UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

ESTUDIO BIBLIOGRÁFICO DIFERENCIAL DE LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES QUE INTERVIENEN EN PROCESOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS Y DE TRANSMISIÓN DEL CALOR

PROYECTO FIN DE CARRERA.
Ingeniero Industrial

CÉSAR FRANCISCO ALCARAZ RUBIO.

2007

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

ESTUDIO BIBLIOGRÁFICO DIFERENCIAL DE LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES QUE INTERVIENEN EN PROCESOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS Y DE TRANSMISIÓN DEL CALOR

PROYECTO FIN DE CARRERA.

Titulación: Ingeniero Industrial
Alumno: César Francisco Alcaraz Rubio

Directores: Dr.D. Nicolás Madrid García.
Dr. D. Francisco Alhama López

Cartagena 27 de Octubre de 2007.

ÍNDICE.

Páginas.

Páginas.

1. *Introducción.*

Este trabajo consiste en un estudio del análisis dimensional y una posterior profundización bibliográfica sobre una serie de números adimensionales, centrándonos en los procesos físicos de transmisión del calor, mecánica de fluidos y en menor medida transferencia de masa.

En el estudio del análisis dimensional comenzaremos con una breve introducción histórica, donde haremos una revisión crítica desde los albores del análisis dimensional hasta nuestros días. Continuaremos profundizando con las ideas y conocimientos de Julio Palacios en su libro referente "Análisis dimensional" y concluiremos este apartado, con la citación de ejemplos sobre el análisis dimensional en procesos físicos de transmisión de calor por parte de publicaciones o libros de autores expertos en esta materia.

El estudio sobre los siguientes números adimensionales, número de Biot, número de Boussinesq, coeficiente de fricción y factor de fricción, coeficiente de resistencia, número de Eckert, número de Euler, número de Fourier, número de Froude, número de Graetz, número de Grashof, número de Mach, número de Nusselt, número de Peclet, número de Prandtl, número de Rayleigh, número de Reynolds, número de Stanton y número de Weber, se basará en un análisis bibliográfico, con una exposición detallada de su tratamiento cada vez que han hecho referencia en el libro sus autores expuesto de forma cronológica. El objetivo de este estudio es intentar dar una visión clara sobre el significado físico, definición, obtención de estos números y evolución en el tiempo de su significado por parte de los diferentes autores.

El estudio sobre estos números adimensionales se centra en los procesos de transmisión de calor por convección, conducción y radiación, y procesos de mecánica de fluidos.

2. Análisis dimensional.

2.1. Revisión histórico-crítica del análisis dimensional.

Con sus propios métodos, y dentro de las limitaciones de las pocas disciplinas existentes, los académicos de las antiguas civilizaciones parece que tácticamente han seguido unas pocas reglas dimensionales básicas, cuando operaban con cantidades físicas en sus cálculos.

Sin embargo una clara muestra de la noción de homogeneidad se encuentra, solamente en las obras de los griegos. Euclídes por ejemplo describió en sus "*Elementos*" la naturaleza de las cantidades de diferentes tipos y puso las restricciones de homogeneidad sobre operaciones con cantidades geométricas. Petolomeo escribió "monobiblos" titulado *Sobre Dimensiones*, en el cual él mantiene la tesis de que era imposible que existieran más de tres dimensiones geométricas. Pappus soporta la idea del mismo principio cuando escribió:

Solamente hay tres dimensiones en geometría, aunque ciertos escritores recientemente han admitido, ellos mismos, hablar de un rectángulo multiplicado por el cuadrado sin dar una idea inteligible de lo que ello significa.

La crítica fue probablemente nivelada en la derivación de una fórmula para el área del triangulo, resulta una expresión que contiene el producto de cuatro longitudes.

La mayoría de las ramas de física, con la excepción de la estática y la hidrostática, no eran desarrolladas bajo el liderazgo griego, dentro de ciencias exactas como eran la geometría y la astronomía. Uno de los obstáculos probablemente fue la pereza para realizar operaciones poco ortodoxas con las cantidades físicas; si por ejemplo, el producto de cuatro longitudes fue considerado una aberración, como podría la velocidad – como una relación de cantidades de diferentes especies- ¿tener una oportunidad ni si quiera?

Las cantidades obtenidas, tan familiares para nosotros en la actualidad, no eran reconocidas como tales y nunca fueron obtenidas en una forma independiente. Algunos conceptos (como la noción de momento indicada por Heron o Hero de Alejandría) pueden existir ahora, pero nunca encontraron una expresión como productos o cocientes de cantidades de clases diferentes.

Tenemos que esperar a los tiempos medievales para encontrar escritores, como Johannes de Muris, el cual trató con productos y cocientes de cantidades de diferentes dimensiones.

De Canonio, un libro usado en la edad media, muestra la influencia griega cuando enfatiza que uno debe operar con los "números que representan las cantidades", como muestra la siguiente cita:

…..multiplicar (el exceso de peso) por la cantidad que representa la longitud de toda la viga, y entonces dividir este producto por la cantidad que representa dos veces la longitud del brazo más pequeño, y lo que da como resultado, es el número que representa el peso, el cual……

A principios del Renacimiento, comenzó una corriente de investigación en las escuelas de París y Oxford que produjo la aclaración de nociones fundamentales de cinemática y estática; un hilo puede ser seguido desde estos académicos a Galileo y Descartes, y encontramos que el segundo ya usaba un lenguaje que transmitía conceptos modernos:

La fuerza a la cual yo me refiero siempre tiene dos dimensiones, y no es la fuerza que resiste (un peso) que tiene solamente una dimensión.

Esta referencia de Descartes a las dimensiones, no fue ni ocasional ni superficial, se muestra por un argumento de su rechazo al uso de un concepto equivalente a la energía en el tratamiento de la estática de mecánicas simples; el dice que la energía incluiría la velocidad y esto le dirigiría a atribuir tres dimensiones a la estática.

Descartes hizo otra contribución al asunto de las dimensiones, consiste en la puesta en libertad de su nueva geometría desde las restricciones dimensionales que por siglos, estorbaron a muchos académicos. Como Pappus, Descartes fue inspirado por problemas formulados por Appolonius; sin embargo, con diferencia a Pappus, no fue estorbado por consideraciones del significado de operaciones, las cuales parecería producir cantidades imposibles.
John Wallis anticipó la definición de Newton de momento, como el producto de dos cantidades físicas, no obstante él habló de peso en lugar de masa. Él dijo en su *Mecánica, sive de motu:*
Dividido por el peso total, el momento dado por el producto del peso y la velocidad del peso en movimiento. Obtendrás la velocidad después del impacto.

Fue reservado para Newton por enunciar en su Principio (Libro 2, Lema 2) la idea general de cantidades obtenidas:
Llamo a cualquier cantidad genitum (engendrado), si no se obtiene por adición o substracción de diversas partes, es generado o producido en aritmética por multiplicación, división o extracción de la raíz de algún término todo lo que….

Un contemporáneo de Newton, Leibniz, inventó su propia versión de cálculo, fue concernido con las nuevas cantidades físicas y su estructura.
Referido a un nuevo concepto, él declaró en una carta, fechada el 16 de octubre de 1707:
…..acción…es como el producto de la masa multiplicada por el espacio y velocidad, o como el tiempo multiplicado por el vis viva.
Grandes contribuciones fueron hechas para el análisis de fenómenos físicos durante el siglo XVIII, y aún muy poca atención fue puesta en el tema de las dimensiones físicas, durante gran tiempo de este periodo. Como una excepción de la regla Euler mostró en varios de sus numerosos escritos una preocupación por el significado de las cantidades físicas y con las expresiones matemáticas de relaciones físicas. Ya en 1736 en su Mecánica, Euler había formulado la ecuación *Adv=npdx* (para el movimiento de una masa A bajo una carga p) incluyendo una constante n, la cual, él consideró dependiente en las unidades seleccionadas para medir cantidades implicadas. InTheoria motus corporum solidorum seu sigidorum, Euler dedicó un capítulo a cuestiones de unidades y homogeneidad; aunque sus discusiones son algo oscuras, es evidente que Euler pensaba que no había nada absoluto en la materia de sistemas de unidades y dimensiones de cantidades físicas. Es notable que las ideas de Euler sobre dimensiones y homogeneidad no tuvieron repercusiones como es demostrado por las pocas discusiones profundas que se encuentran en los trabajos de Lagrange y Laplace algunas décadas después.
Ello fue reservado para un compatriota de Lagrange y Laplace para continuar el trabajo iniciado por Euler y para formular los principios de análisis dimensional; Fourier en la última de sus tres versiones sucesivas (1807, 1811, 1822) de la teoría analítica de calor (6-8), estableció los fundamentos del análisis dimensional.
En el primero, no se encuentra referencia a las dimensiones, mientras que en el segundo solamente hay una mención breve de ellas. Fourier hizo mención a dos símbolos que utilizó para cuatro cantidades diferentes, elegidas para dar al lector un criterio para las

correcciones en lugar de la acostumbrada *Errata Corrigienda.* Referido a la ambigüedad de los símbolos él dijo:

Este doble uso puede causar algunos errores….los errores pueden ser fácilmente rectificados considerando la homogeneidad de los términos. Por esto, es suficiente para reconocer que uno puede asignar respectivamente a las cantidades:

x, número de unidades de longitud, la dimensión….1
h, conductividad exterior, la dimensión …………. -2
K, conductividad específica, la dimensión -1
D, densidad……………………………….-3
C, capacidad específica de calor…………..0
Z, temperatura …………………………… 0
t, tiempo transcurrido ……………………..0

Estos números de dimensión es resultado de las definiciones dadas por las cantidades…Cuando es tomado en cuenta de acuerdo con esta regla, el número de dimensión de cada símbolo, puede admitirse que todas las cantidades se componen de términos homogéneos, y convierte en tarea fácil determinar que cantidades son indicadas por h y K.

Esta tabla de dimensiones es, desde luego, incompleta, ya que contiene solamente el exponente de la dimensión de longitud de cada cantidad. Fourier dió otra tabla incompleta en la tercera versión de su famoso trabajo; solamente tres de las cinco cantidades fundamentales que él consideraba necesarias en la teoría de calor son incluidas allí. Esto fue debido al hecho de que el análisis fue aplicado a ecuaciones que contenían combinaciones de los parámetros que realmente fueron descritos solamente en términos de longitud, tiempo y temperatura.

Fourier mostró no solamente un poder matemático excepcional, también mostró una gran profundidad en lo referente a los aspectos físicos de los problemas que él fue abordando por primera vez; esto se puede sacar muy bien por su detallada discusión del significado de las cantidades involucradas y la forma de medirlas, expresandolas y correlacionándolas. Su propuesta para el estudio de la conducción de calor constituye un buen modelo del análisis físico que debe siempre preceder a la formulación matemática y la solución. Aunque uno es tentado a citar párrafos enteros debido a su importancia y sabiduría, una frase debe ser suficiente.

…desde estos hechos generales yo he concluido que, para determinar numéricamente los más variados movimientos de calor, es suficiente asumir cada sustancia en tres medidas fundamentales…

Para estos “coeficientes específicos” (o parámetros), el añadió tres “cantidades indeterminadas” (o variables). Él entonces introdujo las nociones básicas que subyace a todo desarrollo adicional del análisis dimensional:

En la teoría analítica de calor, algunas ecuaciones (E) expresan una relación necesaria entre las cantidades existentes…..Esta relación no depende del todo de la elección de las unidades de longitud, la cual es de naturaleza contingente: que es como decir, si otra unidad de longitud fuera usada por la dimensión lineal, la ecuación (E) aún sería la misma….

Comentarios similares fueron hechos por Fourier para otras unidades. El consideró que su regla de la invarianza de las ecuaciones de conducción de calor con respecto a los cambios de las unidades, tenía como consecuencia inmediata, la homogeneidad adimensional de las ecuaciones:

Si uno aplica la regla precedente a las diferentes ecuaciones o a sus transformaciones, se encontrará que son homogéneas con respecto a cada clase de unidad y que la *dimensión de cualquier cantidad angular o exponencial es nula. Si esto no ocurre, o un error se ha cometido o se han introducido expresiones abreviadas.*

Aunque Fourier no provocó la mayoría de las consecuencias con las que ahora nosotros estamos familiarizados, el reconoció la existencia de grupos adimensionales en sus ecuaciones; refiriéndose a una fórmula para una cierta distribución de temperatura que el había obtenido, el dijo

…uno puede ver que la dimensión del exponente $x\sqrt{2h/Kl}$ *es siempre cero, o por la unidad de longitud, o el tiempo o la temperatura.*

Todos los elementos básicos pertenecientes a los principios del análisis dimensional son presentados en la *Teoría Analítica de Calor* de Fourier, pero la obtención de las relaciones entre las variables involucradas no fue previsto por él a pesar de su compresión de la potencial importancia de la materia, que es transmitida por la siguiente declaración:

Hemos introducido esta consideración en la teoría de calor para hacer nuestras definiciones más firmes y para verificar el cálculo; ello nos lleva desde las primeras nociones sobre cantidades; es por esta razón que, en geometría y en mecánica, es equivalente para los lemas fundamentales que los griegos nos dejaron sin pruebas.

En los trabajos de Fourier, se considera también el flujo de calor en cuerpos semejantes; porque mucha confusión entre análisis de semejanza y dimensional ha existido casi desde un siglo, es interesante ver que Fourier no estableció ninguna conexión entre las dos cuestiones. También aparece en esta consideración que Fourier dejó de ver una de las aplicaciones de los principios generales que el había claramente establecido.

Después de Fourier, no hubo un desarrollo importante del análisis dimensional en medio siglo.

Había, consideraciones y discusiones sobre sistemas de unidades desde las viejas y las nuevas cantidades físicas creadas; por otra parte- desde ambos tratados analíticos y consideraciones de semejanza- los grupos adimensionales o también llamados “coeficientes abstractos”, comenzaron a aparecer en la literatura. Es imposible de seguir la evolución del análisis dimensional sin ser conscientes del desarrollo relatado de ideas y métodos en los fenómenos físicos similares, pero para no incluir más de lo estrictamente necesario sobre la semejanza en este artículo que escaparía al propósito de centrarnos en el análisis dimensional y del intento de desenredarlos tanto como sea posible.

En el índice del tema de la teoría del sonido (1877-8) de Lord Rayleigh se encuentra una anotación “método de dimensiones” que marca el principio de la aplicación enunciado por Fourier más de 50 años antes. El hecho que Rayleigh desarrollara un método, mientras Fourier estableció un principio, refleja las diferentes posturas de dos hombres de ciencia con respecto a las dimensiones físicas. Rayleigh nunca dio una deducción estructural lógica de su método, pero hizo intenso y buen uso de ello como una herramienta de investigación; se encontraron aplicaciones de ello tanto en volúmenes de la *Teoría del sonido* (9) y en un buen número de papeles de Rayleigh; como él se dio cuenta final de este libro:

En el curso de este trabajo tuvimos frecuentes ocasiones para darnos cuenta de la importancia de las conclusiones a las que se puede llegar por el método de las dimensiones.

La primera aplicación detallada del método de las dimensiones se encuentra al principio del primer volumen (1877) después de la solución teórica del problema de la vibración de una masa unida al centro de un cordel tensado. La ecuación diferencial correspondiente para las vibraciones de pequeña amplitud es

$$M\ddot{x} + 2T(x/a) = 0\,, \quad (1)$$

M es la masa, x es el desplazamiento, T es la tensión de la cuerda, y a es la mitad de la longitud de la cuerda. Después, dando la expresión para el periodo

$$\tau = 2\pi\sqrt{aM/2T} \quad (2)$$

Rayleigh dice,

La ecuación (2) expresa la manera en que τ varía con las cantidades independientes T, M, a: resulta que pueden ser obtenidas por consideraciones de sus dimensiones (en sentido técnico) de las cantidades involucradas.

Después de enfatizar la importancia del "argumento de las dimensiones" en acústica, el autor indicó que la solución del problema puede ser escrita como

$$\tau = f(a, M.T)\ (3)$$

Y entonces explica las simples bases de este método:

Esta ecuación debe conservar su forma invariable, todo lo que puede ser unidades fundamentales por significado de las cuatro cantidades son expresadas numéricamente, como es evidente, cuando se considera que en la obtención de ellas no hay ninguna suposición en lo que se refiere a la magnitud de las esas unidades.

Porque T, la única variable en función de *f* que involucra el tiempo, tiene dimensiones (masa) (longitud) $(\text{tiempo})^{-2}$, Rayleigh concluye que cuando *a* y M son constantes, uno debe hacer τ proporcional a $T^{-1/2}$ como la única forma de prevenir cambios en las unidades, disturbando las relaciones funcionales (3). Después de admitir esto, mediante pasos similares para llegar a la conclusión que

$$\tau \propto T^{-1/2} M^{1/2} a^{1/2}$$

De otra manera τ, no sería independiente de los cambios en las unidades del tiempo, masa y longitud. Rayleigh demostró también en detalle el procedimiento de suponer las variables independientes y de resolver el sistema de ecuaciones alegebraico lineal que resulta del requisito de las mismas dimensiones por ambos lados de la ecuación original.

Varios grupos adimensionales fueron encontrados por Rayleigh usando el método de las dimensiones; el número de Reynolds, en la forma invertida v/ud, aparece en la *Teoría del sonido* (1878); un tipo de número de Weber se puede encontrar en un trabajo sobre los fenómenos capilares de chorros (1879, hoja No.60). Normalmente, el resultado del análisis dimensional de Rayleigh fue dado con los grupos adimensionales conteniendo la variable dependiente dividida entre los dos lados de la ecuación y no por ella misma(10) ; en este sentido, se puede decir que el nunca formó un número de Strouhal, ni aún al debatir la investigación de Strouhal sobre las vibraciones.

Durante el periodo de desarrollo del análisis dimensional que fue dominado en Inglaterra por Rayleigh, una multitud de ingenieros y físicos fueron relacionándose más y más sobre la materia en Francia; Bretrand (11), Lucas (12), carvallo (13), Clavenad, Vaschy (14), Mercadier, y Vogt contribuyeron a la materia desde 1878 hasta el final del siglo.

Carvallo y Vaschy fueron los primeros en intentar una formulación de un teorema general para el método de las dimensiones; cuando uno examina los libros y trabajos publicados por estos dos hombres a comienzos de 1890, casi parece como una carrera. La salida parece haber sido provocada por un comunicado verbal a la Asociación Francesa de Matemáticos, por Lucas (12), sobre las características de las máquinas eléctricas, que inspiró a carvallo en su primer trabajo (13) en 1891. Allí carvallo mostró que la ecuación de la energía de una dínamo podría expresarse como una relación entre dos variables adimensionales. La ecuación dimensional para la energía W,

$$W^2 = E^2 I^2 - \left(4\pi^2 L^2 I^4 / T^4\right)$$

dado por Lucas, fue transformado por Carvallo en

$$y^2 = x^2 - x^4$$

En la cual los términos

$$x = 2\pi LI / ET \quad \text{e} \quad y = 2\pi LW / E^2 T$$

son grupos adimensionales. En esta expresión E, I, L y T indican la fuerza elctromotriz, intensidad de corriente, autoinductancia y el periodo de la corriente alterna. Carvallo especificó en este trabajo que la curva que representa sus ecuaciones adimensionales fue realmente validada para cualquier máquina.

Él aún dio un segundo ejemplo de una formula adimensional y presentó lo que el llamaba “una derivación general” basado en la homogeneidad dimensional, declarando el siguiente teorema:

Si la ecuación característica de un tipo de máquina no contiene más de tres constantes características, las curvas características de diferentes máquinas de este tipo resulta una de la otra por un cambio de las escalas de abcisas y ordenadas.

En otros trabajos Carvallo puede verse trabajando su forma para ser menos críptico y más general formulando su teorema, pero Vaschy, quién ya había publicado un libro con fórmulas adimensionales y gráficas, ganó la carrera. En un trabajo publicado en 1892, dio una formulación más general del teorema fundamental y vino a cerrar la justificación del teorema en forma matemática (14). Su primera declaración del teorema indudablemente justifica la cita en su totalidad:

El mínimo más general de semejanza en máquinas resulta del siguiente teorema:
Suponemos $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ *cantidades físicas tal que los p primeros son expresados en términos de diferentes unidades fundamentales, y los (n-p) cantidades últimas son referidas a unidades derivadas de las p unidades fundamentales (por ejemplo,* a_1 *puede ser una longitud,* a_2*, una masa,* a_3*, un tiempo, mientras las otras (n-3) cantidades serían fuerzas, velocidades, etc., en este caso p=3). Si entre esas n cantidades existe una relación*

$$F(a_1, a_2, a_3, ...a_n) = 0$$

Esta ecuación se mantiene para cualquier elección de las unidades fundamentales, esta relación puede ser transformada en otra con no más de (n-p) parámetros, por ejemplo.

$$f(x_1, x_2, ...x_{n-p}) = 0$$

Los parámetros $x_1, x_2, ...x_{n-p}$ son funciones monomiales de $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ (por ejemplo $x_1 = Aa_1^{\alpha 1} a_2^{\alpha 2} ....a_n^{\alpha n}$). En el caso particular en el que n = 5 y p = 3, uno encuentra el teorema dado por Carvallo.

Vaschy no dice aquí que los parámetros $x_1, x_2, ...$ son adimensionales, pero eso es seguramente lo que el representa, porque en todos sus ejemplos ilustrativos son hechos adimensionales. Es de interés darse cuenta que su primer ejemplo es el problema clásico de la oscilación de un péndulo simple. Su segundo ejemplo es un problema de telegrafía con seis variables y cuatro unidades fundamentales, por las cuales el determina dos "razones …independientes de la elección de unidades"

En 1896 Vaschy publicó un libro titulado *Teoría de la Electricidad*, el primer capítulo fue devoto a las cuestiones de unidades de medida y dimensiones. Su teorema se establece en este libro en una forma más exacta y concisa:

Algunas relaciones homogéneas entre p cantidades $a_1, a_2, ...a_p$, los valores de las cuales dependen de la elección de las unidades, pueden ser reducidos a relaciones implicando (p-k) parámetros que son combinaciones monomiales de $a_1, a_2, ...a_p$, uno puede elegir k arbitrariamente. Obviamente este número k no puede ser más grande que el número n de las unidades fundamentales.

La justificación del teorema de Vaschy se basa esencialmente en la invarianza de las relaciones con respecto a los cambios de valores de las unidades, y hace uso de las condiciones matemáticas de homogeneidad de funciones. Algunas de las detalladas y modernas pruebas del teorema de Vaschy se basan esencialmente en su método.

Después de Vaschy, el teorema fue aparentemente olvidado, incluso por los franceses, y no se encuentran referencias en la literatura por muchos años.

Hay por lo tanto una buena razón para creer que en 1911, cuando Riabouchinsky redescubrió el teorema fundamental del análisis dimensional en Rusia, él lo hizo de forma independiente.

Sin el conocimiento de los trabajos de Carvallo y Vaschy, él había usado coordenadas adimensionales para representar los resultados de algunos de sus experimentos en el Instituto de Aerodinámica de Kutchino (16). Después del previo reconocimiento de las aplicaciones del método dimensional por Rayleigh, Prandtl y Dorand, Riabouchinsky dio una prueba del teorema fundamental que se basó en la suposición que las relaciones físicas en cuestión, podrían ser expresadas por una serie desarrollada de productos de exponentes de variables originales (17); en este aspecto mostró la influencia del punto de vista de Rayleigh. Riabouchinsky continuó haciendo contribuciones a la teoría de dimensiones por muchos años posteriores a su primer trabajo; él también estudió un aspecto paradójico del análisis dimensional en su primera discusión de un trabajo de Rayleigh.

En 1915, Rayleigh había publicado un trabajo en *Naturaleza (10)* con el propósito de simular el uso de su método de dimensiones entre ingenieros; él dio varios ejemplos, el último es un análisis del problema de Boussinesq del paso uniforme de calor desde un sólido conductor a un fluido incompresible no viscoso que fluye alrededor de un cuerpo conductor con una velocidad v en el infinito. Rayleigh supuso que la cantidad total de calor h que pasó en la unidad de tiempo fue función solamente de la dimensión longitud *a* del sólido, la diferencia de temperatura θ, la velocidad v, el calor específico del fluido c, y la conductividad k; él descartó la densidad del fluido, porque "claramente no entran en la cuestión". Su análisis le llevó a:

$$h = ka\theta F\left(avc / k\right).$$

Riabouchinsky pronto escribió en *Naturaleza* el siguiente comentario:

En Naturaleza 18 de Marzo, Lord Rayleigh dio esta fórmula $h = ka\theta F\left(avc / k\right)$ *, considerando calor, temperatura, longitud y tiempo como cuatro unidades "independientes". Si suponemos solamente tres de esas cantidades realmente independientes, obtenemos un resultado diferente. Por ejemplo, si la temperatura es definida como término medio de la energía cinética de las moléculas, el principio de semejanza nos permite afirmar solamente que* $h = ka\theta F\left(\mathrm{v} / ka^2, ca^3\right)$.

La respuesta de Rayleigh no resolvió la paradoja que resultaría si en efecto, como él pareció decir por ser el caso "más lejos del conocimiento de la naturaleza del calor permitido por la teoría molecular nos puso en una peor posición que antes del trato con un problema particular"

Entre los varios autores que han escrito sobre Riabounchinskt-paradoja de Rayleigh, L. I. Sedov ha dado una muy buena iluminación a la discusión basada en el muy típico análisis físico en que Rayleigh sobresalió. Sedov, después se dio cuenta que tres formas de energía era tomadas por Rayleigh como unidades diferentes fundamentales, mostró esto para ser permisible porque en el problema de Boussinesq procesos mecánicos ocurrían independientemente de los procesos térmicos. Si uno estudia el problema más general de la transferencia de calor en un fluido incomprensible y viscoso, la densidad másica, la constante de Boltzmann y la mecánica equivalente de calor deberían ser incluidas en el análisis, pero Rayleigh debatía el flujo de un fluido incomprensible y no viscoso, por lo que ninguno de estos tres parámetros sería considerado. Rayleigh explícitamente descartó la densidad másica; Sedov, después, más lejos justificando esto, mostró que la mecánica equivalente de calor y la constante de Boltzmann también deberían ser eliminadas, porque aquí no hay una transformación de una energía en otra, y porque la actividad molecular no está presente en el modelo adoptado. Sedov demostró que Riabouchinsky no contribuyó adicionalmente al conocimiento del análisis. Esto puede sonar paradójico, pero uno debería darse cuenta que una relación física sin ningún papel en un problema puede ser ignorada. A veces una ganancia real puede por consiguiente resultar, como ha sido ilustrado por la discusión de Bridgman sobre el problema de caída de una esfera (19); el asumió que, en este problema, fuerza, longitud, tiempo y masa pueden ser usadas como cantidades fundamentales en vez de las tres usuales y así obtuvo un resultado más definitivo desde el correspondiente análisis dimensional. Un crítico podría, desde luego, señalar el hecho que la fuerza no es realmente independiente de las otras tres cantidades, pero él no añadiría conocimiento; de hecho, el haría imposible el uso de las circunstancias que en el problema de Stokes las fuerzas son cero por definición.

La difusión en los Estados Unidos de las ideas de semejanza y la determinación de sus criterios debidos Principalmente a Buckingham, quién escribió, a comienzos de 1914, un serie de excelentes trabajos sobre la materia. Aunque Buckingham no dio referencias en su primer trabajo a escritores previos sobre el análisis dimensional, él fue consciente del trabajo hecho por Riabouchinsky a través de un sumario en una publicación Británica, como el mismo admitió después:

Una referencia al primero de estos trabajos (Riabouchinsky en 1911 en "L'Aérophile") apareció en el informe anual del comité británico de asesores para la aeronaútica en 1911-1912, p. 260, extracto 134. Aconsejo, no dudar por la insinuación contenida en *este abstracto, el escritor presente llegó substancialmente al mismo teorema y lo describió, con ejemplos ilustrativos en la "Revista física" en Octubre de 1914 (vol ivp. 345). La declaración del teorema dado en el presente trabajo no difiere sensiblemente de Riabouchinnsky, excepto en que el limitó su atención a las cantidades mecánicas.*

Si el teorema de π tiene que ser asociado con un nombre personal debería ser llamado con toda certeza el teorema de Carvallo-Vaschy o simplemente el teorema de Vaschy, y el nombre de Buckingham sería asociado solamente con la presentación de una nueva prueba, como los nombres de Riabounchinsky, Bridgman (19), Birkhoff (21), Brand (22), Satín-Guilhem (23) y otros que también justamente se asocian en este sentido. En esta conexión, el nombre de Bridgman sería dado en adición de un segundo teorema de análisis dimensional que el presentó en su libro en 1922 (19).
Bridgman mereció más crédito que el que recibió por su contribución a la clarificación, consolidación y difusión del método del análisis dimensional, que él emprendió primero en 1920 en unas series de cinco conferencias presentadas en la Universidad de Harvard. Estas tres conferencias fueron publicadas en 1922 y contienen, entre numerosas aplicaciones del análisis dimensional detalladas, prácticamente todas las secciones de física, una nueva derivación del teorema de Vaschy , y también el propio teorema de Bridgman sobre la estructura de todas las fórmulas dimensionales para la obtención de cantidades usadas en física. En un tratamiento sistemático en la materia, el segundo teorema de hecho precedería al teorema de Vaschy. Resultó de la postulación de Bridgman sobre el significado absoluto de las magnitudes relativas de las cantidades físicas, que él mostró a raiz de las reglas que nosotros siempre seguimos en la realización de operaciones de medida. Bridgman comentó que:

Muy poca atención parece que se le ha dado a la metodología de sistemas de medida, y no conozco si esta característica de todo nuestro sistema de medida ha sido formulada o no, pero es evidente sobre la examinación de cualquier sistema de medida en el uso actual que tiene esta propiedad…..La posesión de esta propiedad impone la consecuencia más importante, que es que la razón de dos números que expresan la medida de cualquiera de dos longitudes en concreto, por ejemplo, es independiente de el tamaño de la unidad con la que se han medido.

Saliendo para conocer posibles objeciones. Bridgman manifestó que cualquier regla de operación por la cual los números podrían ser asignados de uno en uno en correspondencia a las magnitudes físicas podría ser usado, pero eso requiere que la razón sea constante, o requiere el significado absoluto de la magnitud relativa, es esencial para todos los sistemas de medida en uso. Bridgman entonces demostró que:

Toda cantidad secundaria….., la cual satisface el requisito del significado absoluto de la magnitud relativa debe ser expresado como alguna constante multiplicada por potencias de las cantidades primarias.

Desde que Riabouchinsk y publicó su coherente y detallada obtención del teorema fundamental, muchos trabajos y libros han sido escritos sobre análisis dimensional, y muchas controversias siguieron a la iniciada por Carvallo y Clavenad (24); a pesar del serio ejemplo establecido por Rayleigh y Riabouchinsky, muchos de las controversias resultan en un enorme número de publicar trabajos no demasiado útiles.
Durante un cierto periodo la filosofía del análisis dimensional, e incluso una bondadosa interpretación metafísica, recibió mucha atención. Algunos resultados interesantes, no obstante, salieron de esas discusiones, así como la idea básica del análisis inspeccional

(25, 26), aparentemente creado por Mme. Ehernfest-Afanasjeva (1915) y expandido por Ruark (1935), y un crecimiento de insatisfacción sobre el carecimiento de rigor en la obtención del teorema fundamental, que inició varios investigadores al intentar nuevas pruebas fuera del marco de las matemáticas modernas.

La aplicación del análisis dimensional ha venido bien aplicado universalmente en todas las ramas de la física teórica y aplicada, y uno ahora puede presenciar los primeros intentos para uso de ella en otras ciencias. Uno no puede más que asombrarse con el análisis dimensional aplicado útilmente en problemas prácticos de psicología o en cuestiones de comportamiento social, y económicas, donde ya se ha intentado (27, 28, 29). Las últimas cuatro décadas del análisis dimensional deben ser estudiadas principalmente como el periodo de crecimiento de la aplicación, con la mejora de las técnicas que siempre siguen el periodo de desarrollo. Los esfuerzos para dar un sistema lógico-deductivo riguroso para el análisis dimensional no han cesado y la materia ha probado a ser un estímulo para muchos matemáticos. Por otra parte, los esfuerzos para hacer análisis dimensional una herramienta fácil para operar han continuado pero menos satisfactoriamente, porque en análisis dimensional es esencialmente útil cuando el conocimiento es aún bastante incompleto, en áreas donde el entendimiento físico es un deber, y por esto, como en muchas otras actividades donde la ciencia se aproxima al arte, no parece un atajo fácil.

