS(1 : N-T));
%           END
%           K = SUM(HT) * 6 / N / (N-1) / (N-2);

% To understand what  $k$  actually estimates, and how this estimation can
be made
% computationally more efficient, see Kanzler (1998).
%
% The above FOR loop computes the sum over each row and over each
column including the
% diagonal in the upper triangle. To compute  $K$  from this, the sum of
the squares of the
% row and column sums needs to be adjusted as reasoned above, whereby
the sum of all

```



```

elseif sum(method == [2 4])
    for row = n-stepping : -stepping : m+1
% BITAND
        wrdmtrx(row:row+stepping-1,:) = bitand(wrdmtrx(row:...
% and bit
                row+stepping-1,:), wrdmtrx(row-
1:row+stepping-2,:)); % count in
        bitcount=bitcount+sum(sum(bitinfo(wrdmtrx(row:row+stepping-
1,:)+1))); % backward
        end
% loops
        wrdmtrx(m:row-1,:) = bitand(wrdmtrx(m:row-1,:), wrdmtrx(m-
1:row-2,:)); % through
        bitcount = bitcount + sum(sum(bitinfo(wrdmtrx(m:row-1,:)+1)));
% the table

        elseif method == 5
            wrdmtrx(m:n-1,:) = bitand(wrdmtrx(m:n-1,:), wrdmtrx(m-1:n-2,:));
% BITAND at once...
            for col = 1 : ceil((n-1)/bits)
% bit count
                bitcount = bitcount + sum(sum(rem(floor(wrdmtrx(m:...
% by brute force
                        n-1-(col-1)*bits, col) * pow2(1-bits:0)), 2)));
% in loops
            end

        else
            for row = n-stepping : -stepping : m+1
                wrdmtrx(row:row+stepping-1,:) = bitand(wrdmtrx(row:...
% BITAND
                        row+stepping-1,:), wrdmtrx(row-1:row+stepping-
2,:)); % opera-
            end
% tions
            wrdmtrx(m:row-1,:) = bitand(wrdmtrx(m:row-1,:), wrdmtrx(m-1:row-
2,:)); % and brute-
            for col = 1 : ceil((n-1)/bits)
% force bit
                bitcount = bitcount + sum(sum(rem(floor(wrdmtrx(m:...
% counting
                        n-1-(col-1)*bits, col) * pow2(1-bits:0)), 2)));
% in loops
            end
        end

        c(m-1) = bitcount / sum(1:n-m);
% indexing of
        sigma(m-1) = 2*sqrt(prod(ones(1,m)*k) + 2*ivp(k,m-(1:m-1),m-1)...
% C and SIGMA
                *(ivp(c1(1),2*(1:m-1),m-1))' + (m-1)*(m-1)...
% runs from 1
                *prod(ones(1,2*m)*c1(1)) - m*m*k*prod(ones(1,2*m-
2)*c1(1))); % to MAXDIM-1
    end
clear wrdmtrx

```



```

function ipow = ivp (base, intpowvec, veclen)
    ipow(1 : veclen) = 0;
    for j = 1 : veclen
        ipow(j) = prod(ones(1, intpowvec(j)) * base);
    end

function ipow = idvp (basevec, intpowvec, veclen)
    ipow(1 : veclen) = 0;
    for j = 1 : veclen
        ipow(j) = prod(ones(1, intpowvec(j)) * basevec(j));
    end

% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %

% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%
%
% The following sub-function is not actually used by the main
function and only %
% included for the benefit of those who would like to implement the
BDS test in a %
% language which is either incapable of or inefficient in handling
bit-wise AND- %
% operations, or those who would like to cross-check the above
computation. Deleting %
% the sub-function from the script will NOT result in any increase
in performance. %
%
%
% To use the function, save the remainder of this code in a file
named BDSNOBIT.M. %
%
%
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %

function w = bdsnokit (series, maxdim, eps)
%BDSNOBIT BDS test for independence IMPLEMENTED WITHOUT USING BIT-WISE
FUNCTIONS
%
% Only such comments which relate exclusively to this implementation
of the test and
% which cannot be found in the main function are included below.
%
%
% Copyright (c) 14 April 1998 by Ludwig Kanzler
% Department of Economics, University of Oxford
% Postal: Christ Church, Oxford OX1 1DP, England
% E-mail: ludwig.kanzler@economics.oxford.ac.uk
% $ Revision: 1.3 $ $ Date: 30 April 1998 $

```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Check and transformation of input arguments
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if nargin < 3
    eps = 1;
    if nargin == 1
        maxdim = 2;
    elseif maxdim < 2
        error('MAXDIM needs to be at least 2!');
    end
end

epsilon = std(series)*eps;
series = series(:)'; % PAIRS is the total number of unique pairs
which can be
n = length(series); % formed from all observations (note that
while this is
pairs = sum(1:n-1); % just (N-1)*N/2, MATLAB computes SUM(1:N-
1) twice as fast!)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation and storage of one-dimensional distance
information %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Recall that in the implementation of the main function above, table
C is stored in bit-
% representation. When this is not possible or desirable, the second
best method is to use
% one continuous vector of unassigned 8-bit integers (called UINT8).
This, however,
% requires version 5.1 or higher, and a similar option may not be
available in other high-
% level languages. Implementation does not depend on the ability to
use unassigned low-bit
% integers and would work equally with double-precision integers, but
the memory
% requirements would, of course, be higher. Using UINT8's is still a
rather inefficient
% way of storing zeros and ones, which in principle require only a
single bit each. On the
% PC, MATLAB actually requires "only" around 5 bytes for each UNIT8.

b(1:pairs) = uint8(0);
for i = 1 : n-1
    b(1+(i-1)*(n-1)-sum(0:i-2):i*(n-1)-sum(1:i-1)) = abs(series(i+1:n)-
series(i))<=epsilon;
end
clear series

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation of parameter K
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

sums(1 : n) = 0;
for i = 1 : n
    sums(i) = sum(b(i+(0 : i-2)*n - cumsum(1 : i-1)))...
% sum over column I
    + 1 ...
% diagonal element