2.2. El análisis dimensional según Julio Palacios.

2.2.1. Bases de Palacios.

Para entender mejor las ideas y conceptos de Palacios, vamos a hacer una breve introducción a los libros y conceptos que Palacios fue acumulando en su estudio para introducirnos mejor en su punto de vista sobre la materia estudiada.

Se debe al barón Jean Batiste Fourier (1) el haber aplicado a las magnitudes físicas el concepto geométrico de dimensión y, por ello, merece ser considerado como el precursor del Análisis dimensional. En su obra inmortal, Théorie analytique de la chaleur, establece el concepto de dimensión de modo tan claro y preciso que no podemos resistir la tentación de reproducirlo textualmente:
«Es necesario hacer notar que cada magnitud, indeterminada o constante, tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una ecuación no podrían ser comparados si no tuviesen el mismo exponente de dimensiones.»
«En la teoría analítica del calor, toda ecuación representa una relación entre las magnitudes coexistentes longitud, *x*; tiempo, *t*; temperatura, *v* capacidad calorífica por unidad de volumen, *c*; conductividad superficial, *h*, y conductividad térmica, *K*. Dicha relación no depende de la elección de la unidad de longitud que, por su propia naturaleza, es contingente.»
Hace observar luego Fourier que las medidas de una misma cantidad están en razón inversa de las unidades que se empleen para medirla.
Un cambio en la unidad de longitud no afecta ni a los tiempos ni a las temperaturas, pero sí influye sobre las medidas de *h*, *c*, y *K*. Basándose en la definición de estos coeficientes, deduce el cambio que experimentan cuando se altera la unidad de longitud y, generalizando el concepto geométrico, dice que <<la dimensión de c con relación a la unidad de longitud vale -3, la de *K* es - 1 y la de *h* es – 2>>. Llama a estos números exponentes dimensi6nales con relación a. la longitud, y hace análogas consideraciones con respecto a las otras dos variables, tiempo y temperatura, obteniendo el siguiente cuadro:

	x	t	v	K	h	c
Longitud	1	0	0	−1	−2	−3
Tiempo	0	1	0	−1	−1	0
Temperatura	0	0	1	−1	−1	−1

Llama Fourier la atención sobre la circunstancia de que el argumento de toda función que figure en una ley física, por ejemplo, una exponencial o una función trigonométrica, ha de tener nulos todos sus exponentes dimensionales, pues sólo así sucederá que su valor numérico sea independiente de las unidades que se elijan para medir longitudes, tiempos y temperaturas. En esta afirmación radica, según veremos, todo el análisis dimensional.
De la precedente exposición resulta claramente que, para Fourier, la dimensión, en singular, es un atributo peculiar de cada magnitud y que los exponentes dimensionales, lo que ahora se llaman dimensiones, son manifestaciones de dicho atributo.

Las ideas de Fourier fueron aplicadas con gran éxito a fines del pasado siglo por Reynolds (2), Lodge (3), FitzGerald (4), Rücker (5), Jeans (6), y, muy especialmente, por lord Rayleigh (7). Las aplicaciones consitieron, primero, en la comprobación de la homogeneidad de las ecuaciones con el fin de descubrir errores de cálculo y, después, por iniciativa principalmente de lord Rayleigh, se aplicó el Análisis dimensional a la resolución de problemas cuyo tratamiento directo presenta dificultades matemáticas insuperables. Lord Rayleigh empleó por primera vez las magnitudes con exponentes dimensionales nulos en la Mecánica de fluidos y, por ello, merece ser considerado, después de Fourier, como el fundador del Análisis dimensional. Contribuyeron eficazmente a este desarrollo inicial los trabajos de Riabouchinsky en Rusia (8) y los de Planck (9) y Einstein (10) en Alemania.

El año 1914 apareció en Norteamérica un trabajo de Buckingham (11) en el que se da una regla para averiguar el número de monomios de exponentes dimensionales nulos que pueden formarse con todas las magnitudes que intervienen en el fenómeno que se estudia. Tales monomios se denominan números π y, por eso, dio Bridgman a la citada regla el nombre de teorema de pi.

En realidad, Fourier había ya previsto, según hemos visto, que toda ecuación física debía consistir en un monomio de dimensiones nulas igualado a una función cuyos argumentos tuviesen también dimensiones nulas, y el llamado teorema de pi era ya empleado tácitamente, pero con todo rigor, por los físicos ingleses antes mencionados, especialmente por Jeans. Además, según hizo notar Métral (12), el teorema en cuestión había sido ya enunciado por Vaschy (13) el año 1892, aunque sin referirse expresamente a los monomios de dimensión nula. De todos modos, el trabajo de Buckingham tuvo la fortuna de atraer la atención de físicos, matemáticos e ingenieros del mundo entero, que lo han sometido a crítica minuciosa.

Consta el teorema de pi de dos partes. En la primera se trata de demostrar que toda ecuación física completa, esto es, que subsista cuando se cambian arbitrariamente las unidades fundamentales, puede tomar la forma:

$$F(\pi_1, \pi_2, ...) = 0$$

en la que las π_i son todos los monomios de dimensión nula, independientes entre sí, que pueden formarse con las magnitudes que intervienen en el problema. La segunda parte afirma que el número de tales monomios es igual a la diferencia, $i = n - q$, entre el número total de magnitudes y el de las fundamentales.

La primera parte del teorema es la que más ha llamado la atención de los matemáticos. Primero, Levi-Civita (14) hizo notar que las ecuaciones homogéneas que se estudian en los cursos de Análisis no son las que se manejan en Física, sino en Geometría, y utilizó en su tratado de Mecánica funciones que son homogéneas, por separado, con relación a los diversos grupos de variables, las que representan longitudes, tiempos y masas. Este método podría ser generalizado introduciendo nuevos grupos de homogeneidad, pero es preferible utilizar la teoría de las funciones homogéneas generalizadas desarrollada por Ehrenfest-Mfanassjewa (15).

Esta teoría presenta grandes dificultades, y quizá sea ésta la razón de que los físicos no le hayan prestado la debida atención. Por fortuna, gracias al profesor Ricardo San Juan (16), poseemos una exposición clara y sencilla de las funciones homogéneas generalizadas, completada con algunos teoremas. La principal contribución de R. San Juan consiste en haber demostrado que los sistemas de dimensiones usados en cada capítulo de la Física forman grupos abelianos con base finita, análogos a los sistemas hipercomplejos, lo cual permite sistematizar las teorías físicas como hizo Klein con las

geometrías en su famoso programa de Erlangen, y resultan así elegantemente clasificados los sistemas de unidades y sus transformaciones, tanto cuando se conserva la base, según se hacía hasta ahora, como cuando se cambia ésta.
Con su ya vieja historia, con su utilidad manifiesta, que se revela, no sólo en el campo de la Física teórica, sino en problemas técnicos, en los ensayos con modelos reducidos de aviones, buques, y construcciones hidráulicas y, sobre todo, con la intervención de los físicos más eminentes, sería de esperar que el Análisis dimensional estuviese ya asentado sobre bases sólidas, y que hubiese unanimidad acerca de la manera de emplearlo. Lejos de ser así, los físicos se hallan divididos en grupos cuyas opiniones discrepan en lo más esencial; en el concepto mismo de dimensión.
Diríase que a los físicos les ha ocurrido lo que al herrero del cuento, a quien a fuerza de martillear se le olvidó el oficio. Quizá el olvido comenzó cuando Maxwell atribuyó a cada magnitud, Y, una fórmula dimensional:

$$[Y]=[M_1]^{\alpha_1}[M_2]^{\alpha_2}...[M_m]^{\alpha_m}$$

en la que M_1, M_2 ... son los símbolos de las magnitudes que forman la base, y $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_m$ son los exponentes dimensionales de Y. Cayó en el olvido la definición que Fourier había dado de tales exponentes y surgieron las más variadas opiniones acerca de lo que significan los símbolos provistos de paréntesis rectos (*). Una opinión muy extendida, que se remonta a Clerk Maxwell, y de la que hemos participado muchos físicos de mi generación, es que dichos símbolos y, por tanto, las fórmulas dimensionales se refieren a las unidades, y así se escribe, por ejemplo:

$$1erg=\frac{1cm^2x1g}{1s^2}$$

sin caer en la cuenta de que nos veríamos en un aprieto si un alumno inquisitivo nos preguntase cómo se hace para multiplicar un centímetro cuadrado por un gramo y dividir el producto por un segundo elevado al cuadrado.
(*) Por rara excepción, en el viejo tratado de Física del profesor Chwolson de la Universidad de San Petersburgo (18), obra que gozó de gran prestigio a principios de siglo, y que no se cita ya en parte alguna, se encuentra una definición de las dimensiones que está de acuerdo con las ideas de Fourier.
Dice así:
<<Si la unidad derivada A varía proporcionalmente a la potencia p de la unidad de longitud, a la potencia q de la unidad de masa y a la potencia r de la unidad de tiempo, se dice que la unidad A tiene la dimensión p con relación a la unidad de longitud, la dimensión q con relación a la unidad de masa y la dimensión r con relación a la unidad de tiempo>>.
Completando esta definición con el concepto de unidades coherentes, sin el cual no tiene sentido hablar de relaciones de proporcionalidad entre unidades, se llega exactamente a la interpretación de las dimensiones que daremos en este libro en el capítulo V. Conviene hacer notar que, puesto que las fórmulas dimensionales son aplicables a las unidades de una pareja de sistemas coherentes cualesquiera, no es propio atribuir la dimensión a las unidades, sino a las magnitudes.

Algunos autores, empezando por Tolman (17), atribuyen a los símbolos que figuran en la fórmulas dimensionales cierto sentido esotérico y afirman que la «verdadera esencia de las magnitudes, desde el punto de vista físico, está representada por su respectiva fórmula dimensional>>.

Esta opinión es insostenible, porque, según hemos hecho ver en otro trabajo (19), conduciría a desatinos tales como el creer que el momento de un par de fuerzas es la misma cosa que un trabajo o que el calor, y que un ángulo y la esbeltez de una columna son magnitudes de igual índole. En modo alguno pueden tomarse las ecuaciones dimensionales como sustitutivos de las definiciones, pues con ello ignoraríamos la diferencia entre la energía interna, que es una función de estado, y el calor o el trabajo, que no lo son. Y otro tanto cabe decir de las funciones termodinámicas: energía libre, entalpía y entalpía libre que, a pesar de tener la misma fórmula dimensional, son cosas diferentes.

Los autores modernos, salvo raras excepciones, o han olvidado el concepto clásico de dimensión, o prescinden deliberadamente del mismo, y como cada uno entiende por dimensión cosa diferente, surgen discusiones apasionadas, sin posibilidad de acuerdo entre los contrincantes.

He aquí algunos botones de muestra.

Según Planck, «tan falto de sentido es hablar de la dimensión real de una magnitud como del nombre real de un objeto».

Reichenbach (20) dice: «Cada magnitud física se supone dotada de una dimensión que caracteriza su cualidad.» Tras este conato de definición y de decir que la velocidad y la aceleración y el campo eléctrico deben tener dimensiones diferentes, dice que hay arbitrariedad en la manera de «reducir la dimensión de una magnitud dada a las dimensiones elementales: longitud, masa y tiempo y que, por eso, se supone arbitrariamente que carecen de dimensión, no sólo ciertos factores numéricos, sino hasta funciones de estado (por ejemplo, la temperatura)».

Según el profesor Diesselshorst (21), los símbolos de las fórmulas dimensionales << no son unidades especiales, sino tan sólo representantes de cada tipo de magnitud... y estos representantes se denominan dimensión de la magnitud respectiva>>. No acertamos a adivinar lo que ha de entenderse por representante, y eso que, en lugar de emplear el vocablo alemán, recurre Diesselshorst a un vocablo romance, quizá con la convicción de ser así mejor comprendido por sus compatriotas.

Ciertamente, hablar de la esencia de las magnitudes y vincularla con las dimensiones es cosa que, por su carácter metafísico, había de ser repudiada por los físicos adscritos a la Filosofía operacional o Lógica positivista del círculo de Viena. La reacción fue iniciada por Bridgman (22), quien afirma que «las dimensiones no tienen en modo alguno carácter absoluto, sino que han de definirse, precisamente, a partir del proceso que se utilice para medir la magnitud respectiva» (*).

Para ser consecuente con su doctrina, debiera dar Bridgman la receta, para pasar del proceso de medida a la dimensión, pero se limita a utilizar las dimensiones obtenidas por los métodos clásicos y, gracias a esta inconsecuencia, el Análisis dimensional no pierde en sus manos toda su virtualidad. Pero hace cuestión de principio el negar que a cada magnitud corresponda una dimensión determinada, pues afirma que «no tiene sentido hablar de las dimensiones de una magnitud mientras no se haya establecido el sistema de unidades en que ha de medirse». De esta posición previa resulta que, al plantear los problemas de Análisis dimensional, esto es, al formar la lista de las magnitudes que intervienen en el fenómeno considerado, y escribir sus exponentes dimensionales, hace razonamientos tan casuísticos, sutiles y alambicados, que han de descorazonar a todo el que trate de iniciarse en estas cuestiones, y todo ello, según tendremos ocasión de ver, para obtener soluciones deficientes, puesto que no revelan toda la información que el Análisis dimensional es capaz de suministrar

La tendencia de Bridgman ha prevalecido entre los físicos contemporáneos. Fr. Russo (24), al resumir los trabajos más recientes, afirma que «los monomios de Vaschy no son invariantes más que para los cambios de unidades que pertenezcan a la estructura en que nos coloquemos y entiende por estructura cualquiera de las múltiples maneras de atribuir dimensiones a las magnitudes.
Con su loable propósito de expurgar el Análisis dimensional de elementos metafísicos, no han logrado los lógico-positivistas otro resultado que la ruina completa del mismo. En otro lugar nos hemos ocupado
(*) Para los positivistas, la base del conocimiento físico son las medidas.
Esto puede admitirse cuando se trata de descubrir leyes expresables en forma matemática, pero no de modo absoluto. Galileo pudo derribar toda la física aristotélica con sólo observar que todos los cuerpos caen en el aire casi con la misma velocidad, y descubrió la ley de la inercia haciendo notar que una bola, después de rodar cuesta abajo, es capaz de rodar cuesta arriba hasta alcanzar casi su altura inicial, de donde resulta que, si la cuesta arriba se reemplaza por un plano horizontal, y si no hubiere rozamientos, la bola rodaría sin cesar, pues nunca alcanzaría su nivel original. Como se ve. Galileo no tuvo que medir nada para echar las bases de la Mecánica.
Guido Beck (23) va más allá que los positivistas, pues para él, «fenómeno físico es toda medida experimental que puede ser expresada en centímetros, gramos y segundos». Con esta definición, que en realidad es una afirmación gratuita, lo que Galileo observó desde la torre de Pisa no sena siquiera un fenómeno físico.

Extensamente de dicha doctrina filosófica (25) en relación con la Física en general. Ahora nos limitaremos a demostrar que el Análisis dimensional, cuando se llevan a su extremo las consecuencias de la Lógica positivista, pierde toda su eficacia. Dicha Lógica, a fuerza de querer ser operacional, se ha hecho inoperante (*).
Burniston Brown (27) parte del hecho, señalado por Eddington (28), de que todas las medidas de precisión consisten en la observación de coincidencias, lo que le lleva a definir al físico como un hombre a quien basta un ojo que ni siquiera necesita percibir los colores. Hace notar Burniston Brown que en toda medida hay que observar simultáneamente dos coincidencias y, por tanto, tomar en consideración la velocidad de propagación de la luz, de donde resulta que son necesarias y suficientes dos magnitudes fundamentales, que han de ser el espacio y el tiempo, precisamente, y refuerza su opinión con la siguiente cita de lord Kelvin: «Hay algo sumamente interesante en el hecho de que podamos establecer un sistema métrico basado en una unidad de longitud y en una unidad de tiempo. No hay en ello nada nuevo, pues es ya conocido desde los tiempos de Newton, pero conserva todo su interés y actualidad.»
No dice lord Kelvin en qué consiste ese «algo sumamente interesante», por lo que hay que darle un sentido recóndito y, al tomarlo como fundamento para establecer el Análisis dimensional, se incurre en la misma falta que cuando se atribuye a la fórmula dimensional obtenida a la manera clásica la virtud de contener la verdadera esencia de las magnitudes. Pero, lo peor del caso, es que, al mutilar la base reduciendo a dos el número de magnitudes fundamentales, aumenta el número de monomios con exponentes dimensionales nulos, con lo que la .información que proporciona el Análisis dimensional se hace menos precisa.

(*) La mejor critica de la doctrina positivista fue hecha por Planck en una conferencia, titulada Religion und Naturwienschaft, que se encuentra reproducida en su autobiografía (26).

<<Las opiniones de los positivistas no pueden ser combatidas desde un punto de vista puramente lógico. Y, sin embargo, un examen detenido de las mismas revela que son inadecuadas y estériles, porque prescinden de una circunstancia que tiene importancia decisiva para el progreso científico. Por mucho que alardee el Positivismo de estar exento de prejuicios, tiene que partir de una premisa fundamental si no quiere degenerar en un solipsismo ininteligible. Tal premisa consiste en que toda medida física puede ser reproducida de tal modo que el resultado es independiente de la personalidad del observador, del lugar y tiempo en que se efectúa la medición, y de cualquier otra circunstancia. Todo esto revela, simplemente, que el factor decisivo para el resultado de la medición está fuera del observador y que, en consecuencia, las medidas plantean problemas que implican conexiones causales en una realidad independiente del observador.>>

En realidad, la reducci6n de la base hace que queden despojadas de sus dimensiones algunas de las constantes dimensionadas, por lo que el formar bases mutiladas no es ninguna novedad. Ya Heisenberg (29) utilizó en sus estudios de Mecánica ondulatoria un sistema en el que se hacían iguales a 1 la constante de Planck, *h*, y la velocidad de la luz en el vacío, con lo que se queda una magnitud en la base, la longitud.
A nuestro modo de ver, si el Análisis dimensional ha de servir para algo, es preciso que exista un sistema unívoco, de modo que a cada magnitud corresponda una fórmula dimensional perfectamente determinada, pues sólo con esta condición podremos estar seguros de que será correcta la solución obtenida al aplicar el teorema de pi a un problema debidamente planteado.
En trabajos anteriores (30) hemos tratado de establecer el sistema unívoco. Desde luego, es un propósito que no puede lograrse con el solo raciocinio y, puesto que la lógica positivista ha fracasado en el empeño, procede recurrir a los métodos de la que Heisenberg (31) llama Física abstracta, esto es, la Física en que se cree en la posibilidad de formular leyes para los procesos naturales de manera precisa y simple, leyes que no derivan directamente de las medidas, sino que han sido establecidas
por abstracción.
Trataremos en este trabajo de desarrollar una teoría del Análisis dimensional basada en hechos elevados a la categoría de postulados, y que resultan ser en número de dos. El primero se refiere a la índole de las ecuaciones físicas; el segundo atañe al significado de las constantes universales, y permite clasificarlas en ineludibles y superfluas.
Nuestros postulados bastan para crear un sistema dimensional unívoco, y su validez deberá comprobarse por vía experimental, esto es, en problemas de Análisis dimensional cuya solución completa sea conocida. Al proceder así, nos libramos de las trabas impuestas por la Filosofía operacional. Nuestra teoría está hecha para físicos que, aunque sean tuertos y daltonianos como el estilizado por Eddington, no renuncian al
uso de todas sus facultades mentales y, entre ellas, a la de crear entes abstractos. Hablaremos, pues, de las magnitudes físicas, tales como la fuerza, la masa, la energía, etc., como de entes abstractos que intervienen en los diversos fenómenos con cuantías o cantidades que varían en cada caso particular, y que existen aunque nadie las mida.
Vulneramos deliberadamente los preceptos de la Filosofía operacional, para la cual no existen sino las medidas, pero nos mantenemos dentro de la buena doctrina positivista, pues nos fundamos en hechos y sometemos nuestros resultados a la comprobaci6n experimental. El hecho en que nos basamos es la existencia de leyes físicas que se formulan mediante ecuaciones cuya estructura suele ser tal que permite atribuir una dimensión a cada magnitud. De aquí resulta que el Análisis dimensional está subordinado a las teorías físicas; no tiene existencia independiente de las mismas.

Desde nuestro punto de vista, el Análisis dimensional carece del carácter misterioso que, cosa curiosa, le atribuyen los que más celo manifiestan en evitar toda influencia metafísica. Nada menos que el eminente físico Bridgman, uno de los campeones de la Filosofía operacional, y considerado como la máxima autoridad en cuestiones de Análisis dimensional, afirma en su reciente artículo de la Enciclopedia Británica (32) que dicho análisis sirve <<para establecer ciertas limitaciones necesarias en la forma de cualquier relación posible entre las variables de un sistema físico>> y esto, «aun cuando sea imposible dar una información precisa y detallada de las ecuaciones fundamentales a partir de las cuales habría de hallarse la solución». Dice, en fin, que «el fundamento del Análisis dimensional se halla en el requisito del sentido absoluto de las magnitudes relativas».

Si las afirmaciones de Bridgman fuesen ciertas, el Análisis dimensional permitiría hacer previsiones «necesarias» sobre fenómenos cuyas leyes fundamentales nos son desconocidas. Estaría encima de la experiencia y de la teoría, y su estudio debería corresponder a la Metafísica. Nuestra opinión, aun cuando no tengamos prejuicios contra los métodos metafísicos, es justamente la contraria.

2.2.2. Resumen de la teoría de la homogeneidad de funciones y de las ecuaciones.

2.2.2.1. Las funciones homogéneas generalizadas.

Se dice que una función real, $H\left(\xi_1,...,\xi_n\right)=0$ de n variables reales es homogénea cuando, al multiplicar las variables por sendos factores reales, $\xi_1,...,\xi_n$, independientes o ligados, la función queda multiplicada por una función de éstos, independiente de las variables x_1. .. x_n, que se llama factor de homogeneidad, o sea cuando:

$$y\left(\xi_1 x_1,...,\xi_n x_n\right)=\varphi\left(\xi_1,...,\xi_n\right)\ y\ \left(x_1,...,x_n\right) \qquad [1,1]$$

para todos los sistemas de valores reales, $\xi_1,...,\xi_n$, independientes o ligados por ciertas relaciones que se llaman ecuaciones de condición. La función se llama incondicional o condicionalmente homogénea según que los factores $\xi_1,...,\xi_n$ sean o no independientes.
Es evidente que todo monomio, $x_1^{\alpha_1},...,x_n^{\alpha_n}$, es función incondicionalmente homogénea y que su factor de homogeneidad $\xi_1^{\alpha_1},...,\xi x_n^{\alpha_n}$.
El recíproco es también cierto si la función se supone continua.

Teorema 1º. Toda función continua incondicionalmente homogénea es un monomio.

(*) Daremos en este capítulo lo estrictamente necesario para nuestro propósito, tomándolo del libro de Ricardo San Juan (16), donde encontrará el lector el desarrollo completo de la teoría y las demostraciones que omitimos.
Los lectores a quienes sólo interese el aspecto físico del Análisis dimensional, pueden prescindir de los teoremas. Les basta con las definiciones de funciones y ecuaciones homogéneas.

La homogeneidad incondicional determina completamente la forma de toda función continua, salvo los exponentes que figuran en el monomio. No ocurre lo mismo cuando la homogeneidad es condicional, pero, si las ecuaciones de condición son monomios, se cumple el siguiente teorema.
Teorema 2.° Si una función continua es condicionalmente homogénea y las ecuaciones de condición son expresiones monomias:

$$\begin{array}{l}\xi_{m+1}=\xi_1^{\alpha_{11}}...\xi_m^{\alpha_{m1}}\\ ....\\ ....\\ \xi_{m+1}=\xi_1^{\alpha_{1s}}...\ \xi_{\mathrm{m}}^{\alpha_{ms}},\ (m+s=n)\end{array}$$

que dejan m factores independientes, habrá de ser:

$$y \equiv x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_m^{\varepsilon_m} \Psi \left(\frac{x_{m+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_m^{\alpha_{m1}}}, \ldots, \frac{x_{m+s}}{x_1^{\alpha_{1s}} \ldots x_m^{\alpha_{ms}}} \right).$$

Recíprocamente, cualquiera que sea la función Ψ, esta expresión define una función homogénea con las ecuaciones de homogeneidad precedentes.

2.2.2.2. Ecuaciones homogéneas.

Se dice que una ecuación, $H\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0$, entre n variables reales, es homogénea cuando subsiste al multiplicar las variables por sendos factores, es decir, cuando:

$$H\left(\xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n\right) = 0$$

La ecuación se llama condicional o incondicionalmente homogénea según que los factores $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sean todos arbitrarios o estén ligados.

Teorema 3.° Si una ecuación, $x_n = f\left(x_1, .., x_{n-1}\right)$ *, que define una variable como función continua de las restantes, es condicionalmente homogénea, y las ecuaciones de condición son monomios:*

$$\begin{aligned} &\xi_{r+1} = \xi_1^{\alpha_{11}} \ldots \xi_r^{\alpha_{r1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_n = \xi_1^{\alpha_{1s}} \ldots \ \xi_r^{\alpha_{rs}}, \ (s = n - r) \end{aligned}$$

habrá de ser:

$$x_n \equiv x^{\alpha_{1s}} \ldots x_r^{\alpha_{rs}} \Psi \left(\frac{x_{r+1}}{x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_r^{\alpha_{r1}}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_1^{\alpha_{1t}} \ldots x_r^{\alpha_{rt}}} \right); \ (t = s - 1).$$

Teorema 4.° Las funciones homogéneas generalizadas son las únicas aptas para definir magnitudes de manera que la igualdad y la suma de sus cantidades sea independiente del sistema de unidades.
Este teorema ha sido enunciado y demostrado por R. San Juan (16), e impone el requisito que han de cumplir las definiciones cuantitativas para que sea aplicable el análisis dimensional.

A continuación expondremos las conclusiones a las que llegó Palacios.

2.2.3 El teorema de Pi. Homogeneidad de las fórmulas físicas.

Ya Fourier indicó que una de las ventajas de atribuir una dimensión a cada magnitud consistía en poder descubrir fácilmente errores de cálculo, pues sucedía que todos los términos de cualquier ecuación que resultara de aplicar las ecuaciones fundamentales a un caso particular habían de tener la misma dimensión. Se ha convenido en decir que dos o más magnitudes son homogéneas entre sí cuando tienen la misma dimensión y, por tanto, la proposición de Fourier puede enunciarse así:

Todos los términos de una ecuaci6n física deben ser homogéneos.

Tan manifiesta llegó a ser la utilidad de esta regla, y de tal modo resultó confirmada en todos los desarrollos teóricos, que, más o menos tácitamente, se convirtió en un principio metafísico, al que debían someterse todas las teorías físicas. Por eso, se imponían condiciones a las fórmulas de definición para que estuviesen de acuerdo con el llamado principio de homogeneidad, y las ecuaciones empíricas que lo vulneraban se consideraban como expresiones imperfectas de alguna ley mal conocida.

Elevado a la categoría de principio el requisito de homogeneidad, procedía, si no su demostración, por lo menos su justificación, que consistía en recurrir a argumentos vagamente intuitivos, tales como decir que no tenía sentido la suma o la resta de cantidades heterogéneas y que, justamente, la dimensión era lo que caracterizaba la homogeneidad. De la falacia de esta argumentación, que confieso haber tenido por buena, es buena prueba el hecho de que la suma de cantidades dadas tiene o no sentido según el propósito que se persiga.

Por ejemplo, no se puede sumar yeguas con caballos para obtener yeguas o caballos solamente, pero tiene perfecto sentido afirmar que

2 yeguas + 3 caballos = 5 équidos.

De la misma manera, no tiene sentido en Termodinámica sumar la energía interna, U, con el producto de la presión por el volumen con la pretensión que el resultado sea energía interna. Pero sí cabe afirmar que la disminución de la magnitud $H \equiv U + pV$ da el calor desprendido en cualquier transformación isobara.

Muchos autores intentan, de uno u otro modo, conservar el principio de homogeneidad como cosa independiente de las teorías físicas y, en este sentido, quien más ha profundizado en la cuestión es el profesor R. San Juan (16), quien ha logrado demostrar que las ecuaciones han de ser necesariamente homogéneas si relacionan magnitudes definidas de tal modo que el criterio de suma sea independiente del sistema de unida-
des que se adopte.

A nuestro modo de ver, el principio de homogeneidad no puede darse como cosa evidente, ni está subordinado solamente a la manera convencional de definir las magnitudes secundarias, sino que es consecuencia de nuestro primer postulado, según vamos a demostrar.

Teorema de pi.

Sea una teoría física cuyas ecuaciones fundamentales, por estar de acuerdo con nuestro primer postulado, esto es, por consistir en relaciones entre monomios, son incondicionalmente homogéneas. Sup6ngase que cumplen igual requisito todas las fórmulas de definici6n de las magnitudes secundarias que se utilicen en la teoría. Resultará un sistema de ecuaciones invariantes con relación a todos los cambios de unidades coherentes, y de igual propiedad gozará, por consiguiente, cualquier ecuación:

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=0\,, \qquad [2,1]$$

que se deduzca de aquéllas por aplicación de la teoría a un caso particular en que se trate de averiguar c6mo depende cierta magnitud, x,., de otras, $x_1,...,x_{n-1}$, que figuran como variables independientes en el fenómeno considerado.

En la ecuación [2,1] figurarán, a modo de parámetros, no sólo las constantes específicas de los cuerpos que intervengan en el fenómeno, sino también las constantes universales peculiares de la teoría.

Utilizando un sistema de unidades coherentes, no habrá en [2,1] coeficientes parásitos, y al pasar a otro sistema también coherente deberá permanecer invariable la ecuación que nos ocupa. Sean $x_1,...,x_m$ las magnitudes escogidas para formar la base sean:

$$\begin{array}{ll}\left[x_{m+1}\right]=\left[x_1\right]^{\alpha_{11}}...\left[x_m\right]^{\alpha_{m1}} \quad s=n-m & \\ .... & \\ .... & [2,2] \\ \left[x_n\right]=\left[x_1\right]^{\alpha_{1s}}...\left[x_m\right]^{\alpha_{ms}} & \end{array}$$

las fórmulas dimensionales de las demás magnitudes. Al pasar a otro sistema coherente, las medidas $x_1,...,x_n$ se convertirán en $x'_1,...,x'_n$, cumpliéndose que:

$$x_1=x_1^{'}\frac{U_1^{'}}{U_1}=x_1^{'}\left[x_1\right];....;x_n=x_n^{'}\left[x_n\right]$$

y la ecuación dada se transformará en:

$$f\left(\left[x_1\right]x_1^{'},...,\left[x_n\right]x_n^{'}\right)=0$$

Como la condición de invariabilidad exige que sea:

$$f\left(x_1^{'},...,x_n^{'}\right)=0$$

queda demostrado que la función en cuestión es homogénea con las condiciones [2,2]. Además, aplicando el teorema 3º expuesto en el apartado anterior, resulta que la ecuación ha de tener la forma:

$$f\left(\frac{x_{m+1}}{x_1^{\alpha_{11}}\ldots x_m^{\alpha_{m1}}},\ldots,\frac{x_n}{x_1^{\alpha_{1s}}\ldots x_m^{\alpha_{ms}}}\right)=0, \qquad (s=n-m)$$

y en virtud de [2,2] los monomios

$$\pi_1=\frac{x_{m+1}}{x_1^{\alpha_{11}}\ldots x_m^{\alpha_{m1}}};\ldots;\pi_s=\frac{x_n}{x_1^{\alpha_{1s}}\ldots x_m^{\alpha_{ms}}}$$

Tienen dimensión nula, quedan demostradas las siguientes proposiciones:
1ª. La forma más general de toda la ecuación

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$$

que sea consecuencia de una teoría cuyas leyes fundamentales sean relaciones de proporcionalidad entre potencias con exponentes fijos, es:

$$F\left(\pi_1,\ldots,\pi_i\right)=0,$$

donde las π_i son los monomios independientes de dimensión nula o monomios pi, que pueden formarse con las magnitudes consideradas.
2ª. El número de estos monomios independientes es i = n - h, donde h es la característica de la matriz formada con los exponentes dimensionales con relación a una base completa cualquiera.