```

```

        + sum(b(1+(i-1)*(n-1)-sum(1:i-2) : i*(n-1)-sum(1:i-1)));
% sum over row I
end
k = (sum(sums.^2) + 2*n - 3*(2*sum(b)+n)) / n/(n-1)/(n-2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation of one-dimensional correlation
estimates %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

bitsum(1:maxdim) = sum(b(1+(maxdim-1)*(n-1)-sum(0:maxdim-2) : pairs));
for m = maxdim-1 : -1 : 1
    bitsum(m) = bitsum(m+1) + sum(b(1+(m-1)*(n-1)-sum(0:m-2):m*(n-1)-
sum(1:m-1)));
end
c1(maxdim:-1:1) = bitsum(maxdim:-1:1) ./ cumsum([sum(1:n-maxdim), n-
maxdim+1 : n-1]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Computation of correlation estimates and SIGMA for higher
dimensions %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for m = 2 : maxdim

    % Indexing in vector space once again follows the rules set out
above. Multiplication
    % is done by moving up column by column into north-west direction,
so counter I runs
    % backwards in the below WHILE loop until the Mth column (from the
left) is reached:
    i = n;
    while i - m

        % Multiplication is not defined on UINT8 variables and
translating the columns
        % twice, once from UINT8 to DOUBLE integer and then back to
UINT8, would be
        % inefficient, so it is better to sum entries (this operation -
undocumented by
        % MATLAB - is defined, and even faster than the documented FIND
function!) and
        % compare them against the value 2:
        b(i + (m-1 : i-2)*n - sum(1:m-1) - cumsum(m : i-1)) = ...
        sum([ b(i + (m-1 : i-2)*n - sum(1:m-1) - cumsum(m : i-
1)); ...
        b(i-1 + (m-2 : i-3)*n - sum(1:m-2) - cumsum(m-1 : i-
2)) ]) == 2;

        % The sum over each column is computed immediately after that
column has been
        % updated. To store the column sums, the vector SUMS already
used above for the row
        % sums is recycled (this is more memory-efficient than clearing
the above SUMS
        % vector and defining a new vector of the column sums, because
in the latter case,
        % MATLAB's memory space will end up being fragmented by
variables K and C added to
        % the memory in the meantime!):
        sums(i) = sum(b(i + (m-1 : i-2)*n - sum(1:m-1) - cumsum(m : i-
1)));