Las proposiciones anteriores son una variante del teorema de pi, que fue enunciado por Buckingham (11) del siguiente modo:

1.° La forma más general de cualquier ecuación física completa:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$$

$$F\left(\pi_1,\ldots\pi_n\right)=0$$

donde las π son los monomios independientes de dimensión nula que pueden formarse con las n magnitudes consideradas.
2.° El número de estos monomios independientes es i = n - q, donde q es el número de unidades fundamentales necesarias para medir las n magnitudes.
Llama Buckingham completa a toda ecuación que subsiste sin alteración de forma al cambiar las unidades fundamentales, lo que equivale a postular la homogeneidad condicionada de la ecuación de que se trata. Con esto, la demostración del teorema de pi es inmediata si se utiliza la teoría de las funciones homogéneas generalizadas. Pero esta teoría no fue dada a conocer por Ehrenfest-Affanassjewa (15), sino dos años después de que Buckingham publicase su trabajo. Por otra parte, si bien es cierto que no se encuentra en ninguna de las teorías físicas actuales una sola ecuación que no satisfaga el principio de homogeneidad, el admitir este principio de buenas a primeras es cosa que repugna a los lógico-positivistas, y para justificar esta repugnancia hace notar Bridgman (22) que se pueden construir adrede ecuaciones que estén en desacuerdo con dicho principio sin más que sumar dos ecuaciones que se refieran a un mismo fenómeno, después de haberlas elevado a potencias cualesquiera. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo se cumple que:

$$v=gt;\quad s=\frac{1}{2}gt^2$$

y, en consecuencia, la ecuación:

$$\left(v-gt\right)+\left(s-\frac{1}{2}gt^{2}\right)^{3}=0, \qquad [2,6]$$

a pesar de no ser homogénea, subsiste aunque se cambien las unidades fundamentales.
La objeción de Bridgman queda invalidada sin más que interpretar la invariabilidad de forma, postulada por Buckingham, como exigencia de que la función se conserve algébricamente invariable, pues ocurre que, al cambiar las unidades fundamentales, cada uno de los paréntesis de la ecuación [2,6] queda multiplicado por un factor diferente y, si la ecuación subsiste, es porque cada uno de sus términos es nulo por separado.
Considerando válida la objeción de Bridgman, opina el profesor W. Hill (45) que se debe añadir una condición complementaria al postulado de Buckingham.
Pero, como hace notar R. San Juan (16), todo ello se evita si se parte del principio de homogeneidad, o bien si se cala más hondo y se deduce dicho principio de la condición de que tan sólo tengan cabida en la Física aquellas magnitudes definidas de manera que la igualdad y la suma de sus cantidades sea independiente del sistema de unidades. Justamente el mérito del trabajo de R. San Juan consiste en haber demostrado que de esta condición deriva el principio de homogeneidad.
A nuestro juicio, la principal objeción que puede hacerse al enunciado primitivo del teorema de pi es que el número de monomios de dimensión nula se determina en función del <<número q de magnitudes fundamentales necesarias para medir las n magnitudes>>, y no se establece regla ni criterio para averiguar cuánto vale q en cada caso particular. Esta vaguedad en el enunciado, que deja vacío el referido teorema, se pone claramente de manifiesto cuando se trata de hallar q de acuerdo con las normas estrictamente operacionalistas, por ejemplo, siguiendo el método que propugna Dingle.
Con nuestros postulados y con la condición impuesta a las fórmulas de definición de las magnitudes secundarias, la demostración del teorema de pi es facilísima y rigurosa, gracias a la teoría de las funciones homogéneas generalizadas, y el número de monomios independientes de dimensión nula queda determinado sin ambigüedad (*).
(*) Merece ser examinado con alguna detención el artículo de Levi (33), porque constituye un intento de dar base lógica al Análisis dimensional.
Levi coincide con Bridgman en afirmar que «medir es hacer corresponder a una determinada magnitud física un número o un sistema de números., sin imponer otra limitación que la invariabilidad del aparato de medición, el cual ha de estar constituido por «determinadas operaciones físicas o bien aun por operaciones matemáticas. Critica la <<vieja costumbre>>.de considerar la noción de magnitud como algo intuitivo y a priori, y rechaza lo que llama procedimientos intuitivos que permiten establecer la igualdad, la suma y la división en partes. A continuación, y con manifiesta inconsecuencia, establece una excepción para las tres magnitudes, longitud, masa y tiempo, y se lanza por los vericuetos de la metafísica al afirmar (pág. 5) que <<constituye el substrato lógico que precede a la Física>> y en esta proposición apriorística se basa para deducir que el espacio físico es tridimensional en el sentido de la teoría de las magnitudes aceptada por la Física..
No podemos adivinar a qué teoría aceptada se refiere Levi, pues aun prescindiendo de la temperatura, el sistema de Giorgi, que es el aceptado internacionalmente, es tetradimensional. Pero tampoco se compagina su aserto con lo que dice más adelante. pues afirma que el número de magnitudes independientes puede reducirse a 2 o a l.
Dice luego que todo otro concepto se introduce en Mecánica por <<definiciones nominales, representadas generalmente por definiciones matemáticas>>, sin reparar en que la fuerza tiene tanto derecho como la masa a ser considerada como magnitud

primitiva, pues no hay para una ni para otra definición nominal a menos de que se considere como tal la segunda ley de Newton.
No parece haberse dado cuenta Levi del papel importantísimo que desempeñan las constantes universales en Análisis dimensional, pues dice (pág. 11), que <<la constante de la gravitación es un número (sic) ciertamente invariable por la teoría>>.
Al pasar a la Termodinámica, dice que la temperatura es una idea primitiva, que se convierte en derivada si se fija el valor de la constante de los gases, pero no llega a establecer la fórmula dimensional de esta nueva magnitud. Por otra parte, haremos ver que, para los fines del Análisis dimensional, la temperatura ha de ser considerada como dimensionalmente independiente de las magnitudes mecánicas.
En el campo electromagnético, considera solamente dos vectores, las intensidades, con lo que elude el problema que, desde el punto de vista dimensional, plantean las dos permeabilidades ε y μ, y no aborda la cuestión de si es necesario o no ampliar la base mecánica al estudiar las teorías electromagnéticas.
En fin, para demostrar el teorema de pi, parte de una hipótesis ad hoc, no justificada ni lógica ni experimentalmente, y deja sin tratar la segunda parte, la que se refiere al número de monomios pi que, cualquiera que sea la base adoptada, han de figurar en la solución de cada problema.

2.2.4. Aplicaciones.

2.2.4.1. Modo de plantear los problemas en el análisis dimensional.

2.2.4.1.1. Sistemas completos de monomios de dimensión nula.

Evidentemente, si se forma el producto de dos o más números pi, después de haberlos afectado de exponentes racionales cualesquiera, resultará un nuevo monomio de dimensión nula:

$$\pi_r = \pi_1^{x_1}\pi_2^{x_2},...,\pi_i^{x_i}, \qquad [1,1]$$

El teorema de pi fija el número de monomios pi, independientes, que pueden formarse con las magnitudes dadas, pero deja libertad para la elección de los mismos. Se dice que un conjunto de tales monomios son independientes cuando la ecuación

$$\pi_1^{x_1}\pi_2^{x_2},...,\pi_i^{x_i} = 1$$

sólo admite la solución trivial $x_1 = x_2 =,...,= x_i$. Una vez que se han obtenido tantos monomios independientes como indica dicho teorema, cualquier otro podrá obtenerse dando valores adecuados a los exponentes de la ecuación [1,1]. Por eso, puede decirse que *cualquier conjunto de i monomios independientes de dimensión nula forman un sistema completo de monomios pi.*

Los monomios de dimensión nula no tienen cabida en la representación vectorial de las dimensiones porque, cualquiera que sea la base adoptada, sus componentes son nulas. En cambio, cabe adoptar para ellos un nuevo espacio vectorial cuya base estaría formada por uno cualquiera de los sistemas completos. Cualquier otro monomio pi estaría representado por un vector cuyas componentes fuesen los exponentes de la ecuación [1,1].

2.2.4.1.2. Regla práctica para formar un sistema completo de monomios pi.

Escríbanse las fórmulas dimensionales de las magnitudes dadas con relación a una base cualquiera:

$$\xi_{r+1} = \xi_1^{\alpha_{11}} ... \xi_r^{\alpha_{r1}}$$
$$.....................$$
$$.....................$$
$$\xi_n = \xi_1^{\alpha_{1s}} ... \ \xi_{\mathrm{r}}^{\alpha_{rs}}, \ (s = n - r)$$
$$x_n = f\left(x_1, .., x_{n-1}\right)$$

Para que un monomio

$$\pi = x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n}$$

tenga dimensión nula, habrá de ser:

$$\alpha_{11}\varepsilon_1 + ... + \alpha_{n1}\varepsilon_n = 0$$
$$................................$$
$$................................$$
$$\alpha_{1m}\varepsilon_1 + ... + \alpha_{nm}\varepsilon_n = 0$$

y si h es la característica de la matriz formada con los exponentes α_{ij} serán arbitrarios los valores de n-h de las incógnitas $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$. Las incógnitas arbitrarias pueden ser cualesquiera, con tal de que en la matriz formada con las columnas en que figuran las h magnitudes restantes haya algún menor de orden h distinto de cero. Si, por ejemplo, hay alguno de estos menores en las h últimas columnas, a cada sistema de valores

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_{n-h} \\
1 & 0 \ .... & 0 \\
0 & 1 \ .... & 0 \\
.... \\
.... \\
0 & 0 \ .... & 1
\end{array}$$

corresponderá una solución, y entre todas formarán un sistema completo de monomios pi.

Se simplifica el problema si se empieza por agrupar las magnitudes que tengan la misma dimensión. Dividiendo las de cada grupo por una de ellas, se obtienen inmediatamente los llamados factores de forma, que suelen representarse por la letra griega ϖ. Estos factores de forma pueden ser las razones entre las longitudes, las masas, las fuerzas, etc., que intervengan en el fenómeno y entre ellos se incluyen, desde luego, los ángulos. Hecho esto, se hallan los monomios pi tomando en consideración una tan sólo de las magnitudes de cada grupo, y a los monomios así obtenidos se agregan los factores de forma.

2.2.4.2. Información que puede obtenerse con el Análisis dimensional.

Principio de similitud.

Se sabe, o se da por supuesto, que en determinado fenómeno intervienen las magnitudes $x_1,...,x_n$, incluyendo en ellas las constantes características y las constantes universales, propias de la teoría, y que la cuantía de una de ellas queda determinada por las cantidades de las otras. Deberá ser:

$$f\left(\pi_1,...,\pi_i\right)=0,$$

donde $\pi_1,...\pi_i$ es uno cualquiera de los sistemas completos de monomios pi, y f una función universal indeterminada. Como siempre se puede lograr que aquella magnitud, x_1, que interesa expresar en función de las otras, figure solamente en uno de los monomios, por ejemplo, en el primero, la ecuación podrá tomar la forma explícita:

$$x_1 = x_2^{\varepsilon_2},...,x_n^{\varepsilon_n}\varphi\left(\pi_2,...,\pi_i\right),$$

que es la forma general de las funciones condicionalmente homogéneas.
La información más completa se logra cuando i = 1, esto es, cuando el sistema completo de monomios pi, incluyendo los factores de forma, consta de un solo miembro, pues puede afirmarse que dicho monomio ha de ser igual a un número fijo, que no depende de las unidades de medida.
El averiguar la forma de la función universal φ, cuando no se reduce a un número fijo, cae fuera del alcance del Análisis dimensional, pero en muchas ocasiones bastan sencillas consideraciones basadas en un conocimiento elemental de la teoría del fenómeno en cuestión para reducir el número de variables que figuran en la misma, y hasta para determinar enteramente su forma, salvo un factor consistente en un número fijo.
Un caso de gran interés es aquél en que la función indeterminada sólo contiene factores de forma:

$$x_1 = x_2^{\varepsilon_2},...,x_n^{\varepsilon_n}\varphi\left(\varpi_1,...,\varpi_r\right).$$

Si se aplica esta ecuación a dos *sistemas semejantes*, esto es, tales que factores de forma de uno sean iguales a los del otro, la función universal φ tendrá valores iguales en ambos, y bastará averiguar su valor en uno de ellos midiendo las magnitudes $x_1,...,x_n$ en un caso particular.

En esto consiste el *principio de similitud*, que es el fundamento de los ensayos con modelos reducidos, de tanta importancia en la construcción de aviones, navíos y obras hidráulicas. Nótese que la semejanza en el sistema de tamaño natural y el modelo se refiere a todos los factores de forma, no sólo a los geométricos, sino también a los de índole física.

2.2.4.3. Ejemplos:

1.° Péndulo simple.

En el movimiento oscilatorio de un péndulo simple, la única fuerza que interviene es el peso $w = mg$. Por tanto, el período, t, estará determinado por masa m, la longitud *1* y la amplitud de las oscilaciones α, que es un factor de forma, Los exponentes dimensionales de estas magnitudes con relación a la base L, M, T, son los contenidos en el siguiente cuadro:

	t	*l*	*m*	*w*
L	0	1	0	1
M	0	0	1	1
T	1	0	0	-2

La característica de esta matriz es h = 3 Y habrá, por tanto, un solo monomio pi, aparte del factor de forma.
Como en todas las columnas hay algún elemento que no es nulo, puede elegirse arbitrariamente una cualquiera de las incógnitas. Haciendo $\varepsilon_t = 1$, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l + \varepsilon_w &= 0 \\ \varepsilon_m + \varepsilon_w &= 0 \\ 1 - 2\varepsilon_w &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\varepsilon_t = 1; \quad \varepsilon_l = -\frac{1}{2}; \quad \varepsilon_w = \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m = -\frac{1}{2}$$

Habrá de ser, por tanto:

$$\pi_1 = t\sqrt{\frac{w}{ml}}$$

o bien, puesto que $w = mg$,

$$\pi_1 = t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

y, tomando en consideración el factor de forma, la solución buscada será:

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = f(\alpha)$$

osea:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f(\alpha)$$

y puede afirmarse que en $f(\alpha)$ no puede figurar, aparte de α , más que números fijos. El resultado es correcto, pues, como es sabido, la ecuación completa es:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\, f\left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \ldots\right)$$

y la función $f(\alpha)$, que el Análisis dimensional deja indeterminada, resulta ser:

$$f(\alpha) = 2\pi\left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \ldots\right)$$

2º. Problema de Labocetta (47).

Demostrar que si, manteniendo constantes las densidades de todos los cuerpos que forman el sistema solar, se multiplican todas las longitudes por un mismo número, se conservan inalterados los períodos de revolución de todos los planetas y de oscilación de todos los péndulos.

Las únicas fuerzas que intervienen en el problema son las gravitatorias, por lo que cualquier período habrá de ser función de las masas y de la configuración del sistema, debiendo intervenir la constante de la gravitación. La configuración quedará definida por cierto número de longitudes: radios, distancias y ángulos, y las masas podrán sustituirse por los productos de densidades y volúmenes, y como estos últimos son funciones de longitudes, las magnitudes que intervendrán como variables serán ciertas densidades, $\rho_0, \rho_1, \ldots$ y ciertas longitudes, l_o, ... l_n, pues los ángulos se suponen constantes.

Desde luego, existen los factores de forma:

$$\varpi_i = \frac{\rho_i}{\rho_0}; \qquad r = 1, 2, \ldots$$

$$\varpi_s = \frac{l_s}{l_0}; \qquad \text{s} = 1, 2, \ldots$$

y bastará tomar en consideración una densidad, una longitud y la constante de la gravitación, además del periodo que se busca.

El cálculo se dispone con arreglo al siguiente esquema:

	t_i	ρ_i	l_i	G
L	0	−3	1	3
M	0	1	0	−1
T	1	0	0	−2
π	1	1/2	0	1/2

$$h = 3;\ i = 1$$
$$-3\varepsilon_\rho + \varepsilon_l + 3\varepsilon_G = 0$$
$$\varepsilon_\rho - \varepsilon_G = 0$$
$$\varepsilon_t - 2\varepsilon_G = 0$$

Y habrá de ser:

$$t_i = \frac{1}{\rho_i^{1/2} G^{1/2}} f\left(\frac{\rho_1}{\rho_i}, ..., \varpi_1 ...\right)$$

Y será t_i = constante si las densidades y las razones l_s/l_i, se mantienen constantes.

2.2.4.4. Reglas para plantear los problemas.

Una vez hecha la lista de las magnitudes que intervienen en un problema de Análisis dimensional, la resolución cae en el dominio del Álgebra elemental: La dificultad, por tanto, consiste exclusivamente en la formación de dicha lista.

Todos los tratadistas están de acuerdo en que no existen normas que permitan plantear debidamente un problema cualquiera. Es cosa que dejan a la intuición de cada uno. Sin embargo, es posible dar algunas reglas generales que faciliten la cuestión.

l.ª Es preciso que el fenómeno considerado caiga en el dominio de alguna de las teorías físicas establecidas, de tal modo que su solución completa sería posible si se pudieran vencer las dificultades matemáticas.

Esta norma está justificada por el hecho de estar el Análisis dimensional subordinado a las teorías físicas, y no al revés. Vulnerando este precepto, pueden plantearse problemas a los que el Análisis dimensional da una respuesta tan precisa como insensata. He aquí un ejemplo propuesto por Selwyn (48).

¿Cuánto tiempo, t, tendrá que estar entrenándose un jugador de golf, de masa m, para lanzar una pelota a la distancia l?

Como es evidente que la aceleración de la gravedad interviene en el juego, las magnitudes son justamente las mismas que en el problema del péndulo simple, salvo la amplitud de las oscilaciones. Por tanto, la solución es, precisamente:

$$t = \varphi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde φ es un número fijo.

2.ª Salvo la magnitud incógnita, todas las que figuren en la lista han de ser o constantes o variables independientes. Esta regla equivale a decir que entre las magnitudes tomadas en consideración sólo ha de existir una ecuación.

Supóngase, por ejemplo, que en el problema de la caída libre de un cuerpo se toman las siguientes magnitudes: tiempo, *t*; fuerza, *f*; masa, *m*; distancia recorrida, *s*; velocidad adquirida, v, y aceleración, *a*.

	t	f	m	s	v	a
L	0	1	0	1	1	1
M	0	1	1	0	0	0
T	1	–2	0	0	–1	–2
π_1	0	1	–1	0	0	–1
π_2	–1	0	0	1	–1	0
π_3	1	0	0	0	–1	1

La solución:

$$s = vt\Psi\left(\frac{f}{ma}, \frac{at}{v}\right)$$

es inaceptable, porque en el fenómeno considerado sólo hay tres variables independientes: la masa, la fuerza y el tiempo. El averiguar cuánto valen las restantes magnitudes da origen a sendos problemas con sus respectivas soluciones, que son:

$$a = \frac{f}{m}; \quad v = \frac{f}{m}t; \quad s = \frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2$$

3.ª *Deben tomarse en consideración todas las constantes, tanto características como universales, cuya presencia esté prevista por la teoría del fenómeno considerado.*

Es evidente que no puede obtenerse una solución satisfactoria si en un problema de elasticidad, por ejemplo, se suprime alguna de las constantes elásticas que intervengan en el mismo. Las constantes universales ineludibles son las previstas por nuestro segundo postulado.
Si en el segundo problema del apartado anterior se hubiese omitido la constante de la gravitación, hubiera resultado la solución descabellada:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f\left(\pi_2, ..., \varpi_1, ...\right)$$

según la cual, la relación entre las densidades de dos cuerpos está impuesta por los restantes factores de forma.
La necesidad de tomar en consideración las constantes universales constituía la máxima dificultad mientras no se sabía discernir entre las superfluas y las ineludibles. Gracias a nuestro segundo postulado, queda obviada la dificultad, y puede decirse que

a) En Mecánica newtoniana no interviene ninguna constante universal, salvo la constante de la gravitación, que sólo figura cuando se toman en consideración las acciones gravitatorias.

b) En los problemas de Mecánica relativista interviene la velocidad de la luz.
c) En Mecánica estadística figura la constante de Boltzmann, *k*, y la de Planck, *h*.
d) En los fenómenos entre corpúsculos elementales, incluyendo los fotones, figura la constante de Planck, *h*.
e) En los problemas del campo electromagnético en el vacío intervienen las constantes ε_0 y μ_0.

Las precedentes normas revelan que los problemas de Análisis dimensional sólo pueden ser planteados por quien conozca los fundamentos de las teorías físicas, pues sólo así podrá decidir qué magnitudes han de intervenir como variables independientes y qué constantes universales hay que tomar en consideración.

2.2.4.5. Las bases deficientes.

Al suprimir una constante universal atribuyéndole un valor numérico arbitrario, por ejemplo 1, disminuye la multiplicidad de la base, y resultan fórmulas dimensionales con las que el Análisis dimensional pierde eficacia, pues la información que suministra es más vaga que la que se obtiene utilizando una base completa.

Supóngase que en la fórmula

$$f = G\frac{m_i m_i^{'}}{s^2}$$

se suprime la constante de la gravitación G. La multiplicidad de la base, para las magnitudes mecánicas, se reduce a 2 y, tomando la longitud y el tiempo como magnitudes básicas, se obtienen las siguientes fórmulas dimensionales.

$[m_i] = [m_g] = L^3T^{-2}$; $[f] = L^4T^{-4}$

Para ver si este sistema es viable, tratemos de obtener con su auxilio la fórmula del péndulo simple:

	t	l	m	w
L	0	1	3	4
T	1	0	-2	-4
π_1	1	0	-1	$3/4$
π_2	0	1	-1	$1/2$

$$\varepsilon_l + 3\varepsilon_m + 4\varepsilon_w = 0$$
$$\varepsilon_t - 2\varepsilon_m - 4\varepsilon_w = 0$$

y, aparte del factor de forma $\varpi = \alpha$, resulta el siguiente sistema de monomios pi:

$$\pi_1 = tm^{-1}w^{3/4} = tm^{-1/4}g^{3/4}; \quad \pi_2 = lm^{-1}w^{1/2} = lm^{-1/2}g^{1/2}$$

o bien, si para facilitar la comparación con el resultado obtenido al utilizar la base completa, se hace:

$$\pi_1^{'} = \pi_1 \pi_2^{-1/2} = t\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \pi_2 = l\sqrt{\frac{g}{m}}$$

y, además del monomio $\pi_1^{'}$ que figura en la fórmula correcta, aparece el monomio espurio π_2 con lo que la solución se convierte en:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f\left(l\sqrt{\frac{g}{m}}, \alpha \right)$$

que es falsa, pues afirma la influencia de la masa sobre el período y, aparte de esto, es menos precisa, porque la función desconocida depende de dos parámetros en vez de uno.

Al mutilar la base suprimiendo constantes ineludibles, se crean artificialmente relaciones dimensionales que no corresponden a nada real y ello conduce a resultados ciertamente curiosos, pero que no tienen, ni mucho menos, el sentido recóndito que les atribuyen los tratadistas que se dedican a estas especulaciones.

Martinot-Lagarde (49), por ejemplo, comparte la opinión de que al despojar de su dimensión a las constantes universales, se penetra más a fondo en el conocimiento de la naturaleza, y da como prueba lo que ocurre si, además de dar el valor a la constante de la gravitación, se toma como unidad de densidad del agua a 4° C. La fórmula

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad [5,1]$$

puesto que ha de ser independiente del sistema de unidades, obliga a que sea:

$$[m] = L^3$$

y la unidad de masa será la masa de agua contenida en el cubo unidad.

La fórmula [5,1] combinada con las

$$f = m\frac{d^2 s}{dt^2} \ [5,2]; \qquad\qquad f = \frac{mm'}{s^2} \ [5,3]$$

que corresponden a la ley de Newton y a la ley de la gravitación, conducen a las siguientes fórmulas dimensionales:

$$[f] = L^4; \qquad [t] = 0$$

Y resulta un sistema unidimensional en el que el tiempo tiene dimensión nula, lo que significa que su unidad ha de tener un valor determinado, independiente del patrón que se adopte para medir longitudes.

Para fijar las ideas, tomemos el centímetro como unidad de longitud. La fórmula [5,1], con $\rho_1 = 1$ para el agua a 4° C, impone el gramo como unidad de masa. En virtud de [5,3] la unidad de fuerza será aquélla con que se atraen dos masas de 1 gramo colocadas a 1 cm. Finalmente, la fórmula [5,2] o su equivalente $f = 2ms/t^2$, dice que la unidad de tiempo ha de ser el tiempo que tarde la masa de 1 gramo en recorrer 1/2 centímetro cuando está sometida a la unidad de fuerza. Hechos los cálculos resulta:

$$t = \sqrt{\frac{2ms}{f}} = 3862s = 1 \text{ hora y } 262 \text{ segundos}$$

Fácilmente se comprueba que con cualquier otra unidad de longitud se llega al mismo resultado.
Lippmann (50) llamó «hora natural» a la unidad de tiempo coherente con el sistema que acabamos de considerar. Sin embargo, nada justifica el atribuir privilegios a tal unidad, pues es tan arbitraria como otra cualquiera y, además, forma parte de un sistema que debe rechazarse por ser incompatible con los fines del Análisis dimensional.

Suprimiendo constantes universales, sin discriminar si son o no superfluas, se crean sistemas dimensionales mutilados. Nada puede ganarse con su empleo.

Antes bien, son inaceptables en Análisis dimensional porque hacen aparecer monomios espurios en las soluciones. Especular acerca de lo que sucede cuando se despoja de su dimensión a alguna constante universal es inútil devaneo, y si con ello se pretende averiguar algo acerca de la esencia de las magnitudes, se ha errado el camino, pues las dimensiones, aunque sean las correctas, nada dicen a este respecto.

2.2.4.6. Las bases superabundantes y las constantes superfluas.

Cuando al formular una ley universal se pasa de las relaciones de proporcionalidad entre cantidades a las ecuaciones entre medidas, procede, en general, introducir una constante característica o una constante universal. Hemos clasificado estas últimas en ineludibles y superfluas, y hemos visto que, si se suprime alguna de las primeras, el Análisis dimensional puede conducir a soluciones falsas por la aparición de monomios espurios, esto es, de monomios que, siendo dimensionados en la base completa, aparecen como de dimensión nula en la mutilada.

Una constante universal será superflua cuando se obtenga el mismo sistema de monomios pi con ella que sin ella, de donde resulta que no hay inconveniente en introducir constantes universales superfluas, pero tampoco hay en ello ninguna ventaja y se complican los problemas.
En resumen; *si ocurre que al ampliar de algún modo una base, disminuye el número de monomios pi independientes entre sí, se puede afirmar que la base primitiva era deficiente, mientras que, si se obtiene siempre el mismo sistema de tales monomios, la base primitiva es completa, y la ampliada, superabundante.*

Supóngase, por ejemplo, que en la ley de Newton:

$$f = Cm\frac{d^2s}{dt^2}$$

se pone la constante dinámica C, que, según nuestro segundo postulado, es superflua. Gracias a su presencia, subsiste la libertad en la elección de unidades para todas las

magnitudes primarias que figuran en dicha ley, lo cual hace que se pueda emplear una base tetradimensional, por ejemplo, la (L, M, T, F).
Simultáneamente, será de prever, en todo problema dinámico, la presencia de C con la siguiente fórmula dimensional:

$$[C] = L^{-1}M^{-1}T^{2}F$$

Hagamos ver que en el problema del péndulo simple la constante a es superflua. El problema se plantea y resuelve como indica el adjunto esquema:

	t	l	m	w	C
L	0	1	0	0	–1
M	0	0	1	0	–1
T	1	0	0	0	2
F	0	0	0	1	1
π_1	-2	1	1	-1	1

h=4; i=1

Tanto el número de magnitudes como la característica de la matriz aumentan en una unidad, por lo que sigue habiendo un solo monomio pi, que es:

$$\pi_1 = lmt^{-2}w^{-1}C = lt^{-2}g^{-1}C$$

y, teniendo en cuenta la intervención de la amplitud α como factor de forma la solución será:

$$t = \sqrt{C\frac{l}{g}}f(\alpha)$$

Esta ecuación, gracias a la constante dimensionada C, que es un coeficiente parásito, es válida para unidades cualesquiera de longitud, masa, tiempo y fuerza. No hay, pues, inconveniente en hacer C = 1, con la consiguiente restricción en la libertad de elección, esto es, utilizando un sistema de tres unidades coherentes con C = l.

2.2.4.7. Papel que desempeñan las constantes universales.

En todo problema de Análisis dimensional se trata de averiguar, haciendo solamente uso de los recursos del mismo, cuanto sea posible acerca de la relación, que liga las magnitudes que intervienen en determinado fenómeno. Parece, por tanto, que la cuestión quedaría suficientemente planteada en cuanto se diera la lista de las magnitudes variables. Sin embargo, para lograr la solución correcta, hay que agregar, a veces, determinadas constantes universales, y no se conocían reglas para averiguar de antemano qué constantes hay que tomar en consideración. Por eso dice Bridgman (22) que el Análisis dimensional no debe ser aplicado por bosquimanes, sino por físicos expertos.

Si no se hubiera descubierto la relación de proporcionalidad entre la masa inerte y la gravitatoria, las ecuaciones fundamentales de la mecánica newtoniana serían:

$$f = m_i \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad f = \frac{m_g m_g^{'}}{s^2}, \tag{7,1}$$

y con ellas se hubiera elaborado el sistema de magnitudes mecánicas en el que no habría ninguna constante universal ineludible. Al resolver el problema en que interviniesen fuerzas gravitatorias, se tomarían en consideración, además de las magnitudes que definiesen la posición de los distintos cuerpos, las masas gravitatorias, porque de ellas dimanan las fuerzas, y las masas inerciales, porque condicionan el movimiento de cada cuerpo. Se trata de ver la modificación que en la solución así obtenida introduce la ley de proporcionalidad:

$$m_g = \sqrt{G} m_i \tag{7,2}$$

con la que se introduce la constante ineludible G.
Esta ley ha servido para eliminar de todas las ecuaciones la masa gravitatoria, con lo que el sistema fundamental se convierte en:

$$f = m \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad f = G \frac{mm'}{s^2} \tag{7,3}$$

y se suprime el subíndice, porque se sobrentiende que se trata siempre de masas, inerciales. De aquí resulta que, al plantear cualquier problema, bastará tomar en consideración las masas inerciales a condición de agregar la constante G.
Gracias a [7,2] queda asegurada la identidad de las soluciones obtenidas por ambos procedimientos. Desde luego, la supresión de todas las masas gravitatorias simplifica grandemente los problemas.
Lo dicho de la constante de la gravitación es aplicable a las demás constantes universales. En virtud de nuestro postulado, sólo son ineludibles las que figuren como factores de proporcionalidad entre dos magnitudes primarias inseparables, por lo que aparecerán en ecuaciones tales como:

$$x_1 = Cx_2$$

Esta ecuación podrá servir, como en el caso de la ley de la gravitación, para desterrar de toda la Física una de las magnitudes x_1 o x_2 con la simplificación consiguiente de todos aquellos problemas en que estuviese prevista su intervención, pero a condición de agregar la constante C, con su dimensión característica, a la lista de magnitudes.
Toda ley de proporcionalidad entre dos magnitudes primarias inseparables permite ignorar la existencia de una de ellas a condición de introducir la correspondiente constante universal.
Cada vez que se presente la ocasión, confirmaremos la afirmación precedente.
Por ahora, nos limitaremos a enunciar una importante consecuencia.
Supóngase que en determinada teoría se descubre una nueva ley universal que no invalide, sino que se agregue a las ya establecidas. ¿Mejorará por ello la información que puede proporcionar el Análisis dimensional? La respuesta es negativa si la ley en

cuestión establece una proporcionalidad entre magnitudes primarias ya en uso, pues lo único que podrá hacerse es desterrar una de ellas introduciendo la respectiva constante universal. Con ello se simplificarán los cálculos, pero las soluciones dadas por dicho análisis seguirán siendo las mismas.

2.2.4.8. Las bases universales.

Cada constante universal tiene su respectiva dimensión, y el que se presente siempre con igual cuantía no es obstáculo para que figure en la base de un sistema dimensional. Con esto, se tiene la posibilidad de elegir arbitrariamente su unidad al formar sistemas coherentes, y puede elegirse de modo que la constante adquiera el valor l. No hay, pues, inconvenientes en adoptar sistemas de unidades en que valga 1 la constante de la gravitación, o en tomar como unidades algunas de las constantes del vacío, tales como la velocidad de la, luz, la constante dieléctrica, la permeabilidad magnética, con la sola condición de que las unidades escogidas correspondan a magnitudes dimensionalmente independientes .
En Física se dispone de más constantes dimensionalmente independientes que las necesarias para formar una base completa, de donde resulta la posibilidad de crear muchas bases universales, sin que haya razón para atribuir méritos especiales a ninguna de ellas.

El empleo de una base universal determinada podrá ser cómodo en algunos casos, pero como ello no altera el sistema dimensional, no puede enseñar nada nuevo.
Una cosa es elegir arbitrariamente las unidades de la base y otra es despojar de su dimensión a la respectiva magnitud. El tomar como unidad la velocidad de la luz en el vacío, por ejemplo, no autoriza a atribuir dimensión nula a la velocidad y a considerar la longitud y el tiempo como magnitudes homogéneas que pueden medirse con la misma unidad. Cada vez que se despoja de su dimensión a una magnitud se mutila la base, con lo que el criterio de homogeneidad pierde en eficacia y el Análisis dimensional puede conducir a soluciones errada por la aparición de monomios espurios. Insistimos en estas consideraciones, que pueden parecer triviales, porque resuelven el viejo y aun enconado problema de si procede o no privar de dimensión a la constante dieléctrica del vacío. Tal despojo sólo puede tener consecuencias funestas, y la coexistencia ineludible de dos sistemas diferentes de unidades en una misma teoría es buena prueba de ello.

2.2.4.9. Discriminación de las dimensiones del espacio.

Con razón afirma Huntley (51) que desde los tiempos de Fourier no se ha realizado en Análisis dimensional un avance comparable al logrado con el método que él denomina de las componentes «de las dimensiones fundamentales», pues, en efecto, aplicándolo debidamente se consigue en muchos casos una información mucho más completa que la que se obtendría por el método clásico (*).
El método propuesto por Huntley consiste en reemplazar la base (L, M, T) por otra que se obtiene considerando por separado las tres componentes, L_x, L_y, L_z, de la longitud y distinguiendo entre la masa inercial, M_i y la gravitatoria, M_g, con lo que se convierte en seis la multiplicidad de la base.
Ignora Huntley el teorema de pi, y los largos razonamientos con que trata de justificar su método no parecen muy convincentes. Desde luego, no es de esperar que se consiga nada nuevo haciendo intervenir simultáneamente en la base M_i, y M_g. Pero la

discriminación de las tres dimensiones del espacio constituye un gran acierto, y puede razonarse fácilmente con auxilio de nuestra teoría.
(*) Como antecedente del método de Huntley puede citarse el intento de introducir las dimensiones vectoriales insinuado por Guillaume (52) en la traducción francesa del artículo de Runge (53). Levi (33) critica este intento, y afirma que «probablemente no tendrá ninguna utilidad.. Para más pormenores véase el artículo de J. Díaz Bejarano, Entes físicos y re representación matemática, en Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid, t. LVI, fasc. 3.° y 4.°,1962.

Se discute actualmente acerca de lo que significa la ecuación

$$r = xi + yj + zk$$

que expresa el segmento dirigido, ***r*** en función de sus componentes *x, y, z*, y de los *vectores unitarios* i, *j*, *k*, tomados a lo largo de cada uno de los ejes coordenados. Como esta ecuación no relaciona más que longitudes, que son magnitudes directamente comparables, no hay inconveniente en considerarla como una ecuación entre cantidades y, puesto que *x, y, z* son las medidas de las coordenadas, las *i*, *j*, *k* habrán de representar las respectivas unidades. Cada término representa, pues, una cantidad y lo correcto sería escribir:

$$(r) = rr = xi + yj + zk.$$

Esta suma, es válida tan sólo para los efectos del cálculo vectorial, pues no da la mismo, en general, recorrer el segmento r que la línea quebrada formada por sus componentes.
Con arreglo a nuestra interpretación, será:

$$i = U_x; \quad j = U_y \quad k = U_z$$

En problemas en que todas las direcciones sean equivalentes, está indicado tomar la misma unidad en todas direcciones, pero en otros casos, como sucede en Cristalografía, hay ventaja en utilizar unidades diferentes en cada eje, y escribir:

$$(r) = r'r' = x'i' + y'j' + z'k'.$$

siendo

$$i' = U'_x; \quad j' = U'_y \quad k' = U'_z$$

con lo cual

$$\frac{i}{i'} = \frac{U_x}{U'_x}; \quad \frac{j}{j'} = \frac{U_y}{U'_y}; \quad \frac{k}{k'} = \frac{U_z}{U'_z}$$

lo cual significa, que se puede atribuir distinta fórmula dimensional a los segmentos dirigidos según cada uno de los ejes:

$$[x] = \frac{U'_x}{U_x} = L_x; \quad [y] = \frac{U'_y}{U_y} = L_y; \quad [z] = \frac{U'_z}{U_z} = L_z$$

Dichos segmentos se comportan, pues, como magnitudes dimensionalmente independientes. Con ellas, la masa y el tiempo, se forma una base de cinco magnitudes, y para representar la dimensión de otra magnitud cualquiera hará falta un espacio abstracto formado por las tres dimensiones del espacio ordinario, la masa y el tiempo.
Según esto, la fórmula dimensional de un vector que se halle dirigido según el eje *x*, por ejemplo, no será $L^{\alpha}L^{\beta}L^{\gamma}$, sino $L_x^{\alpha}L_y^{\beta}L_z^{\gamma}B^{\beta}T\gamma$.
Por ejemplo, las fórmulas dimensionales:

$$[fx] = L_xMT^{-2};\ [Ly] = L_yMT^{-2};\ [Lz] = L_zMT^{-2},$$

significan que, si en el eje X se cambia el centímetro por el metro, y se conserva el centímetro en los otros dos ejes, la unidad de fuerza coherente con la ecuación

$$f=ma$$

seguirá siendo la dina en los ejes *Y*, *Z*, pero valdrá 100 dinas en el eje X,
Esta discriminación hace aumentar el número de ecuaciones en los problemas de Análisis dimensional, con lo que disminuye el número de monomios pi independientes, y la solución gana en precisión.
Algunos ejemplos servirán para mostrar cómo se aplica el método que hemos denominado de la discriminación de las dimensiones espaciales.

2.2.4.10. Volumen del paralelepípedo.

Se sabe por Geometría que si se multiplica por un factor, *k*, una cualquiera de las aristas de un paralelepípedo, dejando invariables las otras dos, el volumen se hace k veces mayor, lo que indica que el volumen es proporcional a cada una de las dimensiones espaciales y su fórmula dimensional discriminada será:

$$[V] = L_xL_yL_z$$

De este modo, si se quiere averiguar el volumen de un paralelepípedo de aristas a, b, c, se procederá así:

	V	a	b	c
L_x	1	1	0	0
L_y	1	0	1	0
L_z	1	0	0	1
π	1	−1	−1	−1

y la solución es:

$$V = abc\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

siendo φ una función de los ángulos. Si el paralelepípedo es rectangular, dicha función se reduce a un número fijo, al que se puede atribuir el valor 1, y queda:

$V = abc,$

que define la unidad de volumen si se da la unidad de longitud. Si no se hubiesen discriminado las dimensiones espaciales, sería $[V] = L^3$, y la solución hubiese sido:

$$V = a^3 \varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$$

que, evidentemente, suministra menos información.

2.2.4.11. Alcance de un proyectil.

a) Se lanza un proyectil de masa m, en dirección horizontal, con una velocidad inicial v, desde una altura h. Hallar el alcance, *x*, esto es, la distancia horizontal hasta el punto de impacto h = 0.

Solución:

Con las magnitudes mencionadas en el enunciado, y con el peso w = mg, resulta con el método clásico un factor de forma, *x/h*, y un monomio pi:

$$\pi_1 = \frac{hw}{mv^2} = \frac{hg}{v^2},$$

por lo que la solución es:

$$x = h\varphi\left(\frac{gh}{v^2}\right),$$

y queda indeterminada la función φ.

En cambio, discriminando las componentes según el eje horizontal, *x*, y el vertical, *z*, no hay factor de forma, y el problema se plantea y resuelve como sigue:

	x	v	m	w	h
L_x	1	1	0	0	0
L_z	0	0	0	1	1
M	0	0	1	1	0
T	0	−1	0	−2	0
π	1	−1	−1/2	1/2	−1/2

Como no hay sino un momento pi, no aparece función desconocida, y la solución es:

$$x = Cv\sqrt{\frac{h}{g}}$$

El cálculo completo da $C = \sqrt{2}$.

b) En el problema anterior se supone $h = 0$ y, en cambio, la velocidad inicial forma el ángulo α con el plano horizontal.

En el planteamiento a la manera clásica, desaparece la altura h, pero aparece el nuevo factor de forma α , que juntamente con el monomio.

$$\pi_1 = \frac{xw}{mv^2} = \frac{xg}{v^2}$$

conduce a la solución:

$$x = \frac{v^2}{g}\varphi(\alpha)$$

Discriminando las componentes vectoriales, el problema se plantea y resuelve como sigue:

	x	m	v_x	v_z	w
L_x	1	0	1	0	0
L_z	0	0	0	1	1
M	0	1	0	0	1
T	0	0	−1	−1	−2
π	1	−1	−1	−1	1

h = 4; i=1

y, como no hay ningún factor de forma, la solución es:

$$x = C\frac{v_x v_z}{g} ,$$

O bien, como $v_x = v\cos\alpha;\;\; v_z = vsen\alpha$

$$x = C\frac{v^2 sen\alpha \;\cos\alpha}{g}$$

En la solución completa C = 2.

2.3. Ejemplos de análisis dimensional.

2.2.3.1.The Analogy Between Fluid Friction and Heat Transfer. Analogía Entre el Coeficiente de Fricción y el de Transferencia de Calor. Por Von Karman, Trans A.S.M.E, vol 61, 139,pp. 705-710.

Ejemplo 1 Von Karman.

Consideramos la transferencia de calor *q* para o desde un líquido con temperatura media en la sección transversal ϑ_m fluyendo en una tubería lisa cuya pared está a una temperatura ϑ_w, el coeficiente de película es $h = \frac{q}{\vartheta_w - \vartheta_m}$ es una función de el diámetro de la tubería D, de la velocidad media V, de la densidad ρ, de la viscosidad μ, del calor específico c, y de la conductividad térmica k.

$$h = f(D, V, \rho, \mu, c, k)$$

Hay cuatro dimensiones fundamentales, las cuales describen estas cantidades, la masa, longitud, tiempo y temperatura. Por lo tanto 7 - 4 = 3, existen 3 pi independientes y un conjunto puede ser encontrado fácilmente eligiendo D, μ, ρ y k como dimensiones básicas. Así:

$$\frac{hD}{k} = \phi\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{c\mu}{k}\right)$$

En esta ecuación, $\frac{hD}{k}$ se llama número de Nusselt, $\frac{VD\rho}{\mu}$ es el número de Reynolds, y $\frac{c\mu}{k}$ es el número de Prandtl.

Ahora la proporción de transferencia de calor por la acción molecular viene dada por:

$$q_m = k\frac{d\theta}{dy}$$

Donde θ es la temperatura media en un punto. La transferencia de calor por la acción turbulenta puede ser escrita de forma similar por:

$$q_t = k'\frac{d\theta}{dy}$$

Donde k' puede ser llamado el coeficiente turbulento de conductividad térmica. Dividiendo las dos expresiones anteriores:

$$\frac{q_t}{q_m} = \frac{k'}{k}$$

Pero q_t puede ser sustituido por $q_t = h_L d\theta$, así que $k' = h_L dy$.

La ecuación queda $\frac{q_t}{q_m} = \frac{h_L dy}{k}$, un número de Nusselt local el cual es función del número de Nusselt global $\frac{hD}{k}$. Por lo tanto el número de Nusselt es una cantidad

adimensional que puede ser definida como la relación del coeficiente de transferencia de calor turbulento y el coeficiente de transferencia de calor molecular.
El número de Reynolds puede ser interpretado de una forma similar con la tensión de cortadura superficial.

$$\tau_t = \rho\varepsilon\frac{dv}{dy} = \rho\sqrt{\overline{v_y'^2}}\,l\frac{dv}{dy} = \sqrt{\overline{v_y'^2}}\,l\frac{d(\rho v)}{dy}$$

donde v es la velocidad media, v_y' la velocidad transversal fluctuante, la longitud de mezcla en un punto y ε el coeficiente de intercambio turbulento. Para el cizallamiento molecular

$$\tau_m = \mu\frac{dv}{dy} = \frac{\mu}{\rho}\frac{d(\rho v)}{dy}$$

la relación entre estas dos últimas expresiones es:

$$\frac{\tau_t}{\tau_m} = \frac{\sqrt{\overline{v_y'^2}}\,l\rho}{\mu} = \frac{\varepsilon}{v}$$

un número de Reynolds local el cual es función de un número de Reynolds global $\frac{VD\rho}{\mu}$. El número de Reynolds puede ser definido como la medida de la relación del momento turbulento intercambiado y el momento efectivo molecular intercambiado.

El número de Prandtl puede ahora ser interpretado como la conexión entre el momento y la transferencia de calor debida a la acción molecular. De nuevo

$$\tau_m = \mu\frac{dv}{dy} = \frac{\mu}{\rho}\frac{d(\rho v)}{dy}$$

Y

$$q_m = k\frac{d\theta}{dy} = \frac{k}{\rho c}\frac{d(\rho c\theta)}{dy}$$

Dividiendo ambas expresiones

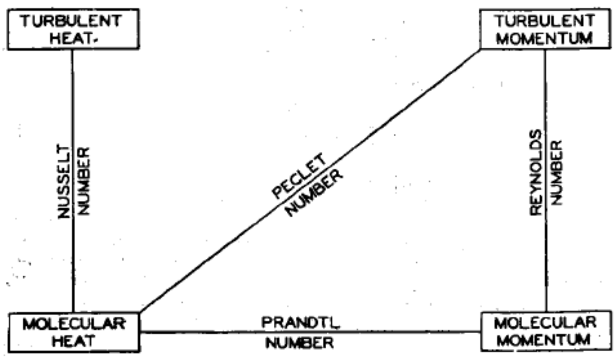
$$\frac{\tau_m}{q_m} = \frac{c\mu}{k}$$

El número de Peclet es el producto del número de Reynolds y de Prandtl, y por lo tanto puede ser definido como la conexión entre el momento turbulento con el intercambio de calor molecular, así:

$$\text{Número de Peclet} = \frac{VD\rho}{\mu}\frac{c\mu}{k} = \frac{\tau_t}{\tau_m}\frac{\tau_m}{q_m} = \frac{\tau_t}{q_m}$$

La interpretación física de los anteriores números adimensionales involucrados en el problema de transferencia de calor pueden ser representados en un diagrama de la siguiente forma.

Figura 1 Von Karman. Interpretación física de los números adimensionales involucrados en el problema de transferencia de calor.



2.2.3.2. Libro: Análisis dimensional, J.Palacios. 1964, Espasa-Calpe.

Ejemplo 1 Palacios. Propagación del calor en un medio indefinido.
En una porción esférica de radio, r_o, se desarrolla bruscamente cierta cantidad de calor, que origina en la misma una elevación súbita, ϑ_0, de la temperatura. El medio se hallaba inicialmente a 0°, y se trata de averiguar cuál es la temperatura, ϑ, al cabo de un tiempo, t, en un punto que dista $x = r - r_o$ de la superficie de la esfera en que se produjo la perturbación inicial.

Las magnitudes a considerar son: ϑ, ϑ_0, x, r_o, t, K, c' y resulta:

	θ	x	t	K	c'
L	0	1	0	− 1	− 3
T	0	0	1	− 1	0
θ	1	0	0	− 1	− 1
Q	0	0	0	1	1
	0	1	− 1/2	− 1/2	1/2

$$\theta = \theta_0 \varphi\left(x\sqrt{\frac{c'}{Kt}},\ r_0\sqrt{\frac{c'}{Kt}}\right).$$

$$\theta = \theta_0 \varphi\left(x\sqrt{\frac{c'}{Kt}},\ \frac{x}{r_0}\right)$$

Ejemplo 2 Palacios. Propagación del calor en una barra.

Una barra ilimitada en ambos sentidos, se encuentra a 0° y, en el instante t = O, recibe cierta cantidad de calor en un trozo de longitud b, de tal modo que todo él queda a una temperatura ϑ. Se supone que no hay pérdidas laterales, y se trata de calcular la distribución de temperaturas al cabo del tiempo t.
Intervienen en este problema las mismas magnitudes que en el anterior, salvo el radio r_o que ahora es sustituido por el segmento b. En consecuencia será:

$$\theta = \theta_0 f\left(x\sqrt{\frac{c'}{Kt}},\ b\sqrt{\frac{c'}{Kt}}\right).$$

Si hubiese pérdidas laterales, habría que añadir la conductividad superficial, H, Y resultaría un nuevo monomio pi y la fórmula sería:

$$\theta = \theta_0 f\left(x\sqrt{\frac{c'}{Kt}},\ b\sqrt{\frac{c'}{Kt}},\ \frac{bc'}{Ht}\right).$$

Ejemplo 3 Palacios. Velocidad de propagación del calor.

Si el calor se propagase con una velocidad constante, v, característica del medio, y las únicas magnitudes que intervienen en el fenómeno fuesen K y c', debiera poder formarse un monomio pi con v, K y c’. Pero al tratar de obtenerlo, resulta un sistema de ecuaciones incompatibles, lo que revela que la velocidad de propagación ha de depender de alguna otra magnitud. Agreguemos, por vía de ensayo, la distancia, x, a la región perturbada inicialmente:

	v	x	K	c'
L	1	1	− 1	− 3
T	− 1	0	− 1	0
θ	0	0	− 1	− 1
Q	0	0	1	1
π_1	1	1	− 1	1

$$v = \frac{K}{c'x} f\left(\frac{b}{x}\right).$$

El Análisis dimensional nada puede decirnos acerca de la función universal *f*, pero, a suficiente distancia de la perturbación, puede escribirse:

$$v = N \frac{K}{c'x},$$

(1)

donde N = *f*(0) es un número fijo.

Al mismo resultado se habría llegado en el caso de un medio indefinido, y resulta que las perturbaciones térmicas se propagan con una velocidad inversamente proporcional a la distancia recorrida.

Dos velocidades cabe considerar en la propagación de una perturbación térmica: la del frente de la onda y la del máximo (o mínimo). Para ambas debiera ser válida la fórmula anterior con distinto valor del factor N. Pero en lo que a la velocidad del frente se refiere, la realidad está en contradicción tanto con las previsiones teóricas como con el Análisis dimensional. En efecto, la propagación del calor a lo largo de una barra fue estudiada por Fourier, quien obtuvo la ecuación.

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi k t}} \int_0^b e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4kt}} d\alpha,$$

(2)

donde, para abreviar la escritura, se ha hecho k = K/c.

$$v_m = 2 \frac{k}{b} \ln \frac{2x + b}{2x - b}$$

que, para x > > b, se convierte en:

$$v_m = \frac{2k}{x} = 2 \frac{K}{c'x},$$

que está conforme con la ecuación (1).

La dificultad surge cuando se trata de calcular la velocidad, v_f del frente, pues la fórmula (2) da $\vartheta \neq 0$ para $t \neq 0$, cualquiera que sea *x*, lo que significa que el frente de la perturbación debiera propagarse con velocidad infinita, cosa que, evidentemente, no

corresponde a la realidad. Esto revela una insuficiencia en la teoría de Fourier, insuficiencia que puede subsanarse teniendo en cuenta que, según lo que actualmente se sabe acerca de la temperatura, el frente de la onda térmica debe propagarse con la velocidad del sonido, esto es, con la velocidad de las ondas longitudinales, que son las que van más de prisa.
La onda térmica se deforma, pues su frente avanza con velocidad constante, mientras que el máximo se mueve cada vez más lentamente hasta que se desvanece.

Ejemplo 4 Palacios. Transmisión del calor por tuberías.

Por un tubo de diámetro D circula un fluido con la velocidad media *v*, y se trata de averiguar el coeficiente de transmisión del calor, τ , esto es, la cantidad de calor que pasa cada unidad de tiempo a través de la unidad de superficie, cuando entre el fluido y el medio exterior existe una diferencia de temperatura de 1^0.
En régimen laminar, además de las magnitudes citadas, intervendrá el líquido por su conductividad térmica, por su calor específico referido la unidad de masa, *c*, y por su coeficiente de viscosidad. Para simplificar la cuestión admitiremos que el tubo es muy buen conductor, y que ni su naturaleza ni el estado de su superficie influyen en el fenómeno.
La solución es:

	τ	D	v	K	c	μ
L	−2	1	1	−1	0	−1
M	0	0	0	0	−1	1
T	−1	0	−1	−1	0	−1
θ	−1	0	0	−1	−1	0
Q	1	0	0	1	1	0
π_1	1	1	0	−1	0	0
π_2	0	0	0	−1	1	1

$$\tau = \frac{K}{D}\,\varphi\left(\frac{\mu c}{K}\right).$$

El monomio $\frac{C\mu}{K}$ se denomina número de Prandtl. Lo representaremos por N_P.
Si el régimen es turbulento, habrá que introducir, además, el número
de Reynolds, y será:

$$\tau = \frac{K}{D}\,\varphi(N_P,\, N_R).$$

La fórmula empírica propuesta por McAdams, es:

$$\tau = 0{,}023\,\frac{K}{D}\,N_R{}^{0,8}N_P{}^{0,4}.$$

Ejemplo 5 Palacios. Enfriamiento de un sólido en una corriente líquida.

Conocidas las dimensiones de las magnitudes que intervienen en la conducción del calor, el Análisis dimensional permite abordar problemas que, por su complejidad, serían prácticamente insolubles por aplicación directa de la teoría de Fourier. He aquí un ejemplo, conocido con el nombre de problema de Boussinesq, que se ha hecho famoso por la polémica que ha suscitado.

Un sólido rígido ocupa una posición fija en el seno de una corriente líquida, y es mantenido a una temperatura constante que excede en ϑ^0 a la que tiene el líquido a gran distancia del sólido. Calcular el calor que pierde el sólido cada unidad de tiempo.

Este problema, fue tratado por lord Rayleigh admitiendo que en el fenómeno en cuestión intervienen las siguientes magnitudes:

Pérdida de calor por unidad de tiempo. ... . q
Dimensión lineal del sólido…………………………... a
Velocidad del líquido…………………………………. *v*
Exceso de temperatura……………………………... 6
Calor específico del líquido por unidad de volumen…...c'
Conductividad térmica del líquido. . . . . K

El problema de Análisis dimensional se plantea como sigue:

	q	a	v	θ	c'	K
L	0	1	1	0	− 3	− 1
T	− 1	0	− 1	0	0	− 1
θ	0	0	0	1	− 1	− 1
Q	1	0	0	0	1	1
π_1	1	− 1	0	− 1	0	− 1
π_2	0	1	1	0	1	− 1

La característica de la matriz formada con los exponentes dimensionales es *h* = 4, y pueden formarse infinidad de parejas de monomios pi independientes. Por la naturaleza del problema, debe considerarse *q* como función de las restantes magnitudes, por lo que conviene hacer sucesivamente, $\varepsilon_q = 1$, $\varepsilon_q = 0$. Simultáneamente, puede elegirse arbitrariamente el exponente de otra magnitud, que puede ser cualquiera con tal que el determinante formado por las cuatro columnas encabezadas por]as magnitudes restantes sea diferente de cero. En este caso se encuentran las parejas *q*, *v* y *q*, *c*'. Con la primera pareja resulta:

$$q = aK\theta f\left(\frac{ac'v}{K}, \tilde{\omega}, \ldots\right).$$

Esta fórmula suministra informaciones precisas, a saber:
1.° La pérdida de calor es proporcional al exceso de temperatura.
2.° Si se cambia el tamaño del sólido y la naturaleza y la velocidad del fluido de modo que el monomio *a*c'*v*/K conserve su valor, la pérdida de calor es proporcional a la conductividad calorífica del líquido y a la dimensión lineal del sólido.
El método seguido por lord Rayleigh es el propio de los tiempos de Fourier, cuando, por no haber sido descubierto el principio de la equivalencia entre el calor y el trabajo, había que considerar el calor como magnitud independiente de las magnitudes mecánicas. Podría pensarse que, al atribuir al calor la misma dimensión que al trabajo, el teorema de pi suministrase más información que la conseguida por lord Rayleigh. No ocurre así,

sin embargo, porque la representación dimensional de las magnitudes que intervienen en el problema de Boussinesq requiere una base de cuatro, y es indiferente utilizar la L, T, Q, θ, o las L, M, T, e, según se comprueba fácilmente.

Ejemplo 6 Palacios. Anemómetro de alambre caliente.

Este aparato se basa en el enfriamiento de un alambre colocado transversalmente en una corriente fluida. Se admite que el enfriamiento es proporcional a la longitud y que, además de las magnitudes consideradas por lord Rayleigh en el problema anterior, influye la viscosidad cinemática del fluido, por depender de ella la turbulencia.
Representando por r el radio del alambre, y por h la pérdida de calor por unidad de longitud y por unidad de tiempo, resulta el siguiente cuadro de exponentes dimensionales:

	h	v	θ	r	K	c'	ν
L	-1	1	0	1	-1	-3	2
T	-1	-1	0	0	-1	0	-1
θ	0	0	1	0	-1	-1	0
Q	1	0	0	0	1	1	0
π_1	1	0	-1	0	-1	0	0
π_2	0	0	0	0	-1	1	1
N_R	0	1	0	1	0	0	-1

y la solución puede escribirse así:

$$h = K\theta\varphi\left(\frac{c'\nu}{K},\ N_R\right).$$

En los gases perfectos, según se verá en el capítulo XV, la viscosidad es proporcional a la conductividad térmica, por lo que el monomio *c'v/K* tiene que ser un número fijo, el mismo para todos los gases. En consecuencia, ha de ser:

$$h = K\theta\varphi_1(N_R),$$

o bien:

$$v = \frac{\nu}{r} f\left(\frac{h}{K\theta}\right),$$

que pone de manifiesto la posibilidad de medir las fluctuaciones de *v* en una corriente turbulenta por los cambios que experimenta el cociente h/θ.

2.2.3.3. Dimensional analysis and theory of models, Análisis dimensional y teoría de modelos. Henry L. Langhaar. 1951, John Wiley.

Ejemplo 1 Langhaar. Principios e ilustraciones del análisis dimensional.

Se define el número de Reynolds como:

$$R = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{v}. \quad \left(v = \frac{\mu}{\rho} \right)$$

Consideramos un cuerpo esférico liso de diámetro D que se sumerge en una corriente de flujo incompresible.
La velocidad de la corriente a cierta distancia por delante de la esfera es V. Entonces la fuerza de resistencia F en el cuerpo se representa por la ecuación la ecuación, $F = f\left(V, D, \rho, \mu\right)$ en la cual ρ es la densidad másica del fluido, μ es el coeficiente dinámico de viscosidad del fluido, y f representa una función sin especificar.
Para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea, debe tener la siguiente forma:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)$$

La función f_1 no es desconocida, pero depende solamente de una variable $\frac{VD\rho}{\mu}$, en lugar de cuatro variables separadas, V, D, ρ y μ. Se observa que las expresiones $\frac{F}{\rho V^2 D^2}$ y $\frac{VD\rho}{\mu}$ son adimensionales, a la expresión $\frac{VL}{v}$ se le llama número de Reynolds, convencionalmente se le denota R o N_R.

Ejemplo 2 Langhaar. Número crítico de Reynolds para flujo en tuberías.

Se ha demostrado por análisis dimensional que el número de Reynolds es el número que nos indica un criterio para determinar el régimen de un flujo que circula en el interior de una tubería.
Si llamamos V_{cr} la velocidad crítica de transición de flujo laminar a turbulento,
D el diámetro de la tubería, μ la viscosidad y ρ la densidad del fluido. Hay una relación entre estas variables de la forma:

$$f(V_{cr}, D, \rho, \mu) = 0$$

El único producto adimensional que se puede formar con las cuatro variables es el número de Reynolds, en este caso el crítico; $\mathrm{R}_{cr} = \frac{V_{cr} D\rho}{\mu}$

Por el teorema de Buckingham, la ecuación se reduce a:

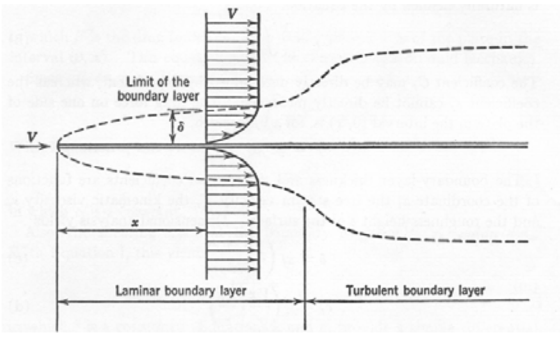
$$f(R_{cr}) = 0$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es de la forma R_{cr}=constante.

Ejemplo 3 Langhaar. Teoría de la capa límite.

Si un cuerpo es sumergido en un fluido, la fuerza de resistencia en el cuerpo es causada en parte por la diferencia de presión en la parte delantera y trasera del cuerpo, la porción de fuerza de resistencia que resulta de la tensión tangencial es llamada "coeficiente de resistencia fricción- superficial". Si un plato muy delgado es colocado de lado a una corriente de fluido, la resistencia es enteramente atribuida a la fricción superficial. La naturaleza del flujo, en este caso no la indica la figura.

Figura 1 ejemplos Langhaar. Flujo en la capa límite.



El plato causa muy poca perturbación en el campo de velocidad en la región de la cabeza.
Sin embargo, cerca de la superficie del plato, hay un gran gradiente de velocidad. La región en la cual hay un apreciable gradiente de velocidad se llama capa límite.
Evidentemente, el espesor δ de la capa límite es una función creciente con la coordenada x (ver figura)
La tensión de cortadura en la superficie del plato τ_0, se expresa en la forma:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} c_f \rho V^2$$

El coeficiente de fricción c_f es evidentemente adimensional. Frecuentemente se calcula el coeficiente de fricción global en el intervalo (0, x).

$$C_f = \frac{1}{x}\int_0^x c_f dx$$

La fuerza de resistencia en un lado e la placa es, por unidad de anchura:

$$F = \frac{1}{2} C_f \rho V^2 x$$

El espesor de la capa límite y el coeficiente de fricción son funciones de la coordenada x, la corriente libre de velocidad V, la viscosidad cinemática v, y de la rugosidad e de la superficie.
El análisis dimensional nos da:

$$\delta = xf\left(\frac{Vx}{v}, \frac{Ve}{v}\right)$$

$$c_f = f_1\left(\frac{Vx}{v}, \frac{Ve}{v}\right) \qquad C_f = f_2\left(\frac{Vx}{v}, \frac{Ve}{v}\right)$$

$\frac{Vx}{v}$ es el número de Reynolds R_x, expresado en función del espesor de la capa límite: $R_\delta = \frac{V\delta}{v}$.

Ejemplo 4 Langhaar. Transferencia de calor en un fluido que fluye en el interior de una tubería.

Estudiamos el caso de un fluido que circula en el interior de una tubería. En la sección transversal la temperatura es θ y en la pared $\theta+\Delta\theta$.
El coeficiente de transmisión de calor h depende de V,D,v,k,C_p e $\Delta\theta$ (velocidad media, diámetro de la tubería, viscosidad cinemática, conductividad térmica, calor específico, diferencia de temperatura).
El rango de la matriz dimensional es cuatro. Consecuentemente hay tres productos adimensionales en un completo conjunto .El completo conjunto de productos adimensionales consiste en el número de Nusselt $N=\frac{hD}{k}$, el número de Reynolds $R=\frac{VD}{v}$, y el número de Prandtl $Q=\frac{C_p v}{k}$.
Desde estos productos que no contienen la diferencia de temperatura, es imposible que la forma adimensional de un producto contenga la diferencia de temperatura.
Por lo tanto h no depende de la diferencia de temperatura.
El teorema de Buckingham llegaría a:

$$N=f\left(R,Q\right) \quad \text{o} \quad h=\frac{k}{D}f\left(R,Q\right).$$

Ejemplo 5 Langhaar. **Condensación en una tubería vertical .**
Consideramos vapor en estado de saturación a temperatura θ pasando a través de una tubería vertical cuya temperatura es $\theta-\Delta\theta$.
Podemos decir:

$$f\left(h,\Delta\theta,L,\rho\lambda,k,\rho g,\mu\right)=0$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura, L la longitud de la tubería, $\rho\lambda$ es el "calor de vaporización por unidad de volumen", k es la conductividad térmica, ρg es el peso específico, μ es la viscosidad. El diámetro de la tubería no afecta el espesor de la película (y consecuentemente no afecta a h) . El efecto de la velocidad es muy pequeño si está no es muy elevada. La interacción entre el flujo de vapor y el flujo condensado es despreciable, la densidad el vapor es irrelevante.