```



```
% LeBaron, Blake (1997b), "A Fast Algorithm for the BDS Statistic",  
Studies in  
% Nonlinear Dynamics and Econometrics, vol. 2, pp. 53-59  
  
% ACKNOWLEDGEMENT:  
%  
% I am grateful to Blake LeBaron for giving me the exclusive  
opportunity to beta-test his  
% C programme in its compiled version for MATLAB 5 and thus enabling  
me to compare the two  
% programmes directly. I have benefited from the many associated  
discussions.  
  
% End of file.
```

```
% ENSAYOS PARA LA COMPARACIÓN DE TEST PARA EL ESTUDIO DE LA
DEPENDENCIA EN SERIES TEMPORALES.
%
% Los test estudiados son:
%
%     - M. Matilla-García, M. Ruíz.
%     - J. M. Amigó, S. Zambrano, M. A. F. Sanjuán.
%     - J. S. Cánovas, A. Guillamón (test 1, 2 y 3).
%     - BDS.

Nrepeticiones=1;

Niveles_confianza=[90,95,99];
epsilon_sigma=[0.5,1,1.5,2];

matriz_Matilla=zeros(3,2);
matriz_Amigo=zeros(3,2);
matriz_CyG1=zeros(3,2);
matriz_CyG2=zeros(3,1);
matriz_CyG3=zeros(3,1);
matriz_BDS=zeros(12,7);

T=360;

switch T

    case 360

        m_Matilla=[4,5]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[4,5]; m_CyG2y3=3;
m_max_BDS=8;
        vc_CyG1=[23,51;22,50;21,48];

    case 720

        m_Matilla=[4,5]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[5,6]; m_CyG2y3=3;
m_max_BDS=8;
        vc_CyG1=[80,107;78,106;76,104];

    case 1080

        m_Matilla=[4,5]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[5,6]; m_CyG2y3=3;
m_max_BDS=8;
        vc_CyG1=[96,154;95,153;93,150];

    case 1440

        m_Matilla=[4,5]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[5,6]; m_CyG2y3=3;
m_max_BDS=8;
        vc_CyG1=[106,198;105,196;103,193];

    case 1920

        m_Matilla=[4,5]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[5,6]; m_CyG2y3=4;
m_max_BDS=8;
        vc_CyG1=[113,251;112,249;110,245];
```

```

case 3840

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[5,6]; m_CyG2y3=4;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[119,414;119,411;118,405];

case 5760

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=4;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[519,749;516,747;510,741];

case 7680

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=4;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[588,974;585,971;580,964];

case 9600

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=4;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[633,1186;630,1182;625,1175];

case 12000

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=5;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[668,1437;666,1432;661,1423];

case 15000

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[4,5]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=5;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[692,1726;690,1720;687,1710];

case 18000

    m_Matilla=[5,6]; m_Amigo=[5,6]; m_CyG1=[6,7]; m_CyG2y3=5;
m_max_BDS=8;
    vc_CyG1=[705,1992;703,1986;701,1975];

end

for a=1:Nrepeticiones

    %serie=zeros(1,T);
    %serie(1)=0.45;
    %
    %for i=2:T
    %
    %    serie(i)=4*serie(i-1)*(1-serie(i-1));
    %
    %end

    %serie=zeros(1,T);

```

```

%serie(1)=0.45;
%serie(2)=0.3;
%
%for i=3:T
%
%    serie(i)=4*serie(i-1)*(1-serie(i-1));
%
%end

serie=2*rand(1,T)-1;

%serie=randn(1,T);

%serie=zeros(1,T);
%serie(1)=0.45;
%
%for i=2:T
%
%    serie(i)=0.3*serie(i-1)+(2*rand-1);
%
%end

%serie=zeros(1,T);
%serie(1)=0.45;
%
%for i=2:T
%
%    serie(i)=0.3*serie(i-1)+randn;
%
%end

%serie=zeros(1,T);
%serie(1)=0.45;
%
%for i=2:T
%
%    serie(i)=serie(i-1)+(2*rand-1);
%
%end

%serie=zeros(1,T);
%serie(1)=0.45;
%
%for i=2:T
%
%    serie(i)=serie(i-1)+randn;
%
%end

for b=1:2

    m=m_Matilla(b);
    G=calcula_EC_Matilla(serie,m);
    grados_libertad=factorial(m)-1;

    for c=1:3

```

```
nc=Niveles_confianza(c);
chi_cuadrado=chi2inv(nc/100,grados_libertad);

if G>chi_cuadrado

matriz_Matilla(c,b)=matriz_Matilla(c,b)+100/Nrepeticiones;

end

end

end

for b=1:2

m=m_Amigo(b);
EC=calcula_EC_Amigo(serie,m);
grados_libertad=factorial(m)-1;

for c=1:3

nc=Niveles_confianza(c);
chi_cuadrado=chi2inv(nc/100,grados_libertad);

if EC>chi_cuadrado

matriz_Amigo(c,b)=matriz_Amigo(c,b)+100/Nrepeticiones;

end

end

end

for b=1:2

m=m_CyG1(b);
EC=calcula_EC_CyG1(serie,m);

for c=1:3

if EC<vc_CyG1(c,b)

matriz_CyG1(c,b)=matriz_CyG1(c,b)+100/Nrepeticiones;

end

end

end

m=m_CyG2y3;
auxiliar=calcula_EC_CyG2y3(serie,m);
EC_t2=auxiliar(1);
```



```
grados_libertad=factorial(m)-1;
pV_t3=auxiliar(2);

for c=1:3

    nc=Niveles_confianza(c);
    chi_cuadrado=chi2inv(nc/100,grados_libertad);
    ns=1-nc/100;

    if EC_t2>chi_cuadrado

        matriz_CyG2(c)=matriz_CyG2(c)+100/Nrepeticiones;

    end

    if pV_t3<ns

        matriz_CyG3(c)=matriz_CyG3(c)+100/Nrepeticiones;

    end

end

for b=1:4

    eps_sig=epsilon_sigma(b);
    auxiliar=bds(serie,8,eps_sig,0,500);

    for c=1:3

        nc=Niveles_confianza(c);
        normal=norminv((1+nc/100)/2,0,1);

        for d=1:7

            if abs(auxiliar(d))>normal

                matriz_BDS(b+4*(c-1),d)=matriz_BDS(b+4*(c-
1),d)+100/Nrepeticiones;

            end

        end

    end

end

end
```