En este problema, no hay transformaciones de energía por el trabajo del calor. En consecuencia el calor puede ser considerado como una entidad fundamental. Introducimos [H] como una nueva dimensión, que ofrece una ventaja en este caso, puesto que obtenemos dos productos adimensionales en vez de tres. La matriz dimensional es:

	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\rho\lambda$	k	ρg	μ
M	0	0	0	0	0	1	1
L	−2	0	1	−3	−1	−2	−1
T	−1	0	0	0	−1	−2	−1
Θ	−1	1	0	0	−1	0	0
H	1	0	0	1	1	0	0

El rango de la matriz es cinco, por lo tanto hay 7-5=2 productos adimensionales independientes. Las ecuaciones correspondientes a la matriz adimensional son:

$$k_6 + k_7 = 0$$
$$-2k_1 + k_3 - 3k_4 - k_5 - 2k_6 - k_7 = 0$$
$$-k_1 - k_5 - 2k_6 - k_7 = 0$$
$$-k_1 + k_2 - k_5 = 0$$
$$k_1 + k_4 + k_5 = 0$$

La matriz solución es

	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\varrho\lambda$	k	ϱg	μ
π_1	1	0	1	0	−1	0	0
π_2	0	1	−3	−1	1	−1	1

El conjunto completo de productos adimensionales es:

$$\pi_1 = \frac{hL}{k} \qquad \pi_2 = \frac{k\mu\Delta\theta}{L^3\varrho^2 g\lambda}$$

El producto π_1 es el número de Nusselt. De acuerdo con el teorema de Buckingham, $f(\pi_1, \pi_2) = 0$ o $\pi_1 = f(\pi_2)$. Consecuentemente:

$$\frac{hL}{k} = f\left(\frac{k\mu\Delta\theta}{L^3\varrho^2 g\lambda}\right)$$

Ejemplo 6 Langhaar. Transmisión de calor transitoria a un cuerpo en un fluido.

Suponemos que el sólido es un cuerpo conductor, con temperatura inicial θ_0, es sumergido en un fluido a temperatura θ_f y que el fluido es removido, de forma que la temperatura permanece prácticamente uniforme y constante.
Entonces la temperatura θ en un punto especificado del cuerpo varía con el tiempo, y se aproxima a la temperatura θ_f asintóticamente.

Solamente las diferencias de temperatura son significativas en los procesos de transferencia de calor. En el presente caso, la diferencia $\theta - \theta_0$ y $\theta_f - \theta_0$ determina la permanencia de $\theta_f - \theta$. El responsable de la temperatura en afluencia de calor depende de la capacidad calorífica del cuerpo por unidad de volumen C_p.

En general hay una discontinuidad de la temperatura $\Delta\theta$ en el límite entre las dos sustancias diferentes. h es una constante en el límite.
Podemos decir que:

$$\theta - \theta_0 = f\left(k, h, C_p, L, t, \theta_f - \theta_0\right)$$

k es el coeficiente de conductividad térmica del cuerpo y L es una longitud que designa el tamaño del cuerpo. El análisis dimensional de esta ecuación, nos lleva a :

$$\frac{\theta - \theta_0}{\theta_f - \theta_0} = f\left(\frac{kt}{C_p L^2}, \frac{hL}{k}\right)$$

Esta ecuación fue obtenida por Gurney y Lurie en 1923.

Ejemplo 7 Langhaar. Convección natural.

Consideramos una tubería horizontal con diámetro d que es concéntrica con una larga tubería de diámetro D. Las dos tuberías se mantienen a temperaturas θ_0 y θ_1. El espacio anular entre las tuberías es rellenado con un líquido.
Se produce convección uniforme por la expansión térmica del fluido, pero el flujo no es axial. La proporción de calor transferida de una tubería a la otra viene expresada por $hA(\theta_0 - \theta_1)$, A es el área lateral de la tubería pequeña.
El movimiento de cualquier partícula del fluido esta gobernada por la ley de Newton a=F/m. La fuerza F es en parte fricción viscosa y en parte el peso. La fricción viscosa es proporcional a la viscosidad μ, y la masa m es proporcional a la densidad ρ. Consecuentemente, la relación F/m contiene la relación $v = \mu / \rho$.
También, la relación F/m contiene la relación g=w/ρ.
La viscosidad cinemática varía apreciablemente con la temperatura. Si la diferencia de temperatura es $\theta_0 - \theta_1$ no es muy grande, la viscosidad cinemática se puede expresar $v = v_0 + v_1(\theta - \theta_0)$, v_0 y v_1 son constantes características del fluido.
Las pertinentes variables térmicas son $\theta_0 - \theta_1$, C_p, k, (conductividad térmica), β (coeficiente de expansión térmica)
Así:

$$h = f\,(d, D, \Delta\theta, C\rho, k, \beta, \nu_0, \nu_1, g)$$

Hay diez variables es esta ecuación, y el rango de la matriz dimensional es cuatro. Consecuentemente, hay seis productos adimensionales en el conjunto completo. Se puede obtener el siguiente conjunto por inspección:

$$\frac{hd}{k},\quad \frac{\beta\Delta\theta g d^3}{{\nu_0}^2},\quad \frac{C\rho\nu_0}{k},\quad \frac{d}{D},\quad \frac{\nu_0}{\nu_1\Delta\theta},\quad \beta\Delta\theta$$

El primero de los tres productos en es número de Nusselt, le sigue el número de Grashof y el de Prandtl
Desde que la corriente de convección resulta de la acción conjunta de gravedad y expansión térmica, el producto $\beta\Delta\theta$ según parece no tiene efectos. Esta conjetura está confirmada experimentalmente. De acuerdo con esto, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\frac{hd}{k} = f\left(\mathrm{G}, \mathrm{Q}, \frac{d}{D}, \frac{\nu_0}{\nu_1\Delta\theta}\right)$$

G y Q son los números de Grashof y Prandtl respectivamente. El número de variables independientes se ha reducido de nueve a cuatro.

2.2.3.4. Dimensional Analysis and Sclae-up in Chemical Engineering. Análisis Dimensional y de Escala en Ingeniería Química. Marko Zlokarnik.1991, Springer-Verlag.

Ejemplo 1 Zlokarnik. . Caída de presión de un fluido homogéneo en una tubería lisa recta.

Para este caso, la caída de presión Δp debe ser una función de la geometría de la tubería (diámetro d y longitud l), las propiedades físicas del fluido (densidad ρ, y viscosidad η) y de la velocidad v. La lista sería:

$$\left\{\Delta p; d, l; \rho, \eta; \mathrm{v}\right\}$$

La relación entre estas cantidades:

$$f\left(\Delta p, d, l, \rho, \eta, \mathrm{v}\right) = 0$$

Para ser dimensionalmente homogéneo, debe ser posible formular un producto adimensional Π $\left(\Pi = 1\right)$ con ellos:

$$\Pi = \Delta p^{\alpha} d^{\beta} l^{\gamma} \rho^{\delta} \eta^{\varepsilon} \mathrm{v}^{\zeta}$$

$$\Pi = \left[ML^{-1}T^{-2}\right]^{\alpha}\left[L\right]^{\beta}\left[L\right]^{\gamma}\left[ML^{-3}\right]^{\delta}\left[ML^{-1}T^{-1}\right]^{\varepsilon}\left[LT^{-1}\right]^{\zeta} = 1$$

Para las tres dimensiones básicas: (masa M, longitud L, tiempo T):

$$M : \alpha + \delta + \varepsilon = 0; (a)$$

$$L : -\alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \varepsilon + \zeta = 0; (b)$$

$$T : -2\alpha - \varepsilon - \zeta = 0; (c)$$

Hay solamente tres ecuaciones con seis variables desconocidas, hay un infinito número posible de números Π.Si, por ejemplo α, β y γ son consideradas como dadas, entonces el resto puede ser obtenido como sigue:

Resolviendo la ecuación (a) para ε y sustituyendo esta en (b) y (c) obtenemos:

$$\beta + \gamma - 2\delta + \zeta = 0; (b1)$$

$$-\alpha + \delta - \zeta = 0; (c1)$$

Eliminando ζ de las ecuaciones:

$$\delta = -\alpha + \beta + \gamma$$

$$\varepsilon = -\beta - \gamma$$

$$\zeta = -2\alpha + \beta + \gamma$$

La ecuación $\Pi = \Delta p^{\alpha} d^{\beta} l^{\gamma} \rho^{\delta} \eta^{\varepsilon} \mathrm{v}^{\zeta}$ se puede expresar ahora:

$$\Pi = \Delta p^{\alpha} d^{\beta} l^{\gamma} \rho^{-\alpha+\beta+\gamma} \eta^{-\beta-\gamma} \mathrm{v}^{-2\alpha+\beta+\gamma}$$ o:

$$\Pi = \left(\frac{\Delta p}{\rho \mathrm{v}^2}\right)^2 \left(\frac{d\rho \mathrm{v}}{\eta}\right)^{\beta} \left(\frac{l\rho \mathrm{v}}{\eta}\right)^{\gamma}$$

El resultado del producto adimensional Π consiste en tres grupos de números adimensionales.

El primero de ellos es el número de Euler:

$$Eu \equiv \frac{\Delta p}{\rho \mathrm{v}^2}$$

El segundo se conoce como número de Reynolds

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{d\rho \mathrm{v}}{\eta}$$

El tercero combinado con el segundo es la relación L/d.
Podemos decir que:

$$Eu = f\left(\mathrm{Re}, L/\mathrm{d}\right)$$

Ejemplo 2 Zlokarnik. Descripción de los procesos físicos con un completo conjunto de números adimensionales.

La caída de presión del volumen de un flujo en una tubería lisa y recta.
(ignorando los efectos de entrada)
Las variables principales son:

1. La cantidad objetivo: caída de presión, Δp.
2. Las variables geométricas: el diámetro, d y la longitud l de la tubería.
3. Las propiedades físicas: la densidad ρ, la viscosidad v del fluido.
4. El parámetro relacionado con el proceso: el volumen en movimiento q

$$\boxed{\{\,\Delta p;\ d,\ L;\ \rho,\ \eta;\ q\,\}}$$

Cuando combinado con el SI sistema dimensional, la matriz dimensional toma la siguiente forma:

	Δp	q	d	l	ρ	ν
M	1	0	0	0	1	0
L	−1	3	1	1	−3	2
T	−2	−1	0	0	0	−1
	Core matrix			Residual matrix		

La naturaleza de los pasos del siguiente proceso hace esta matriz dimensional menos que la ideal, porque es necesario saber que cada uno de los elementos individuales de la matriz residual aparecerá solamente en uno de los números adimensionales, mientras los elementos de la matriz núcleo pueden aparecer como “relleno” en los denominadores de todos. La matriz residual, por lo tanto sería recargada con variables esenciales como la cantidad objetivo y los más importantes propiedades físicas y parámetros de procesos-relacionados.
La variables que probamos irrelevantes, solamente conciernen al número adimensional las borraremos mientras, damos salidas las otras están inalteradas
Puesto que la matriz núcleo ha de transformarse en una matriz unidad, el “relleno” sería organizado de tal forma que facilite un mínimo lineal de transformaciones.

	ρ	d	ν	Δp	q	l
M	1	0	0	1	0	0
L	−3	1	2	−1	3	1
T	0	0	−1	−2	−1	0
	Core matrix			Residual matrix		

El siguiente paso es la aplicación del algoritmo de Gaubian.

	ρ	d	ν	Δp	q	l	
Z_1	1	0	0	1	0	0	$Z_1 = M$
Z_2	0	1	2	2	3	1	$Z_2 = 3M + L$
Z_3	0	0	1	2	1	0	$Z_3 = -T$

El rango de la matriz tres, Solamente una transformación lineal de las filas es ahora requerida para transformar la matriz núcleo en matriz unidad.

	ρ	d	ν	Δp	q	l	
Z'_1	1	0	0	1	0	0	$Z'_1 = Z_1$
Z'_2	0	1	0	−2	1	1	$Z'_2 = Z_2 - 2Z_3$
Z'_3	0	0	1	2	1	0	$Z'_3 = Z_3$
	Unity matrix			Residual matrix			

Cuando generamos los números adimensionales, cada elemento de la matriz residual forma el numerador de la fracción mientras en denominador consiste del relleno de ma matriz uniforme con los exponentes indicados en la matriz residual:

$$\boxed{\Pi_1 \equiv \frac{\Delta p}{\rho^1 d^{-2} \nu^2} = \frac{\Delta p\, d^2}{\rho\, \nu^2}; \quad \Pi_2 \equiv \frac{q}{\rho^0 d^1 \nu^1} = \frac{q}{d\, \nu}; \quad \Pi_3 \equiv \frac{l}{\rho^0 d^1 \nu^0} = \frac{l}{d}.}$$

El número adimensional Π_2 normalmente no produce un número objetivo Δp. Esto es un inconveniente que contiene la propiedad física esencial ν. Que ya esta contenida en el proceso numérico. Este inconveniente puede fácilmente solucionarse por una apropiada combinación de los números adimensionales Π_1 y Π_2. Esto dá como resultado el bien conocido número de Euler, $Eu = \Pi_1 \Pi_2^{-2} = \dfrac{\Delta p d^4}{\rho q^2}$, que a veces se combina con $\Pi_3 \equiv L/d$.

Estas transformaciones muestran como los números adimensionales obtenidos pueden posteriormente ser reestructurados mediante una combinación apropiada en formas que corresponden a los llamados comúnmente números adimensionales.

La estructura de los números adimensionales dependen de las variables contenidas en la matriz núcleo. El número de Euler obtenido por combinación de Π_1 y Π_2 habría sido obtenido automáticamente si ν y q hubieran sido permutadas en la matriz núcleo.

	ρ	d	q	Δp	ν	l	
Z_1	1	0	0	1	0	0	$Z_1 = M$
Z_2	0	1	0	−4	−1	1	$Z_2 = 3M + L + 3T$
Z_3	0	0	1	2	1	0	$Z_3 = -T$

$$\boxed{\Pi_1' \equiv \frac{\Delta p\, d^4}{\rho\, q^2} = Eu \qquad \Pi_2' \equiv \frac{\nu\, d}{q} \qquad \Pi_3' \equiv \frac{l}{d}}$$

El número adimensional Π_2 es es bien conocido número de Reynolds. El número de Reynolds es definido como cualquier número adimensional que combina la velocidad característica v, la longitud característica l con la viscosidad cinemática del fluido ν.

Los siguientes grupos adimensionales son igualmente comparables ya que cumplen estos requisitos:

$$\mathrm{Re} \equiv \mathrm{v}\frac{\mathrm{d}}{v}\left(\frac{4qd}{\pi d^{2}v}\right)\frac{q}{dv} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Re} \equiv nd\frac{d}{v} = \frac{nd^{2}}{v}$$

Ejemplo 3 Zlokarnik. Campo de operaciones de unidad mecánicas.

Consumo de energía y tiempo de mezcla para la homogeneización de mezcla de líquidos.
Estudiamos el caso de la energía característica de un agitador.
La energía consumida P de un agitador típico bajo unas condiciones de instalación depende de las siguientes variables:

Parámetros geométricos: diámetro del agitador d
Propiedades físicas: densidad ρ y viscosidad cinemática v del líquido.
Parámetros del proceso: velocidad de rotación n del agitador.

$\{P;\ d;\ \rho,\ \nu;\ n\}$

En la matriz dimensional realizando solamente una transformación lineal para producir dos números adimensionales:

	ρ	d	n	P	ν
M	1	0	0	1	0
L	−3	1	0	2	2
T	0	0	−1	−3	−1
Z_1	1	0	0	1	0
Z_2	0	1	0	5	2
Z_3	0	0	1	3	1

$Z_1 = M$
$Z_2 = L + 3M$
$Z_1 = -T$

$\Pi_1 = P/(\rho\, d^5 n^3) \equiv \mathrm{Ne}$
$\Pi_2 = \nu/(d^2 n) \equiv \mathrm{Re}^{-1}$

Ne es el número de Newton y Re es el número de Reynolds.

Ejemplo 4 Zlokarnik. **Estado uniforme de transferencia de calor en un vaso en enfriamiento y las condiciones óptimas para la máxima eliminación del calor de la reacción.**

El flujo de calor Q (cantidad de calor por unidad de tiempo) a través de un intercambiador de calor de superficie A.
$Q = kA\Delta T$
ΔT es la diferencia de temperatura entre la superficie de la pared y el líquido. El factor de proporcionalidad es el coeficiente total de transferencia de calor k

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\alpha_a}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_i}$$

(α_a y α_i son los coeficientes de transferencia de calor en el exterior y el interior de la superficie del intercambiador de calor; λ y δ son la conductividad de calor y el espesor de la pared)

Operando es estas condiciones α_i cambia debido a las condiciones de mezclado. Esta variable objetivo depende de los siguientes parámetros:
Parámetros geométricos: Diámetro del vaso y del agitador: D, d.
Propiedades físicas: Densidad ρ; viscosidad η; coeficiente de temperatura de viscosidad γ, capacidad de calor c y conductividad de calor λ del líquido.
La lista de los parámetros relevantes es:
$\{\alpha; D, d; \rho, \eta, \gamma, c, \lambda; n, \Delta T\}$
A continuación realizamos el análisis dimensional, mediante los dos sistemas llamados $\{M, L, T, \Theta\}$ y $\{M, L, T, \Theta, H\}$.
Mediante el sistema adimensional $\{M, L, T, \Theta\}$

	ρ	d	n	ΔT	α	c	λ	η	D	γ	
M	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	
L	−3	1	0	0	0	2	1	−1	1	0	
T	0	0	−1	0	−3	−2	−3	−1	0	0	
Θ	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	−1	
Z_1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	$Z_1 = M$
Z_2	0	1	0	0	0	2	1	−1	1	0	$Z_2 = L + 3M$
Z_3	0	0	1	0	−3	−2	−3	−1	0	0	$Z_3 = -T$
Z_4	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	−1	$Z_4 = \Theta$

Se obtienen los siguientes 6 números adimensionales:

$$\Pi_1 \equiv \frac{\alpha\,\Delta T}{\rho\, d^3\, n^3} \qquad \Pi_4 \equiv \frac{\eta}{\rho\, d^2\, n} \equiv \mathrm{Re}^{-1}$$

$$\Pi_2 \equiv \frac{c\,\Delta T}{d^2\, n^2} \qquad \Pi_5 \equiv D/d$$

$$\Pi_3 \equiv \frac{\lambda\,\Delta T}{\rho\, d^4\, n^3} \qquad \Pi_6 \equiv \gamma\,\Delta T$$

$$\Pi_2 \Pi_3^{-1} \Pi_4^{-1} \equiv c\eta/\lambda \equiv \mathrm{Pr}$$

$$Nu \equiv \alpha D/\lambda$$

$$\Pi_3^{-1}\Pi_4 \equiv \frac{\eta d^2 n^2}{J \Delta T \lambda} \equiv Br$$

$$\Pi_4 \equiv \mathrm{Re}^{-1}$$

La apariencia de los números adimensionales no es es desconocida.
Primero de todo, vamos a recombinar Π_1 y Π_3:

$\Pi_1 \Pi_3^{-1} \equiv \alpha d/\lambda$ ---→ $Nu \equiv \alpha D/\lambda$. Nu es el número de Nusselt.

Ahora:

$\Pi_2 \Pi_3^{-1} \Pi_4^{-1} \equiv c\eta / \lambda \equiv \Pr$ ---→ Pr es el número de Prandtl.

Así obtenemos:

$\boxed{\{ Nu, Pr, \Pi_3, \gamma\Delta T, Re, D/d \}}$

En el sistema dimensional $\{M, L, T, \Theta, H\}$.

	ρ	d	n	ΔT	λ	α	c	J	η	D	γ	
M	1	0	0	0	0	0	−1	1	1	0	0	
L	−3	1	0	0	−1	−2	0	2	−1	1	0	
T	0	0	−1	0	−1	−1	0	−2	−1	0	0	
Θ	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	0	−1	
H	0	0	0	0	1	1	1	−1	1	1	0	
Z_1	1	0	0	0	0	0	−1	1	1	0	0	$Z_1 = M$
Z_2	0	1	0	0	−1	−2	−3	5	2	1	0	$Z_2 = L + 3M$
Z_3	0	0	1	0	1	1	0	2	1	0	0	$Z_3 = -T$
Z_4	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	0	−1	$Z_4 = Q$
Z_5	0	0	0	0	1	1	1	−1	0	0	0	$Z_5 = H$
Z'_1	1	0	0	0	0	0	−1	1	1	0	0	$Z'_1 = Z_1$
Z'_2	0	1	0	0	0	−1	−2	4	2	1	0	$Z'_2 = Z_2 + Z_5$
Z'_3	0	0	1	0	0	0	−1	3	1	0	0	$Z'_3 = Z_3 - Z_5$
Z'_4	0	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	−1	$Z'_4 = Z_4 + Z_5$
Z'_5	0	0	0	0	1	1	1	−1	0	0	0	$Z'_5 = Z_5$

Se obtienen los siguientes números adimensionales:

$$\Pi_1 \equiv \frac{\alpha\, d}{\lambda};\ \Pi_2 \equiv \frac{c\, \rho\, d^2\, n}{\lambda};\ \Pi_3 \equiv \frac{J\, \Delta T\, \lambda}{\rho\, d^4\, n^3};\ \Pi_4 \equiv \frac{\eta}{\rho\, d^2\, n};\ \Pi_5 \equiv \frac{D}{d};\ \Pi_6 \equiv \gamma \Delta T.$$

$\Pi_1 \rightarrow Nu \equiv \dfrac{\alpha D}{\lambda}$ Número de Nusselt.

$\Pi_2 \Pi_4 \equiv c\eta / \lambda \equiv \Pr$ Número de Prandtl.

$\Pi_3^{-1} \Pi_4 \equiv \dfrac{\eta d^2 n^2}{J \Delta T \lambda} \equiv Br$ Número de Brinkmann.

$\Pi_4 \equiv \mathrm{Re}^{-1}$ Número de Reynolds

3. *Números Adimensionales.*

- -Número de Biot
- -Número de Boussinesq
- -Coeficiente de fricción
- -Coeficiente de resistencia
- -Número de Eckert
- -Número de Euler
- -Número de Fourier
- -Número de Froude
- -Número de Graetz
- -Número de Grashof
- -Número de Mach
- -Número de Nusselt
- -Número de Peclet
- -Número de Prandtl
- -Número de Rayleigh
- -Número de Reynolds
- -Número de Stanton
- -Número de Weber.

3.1. Número De Biot.

Jean-Baptiste Biot. Nació en París en 1774 y murió en1862. Físico francés. Se dedicó también al estudio de la química, la matemática y la astronomía. Elaboró una teoría matemática sobre la propagación del sonido en los sólidos y estudió la polarización rotatoria, la conductibilidad calorífica y el origen de los meteoritos. Miembro de la Academia de Ciencias y de la Royal Society, dejó constancia de su ideología republicana en su obra *Ensayos sobre la historia general de las ciencias durante la Revolución*. La *ley de Biot y Savart* permite calcular el valor de la intensidad del campo magnético creado por una corriente eléctrica.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.
Páginas: 52, 208.

52.

Campos de temperaturas variables en el tiempo sin fuentes de calor.

Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud y k es la conductividad del sólido. Se diferencia del número de Nusselt en la conductividad, pues en Nusselt la conductividad es la del fluido.

208.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor. Significado físico de los parámetros adimensionales.

Se puede observar que la literatura francesa emplea notación y terminología bastante diferentes, que a continuación comparamos con la nuestra:

Notación actual	Notación francesa
$Bi = \frac{hd}{k}$ número de Nusselt	$\mathscr{B} = \frac{\text{hd}}{\text{k}}$ número de Biot

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 74.

74.

Conducción en estado estacionario. Transmisión de calor a través de una pared plana con aletas.

Se define el número de Biot como $Bi = \frac{\alpha_f \delta}{\lambda}$

δ es el espesor de la aleta, α_f es el coeficiente de transmisión de calor superficial de las aletas, λ conductividad térmica.

El número de Biot representa la relación entre resistencia térmica interna a la conducción y la resistencia térmica externa:

$$Bi = \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}$$

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 20,133, 134.

20.

Modos de transferencia de calor.

Llamamos al grupo $\frac{\overline{h}L}{k_b}$, número de Biot.

$\overline{h}$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, L la longitud característica, k_b la conductividad del material.

133.

Análisis de conducción de calor. Diseño de aletas.

Definimos el número de Biot para conducción en una dirección transversal, basada en esta dimensión.

$$Bi_{aleta} = \frac{\overline{h}(A/P)}{k}$$

$\overline{h}$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, A es el área, P el perímetro, k la conductividad del material.

134.

Análisis de conducción de calor. Diseño de aletas.

Definimos número de $Bi_{axial} = \frac{\overline{h_L}L}{k}$

$\overline{h}$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, L la longitud característica, k la conductividad del material.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Página: 47.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Biot

$$Bi = \frac{l}{\lambda S}$$

Interpretación:

Es la razón de la resistencia térmica interna del cuerpo (conducción) y la resistencia térmica de la superficie (convección + radiación).

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores: Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Páginas: 7, 100.

7.

Convección laminar y turbulenta.

Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hl_s}{k_s}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, l es la longitud y k la conductividad, en ambas, el subíndice *s* hace referencia al sólido

100.

Flujos paralelos. Capa límite térmica.

Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hl_s}{k_s} = -\frac{\left[\partial T_s / \partial (y / l_s)\right]_w}{T_W - T_\infty}$$

k es la conductividad característica, l la longitud característica y en ambas el subíndice s hace referencia al sólido, *y* es una coordenada curvilínea en la dirección de la transferencia de calor, *w* hace referencia a la pared, ∞ a la corriente libre y h es el coeficiente de transmisión de calor.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505. Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Biot (Bi)

Grupo: $Bi = \frac{hL_c}{k}$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, L_c la longitud característica, y k la conductividad del material.

Interpretación física: $\dfrac{\text{Resistencia interna a la conducción de calor}}{\text{Resistencia externa a la conducción de calor}}$

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 76, 123, 191, 206.

76.

Conducción de calor. Radio crítico de aislamiento.

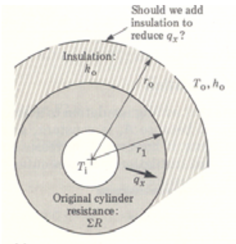
Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{h_0 r_0}{k}$$

Los parámetros se corresponden con los de la figura.

h es el coeficiente de transmisión de calor, r_{crit} es el radio crítico de aislamiento, k_0 la conductividad térmica de aislamiento.

Figura número de Biot 1: Capa de aislante y radio crítico en un cilindro.



123.

Conducción uniforme multidimensional. Ejemplo.

Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{h_\infty L}{k}$$

L es la longitud de referencia del cuerpo, h_∞ es el coeficiente de transmisión de calor ∞ hace referencia al exterior del sólido, al ambiente, k la conductividad térmica del sólido.

191.

Conducción de calor no uniforme. Análisis dimensional.

El número de Biot se define como $Bi = \frac{h_\infty L}{k}$

L es la longitud de referencia del cuerpo, h_∞ es el coeficiente de transmisión de calor donde ∞ hace referencia al exterior del sólido, al ambiente, k la conductividad térmica del sólido.

206.

Conducción de calor no uniforme. Conducción transitoria en tres formas comunes.

Se define el número de Biot en una placa plana finita como:

$$Bi = \frac{h_0 L}{k}$$

En un cilindro

$$Bi = \frac{h_0 r_0}{k}$$

En una esfera

$$Bi = \frac{h_0 r_0}{k}$$

El subíndice *0* hace referencia al exterior del sólido, *h* es la conductividad térmica, *L* la longitud de referencia, *r* es el radio, *k* la conductividad térmica del sólido.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 78, 331.

78.

Transferencia de calor monodimensional. Extensión de superficies.

Se define el número de Biot como:

$Bi = \frac{\bar{h}l}{k}$, donde l es la longitud características, $\bar{h}$ el coeficiente de transmisión de calor y depende de la geometría, k la conductividad térmica del sólido.

El número de Biot es la relación entre la resistencia a conducción y la resistencia de la superficie.

$$Bi \approx \frac{R_K}{R_c}$$

331.

Transferencia de calor por radiación. Sistemas de radiación térmica no uniforme.

Se define el número de Biot de radiación como:

$$Bi_R \equiv \frac{\overline{h_R}l}{k}$$

l es la longitud de referencia, k la conductividad y h_R el coeficiente de transmisión de calor por radiación.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 104, 109, 110.

104.

Conducción transitoria, y uso de las tablas de temperatura.

Se define el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hL_s}{k_s}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, k_s es la conductividad térmica del sólido, L_s es la longitud de referencia del sólido.

El número de Biot es la relación del coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie del sólido y la conductancia específica del sólido.

109-110.

Conducción transitoria, y uso de las tablas de temperatura.

El número de Biot se define como:

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud de referencia, k la conductividad del sólido.

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{h}{k/L} = \frac{\text{Coeficiente de transferencia de calor en la superficie del sólido}}{\text{Conductancia interna del sólido a través de la longitud L}}$$

El número de Biot es la relación del coeficiente de transferencia de calor por unidad de conductancia del sólido sobre la dimensión característica.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.

Autores: Adrian Bejan.

Editorial: John Wiley and Sons.

Página: 120.

120.

Flujo conducto laminar. Transferencia de calor para flujo en conductos totalmente desarrollado.

Tubo rodeado por fluido isotermo.

Definimos el número de Biot:

$$Bi = \frac{h_e}{k/r_0}$$

h_e: coeficiente de transferencia de calor externo , k es la conductividad del conducto, y r_0 el radio externo del conducto,

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.

Autores: Mills. A.F

Editorial: McGraw-Hill

Páginas: 216, 32, 188, 191.

216.

Conducción inestable y multidimensional. Métodos de soluciones numéricos.

Definimos el número de Biot como $Bi = \frac{h_c \Delta x}{k}$; donde Δx es el incremento de longitud h_c es el coeficiente de transmisión de calor, k es la conductividad térmica del material.

32.

Transferencia de calor elemental. Respuesta a la transición térmica.

Consideramos que el gradiente de temperatura es insignificante dentro del sistema para ser válido el modelo que estamos aplicando, cuando la resistencia a la transferencia de calor es pequeña en comparación con la resistencia interna. Si L es la longitud apropiada característica de un cuerpo sólido, entonces:

$$\frac{\text{Resistencia conducción interna}}{\text{Resistencia convección externa}} \approx \frac{L/k_s A}{1/\overline{h}_c A} = \frac{\overline{h}_c L}{k_s}$$

Donde k_s es la conductividad térmica del material sólido.

La cantidad $\frac{\overline{h}_c L}{k_s}$ [W/m^2 k] [m]/[W/mK] es un grupo adimensional llamado, número de Biot, Bi.

188.
Conducción inestable y multidimensional. Métodos de soluciones numéricos.

El número de Biot se define con el grupo adimensional, Bi=$\frac{\overline{h_c}L}{k_s}$, $\overline{h_c}$ es el coeficiente de transmisión de calor, k_s es la conductividad del sólido.

191.
Conducción multidimensional e irregular. Conducción irregular.

Bi=$\frac{\overline{h_c}R}{k}$, donde R es el radio de la esfera, $\overline{h_c}$ es el coeficiente de transmisión de calor, k es la conductividad del sólido.

Bi=$\frac{\overline{h_c}L}{k}$, donde L es la longitud característica.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 215, 320.

215.
Conducción en estado transitorio. Validez del método de la resistencia interna despreciable.

Hay una fuerte preferencia por el uso del método de la resistencia interna despreciable puesto que es el más sencillo y conveniente para la resolución de problemas conducción transitoria. Por ello es importante determinar en qué condiciones se puede usar con precisión razonable.

Para determinar un criterio adecuado consideramos la conducción en estado estable a través de una pared plana de área A. Aunque estamos suponiendo de estado estable, este criterio se extiende fácilmente a los procesos transitorios. Una superficie se mantiene a temperatura $T_{S,1}$ y la otra se expone a un fluido de temperatura, $T_\infty < T_{S,1}$. La temperatura de esta última superficie será algún valor intermedio, $T_{S,2}$. Para el que
$T_\infty < T_{S,2} < T_{S,1}$. De aquí en condiciones de estado estable, el balance de energía de la superficie, se reduce a:

$$\frac{kA}{L}(T_{S,1}-T_{S,2})=hA(T_{S,1}-T_{S,2})$$

Donde k es la conductividad térmica del sólido. Al reacomodar, obtenemos

$$\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{T_{s,2}-T_{s,\infty}}=\frac{(L/kA)}{(1/hA)}=\frac{R_{con}}{R_{conv}}=\frac{hL}{k}\equiv Bi$$

La cantidad (hL/k) es un parámetro adimensional. Se denomina número de Biot. De acuerdo con la ecuación y con la figura el número de Biot proporciona una medida de la caída de temperatura en el sólido en relación con la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido.

También se puede interpretar como una razón de resistencias térmicas como nos indica la ecuación de arriba.

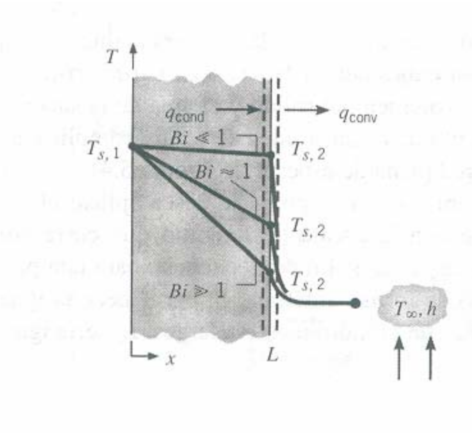


Figura número de Biot 2. Efecto del número de Biot en la distribución de temperaturas en estado estable, caso de pared plana con convección en la superficie.

320.
Introducción a la convección.
Tabla Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.
Grupo
Número de Biot. (Bi)
Definición.
(hL)/ks
Interpretación.
Razón de la resistencia térmica interna de un sólido a la resistencia térmica de la capa límite
Numero de Biot para transferencia de masa (Bi_m)
Grupo
Numero de Biot para transferencia de masa (Bi_m)
Definición
$(h_mL)/D_{AB}$
Interpretación
Razón de la resistencia interna de transferencia de especies a la resistencia de transferencia de especies de la capa límite.

Año: 1997.
Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 70, 97.

70.
Conducción estacionaria multidimensional. Iteración de Gauss-Seidel.
Al grupo adimensional $Bi = \frac{h\Delta x}{k}$ se le denomina número de Biot
Donde:
Δx : es un incremento en el eje x
h: coeficiente de transferencia de calor por convección.
k: coeficiente de transferencia de calor por conducción.

97.
Conducción no estacionaria. Sistemas de capacidad térmica global.
El grupo adimensional $Bi = \frac{hs}{k}$

Donde s =V/A se considera como una longitud característica del sólido, a su vez A es el área y V el volumen, *h* es el coeficiente de transmisión de calor y *K* la conductividad térmica.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.25, 3.23.

1.25.

Tabla grupos adimensionales.

Grupo adimensional: Número de Biot.

Símbolo: Bi

Definición: $\frac{hL}{k_s}$

Significado físico: Relación entre la resistencia térmica interna del sólido y la resistencia térmica del fluido.

3.23.

Conducción transitoria.

Se define el número de Biot como $Bi = \frac{hL}{k}$, el cual depende de las condiciones límite de convección. L es la longitud característica, K es la conductividad del sólido y h el coeficiente de transmisión de calor.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 117, 160, 199, 175

117.

Conducción de calor y difusión de masa. **Ecuación de la conducción de calor**.

Campos de temperatura similares.

Definimos el número de Biot como el siguiente grupo adimensional:

$Bi := \alpha L_0/\lambda$

El número de Biot, tiene la misma forma que el número de Nusselt, con un diferencia y es que λ en el número de Biot es la conductividad térmica del sólido, mientras que en el número de Nusselt es la conductividad térmica del fluido.

La longitud característica es L_0 y α es el coeficiente de transferencia de calor.

160.

Conducción de calor y difusión de masa. Conducción de calor transitoria.

Enfriamiento y calentamiento de cuerpos simples en un flujo de de calor unidimensional.

Si consideramos la mitad de un plato, y se pone en contacto con un fluido a diferente temperatura. Estudiamos la transferencia de calor entre el cuerpo y el fluido.
El número de Biot es en este caso:

$$Bi = \alpha R/\lambda$$

Donde R es el radio del plato, α es el coeficiente de transferencia de calor y λ es la conductividad térmica del sólido.

199.

Conducción de calor y difusión de masa.

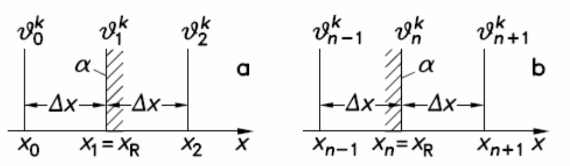
Soluciones numéricas para los problemas de conducción de calor.

Si aplicamos el método de las diferencias finitas, el número de Biot es en este caso:

$$Bi^{*} = \alpha \Delta x/\lambda$$

Donde α es el coeficiente de transferencia de calor y λ es la conductividad térmica del sólido y el incremento de x es un incremento de longitud.

Figura número de Biot 3: conducción de calor a través de una placa vertical de espesor incremento de x.



175.

Conducción de calor y difusión de masa. **Conducción de calor transitoria.**

Estudiamos el caso de transferencia de calor entre un fluido y un cilindro que se sumerge en el interior de éste.
El número de Biot se define como:

$$Bi_{\text{Cy}} = \alpha R/\lambda$$

Donde R es el radio del cilindro, α es el coeficiente de transferencia de calor y λ es la conductividad térmica del sólido.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.

Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.

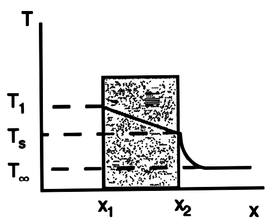
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York

Páginas:728, 695.

728.

Modelos de transferencia de calor. Unión de modelos capacitivos.

Figura número de Biot 4: Distribución de temperatura en una placa vertical.



Un balance de energía sobre el ejemplo de la figura sería:
0 = Q $_{\text{Conducción}}$ +Q $_{\text{convección}}$
Usando la Ley de Fourier y la definición de el coeficiente de transmisión de calor por convección:

$$0 = -KA\frac{(T_S - T)_1}{(X_2 - X_1)} - hA(T_S - T_\infty)$$

Definimos el cociente :

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_S - T_\infty} = \frac{h\Delta x}{k} = \frac{\frac{\Delta x}{k}}{\frac{1}{h}} = \frac{\text{resistencia conducción}}{\text{resistencia convección}}$$

Como número de Biot. $Biot \equiv \frac{hL}{k}$

695
Modelos de transferencia de calor por convección. Coeficientes de transferencia de calor.
Unos de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es el número de Biot.
Número de Biot para transferencia de calor.

$$Bi_h = \frac{hL}{k} = \frac{\text{resistencia interna a la transferencia de energía témica por conducción}}{\text{resistencia en la capa límite a la transferencia por convección de energía térmica}}$$

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid
Páginas: 93, 117, 132, 151, 254.
93.
Conducción del calor. Cilindro sólido de longitud finita con generación de calor.

Definimos el número de Biot como $Bi = \bar{h}_c\, r_0 / k$.
Físicamente, el número de Biot es la razón entre la resistencia por conducción térmica, $R_k = r_0/k$ con la resistencia por convección, $R_C = \frac{1}{\bar{h}_c}$.

r_0 es el radio exterior del cilindro, $\bar{h}_c$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, k es la conductividad térmica del material.
117.
Conducción de calor transitoria. Sistemas con resistencias interna despreciable.
Una medida de la importancia relativa de la resistencia térmica dentro de un cuerpo sólido es el número de Biot "Bi", que es la razón de la resistencia interna, con la externa, y está definida por la ecuación

$$Bi = \frac{R_{interna}}{\mathrm{Re}_{externa}} = \frac{\mathrm{L}\bar{\mathrm{h}}}{k_s}$$

Donde $\bar{h}$ es el coeficiente de transferencia de calor promedio, L es una dimensión de longitud significativa que se obtiene dividiendo el volumen del cuerpo entre su superficie, y k_S es la conductividad térmica del cuerpo sólido.

132.

Conducción del calor. Sólido semi-infinito.

Definimos el número de Biot como $Bi = \frac{x\bar{\mathrm{h}}}{k}$

x es la coordenada longitudinal, $\bar{h}$ es el coeficiente de transferencia de calor promedio y k es la conductividad del cuerpo.

150-151.

Conducción del calor. **Sistemas multidimensionales.**

Placa infinita : $Bi^{-1} = \frac{k}{L\bar{h}_c}$

Cilindro infinito: $Bi^{-1} = \frac{k}{r_0\bar{h}_c}$

En el caso de la placa k es la conductividad del material, L la longitud característica, $\bar{h}_c$ el coeficiente de transmisión de calor medio. En el cilindro r_0 es el radio externo.

254.

Análisis de la transferencia de calor por convección. Tabla.

Grupo: Número de Biot.

Definición: $Bi = \frac{L\bar{\mathrm{h}}}{k_S}$

Interpretación: relación entre la resistencia térmica interna de un cuerpo sólido y su resistencia térmica superficial.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.

Autores: Cengel, Y.A..

Editorial: McGraw-Hill.

Páginas: 212, 217, 223.

212.

Conducción de calor en régimen transitorio. Análisis de sistemas concentrados.

Se define la longitud característica como:

$$L_C = \frac{V}{A_S}$$

Y el número de Biot como:

$$Bi = \frac{hL_C}{k}$$

También se puede expresar como:

$$Bi = \frac{h}{k/L_C}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{convección en la superficie del cuerpo}}{\textit{conducción}\text{ dentro del cuerpo}}$$

O bien,

$$Bi = \frac{L_C/kh}{1/h} = \frac{\text{Resistencia a la conducción dentro del cuerpo}}{\text{Resistencia a la convección en la superficie del cuerpo}}$$

Cuando un cuerpo sólido se calienta por el fluido más caliente que lo rodea, en principio el calor es llevado por convección hacia el cuerpo, y a continuación, conducido hacia el interior del cuerpo. El número de Biot es la razón de la resistencia interna de un cuerpo a la conducción de calor con respecto a su resistencia externa a la convección de calor. Por lo tanto, un numero pequeño de Biot representa poca resistencia a la conducción de calor y, por tanto, gradientes pequeños de temperatura dentro del cuerpo.

217.

Conducción de calor en régimen transitorio. Conducción de calor en régimen transitorio en paredes planas grandes, cilindros largos y esferas con efectos espaciales.

Definimos el número de Biot como un coeficiente adimensional de transferencia de calor:

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L es la longitud característica, k la conductividad del material.

223.

Conducción de calor en régimen transitorio. Conducción de calor en régimen transitorio en paredes planas grandes, cilindros largos y esferas con efectos espaciales.

Al principio se discutió el significado físico del número de Biot y se indicó que es una medida de las magnitudes relativas de los mecanismos de transferencia de calor: convección en la superficie y conducción a través del sólido

Un valor pequeño de Bi indica que la resistencia interior del cuerpo a la conducción de calor es pequeña en relación con la resistencia a la convección entre la superficie y el fluido.

3.2. Número De Boussinesq.

Joseph Boussinesq. Nació en Saint-André-de-Sangonis en 1842, y murió en París en 1929. Matemático francés también cursó los estudios de física y fue profesor de distintas disciplinas en París. Miembro de la Academia de Ciencias, sus trabajos abarcaron campos muy diversos de la física, las matemáticas y la filosofía. Son especialmente interesantes sus estudios estadísticos sobre hidrodinámica. Destacan sus obras Curso de análisis infinitesimal y Teoría analítica del calor.

Año: 1993.
Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Página: 408.

408.

Convección libre en la capa límite.

Le Fevre puntualiza que el número de Boussinesq , $Gr_x \Pr^2$, es la adecuada dependencia proporcional para grandes Gr_x o pequeños $\Pr$, donde se elimina los efectos de la viscosidad. Esto se postula debido a los numerosos experimentos donde se refleja que el número de Rayleigh local, no depende del número de Prandtl ($Ra_x = Gr_x \Pr$).

Año: 1995.
Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 165.

165.

Convección externa natural. Análisis de escala.
Fluidos con Pr bajo.

Nos damos cuenta de la emergencia de un nuevo grupo adimensional, Ra_H Pr, el cual juega el mismo papel para fluidos con Pr bajo como el Ra_H para fluidos con Pr alto. Este número adimensional recibe el nombre de número de Boussinesq.

$$Bo_H = Ra_H \Pr = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\alpha^2}$$

Ra_H es el número de Rayleigh basado en la longitud característica, la altura H, Pr es el número de Prandtl, g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión volumétrica térmica, ΔT diferencia de temperatura, α coeficiente de disipación térmica.

Año: 1995.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 292, 513.

292.

Fundamentos de la convección Análisis dimensional.
Convección natural en una superficie plana vertical.

La placa está a temperatura T_s y el fluido a temperatura T_e.
Definimos el número de Boussinesq como:

$$Bo = GrPr^2 = \frac{\beta\Delta T g L^3}{\alpha^2}.$$

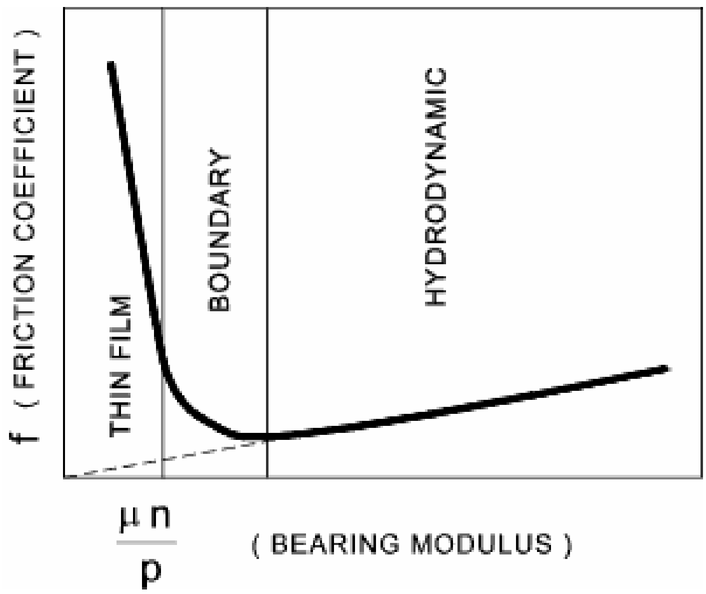
Gr es el número de Grashof, Pr es el número de Prandtl, β el coeficiente de expansión volumétrica térmica, ΔT diferencia de temperatura, α coeficiente de disipación térmica, g la constante gravitacional, L es la longitud característica.

513.
Análisis de la convección. Análisis de escala.
Convección natural capa límite laminar en una pared vertical.
El siguiente grupo adimensional es el número de Boussinesq:

$$Bo = \frac{\beta\left(T_s - T_e\right) g L^3}{\alpha^2}$$

Ts: temperatura de en la superficie de la placa.
Te: temperatura exterior
β el coeficiente de expansión volumétrica térmica, α coeficiente de disipación térmica, g es la constante gravitacional, L la longitud característica.

3.3. Coeficiente De Fricción



Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 257.

257.

Transmisión de calor en convección forzada y régimen turbulento.

Se define el coeficiente de rozamiento de Fanning como:

$f = \dfrac{2\tau}{\rho u_\infty^2}$ y el de Blasius $\zeta = \dfrac{8\tau}{\rho u_\infty^2}$

τ es la tensión tangencial en la pared, ρ la densidad del fluido, u_∞ la velocidad de la corriente libre.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 247.

247.

Transmisión de calor en una placa plana con flujo forzado longitudinal.
Transmisión de calor en una capa límite turbulenta.

Las tensiones tangenciales que actúan en la pared se caracterizan en hidrodinámica mediante un coeficiente de fricción C_f, que por definición es:

$$C_f = \frac{2s_w}{\rho w_0^2}$$

s_w: es la tensión tangencial en la pared, ρ es la densidad del fluido, w_0 la velocidad característica.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 292, 340.

292.

Capa límite laminar y turbulenta. Flujo incomprensible en una superficie plana.

Se define el coeficiente de fricción como:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2 / 2}$$

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

340.

Convección forzada. Flujo turbulento en una tubería.

Se define el factor de fricción de Darcy-Weisbach:

$$f = \frac{\text{Pérdida de presión en la cabeza}}{\dfrac{\text{longitud tubería}}{D}\dfrac{u_{av}^2}{2g}} = \frac{\Delta P}{\dfrac{L}{D}\rho\dfrac{u_{av}^2}{2}}$$

$$\tau_w = \frac{\text{fuerza de fricción}}{\text{Área superficie tubería}} = \frac{\Delta P\left[(\pi/4)D^2\right]}{\pi DL} = \frac{\Delta PD}{4L}$$

$$f = \frac{\tau_w}{\rho u_{av}^2/8} = 4Cf$$

ΔP es el gradiente de presión, L es la longitud de la tubería, u_{av} es la velocidad media en el interior de la tubería, D es el diámetro de la tubería, τ_w es la tensión e cortadura en la pared, C_f es el coeficiente de fricción.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 187-188, correlaciones 188, 189.

187-189

Transferencia de calor por convección.

Flujo externo sobre cuerpos romos.

Suponemos el caso de flujo aerodinámico sobre un cilindro orientado normal a u_∞, velocidad del fluido, en la corriente libre.

Se definen los siguientes grupos adimensionales:

$$C_f \equiv \frac{F_d / A_{contacto}}{\rho u_\infty^2/2}$$

$$C_D \equiv \frac{F_d / A_{proy}}{\rho u_\infty^2/2}$$

Donde C_f es el coeficiente de arrastre friccional o el coeficiente de fricción superficial (adimensionales)

C_D es el coeficiente de arrastre (adimensional).

F_d es la fuerza de arrastre.

$A_{contacto}$ es el área de contacto entre la superficie y el fluido.

A_{proy} es el área proyectada del cuerpo romo normal a la dirección del flujo,

$\rho u_\infty^2/2$ es la energía cinética del fluido a la velocidad de la corriente libre u_∞.

Se puede determinar analíticamente el coeficiente de fricción superficial si se conoce el perfil de la velocidad, de acuerdo con la expresión.

$$C_f \equiv \frac{F_d / A_{contacto}}{\rho u_\infty^2/2} = \frac{1}{\rho u_\infty^2/2}\left(\mu \left.\frac{du_\infty}{dy}\right|_{y=0}\right)$$

Donde $\left.\dfrac{du_\infty}{dy}\right|_{y=0}$ es el gradiente de la velocidad en la interfase fluido-sólido.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombres:

Coeficiente de fricción

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

Interpretación:

Relación de La tensión de cortadura en la pared y la presión dinámica del fluido en el exterior de la capa límite.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 145, 222.

145.

Flujos paralelos cercanos (capa límite).

Se define el coeficiente de fricción superficial local como:

$$c_x = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

τ_w: tensión de cortadura en la pared.

ρ: densidad del fluido.

U_∞: velocidad de la corriente libre.

222.

Transformación de semejanza. Solución de semejanza para la capa límite.

Se define el coeficiente de fricción superficial local como:

$$c_x = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

τ_w: tensión de cortadura en la pared.

ρ: densidad del fluido.

U_∞: velocidad de la corriente libre.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley.
Páginas: 274, 307, 333, 292.

274.

Principios de convección. Número de Stanton y factor de fricción.

Se define el coeficiente de fricción como:

$C_f = 2\tau_w / \left(\rho U^2\right)$

Es la tensión cortante en la pared adimensional.

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido y U es la velocidad del fluido.

307.

Convección forzada. Flujo laminar completamente desarrollado en tubería.

El coeficiente de fricción es:

$C_f = 2\tau_w / \left(\rho U^2\right)$

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido y U es la velocidad del fluido.

Para forma de flujo de Poiseuille completamente desarrollado, perfil parabólico, tenemos, que:

$$C_f = \frac{16}{\mathrm{Re}_D}$$

333.

Convección forzada. Flujo turbulento en conductos.

El coeficiente de fricción es:

$C_f = 2\tau_w / \left(\rho U^2\right)$

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido y U es la velocidad del fluido.

292.

Convección forzada. Flujo laminar que pasa una placa plana.

Se define el factor de fricción, o el coeficiente de fricción superficial e la forma:

$C_f = 2\tau_w / \left(\rho U_\infty{}^2\right)$

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, U_∞ es la velocidad de la corriente libre.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.

Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.

Editorial: Cambridge University Press.

Páginas: 170, 191, 198, 221, 230, 427.

170.

Flujo turbulento.

Distribución de velocidad para flujo turbulento en una tubería o canal.

Se define el coeficiente superficial de fricción como:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}_m^2}$$

Donde τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, $\bar{u}_m$ es la velocidad media (para flujos en tuberías la velocidad sueles expresarse en términos de velocidad media)

191.

Capas límite. Solución exacta para capa límite laminar.

Se define el coeficiente superficial de fricción como:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_1^2}$$

Donde τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, u_1 es la velocidad de la corriente libre cuando y tiende a infinito.

198

Capas límite. Solución aproximada para capa límite laminar, utilizando la ecuación de momento.

Se define el coeficiente superficial de fricción como:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_1^2}$$

Donde τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, u_1 es la velocidad de la corriente libre cuando y tiende a infinito.

221.

Flujo en tuberías y conductos. Flujo completamente desarrollado interno en una tubería o conducto.

El coeficiente de fricción superficial para flujo completamente desarrollado en una tubería larga se define por:

Se define el coeficiente superficial de fricción como:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho \bar{u}_m^2}$$

Donde τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, $\bar{u}_m$ es la velocidad media (para flujos en tuberías la velocidad sueles expresarse en términos de velocidad media)

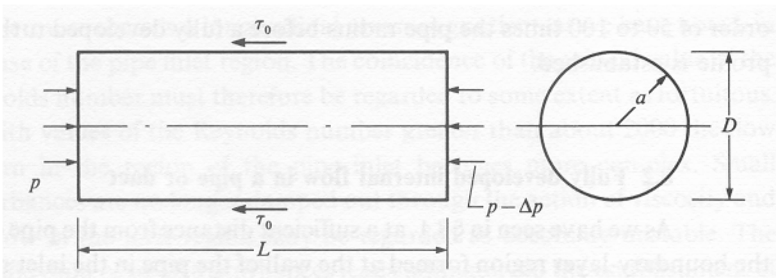
La definición del coeficiente de fricción para flujo en tuberías se difiere de la definición del coeficiente de fricción par flujo en capa límite.

En tuberías se utiliza la velocidad media, ya que es más conveniente utilizarla según la definición de coeficiente de fricción, mientras que en capa límite, se utiliza la velocidad de la corriente libre no afectada.

Hay una relación muy simple entre el coeficiente de fricción y la caída de presión en una tubería de gran longitud L, con flujo completamente desarrollado con condiciones constantes.

Si aplicamos condiciones de equilibrio al esquema de la figura:

Figura 1 coeficiente de fricción: Balance de fuerzas para flujo uniforme en el interior de una tubería.



$\pi a^2 \Delta p = 2\pi a L \tau_0$

a es el radio interno.

Sustituyendo τ_0 por Δp se obtiene

$\Delta p = 2c_f \frac{L}{D} \rho u_m^2$, conocida como ecuación de Fanning.

Para el caso de flujo laminar completamente desarrollado en el interior de una tubería:

$$c_f = \frac{16}{\mathrm{Re}}$$

230.

Flujo en tuberías y conductos. El coeficiente de fricción para flujo turbulento en tuberías.

Se define el coeficiente de fricción como;

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho \overline{u}_m^2}$$

Donde τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, $\overline{u}_m$ es la velocidad media (para flujos en tuberías la velocidad suele expresarse en términos de velocidad media).

Y también puede expresarse de la forma:

$$c_f = 2\left(\frac{u_\tau}{\overline{u}_m}\right)^2$$

Donde $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

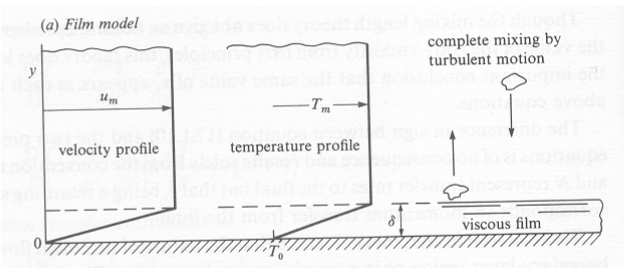
427.

Transferencia de calor y masa en flujos turbulentos. El modelo de película.

En el modelo de película se postula la existencia de una región laminar de espesor δ adyacente a la pared.

Consideramos δ <<D (diámetro de la tubería), así los valores de velocidad, temperatura y concentración son muy próximos a sus valores medios.

Figura 2 coeficiente de fricción: modelo de película.



Tenemos en la parte laminar que:

La transferencia de masa por unidad de área q_0 y N_0

$$q_0 = k\frac{(T_0 - T_m)}{\delta}$$

$N_0 = \mathscr{D}\left(\frac{C_0 - C_m}{\delta}\right)$; C es la concentración, $\mathscr{D}$ la difusividad.

$k_L = \frac{\mathscr{D}}{\delta}$ $\quad h = \frac{k}{\delta}$. Eliminando δ y multiplicando por D.

$h = \frac{q_0}{(T_0 - T_m)}$ $\quad \tau_0 = \mu \frac{u_m}{\delta}$ --> $\frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{hD}{k}$

$$\frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1}{2} c_f \operatorname{Re}$$

En el modelo de capa podemos decir que:

$$Nu = Sh = \frac{1}{2} c_f \operatorname{Re}$$

Si reconsideramos la suposición de que el espesor de la capa límite laminar era mucho menor que el diámetro de la tubería tenemos:

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{k}{\delta}\frac{D}{k} = \frac{D}{\delta} = \frac{1}{2} c_f \operatorname{Re}$$

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 376, 520 (correlaciones), 503, 465.

376.

Transferencia de calor por convección: Introducción. Abordamiento del análisis de la transferencia de calor por convección.

Coeficiente de fricción y transferencia de calor.

Se define el coeficiente de fricción de Fanning local f_x como:

$$\tau_s = \rho U_F^2 \frac{f_x}{2}$$

U_F es la velocidad de referencia, ρ la densidad del fluido, f_x coeficiente de fricción de Fanning, τ_s tensión de cortadura en la pared.

$$\overline{f} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} f_x dA_s$$

A_s: área de la superficie.

f_x y $\overline{f}$ son coeficientes adimensionales.

503.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico-convección forzada. Flujo externo. Flujo sobre placas planas y cilindros.

Coeficiente de fricción y transferencia de calor.

$$\tau_s = \rho U_\infty^2 \frac{f_x}{2}$$

ρ la densidad del fluido, f_x coeficiente de fricción de Fanning, τ_s tensión de cortadura en la pared, U_∞ es la velocidad de la corriente libre.

465.
Transferencia de calor por convección: Análisis práctico-convección forzada. Flujo interno.
Correlaciones para convección.
El coeficiente de fricción es función de:
$f = \mathrm{fn}\left(\mathrm{Re}, x/D_h, geometría\right)$
Re es el número de Reynolds, x/D_h es una longitud adimensional (cociente entre la coordenada longitudinal en un cilindro x y el diámetro hidráulico)

Año: 1993.
Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 68, 78,
68.
Ecuaciones integrales de la capa límite.
Se define el coeficiente de fricción local como:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}$$

τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, ρ_∞ y u_∞ es la densidad y la velocidad el fluido en la zona no perturbada.
78.
Flujo laminar completamente desarrollado en el interior de tuberías circulares.
El coeficiente de fricción se puede definir en este caso como:

$$\tau_0 = c_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Pero en este caso; $c_f = \dfrac{4V\mu / r_0}{\rho V^2/2} = \dfrac{16}{2r_0\rho V/\mu}$

Donde $\mathrm{Re} = \dfrac{2r_0\rho V}{\mu} = \dfrac{DG}{\mu}$

Por lo tanto $c_f = \dfrac{16}{\mathrm{Re}}$

Año: 1993.
Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 390-391, 286-288, 310-314.
390-391.
Convección forzada para flujo sobre cuerpos.
Flujo a través de un haz de tuberías.
Se define el factor de fricción en este caso como:

$$\Delta P = f\,\frac{NG_{máx}^2}{2\rho}Z$$

ΔP es la caída de presión, $G_{máx}$ es la velocidad másica de flujo, N es el número de filas en la dirección del flujo, Z es el factor de corrección por efectos de la configuración del haz, ρ es la densidad del fluido.

286-288.

Convección forzada para flujos en el interior de una tubería.

Flujo laminar completamente desarrollado hidrodinámica y térmicamente.

Se define el factor de fricción en el interior de un tubo como:

$$f = -\frac{8\mu}{\rho u_m^2}\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R}$$

R es el radio de la tubería, μ es la viscosidad del fluido, u es la distribución de la velocidad en función del radio en la tubería, u_m es la velocidad media, ρ es la densidad del fluido.

310-314.

Convección forzada para flujos en el interior de una tubería.

Flujo turbulento en el interior de conductos.

Factor de fricción y caída de presión.

Se define el factor de fricción como:

$$\Delta p = f\frac{L}{D}\frac{\rho u_m^2}{2}$$

Si realizamos un balance de fuerzas en la tubería.

$$\pi D L \tau_0 = \Delta p \frac{\pi D^2}{4}$$

τ_0 es la tensión de cortadura en la pared, D es el diámetro de la tubería, L la longitud de la tubería, u_m es la velocidad media en la tubería.

Se puede expresar el factor de fricción como:

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho u_m^2}.$$

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.

Autores: Adrian Bejan.

Editorial: John Wiley and Sons.

Coeficiente de fricción: 438.

438.

El coeficiente de fricción es:

$$\mu_f = \frac{F_t}{F_n}U\left(\frac{\mu}{F_n}\right)^{3/4}\left(\frac{\rho h_{sf} L}{k\Delta T}\right)^{1/4}$$

El cual muestra que el coeficiente de fricción decrementa como la fuerza normal incrementa.

F_t: fuerza tangencial experimentada por el bloque fundido.

F_n: fuerza normal experimentada por el bloque fundido.

ρ es la densidad del fluido, L es la longitud característica, k la conductividad térmica, ΔT la diferencia de temperatura, μ la viscosidad, U la velocidad característica.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 279.

279.

Flujo turbulento.

Se define el coeficiente de fricción como:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_{CL}^2}$$

τ_w es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, U_{CL} es la velocidad en el centro de la tubería.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 284, 425, 301.

284.

Fundamentos de convección.

La transferencia de momento en la pared se hace adimensional con el coeficiente superficial de fricción.

$$C_f = \frac{\tau_s}{(1/2)\rho V^2}$$

Donde τ_s es la tensión de cortadura en la superficie, ρ es la densidad del fluido y V es la velocidad del fluido.

Para flujos en tuberías, el gradiente de presión se hace adimensional con el factor de fricción *f* para flujos incompresibles.

$$f = \frac{\Delta P / L}{(1/2)\rho V^2 / D}$$

ΔP es la caída de presión en la tubería de longitud L y diámetro D. Este factor de fricción se llama factor de fricción de Darcy.

Algunos textos dicen que:

$$f_{Darcy} = 4 f_{Fanning}$$

425.

Flujo laminar en tuberías.

Se define el factor de fricción y el coeficiente superficial de fricción como:

$$f = \frac{(-dp/dx)(2R)}{(1/2)\rho u_b^2}$$

dp/dx es el gradiente de presión, R es el radio del cilindro, ρ es la densidad del fluido,

$$u_b = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u2\pi r dr .$$

Se define el coeficiente de fricción:

$$C_f = \frac{\tau_s}{(1/2)\rho u_b^{\ 2}} = \frac{f}{4}$$

τ_s es la tensión de cortadura, ρ es la densidad del fluido, f es el factor de fricción.

301.

Convección forzada.

Misma definición 425.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 290, 313, 320, 424, 351, 353.

290.

Capas límites de convección.

Se define el coeficiente de fricción total como:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho u_\infty^2 / 2}$$

τ_s es la tensión de cortadura, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

313.

Convección en la capa límite.

Se define el coeficiente de fricción como:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho V^2 / 2}$$

τ_s es la tensión de cortadura en la superficie, ρ es la densidad el fluido, V es la velocidad del fluido.

320.

Tablas grupos adimensionales.

Grupo: coeficiente de fricción. $\left(C_f\right)$.

Definición: $\frac{\tau_s}{\rho V^2 / 2}$

Interpretación: esfuerzo cortante superficial adimensional.

Grupo: factor de fricción. $\left(f\right)$.

Definición: $\frac{\Delta P}{\left(L/D\right)\left(\rho u_m^2 / 2\right)}$

Interpretación: caída de presión adimensional para flujo interno.

424.

Flujo interno. Flujo laminar completamente desarrollado.

Se define el factor de fricción de Moody o de Darcy como:

$$f = -\frac{\left(dp/dx\right)D}{\rho u_m^2 D}$$

dp/dx es el gradiente de presión longitudinal, ρ es la densidad del fluido, u_m es la velocidad media, D el diámetro de la tubería.
Se define el coeficiente de fricción, algunas veces factor de fricción de Fanning:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho {u_m}^2/2}; \qquad C_f = \frac{f}{4}$$

τ_s es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, u_m es la velocidad media del fluido en el interior de la tubería.

351.

Flujo paralelo en una placa plana. Flujo laminar.

Se define el coeficiente de fricción local en una placa plana con un flujo paralelo laminar:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_{s,x}}{\rho u_\infty^2/2}$$

$\tau_{s,x}$ es la tensión de cortadura local, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

353.

Flujo paralelo en una placa plana. Flujo laminar.

Se define el coeficiente promedio de fricción como:

$$\overline{C_{f,x}} = \frac{\overline{\tau_{s,x}}}{\rho u_\infty^2/2}$$

$\overline{\tau_{s,x}} = \frac{1}{x}\int_0^x \tau_{s,x}dx$, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 167, 172.

167.

Los principios de la convección. Relación entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor.

Se busca una expresión mediante la que se pueda relacionar directamente la resistencia de fricción con la transferencia de calor.
El esfuerzo cortante en la pared puede expresarse en función de un coeficiente de fricción C_f

$$\tau_p = C_f \left.\frac{\rho {u^2}_\infty}{2}\right]_p$$

ρ es la densidad del fluido y u_∞ la velocidad de la corriente libre.
En la capa límite podemos poner:

$$\frac{C_{f\,x}}{2} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

También se permite la aproximación:

$$St_x \Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$$

172.

Los principios de la convección.

Transferencia de calor en la capa límite turbulenta.

Schlichting ha llevado a cabo una revisión sobre medidas experimentales de coeficientes de fricción de flujo turbulento en placas planas. Se representan aquí los resultados de esa revisión, de modo que se pueden emplear en el cálculo de la transferencia de calor turbulenta con la analogía entre transferencia de calor y la fricción en el fluido. El coeficiente local de fricción superficial está dado por:

$$C_{fx} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-1/5}$$

Para números de Reynolds entre $5x10^5$ y 10^7. Para número de Reynolds más altos, desde 10^7 hasta 10^9, se recomienda la fórmula de Schultz-Grunow

$$C_{fx} = 0.370(\log \mathrm{Re}_x)^{-2.584}$$

El coeficiente de fricción medio de una placa plana, con una capa límite laminar hasta Re_{crit} y turbulenta a partir de ahí, se puede calcular con

$$\overline{C_f} = \frac{0.074}{\mathrm{Re}^{\;1/5}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}_L<10^9$$

Donde la constante A depende del Reynolds crítico .

Se puede obtener una fórmula algo más simple para número de Reynolds más bajos:

$$\overline{C_f} = \frac{0.074}{\mathrm{Re}^{\;1/5}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}<10^7$$

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.

Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.

Editorial: McGraw-Hill

Páginas: 1.25, 5.3, 17.68.

1.25.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: coeficiente de fricción, coeficiente de fricción superficial.

Símbolo: c_f

Definición: $\dfrac{\tau_w}{\rho V^2/2}\dfrac{r_h}{L}$

Significado físico: Tensión de cortadura superficial adimensional.

Principal área de utilización: Resistencia en flujos.

5.3.

Convección forzada en el interior de conductos.

Parámetros del flujo de fluidos.

Se define el factor de fricción tambien llamado otras veces como factor de fricción de Fanning como:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho u_m{}^2 / 2}$$

Donde τ_w es la tensión de cortadura superficial, ρ es la densidad del fluido y u_m es la velocidad media.

17.68.

Tabla de grupos adimensionales para flujo interno en conductos con transferencia de calor por convección forzada y fluidos con fricción usados en el diseño de intercambiadores de calor.

Grupo adimensional: factor de fricción de Fanning.

Definición: $f = \dfrac{\tau_w}{\left(\rho V^2 / 2g_c\right)}$

Significado físico: La relación entre la tensión de cortadura superficial y la energía cinética del flujo por unidad de volumen.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 301, 356.

Convección de calor en la capa límite.

Se define el coeficiente de fricción como:

$$c_\mathrm{f} = \frac{\tau_0}{\varrho w_\mathrm{m}^2/2}$$

τ_0 es la tensión de cortadura, ρ es la densidad del fluido, w_m es la velocidad media del fluido.

356.

Misma definición página 301.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 229 (factor de fricción)

229.

Aplicaciones del análisis dimensional.

El factor de fricción (desafortunadamente mencionado también como f) es 4 veces el factor de fricción de Fanning. Este factor de fricción se llama factor de fricción de de Darcy o Blasius.

Los dos factores de fricción son diferentes y ambos se designan por *f*.

$f_{Darcy} = f_{Blasius} = 4 f_{Fanning}$

El coeficiente de resistencia es una función adimensional del número de Reynolds.

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 244-245, 366.

244-245.

Análisis de la transferencia de calor por convección. Coeficiente de fricción.

Se define el coeficiente de fricción local C_f como:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

τ_s es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, U_∞ es la velocidad de la corriente libre.

Si sustituimos en la ecuación $\tau_s = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$

$C_{fx} = \frac{2}{\mathrm{Re}_L} \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$ podemos expresarlo de la forma puesto que $\frac{\partial u^*}{\partial y^*}$ en la superficie solo depende de x^*, Re_L y dp^*/dx^* pero dp^*/dx^* queda totalmente determinado por la forma geométrica de un cuerpo de esta forma:

$$C_{fx} = \frac{2}{\mathrm{Re}_L} f_3(x^*, \mathrm{Re}_L)$$

366.

Convección forzada en el interior de tubos y ductos.

Análisis de la convección forzada laminar en un tubo largo.

Definimos el coeficiente de fricción como:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho U^2 / 2 g_c}$$

τ_s: esfuerzo cortante en la pared, ρ es la densidad del fluido, U es la velocidad característica, g_c factor geométrico.

C_f a menudo se conoce como coeficiente de fricción de Fanning, así se puede expresar

$C_f = f/4$

Donde *f* es el factor de fricción de Darcy.

Año: 2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Página: 9, 47.

9.

Relaciones entre transferencia de calor, momento y masa.

Se define el coeficiente de fricción superficial local como:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2}$$

Donde τ_w es la tensión de cortadura superficial, ρ es la densidad del fluido y u_e es la velocidad de la corriente libre.

47.

Ecuaciones de la capa límite. Ecuaciones integrales.

Se define el coeficiente de fricción local como:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2}$$

Donde τ_w es la tensión de cortadura superficial, ρ es la densidad del fluido y u_e es la velocidad de la corriente libre.

También se puede definir:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2}$$

ρ_e es la densidad de la corriente libre.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A..
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 358, 372, 373.

358.

Fundamentos de la convección.

Formas funcionales de los coeficientes de fricción y de convección.

Por al definición de coeficiente de fricción local:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{\mu V/L}{\rho V^2/2} f_2(x^*, \mathrm{Re}_L) = \frac{2}{\mathrm{Re}_L} f_2(x^*, \mathrm{Re}_L) = f_3(x^*, \mathrm{Re}_L)$$

Por tanto, se concluye que el coeficiente de fricción para una configuración geométrica dada se puede expresar en términos del número de Reynolds Re, y solo de la variable espacial adimensional x* ($x^* = \frac{x}{L_C}$)

Los coeficientes promedio de fricción y de transferencia de calor se determinan por la integración de $C_{f,x}$ y Nu_x sobre la superficie del cuerpo dado, con respecto a x*, desde 0 hasta 1. La integración eliminará la dependencia con respecto a x* y el coeficiente promedio de fricción se puede expresar como:

$$C_f = f_4(\mathrm{Re}_L)$$

372-373.
Convección externa forzada. Flujo paralelo sobre placas planas.
Coeficiente de fricción.

Coeficiente de fricción local en la ubicación x para el flujo laminar sobre una placa plana, son:

Laminar : $C_{f,x} = \dfrac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{\ 1/2}}$ $\mathrm{Re}_x<5.10^5$

Turbulento : $C_{f,x} = \dfrac{0.0592}{\mathrm{Re}_x^{\ 1/5}}$ $5.10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7$

El coeficiente de fricción promedio sobre la placa completa se determina mediante integración.

Laminar: $C_f = \dfrac{1.328}{\mathrm{Re}_L^{\ 1/2}}$ $\mathrm{Re}_x<5.10^5$

Turbulento: $C_f = \dfrac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{\ 1/5}}$ $5.10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7$

La primera relación da el coeficiente de fricción promedio para la placa completa cuando el flujo es laminar sobre toda la placa. La segunda lo da para la placa completa sólo cuando el flujo es turbulento sobre toda la placa, o cuando la región de flujo laminar es demasiado pequeña en relación en relación con la región de flujo turbulento.
En algunos casos una placa plana es suficientemente larga como para que el flujo se vuelva turbulento, pero no lo suficiente como para descartar la región del flujo laminar. En esos casos, el coeficiente promedio sobre la placa completa se determina mediante integración sobre dos partes, la región laminar y la región turbulenta.

$$C_f = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{cr}} C_{f,xla\min ar}\,dx + \int_{x_{cr}}^{L} C_{f,xturbulento} \right)$$

Integrando y tomando número de Reynolds crítico $\mathrm{Re}_{cr}=5.10^5$

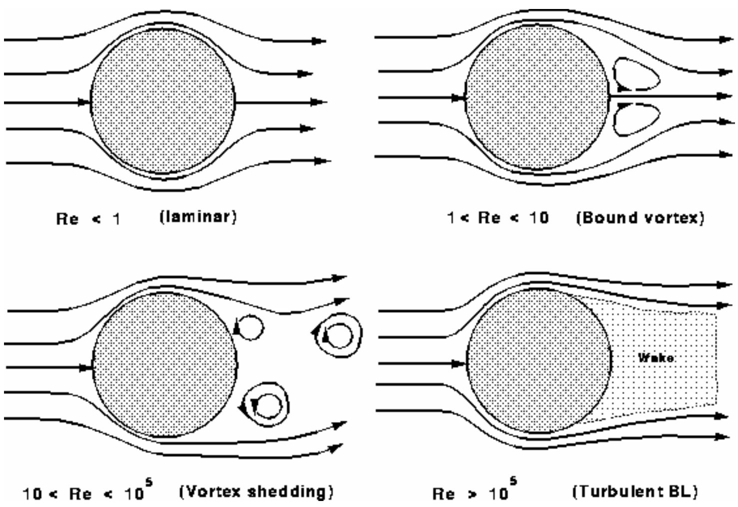
$$C_f = \frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{\ 1/5}} - \frac{1742}{\mathrm{Re}_L} \quad 17421.742 \quad 5.10^5 \le \mathrm{Re}_x \le 10^7$$

Si la aspereza superficial causa que el coeficiente de fricción se incremente varias veces, hasta el punto en que, en el régimen por completo turbulento, ese coeficiente es sólo función de la aspereza superficial e independientemente del número de Reynolds.
En este régimen, Schlichting da un ajuste de la curva obtenida a partir de datos experimentales para el coeficiente de fricción promedio como:

Superficie áspera, turbulento: $C_f = \left(1.89 - 1.62\log\dfrac{\varepsilon}{L}\right)^{-2.5}$

Donde ε es la aspereza superficial y L es la longitud de la placa en la dirección del flujo. A falta de una mejor relación, se puede usar la anterior para el flujo turbulento sobre superficies ásperas para Re>10^6, en especial cuando $\frac{\varepsilon}{L}$>10^4.

3.4. Coeficiente De Resistencia



Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 145.

145.

Flujos paralelos cercanos (capa límite). Capa límite de momento.

Se define el coeficiente de resistencia como:

$$C_D = \frac{F_D}{A\rho U_\infty^2 / 2}$$

ρ : densidad del fluido.

U_∞ : velocidad de la corriente libre.

F_D: fuerza de resistencia.

A: área de la superficie húmeda (perpendicular al flujo para cuerpos abruptos)

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 344-345, 294, 351.

344-345.

Convección forzada. Convección forzada en flujos separados.
Flujo cruzado que pasa un cilindro circular.

Se define el coeficiente de resistencia como:

$$C_D = \frac{\text{Resistencia(Drag)}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 DL} = f\left(\mathrm{Re}_D\right)$$

Resistencia (Drag) es la fuerza de resistencia, ρ es la densidad del fluido, D el diámetro del tubo, L la longitud del tubo, U_∞ la velocidad de la corriente libre, Re_D es el número de Reynolds en función del diámetro.

294.

Convección forzada. Resistencia media y transferencia de calor.

Se define el coeficiente de resistencia medio como:

$$\overline{c_D} = \frac{Drag}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bL} = \frac{1}{L}\int_0^L c_D dx$$

Resistencia (Drag) es la fuerza de resistencia, ρ es la densidad del fluido, U_∞ la velocidad de la corriente libre, L la longitud de la placa plana, b es el ancho de la placa.

351.

Convección forzada. Flujo que pasa una esfera.

Se define el coeficiente de resistencia como:

$$C_D = \frac{Drag}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) D^4}$$

Drag es la fuerza de resistencia, ρ es la densidad del fluido, U_∞ la velocidad de la corriente libre, D es el diámetro de la esfera.

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere.
Página: 51.

51.
Flujo inducidos térmicamente en exterior verticalmente.
Soluciones y transporte.

Se define el coeficiente de resistencia como:

$$C_D = \frac{\tau(x)}{\rho u^2 / 2}$$

τ es la tensión de cortadura en la pared, ρ es la densidad del fluido, u la velocidad característica.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 113, 144.

113.
Movimiento de fluidos no viscosos.
Teoría bidimensional aerodinámica.

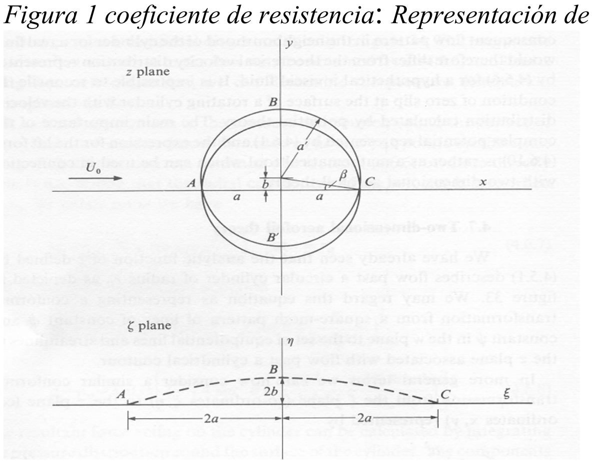
Se define el coeficiente de resistencia como:

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 C}$$

Donde D es la fuerza total de resistencia por unidad de espacio de la sección, y c=4a .

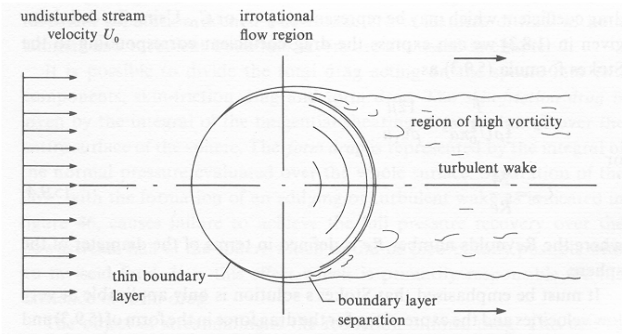
Estamos estudiando el caso de un fluido que circula con velocidad U_0 que choca con un cilindro, como se observa en la figura y ρ es la densidad el fluido.

Figura 1 coeficiente de resistencia: *Representación de las condiciones del fluido y el cilindro.*



144.
Ecuaciones de movimiento para fluidos viscosos.
Fluido que circula por una esfera.
Según Stokes, la fuerza de resistencia en este caso es $F = 6\pi\mu a U_0$, considerando número de Reynolds bajo.

Figura 2 coeficiente de resistencia: situación y condiciones del fluido y la esfera.



Donde μ es la viscosidad, a el radio de la esfera, U_0 velocidad del fluido en la corriente libre, aguas arriba.
En este caso el coeficiente de fricción es

$$c_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 \pi a^2} = \frac{24}{\text{Re}}$$

Año: 1991.

Libro: Dimensional Análisis and Scale-up in chemical Engineering. Análisis dimensional y escalonamiento en ingeniería química.

Autores: Zlokarnik M.

Editorial: Springer-Verlag.

Página: 33.

33.
Descripción de los procesos físicos con un completo conjunto de números adimensionales.
Se define el coeficiente de "fricción" o "coeficiente de resistencia" a la siguiente expresión:

$$\lambda \equiv \frac{\Delta p}{(\rho/2)\text{v}^2}\frac{d}{l}$$

Δp es la diferencia de presión, ρ la densidad del fluido, v la velocidad , d el diámetro de la tubería, y l la longitud de la tubería.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 512.

512.

Transferencia de calor por convección: análisis práctico-convección forzada.

Flujo a través de cilindros y esferas.

Coeficiente de resistencia y transferencia de calor.

Se define el coeficiente de resistencia como:

$$F_D = \frac{\rho U_\infty^2}{2} C_D A_N$$

ρ densidad del fluido, U_∞ velocidad de la corriente libre, C_D coeficiente de resistencia, A_N es el área de cuerpo normal a la dirección del flujo

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 229, 353, 373, 374, 382-383.

229.

Convección- conceptos y relaciones básicas. Flujo sobre un cuerpo.

Se define el coeficiente de resistencia local como:

$$c_x = \frac{2v}{u_\infty^2} \left. \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

v es la viscosidad cinemática, u_∞ es la velocidad de la corriente libre, $u(x,y)$ es el perfil de velocidad sobre un cuerpo curvado en la capa límite, x e y coordenadas curvilíneas.

353.

Convección forzada para flujo sobre cuerpos.

Coeficiente de resistencia para flujo sobre una placa plana.

Capa límite laminar.

Se define el coeficiente resistencia como:

$$c_x = \frac{2v}{u_\infty^2} \left. \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

v es la viscosidad cinemática, u_∞ es la velocidad de la corriente libre, $u(x,y)$ es el perfil de velocidad sobre una placa plana en la capa límite, x e y son las coordenadas longitudinales transversales.

373-374.

Convección forzada para flujo sobre cuerpos. Flujo que atraviesa un cilindro.

Estudiamos el caso de un fluido que rodea un cilindro.

El coeficiente de fricción se define como:

$$\frac{F}{LD} = c_D \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

LD representa el área normal al flujo, c_D es el coeficiente de resistencia, F es la fuerza de resistencia sobre la longitud L del cilindro, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad del fluido en la corriente libre, aguas arriba.

382-383.

Convección forzada para flujo sobre cuerpos. Flujo que atraviesa una esfera.

Se define el coeficiente de resistencia medio como:

$$\frac{F}{A} = c_D \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

F es la fuerza total de resistencia debida al flujo que sobrepasa una esfera, A es el área frontal, ρ es la densidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.

Autores: Adrian Bejan.

Editorial: John Wiley and Sons.

Páginas: 324, 359.

324.

Flujo capa límite turbulenta. Flujo externo que cruza un único cilindro.

Definimos el coeficiente de resistencia : C_D como una manera adimensional de expresar la fuerza de resistencia

$$C_D = \frac{F_D / A}{\frac{1}{2}\rho U^2{}_\infty}$$

F_D: fuerza de resistencia.

A: es el área frontal de el cilindro A=LD, L es la longitud del cilindro.

ρ es la densidad del fluido, U_∞ la velocidad de la corriente libre.

359.

Flujo turbulento en conductos. Más modelos de turbulencia refinados.

Definimos la disipación turbulenta como:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{2/3}}{L}$$

ε: función de disipación turbulenta.

k: es la energía turbulenta

L: es la longitud característica.

C_D: es el coeficiente de resistencia.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 317, 319-20

317.

Fundamentos de convección y correlaciones. Convección forzada.
Obtenemos la fuerza de resistencia a partir del coeficiente d resistencia:

$$C_D = \frac{F}{(1/2)\rho V^2 A_f}$$

Donde A_f es el área del cilindro normal al fluido, D es el diámetro, L es la longitud, F es la fuerza de resistencia sobre el cilindro.

319-320.

Convección forzada.

Para el caso de un fluido sobre una esfera, con ley de Stokes válida:

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}_D} \qquad \mathrm{Re}_D < 0.5$$

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}_D}\left(1 + \frac{\mathrm{Re}_D^{2/3}}{6}\right) \qquad 2 < \mathrm{Re}_D < 500$$

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 368.

368.

Flujo externo alrededor de un cilindro.

Se define el coeficiente de arrastre adimensional como:

$$C_D = \frac{F_D}{A_f\left(\rho V^2/2\right)}$$

Donde A_f es el área del cilindro (área proyectada perpendicular a la velocidad de flujo libre). El coeficiente de arrastre es una función del número de Reynolds. F_D es la fuerza de resistencia, V la velocidad del fluido y ρ la densidad del fluido.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 205.

205.

Relaciones empíricas y prácticas en transferencia de calor por convección forzada.

Flujo alrededor de cilindros y esferas.

El coeficiente de resistencia para cuerpos romos se define como.

$$\text{Re}\,sistencia = F_D = C_D A \frac{\rho u_\infty{}^2}{2g_c}$$

Donde C_D es el coeficiente de resistencia y A el área del cuerpo expuesto a la corriente, que para un cilindro, es el producto del diámetro por la longitud.
ρ es la densidad del fluido, u_∞ la velocidad de la corriente libre, g_c es la constante gravitacional.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
Páginas: 371-374.

371 - 374.

Coeficiente de resistencia. Momento y transferencia en fluidos.

El coeficiente de resistencia se usa en flujos donde se produce transferencia de momento, tanto en flujos internos como en flujos externos.
El concepto es el mismo en ambos casos, pero para flujos internos se suele utiliza la velocidad media , mientras que en flujos externos se utiliza una velocidad lejos del sólido.
El coeficiente de resistencia se suele dividir en dos clases. Una es la fricción superficial, que es el término debido a la fuerza de resistencia causado por el momento transferido desde el fluido a la superficie del sólido.
Otra la denominamos Drag (arrastre, resistencia) y este término se debe a la fuerza resultante del gradiente de presión desde la parte delantera a la trasera del sólido.
En general el coeficiente de resistencia se define como:

$$F_{drag} = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A\,.$$

A es el área de la sección normal al flujo, o la superficie mojada.

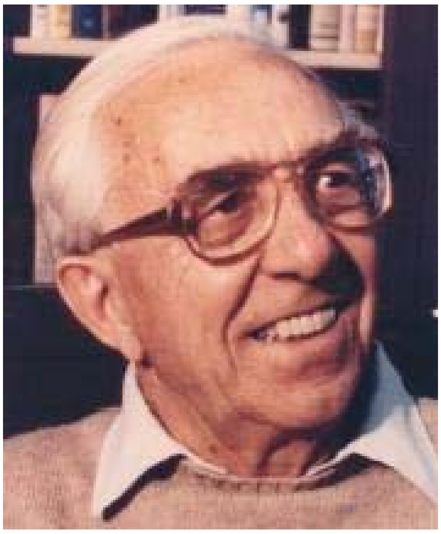
$$C_D = C'_D + C''_D$$

C'_D es el coeficiente de resistencia definido por la fuerza de resistencia debido a la fricción superficial, y C''_D es el correspondiente coeficiente para la forma de resistencia.
C''_D se determina experimentalmente.

$$F_{drag,\text{resistencia superficial.}} = \frac{1}{2} C'_D \,\rho V_\infty^2 A = \int_A \tau_0 dA$$

3.5. Número de Eckert.

Ernest R.G. Eckert. Pionero en las ciencias de transferencia de calor y termodinámica.
Eckert es internacionalmente conocido por su trabajo en reactores y sobre los estudios para incrementar la eficiencia de los cohetes.
Dio clases en la Universidad de Minnesota desde 1951 a 1973.
Nació en 1904 en Praga, donde estudió en el instituto alemán de tecnología y falleció en 2004. Durante la segunda guerra mundial desarrolló trabajos sobre turbinas de reactores en el Laboratorio de Praga. Emigró a los Estados Unidos tras la guerra y trabajó como consultor para las fuerzas aéreas de los Estados Unidos y para el Comité Nacional de Aeronaútica antes de ir a Minnesota.



Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 310.

310.

Capa límite turbulenta y laminar. Coeficiente de transferencia de calor para flujo laminar incomprensible sobre una superficie plana.

El número de Eckert se define como $Ec \equiv \frac{u^2}{c_p\left(T_W - T_\infty\right)}$ y es substancialmente menor que la unidad. Esto significa que la disipación viscosa, la cual habíamos descuidado, no juega ningún papel en el problema.

u es la velocidad del fluido, c_p es el calor específico a presión constante del fluido, $T_W - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la placa y la zona no perturbada.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Página: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre**:**

Número Eckert

$$Ec = \frac{U^2}{c_p \Delta T}$$

Formación:

$$2\frac{\left(\Delta T\right)_{ad}}{\Delta T}$$

Interpretación:

Relación entre el doble de incremento de calor adiabáticamente entre el infinito y un punto en reposo, y el incremento de temperatura de referencia.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 51

51.

Capítulo 2. Desarrollo de las ecuaciones gobernantes. Flujos viscosos.

Se define el número de Eckert como la siguiente relación:

$$Ec = \frac{V^2}{c_v \Delta T}$$

V: velocidad característica.

Este fluido cumple el caso $c_v = c_p$ calor específico a volumen constante y a presión constante, ΔT diferencia de temperatura.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505. Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Eckert (E)

Grupo: $E = \dfrac{u_\infty^2}{c_p\left(T_w - T_\infty\right)}$

Donde T_w es la temperatura de la placa, T_∞ es la temperatura de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.

Interpretación física: $\dfrac{\text{Energía cinética}}{\text{Energía térmica}}$

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley.
Páginas: 269, 358.

269.

Principios de convección. Ecuaciones de la capa límite.

Ejemplo: flujo laminar, se suponen constantes k y μ.

Se define el número de Eckert como:

$U_\infty^2 / c_p \Delta T$

U_∞ es la velocidad de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido, ΔT es la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido en la corriente libre (diferencia de temperatura a través de la capa).

358.

Convección forzada. Convección forzada y alta velocidad.

Se define el número de Eckert como:

$U_\infty^2 / c_p \Delta T$

U_∞ es la velocidad de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido, ΔT es la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido en la corriente libre (diferencia de temperatura a través de la capa).

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 255, 390.

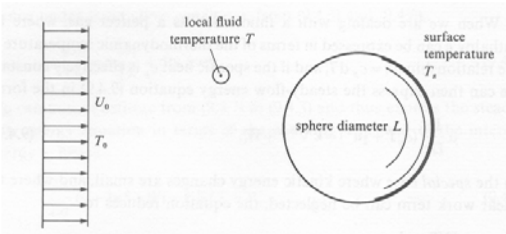
255.

Ecuación de la energía. Semejanza para transferencia de calor en un flujo de un fluido.

El número de Eckert se define para flujos de gases con alta velocidad y para gases perfectos como:

$$Ec = (\gamma - 1)\frac{T_0}{\Delta T_s} Ma^2 .$$

Figura 1 número de Eckert. Transferencia de calor desde una esfera con una corriente de fluido en movimiento.



En la anterior expresión Ma es el número de Mach, T_0 la temperatura de la corriente T_s es la temperatura constante de la superficie de la esfera, la diferencia entre ambas es ΔT_s, γ es la relación entre los calores específicos.

390.

Análisis dimensional de procesos de transferencia. Transferencia de calor por convección forzada.

El número de Eckert se define como:

$$Ec = \frac{u_m^2}{c_p \Delta T}$$

Estamos en el caso de circulación de un fluido por el interior de una tubería, ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido y la pared de la tubería, u_m es la velocidad media del fluido en la tubería.

Año:1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 405, 457, 541.

405.

Transferencia de calor por convección: Análisis teórico. Teoría de flujo laminar.

Se define el número de Eckert como:

$$Ec = U_F^2\left[c_p\left(T_S - T_F\right)\right]$$

U_F es la velocidad de referencia del fluido, T_S es la temperatura de la superficie, T_F es la temperatura de referencia, c_p el calor específico. El número de Eckert indica el significado de la relación entre la energía cinética del flujo con la diferencia de entalpía a través de la capa límite.

457.

Transferencia de calor por convección: Análisis teórico.
Enunciados de problemas.

Se define el número de Eckert modificado como:

$$Ec^+ = U_b^2\left[c_p\left(T_0 - T_w\right)\right]$$

Estamos en el caso de un fluido que circula a alta velocidad entre dos placas paralelas a temperaturas T_0 y T_w, U_b es la velocidad y c_p el calor específico del fluido.

Si estudiamos el caso de un fluido que circula a alta velocidad por el interior de una tubería con temperatura uniforme en la pared, y la diferencia máxima de temperatura entre el fluido y T_0 es menor del 1%. El número de Eckert se define como:

$$Ec^* = U_b^2 / \left(c_p T_0\right)$$

U_b es la velocidad, c_p el calor específico, T_0 es la temperatura uniforme en la pared.

541.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico-convección forzada.

Tabla Parámetros adimensionales para transferencia de calor por convección: convección forzada.

Grupo adimensional: Número de Eckert

Símbolo: Ec

Definición: $$Ec = \frac{U_F^2}{\left[c_p\left(T_S - T_F\right)\right]}$$

Interpretación $$\frac{\text{Energía cinética del flujo}}{\text{Diferencia de entalpía a través de la capa límite}}$$

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 268.

268.

Convección- conceptos y relaciones básicas. Parámetros adimensionales.

Se define el número de Eckert como:

$$E \equiv \frac{u_\infty^2}{\left(c_p \Delta T\right)}$$

Suele aparecer en problemas donde el fluido tiene una alta velocidad.

$$E = \frac{u_\infty^2}{\left(c_p \Delta T\right)} = \frac{u_\infty^2 / c_p}{\Delta T} = \frac{\text{Temperatura dinámica debido al movimiento del fluido.}}{\text{Diferencia de temperatura.}}$$

u_∞^2 / c_p representa una temperatura ideal que sube, si el gas ideal con una velocidad u_∞ es frenado adiabáticamente a velocidad cero.

c_p es el calor específico, ΔT es la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Páginas: 68, 73, 113, 126.

68.
Solución unidimensional. Flujo de Cuette.
Definimos el número de Eckert como:

$$E = \frac{U^2}{C_p(T_1 - T_0)}$$

Donde el número de Eckert representa una medida de la importancia de la disipación viscosa relativa por la diferencia de temperatura impuesta.
U es la velocidad característica, C_p es el calor específico a presión constante, $T_1 - T_0$ diferencia de temperatura.
73.
Solución unidimensional. Flujo de Poiseuille.
El número de Eckert es:

$$E = \frac{{u_m}^2}{C_p(T_1 - T_0)}$$

u_m es la velocidad media, C_p es el calor específico a presión constante, $T_1 - T_0$ diferencia de temperatura.
113.
Transferencia de calor laminar en conductos. Conducto circular.
El número de Eckert es:

$$E = \frac{{V_{ab}}^2}{C_p \Delta T}$$

V_{ab} es la velocidad característica, C_p es el calor específico a presión constante, ΔT es la diferencia de temperatura de referencia.
126.
Transferencia de calor laminar en conductos. Flujo laminar totalmente desarrollado en conductos circulares.
El número de Eckert es:

$$E = \frac{{v_{ab}}^{n+1} R^{1-n}}{C_p \Delta T}$$

v_{ab} es la velocidad característica, C_p es el calor específico a presión constante, ΔT es la diferencia de temperatura de referencia, R radio del conducto circular.

Año: 1995.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Página: 289.

289.
Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.
Flujo a través de un cilindro.
Altas velocidades de flujo.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro D , la densidad ρ, y la viscosidad dinámica μ, también de la diferencia de temperatura T_S-T_E, y del calor específico C_p y la conductividad térmica k. Así:

$$\overline{q_s} = f(V, D, \rho, \mu, \Delta T, c_p, k)$$

Las unidades de las variables pueden ser escritas de la siguiente forma:

$\overline{q_s}$:w/m^2 =Kg /s^3

V:m/s

D:m

ρ :Kg/m^3

μ :Kg/ms

ΔT :K

c_p : Ws/KgK

k:Kgm/s^{3}K.

Hay 4 dimensiones primarias y 8 variables, así que según el teorema de pi de Buckingham hay 4 grupos adimensionales.

El método mas usual para determinar estos grupos adimensionales, es mediante el método de los índices.

$$\Pi = \overline{q_s}^a V^b D^c \rho^d \mu^e \Delta T^f c_p^g k^h$$

Sustituimos por sus unidades.

Kg: a+d+e+h=0

s: -3a-b-e-2g-3h=0

m:b+c-3d-e+2g+h=0

K:f-g-h=0

Eligiendo b=2,a=d=e=0, obtenemos:

h=0

2-2g-3h=0

2+c+2g+h=0

f-g-h=0

Por lo tanto: h=0, g=-1,c=0,f=-1 lo que se obtiene como resultado:

$$\Pi_4 = \frac{V^2}{c_p \Delta T}$$

V^2 en el numerador se relaciona con la energía cinética del fluido, vamos a introducir un factor de ½ y así obtenemos el número de Eckert :

$$Ec = \frac{(1/2)V^2}{c_p \Delta T}$$

La experiencia nos dice que la conversión de energía cinética en energía térmica de un flujo incompresible es debido a la acción de la viscosidad, aún no apareciendo esta en el número de Eckert.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.

Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.

Editorial: John Wiley and Sons.

Página: 320.

320.

Introducción. Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo
Número de Eckert (Ec)
Definición

$$\frac{V^2}{c_p(T_s - T_\infty)}$$

Interpretación
Energía cinética del flujo en relación con la diferencia de entalpías de la capa límite.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.25.

1.25.
Tabla de grupos adimensionales.
Grupo: Número de Eckert.
Simbolo: Ec.
Definición: $\dfrac{V_\infty^2}{c_p\left(T_W - T_\infty\right)}$
Significado físico: relación entre la energía cinética del flujo y la diferencia de entalpía en la capa límite.
Principal área de uso: convección forzada en flujos compresibles.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 20, 298

20.
Introducción . Diferentes tipos de transferencia de calor.
En la transferencia de calor entre un fluido que fluye en el interior de un tubo, de diámetro d_0 y longitud L_0.
La velocidad característica viene dada por w_0, la densidad y viscosidad del fluido son ρ y η respectivamente, la propiedad térmica de conducción λ, el calor específico del fluido es c_p, la diferencia de temperatura característica $\Delta\theta_0$.
Por lo tanto tenemos 7 variables:

$L_0, w_0, \varrho, \eta, \Delta\vartheta_0, \lambda, c_p$

Si realizamos análisis dimensional:

$$K_i = L_0^a \cdot w_0^b \cdot \varrho^c \cdot \eta^d \cdot \Delta\vartheta_0^e \cdot \lambda^f \cdot c_p^g \ , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

La dimensión de cada una de las siete cantidades se puede poner en función de las cuatro dimensiones fundamentales : L (longitud), tiempo (Z) , masa (M) y temperatura (T), los cuales son suficientes para describir los fenómenos termodinámicos y de transferencia de calor.

Por lo tanto podemos expresar *Ki*:

$$\dim K_i = \mathsf{L}^a \left(\mathsf{L}^b \cdot \mathsf{Z}^{-b}\right)\left(\mathsf{M}^c\mathsf{L}^{-3c}\right)\left(\mathsf{M}^d\mathsf{L}^{-d}\mathsf{Z}^{-d}\right) \mathsf{T}^e \left(\mathsf{M}^f\mathsf{L}^f\mathsf{Z}^{-3f}\mathsf{T}^{-f}\right)\left(\mathsf{L}^{2g}\mathsf{Z}^{-2g}\mathsf{T}^{-g}\right)$$

$\dim K_i = 3$

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
\dim \mathsf{L} & = 1: & a & + & b & - & 3c & - & d & & + & f & + & 2g & = & 0 \\
\dim \mathsf{Z} & = 1: & & - & b & & & - & d & & - & 3f & - & 2g & = & 0 \\
\dim \mathsf{M} & = 1: & & & & & c & + & d & & + & f & & & = & 0 \\
\dim \mathsf{T} & = 1: & & & & & & & & e & - & f & - & g & = & 0
\end{array}$$

Los valores a, e y f, se obtienen de la tabla:

i	a	e	f	K_i
1	1	0	0	$w_0 \varrho L_0 \eta^{-1}$
2	0	0	-1	$\eta c_p \lambda^{-1}$
3	0	-1	0	$w_0^2 c_p^{-1} \Delta\vartheta_0^{-1}$

El tercer número característico es el número de Eckert :

$$Ec := \frac{w_0^2}{c_p \Delta\vartheta_0}$$

298.

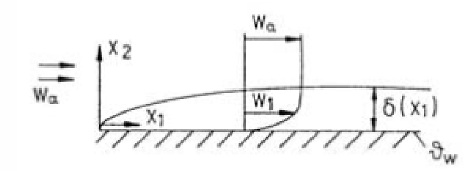
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Ecuaciones de la capa límite.

Capa límite térmica.

Estamos en el caso de un cuerpo cuya superficie tiene una temperatura en la pared ϑ_0,

la cual es diferente a la del fluido que está a una temperatura ϑ_α.

Figura 2 número de Eckert. Capa límite



Asumimos un estado constante para flujo bidimensional, son excluidos grandes cambios de presión y temperatura, así podemos asumir conductividad térmica constante.

La cantidad

$$\frac{w_\mathrm{m}^2}{c_p \Delta\vartheta} = Ec$$

Es el número de Eckert. Es la relación entre el promedio de la energía cinética y el promedio de la energía interna en la capa límite.

Donde w_m es la velocidad característica, c_p es el calor específico a presión constante.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.

Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.

Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York

Página: 696.

696.
Modelos de transferencia de calor. Modelos de transferencia de calor por convección.
Uno de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:
Número de Eckert:

$$Ec = \frac{v^2}{C_P\left(T_S - T_\infty\right)} = \frac{Br}{\mathrm{Pr}}$$

Br es en número de Brinkman, Pr es el número de Prandtl, v es la velocidad característica, C_p es el calor específico a presión constante, $T_S - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la superficie del sólido y la corriente libre.

Año: 2002.
Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Pagina:54.

254.
Tabla
Grupo: Número de Eckert
Definición: $\frac{U^2{}_\infty}{c_p(T_s - T_\infty)}$
Interpretación: relación de la energía cinética del flujo con respecto a la diferencia de temperatura de la capa delimitadora.

3.6. Número De Euler.

Leonhard Euler . Nació en Basilea, Suiza, en 1707 y murió en San Petersburgo, 1783 Matemático suizo. Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea. Tras graduarse en dicha institución en 1723, cuatro años más tarde fue invitado personalmente por Catalina I para convertirse en asociado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde coincidió con otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel, a quien en 1733 relevó en la cátedra de matemáticas.

A causa de su extrema dedicación al trabajo, dos años más tarde perdió la visión del ojo derecho, hecho que no afectó ni a la calidad ni al número de sus hallazgos. Hasta 1741, año en que por invitación de Federico el Grande se trasladó a la Academia de Berlín, refinó los métodos y las formas del cálculo integral (no sólo gracias a resultados novedosos, sino también a un cambio en los habituales métodos de demostración geométricos, que sustituyó por métodos algebraicos), que convirtió en una herramienta de fácil aplicación a problemas de física. Con ello configuró en buena parte las matemáticas aplicadas de la centuria siguiente (a las que contribuiría luego con otros resultados destacados en el campo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales), además de desarrollar la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas (introduciendo de paso la notación e para definir la base de los logaritmos naturales).

En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó de forma decisiva con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números complejos mediante la denominada identidad de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.

Año: 1951.
Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Pagina: 121.

121.

54. Productos adimensionales estándar en la teoría de calor.

Se define el número de Euler como:

$$P = \frac{F}{V^2 L^{2\rho}} = \frac{P}{\rho V^2}$$

V es la velocidad característica, L la longitud característica, ρ la densidad del fluido, p es la presión, F es la fuerza.

Año: 1973.
Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 192.

192.

Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección. Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.

El parámetro adimensional $Eu = \frac{p}{\rho w_0^2}$ se llama número de Euler, y representa la relación entre las fuerzas de presión y las de inercia. Este parámetro sólo aparece en la ecuación de transmisión de calor por conveccíón bajo signo de derivación, lo que significa, que cuando se considera un fluido incompresible con propiedades físicas constantes, no es necesaria la presión absoluta, sino la variación de presión. Por tanto, el número de Euler se escribe generalmente así:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} = \frac{p - p_0}{\rho w_0^2}$$

Donde p_0 es cualquier valor fijo, como la presión a la entrada del canal, que puede ser una incógnita, ρ es la densidad del fluido, w_0 es la velocidad de referencia.

Año: 1985.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Euler (Eu)

Grupo: $Eu = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$

Interpretación física: $\frac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Fuerzas de inercia}}$

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 284, 358.

284.

Fundamentos de convección y correlaciones. Análisis dimensional.

El número de Euler se corresponde con el siguiente grupo adimensional $Eu = \frac{\Delta P}{G^2/\rho} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$

ΔP : Diferencia de presión a lo largo de una tubería.
ρ : Densidad del fluido.
V: Velocidad del fluido.

358.

Fundamentos de convección y correlaciones.
Bancos de tubos y lechos.

El número de Euler se corresponde con: $Eu = \frac{\Delta P \rho}{G^2}$.

ΔP : Diferencia de presión a lo largo de una tubería.
ρ : Densidad del fluido.
V: Velocidad del fluido.
G: gasto másico.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 17.68.

17.68.

Tabla de grupos adimensionales para flujos internos en transferencia de calor por convección forzada y flujos friccionantes usados en el diseño de intercambiadores de calor.

Grupo adimensional: Número de Euler.

Definición: $Eu = \Delta p^* = \frac{\Delta p}{\left(\rho V^2 2\right) g_c}$

Significado físico: caida de presión normalizada con respecto a la velocidad dinámica en la cabeza.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 225

225.

Teorema de Bucckingham
Ejemplo Variables adimensionales para flujo en tuberías.

El conjunto de variables depende de la importancia que tengan en la situación fisica modelada. Para el flujo de un fluido en una tubería el conjunto de variables es:

L: longitud de la tubería
D: diámetro de la tubería
g: aceleración de la gravedad.
<v> :velocidad másica del fluido
ρ :densidad del fluido
μ: la viscosidad del fluido.
σ: la tensión superficial del fluido.
c: la velocidad del sonido en el fluido.
Δp: la diferencia de presión a lo largo de la tubería.

Primero elegimos el sistema de unidades en el que nosotros queremos trabajar. Elegimos el sistema MLt. No incluimos la temperatura porque suonemos un sistema isotermo donde las variaciones de temperatura se pueden considerar despreciables.

Así:

	M	L	t
L		1	
D		1	
g		1	-2
v		1	-1
ρ	1	-3	
μ	1	-1	-1
σ	1		-2
c		1	-1
Δp	1	-1	-2

Como resultado da la matriz dimensional:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Buscamos el determinante mas grande distinto de cero que podemos encontrar en esta matriz y este es un determinante de orden 3x3.
Por tanto el rango de la matriz dimensional es 3, así 9-3= 6. Con lo que nosotros solo podemos encontrar 6 grupos adimensionales independientes.
Así obtenemos:

$$Euler = Eu = \frac{\Delta p}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\text{fuerzas de presión}}{\text{fuerzas de inercia}}\ .$$

3.7 Número De Fourier.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier. Nació en Auxerre, Francia en 1768 y murió en París, 1830. Ingeniero y matemático francés. Era hijo de un sastre, y fue educado por los benedictinos. Los puestos en el cuerpo científico del ejército estaban reservados para familias de estatus reconocido, así que aceptó una cátedra militar de matemáticas. Tuvo un papel destacado durante la revolución en su propio distrito, y fue recompensado con una candidatura para una cátedra en la École Polytechnique. Fourier acompañó a Napoleón en su expedición oriental de 1798, y fue nombrado gobernador del Bajo Egipto. Aislado de Francia por la flota británica, organizó los talleres con los que el ejército francés debía contar para sus suministros de munición. También aportó numerosos escritos sobre matemáticas al Instituto Egipcio que Napoleón fundó en El Cairo.

Tras las victorias británicas y la capitulación de los franceses al mando del general Menou en 1801, Fourier volvió a Francia, donde fue nombrado prefecto del departamento de Isère, y empezó sus experimentos sobre la propagación del calor. Se trasladó a París en 1816, y en 1822 publicó *Teoría analítica del calor*, basándose en parte en la ley del enfriamiento de Newton.

A partir de esta teoría desarrolló la denominada «serie de Fourier», de notable importancia en el posterior desarrollo del análisis matemático, y con interesantes aplicaciones a la resolución de numerosos problemas de física (más tarde, Dirichlet consiguió una demostración rigurosa de diversos teoremas que Fourier dejó planteados). Dejó inacabado su trabajo sobre resolución de ecuaciones, que se publicó en 1831 y que contenía una demostración de su teorema sobre el cálculo de las raíces de una ecuación algebraica.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.

Autores: Gröber/Erk/Grigull.

Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 194.

194.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor. Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Conducción de calor en régimen transitorio.

Consideramos dos tubos de diferente diámetro, por cada uno de los cuales circula un fluido distinto en régimen transitorio.

Vamos a estudiar la ecuación diferencial de Fourier para la conducción del calor en régimen transitorio. Al tratar de encontrar las condiciones de semejanza física entre un sistema y su modelo en el problema de la conducción del calor regido por la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Aparece una constante de proporcionalidad relativa a los tiempos $f_t = \frac{t_2}{t_1}$

De esta forma obtenemos:

$$\frac{f_T}{f_t} = \frac{f_\alpha f_T}{f_L^2}$$

$f_T = \frac{T_2}{T_1}$, los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los dos tubos y T es la temperatura.

O bien $\frac{\alpha t}{L^2} = const$

La última ecuación define el número de Fourier $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.

Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.

Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.

Página: 111.

111.

Conducción transitoria.

Enfriamiento (o calentamiento) de una placa.

Se define el número de Fourier como:

$\frac{\alpha\tau}{\delta^2} = Fo$ o tiempo adimensional.

τ es el tiempo.

2δ es el espesor de la placa.

α : coeficiente superficial de transmisión de calor.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 155.

155.

Conducción de calor mulltidimensional transitoria. Análisis dimensional transito de conducción de calor.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T_{t=0} = T_i$

T (t>0, x=0) T_1

$T - T_1 = fn[(T_i - T_1), x, L, t, \alpha, \overline{h}, k]$

Hay ocho variables en cuatro dimensiones, ºG, s, m,W, así tenemos 8-4=4 pi-grupos.

Para Π_4 tenemos dos soluciones:

$\Pi_4 \equiv Fo = \alpha t / L^2$ Así definimos el número de Fourier.

$$\Pi_4 \equiv \zeta \equiv \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$$

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 47.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Fourier

$$Fo = \frac{at}{l^2}$$

Interpretación:

Es la razón de tiempo at y la dimensión l^2.

Caracteriza la penetración de calor en régimen variable.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Fourier (Fo)

Grupo: $Fo = \dfrac{k_T}{\rho C_p L_c^2}$

Interpretación física: tiempo sin dimensiones para conducción transitoria.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley

Página: 191.

191.

Conducción de calor no uniforme. Análisis dimensional.

Se define el número de Fourier como:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

α es la difusividad térmica, t el tiempo, L es la longitud característica del cuerpo.

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport. Flotabilidad inducida, flujos y transporte.

Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.

Editorial: Hemisphere.

Página: 37, 906.

37.

Formulación general de flotabilidad por flujos inducidos. Parámetros de transporte.

Se define el número de Fourier como:

$$Fo = \frac{\alpha \tau_0}{L^2}$$

α es el coeficiente de difusividad térmica, τ_0 es un tiempo constante para transitorio, L es la longitud característica.

906.

Convección aleatoria. Movimiento aleatorio de superficies salteadas.

Se define el número de Fourier como:

$$Fo = \frac{\alpha \tau_c}{s^2}$$

α es el coeficiente de difusividad térmica, τ_c es un intervalo de tiempo que espacia los movimientos abruptos, s es la longitud característica.

Año: 1991.

Libro: Dimensional Análisis and Scale-up in chemical Engineering. Análisis dimensional y escalonamiento en ingeniería química.

Autores: Zlokarnik M.

Editorial: Springer-Verlag.

Páginas: 158.

158.

Transferencia de calor por conducción. Transferencia de calor unidimensional no uniforme en placas planas, cilindros circulares y esferas.

Se define el número de Fourier como un tiempo adimensional en la forma:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\alpha t}{l_0^2}$$

α es el coeficiente de difusión térmica, t es el tiempo, L o l_0 la longitud o grosor de la semiplaca.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 109, 110.

109-110.

Conducción transitoria, y uso de las tablas de temperatura.

El número de Fourier se define como:

$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$; tiempo adimensional o número de Fourier.

α es el coeficiente de difusión, t el tiempo, L la longitud de referencia.

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{k(1/L)L^2}{\rho c_p L^3 / t} = \frac{\text{Proporción de conducción de calor a través de L en un volumen L}^3}{\text{Proporción de calor almacenada en un volumen L}^3}$$

El número de Fourier es la relación de la proporción de la conducción de calor y el calor almacenado en un volumen elemental.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página 448.

448.

Convección con cambio de fase.**Fundición por convección natural.**

Definimos el número de Fourier como:

$$Fo = \frac{\alpha t}{H^2}$$

H es la altura, t el tiempo, α el coeficiente de difusividad térmica.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Página 87.

87.

Soluciones unidimensionales. **Transición en el cambio de fase.**

El número de Fourier es:

$$Fo = \frac{\alpha t}{\delta^2}$$

La densidad del vapor es constante $M \approx \rho\delta$, ρ es la densidad, δ el espesor de la película, α el coeficiente de difusividad térmica, t el tiempo.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas:169, 222.

169.

Conducción multidimensional e irregular. Conducción irregular.

El siguiente grupo adimensional $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$ se llama número de Fourier, y a veces también se expresa de la siguiente forma $Fo = \frac{t}{t_c}$; $t_c = \frac{L^2}{\alpha}$ es un tiempo característico.

α es el coeficiente de difusividad térmica, L la longitud característica, t el tiempo.

222.

Conducción multidimensional e irregular. Soluciones mediante métodos numéricos.

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

Δt : incremento de tiempo
Δx : incremento de longitud.
α : coeficiente de difusividad térmica

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 217, 224 (no definición), 320.

217.

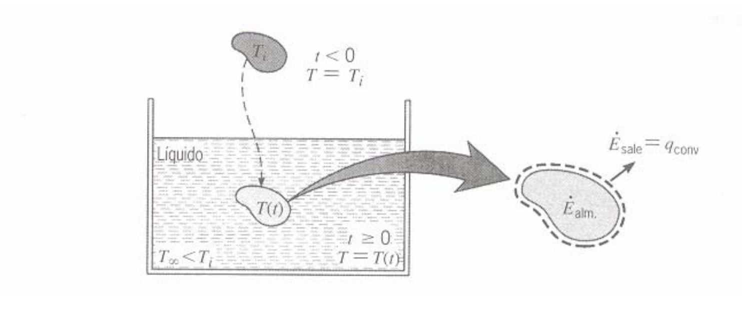
Conducción en estado transitorio.
Validez del método de la resistencia interna despreciable.

Definimos la longitud característica como la relación entre el volumen del sólido y el área de la superficie , $Lc \equiv V / As$.

Si introducimos este valor en la ecuación obtenida según el método de la resistencia interna despreciable, en el caso de conducción transitoria en un sólido que experimenta un cambio súbito en su ambiente térmico.

Con condiciones iniciales *en t = 0 T = Ti* uniforme y que se templa por inmersión en un líquido de temperatura más baja $T_\infty < T_i$.

Figura 1 número de Fourier. Balance energético.



Si hacemos un balance de energía : $-hAs(T-T_\infty)=\rho V_c\dfrac{dT}{dt}$

Introducimos diferencia de temperaturas $\theta \equiv T-T_\infty$ y aceptamos $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{dT}{dt}$

Al evaluar integrales se obtiene :

$$\frac{\theta}{\theta_i}=\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=\exp-\left[\left(\frac{hA_s}{\rho Vc}\right)t\right]$$

Si introducimos en esta ecuación el valor $Lc \equiv V/As$:

$$\frac{hA_s t}{\rho Vc}=\frac{ht}{\rho cLc}=\frac{hLc}{k}\frac{k}{\rho c}\frac{t}{Lc^2}=\frac{hLc}{k}\frac{\alpha t}{Lc^2}$$

$\dfrac{hA_s t}{\rho Vc}$=Bi. Fo

Donde Fo = $\dfrac{\alpha t}{Lc^2}$

Se denomina tiempo de Fourier. Es un tiempo sin dimensión que, junto con el número de Biot, caracteriza los problemas de la conducción transitoria.

Efectos espaciales.

Fo $=\dfrac{\alpha t}{L^2}$

Donde L es la mitad del espesor de la pared plana, α es el coeficiente de difusividad térmica y t el tiempo.

320.

Introducción a la convección. Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo: Número de Fourier (Fo).

Definición: $\dfrac{\alpha t}{L^2}$

Interpretación: razón de la rapidez de conducción de calor a la rapidez de almacenamiento de energía térmica en un sólido. Tiempo adimensional.

Número de Fourier para transferencia de masa

Grupo: número de Fourier para transferencia de masa

Definición: $\dfrac{D_{AB}t}{L^2}$

Interpretación: razón de la rapidez de difusión de especies a la rapidez de almacenamiento de especies.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.

Autores: Holman, J.P

Editorial: McGraw-Hill.

Página 104.

104.

Condiciones de contorno convectias. Numero de Fourier.

Se define el número de Fourier como:

$$\text{Número de Fourier} = \text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Dónde α es el coeficiente de difusividad térmica, τ el tiempo característico, S es una dimensión característica del cuerpo, para una placa plana es la longitud, para un cilindro es el radio, c el calor específico.

El número de Fourier compara una longitud característica del cuerpo con un valor aproximado de la longitud hasta la que penetra la onda de temperatura en un tiempo dado τ .

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.

Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.

Editorial: McGraw-Hill

Páginas: 1.25, 5.3, 17.68.

1.25.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Fourier.

Símbolo: Fo

Definición: $\frac{\alpha t}{L^2}$

Significado físico: relación entre la proporción de conducción de calor y la proporción de la energía térmica almacenada en el sólido.

Principal área de uso: Transferencia de calor es estado transitorio.

Grupo: número de Fourier para transferencia de masa.

Símbolo: Fo_D

Definición: $\frac{Dt}{L^2}$

Significado físico: relación entre la difusión de especies y la proporción de especies almacenada.

Principal área de uso: Transferencia de masa en estado transitorio.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.

Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.

Editorial: Springer-Verlag.

Páginas: 116, 194

116.

Conducción de calor y difusión de masa. Ecuación de conducción del calor. Campos de temperatura similar.

Definimos el siguiente grupo adimensional como número de Fourier:

$$Fo := at/L_0^2 = t^+$$

Donde t^+ es:

$t^+ := t/t_0$

t_0: el tiempo característico.
L_0: longitud característica.
t: tiempo.
a: constante de difusividad térmica.

$a := \lambda/c\varrho$

194.

Conducción de calor y difusión de masa. Soluciones numéricas para los problemas de conducción de calor.

El método simple explicito de diferencias para conducción de calor transitoria en problemas. La ecuación de diferencias finitas.

$M := a\Delta t/\Delta x^2$

Donde ese grupo adimensional representa el módulo del número de Fourier, para el método de diferencias.
a: constante de difusividad térmica.

$a := \lambda/c\varrho$

Δt : incremento de tiempo.
Δx : incremento de longitud.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 695.

695.

Modelos de transferencia de calor por convección.

Uno de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es el número de Fourier para transferencia de calor:

$$Fo_h = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\text{razón de energía térmica de conducción}}{\text{razón de energía térmica por acumulación}}$$

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 79, 129, 132, 185, 254.

79.

Conducción de calor. Ecuación de conducción, forma adimensional.

Se denomina número de Fourier al grupo adimensional.

$$Fo = \frac{\alpha t_r}{L_r^2}$$

Donde α, t_r, L_r son la difusividad térmica, un tiempo de referencia y una longitud de referencia respectivamente.

En un sentido físico, el número de Fourier es la razón de transferencia de calor por conducción respecto a la razón de almacenamiento de energía en el sistema.

129.

Conducción de calor. Losa infinita.

Se define el número de Fourier como $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$

α es el coeficiente de difusividad térmica, L la longitud de la losa y t el tiempo.

132.

Conducción de calor. Sólido semi-infinito.

Se define número de Fourier: $Fo = \frac{\alpha t}{x^2}$

α es el coeficiente de difusividad térmica, x la coordenada local característica y t el tiempo.

185.

Análisis numérico de la conducción de calor. Conducción inestable o de estado transitorio unidimensional.

Podemos definir el grupo adimensional $Fo \equiv \frac{\alpha t}{\Delta x^2}$, como número de Fourier.

α es el coeficiente de difusividad térmica, Δx es un incremento de longitud y t el tiempo.

254.

Análisis de la transferencia de calor por convección.

Grupos adimensionales relevantes en la transferencia de calor y el flujo de fluidos.

Grupo: Número de Fourier (Fo)

Definición: $Fo \equiv \frac{\alpha t}{L^2}$

Interpretación: Tiempo adimensional; relación entre la razón de conducción de calor y la razón de almacenamiento de energía interna en un sólido.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.

Autores: Cengel, Y.A..

Editorial: McGraw-Hill.

Páginas: 217, 223.

217.

Conducción de calor en régimen transitorio en paredes planas grandes, cilindros largos y esferas con efectos espaciales

Definimos el número de Fourier como un tiempo adimensional:

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

α es el coeficiente de difusividad térmica, L la longitud característica y t el tiempo.

223.

Conducción de calor en régimen transitorio. Conducción de calor en régimen transitorio en paredes planas grandes, cilindros largos y esferas con efectos espaciales.

Para comprender el significado físico del número de Fourier, τ , se expresa como,

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2(1/L)}{\rho C_P L^3/t}\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{La velocidad a la cual el calor es conducido a través de L de un cuerpo de volumen L}^3}{La \text{ velocidad a la cual el calor es almacenado en un cuerpo de volumen L}^3}$$

Por lo tanto, el número de Fourier es una medida del calor conducido a través de un cuerpo en relación con el calor almacenado. Por tanto, un valor grande del número de Fourier indica una propagación más rápida del calor a través del cuerpo.

3.8. *Número De Froude.*

William Froude . Nació el 28 de noviembre de 1810 en Dartington, Devon, Inglaterra y falleció el 4 de mayo, 1879, en Simonstown, África del Sur. Ingeniero hidráulico y arquitecto naval. Era hermano de James Anthony Froude, famoso historiador.

Froude fue el primero a establecer leyes confiables respecto a la resistencia que el agua ejerce al avance de los navíos, y a calcular su estabilidad. En la mecánica de fluidos un parámetro adimensional lleva su nombre: el número de Froude.

Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Página: 17.

17.

Conjunto completo de números adimensionales.

Se define el número de Froude como:

$$F = \frac{V^2}{Lg}$$

V es la velocidad característica, L la longitud característica, g la constante gravitacional.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 126

126.

Análisis de conducción de calor. Análisis dimensional.

Al grupo V^2/gh se llama, número de Fraude. Compara las fuerzas de inercia con las fuerzas gravitatorias.

V es la velocidad característica, g la aceleración gravitacional, h la altura.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 488.

488.

Análisis dimensional.

Se define el número de Froude como:

$$Fr = V / \sqrt{gD}$$

V es la velocidad del fluido, g la aceleración gravitacional, D el diámetro de la esfera.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505. Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Froude (Fr)

Grupo: $Fr = \dfrac{u_\infty^2}{L_c g}$

Interpretación física: $\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de gravedad}}$

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 23.

23.

Propiedades y movimiento del fluido. Semejanza dinámica y el uso de las relaciones adimensionales.

Podemos tomar $\rho g D^3$ como representación de las fuerzas gravitacionales y $\rho U^2 D^2$ es una medida de las fuerzas de inercia, así podemos obtener el Número de Froude.

$$Fr = \frac{\rho U^2 D^2}{\rho g D^3} \frac{U^2}{gD}$$

Otra forma de expresar el número de Froude es:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gD}}$$

Estamos estudiando el caso de una esfera que se sumerge en un fluido que tiene velocidad U en la corriente libre sin perturbar, aguas arriba, D es el diámetro de la esfera, y g la constante gravitacional.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: john Wiley and Sons
Pagina: 535.

535.

Condensación en el interior de tubos.

El número de Froude es:

$$Fr = \frac{16W^2}{\pi^2 D^5 a(\rho_L - \rho_v)\rho_v}$$

a: componente de la gravedad a lo largo del tubo axial.
W: masa total del flujo, razón de líquido y vapor.
D: diámetro del tubo
ρ_L : densidad del fluido.
ρ_v : densidad de vapor.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.25, 15.101.

1.25.
Tabla grupos adimensionales.
Grupo adimensional: Número de Froude.

Símbolo: Fr.
Definición: $\frac{V^2}{gL}$
Significado físico: relación entre la inercia y la fuerza gravitacional.

15.101.
Ebullición en canales con convección.
Se define el número de Froude de un flujo que fluye como líquido:

$$Fr_{le} = \frac{G^2}{\rho_l g D}$$

G es el flujo másico, ρ_l es la densidad del líquido, g es la constante gravitacional y D es el diámetro.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 438, 496.

438.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo con cambio de fase. Transferencia de calor en la condensación.
El siguiente grupo adimensional, define el número de Froude:

$$Fr = w_\infty^2 / g\,x$$

w: es la velocidad.
g: aceleración gravitacional.
x: longitud
∞: hace referencia a la zona de saturación.

496.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo con cambio de fase. .Evaporación por conducción en tubos horizontales.
Se define el número de Froude como el siguiente grupo adimensional:

$$Fr = \dot{m}^2 / (\varrho_{\mathrm{L}}^2\, g\, d)$$

$\dot{m}$: flujo másico.
ρ_L : densidad del líquido
g: aceleración gravitacional.
d: diámetro del tubo.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 225.

225.
Teorema de Bucckingham
Variables adimensionales para flujo en tuberías.

El conjunto de variables depende de la importancia que tengan en la situación física modelada. Para el flujo de un fluido en una tubería el conjunto de variables es:

L: longitud de la tubería
D: diámetro de la tubería
g: aceleración de la gravedad.
<v> :velocidad másica del fluido
ρ :densidad del fluido
μ: la viscosidad del fluido.
σ: la tensión superficial del fluido.
c: la velocidad del sonido en el fluido.
Δp: la diferencia de presión a lo largo de la tubería.

Primero elegimos el sistema de unidades en el que nosotros queremos trabajar. Elegimos el sistema MLt. No incluimos la temperatura porque suponemos un sistema isotermo donde las variaciones de temperatura se pueden considerar despreciables.

Así:

	M	L	t
L		1	
D		1	
g		1	-2
v		1	-1
ρ	1	-3	
μ	1	-1	-1
σ	1		-2
c		1	-1
Δp	1	-1	-2

Como resultado da la matriz dimensional:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Buscamos el determinante más grande distinto de cero que podemos encontrar en esta matriz y este es un determinante de orden 3x3.
Por tanto el rango de la matriz dimensional es 3, así 9-3= 6. Con lo que nosotros solo podemos encontrar 6 grupos adimensionales independientes.
Así obtenemos:

Número de Froude $$\mathrm{Fr} = \frac{\langle v \rangle^2}{Lg} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}}$$

3.9. Número de Graetz.

Leo Graetz fue un físico Alemán. Nació en Breslau en Alemania en 1856. Estudió matemáticas y física en Breslau, Berlín y Strassburg. En 1881 se convirtió en asistente de A. Kundt en Strassburg y en 1883 fue a la universidad de Manchen donde consiguió ser profesor en 1908.

Sus trabajos científicos son conocidos principalmente en el campo de la conducción de calor, radiación, fricción y elasticidad. También realizó trabajos sobre las ondas electromagnéticas y los rayos catódicos.
Falleció en Manchen en 1941.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.

Autores: Gröber/Erk/Grigull.

Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 208.

208.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor. Significado físico de los parámetros adimensionales.

Un número de Péclet modificado es de uso común en la literatura americana y se denomina número de Graetz:

$$N_{Gz} = \frac{U\rho A c_p}{kL}$$

U es la velocidad, ρ la densidad del fluido, c_p el calor específico, k la conductividad.

A y L representan, respectivamente, la superficie de la sección recta y la longitud de la canalización, Si se trata de un tubo de sección recta, $A = \frac{\pi d^2}{4}$, y

$$N_{Gz} = \frac{\pi}{4} N_{\Pr} N_{\mathrm{Re}} \frac{d}{L} = \frac{\pi}{4} N_{Pe} \frac{d}{L}.$$

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.

Autores: Lienhard, J. H.

Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.

Página: 336.

336.

Convección forzada en una variedad de configuraciones.Transferencia de calor hacia y desde flujo laminar en tuberías.

Comportamiento térmico de un flujo en una tubería isotérmica.

Por análisis dimensional h depende de $u_{av}, \mu, \rho, D, c_p, k$ y x, 8 variables en m,s,Kg, y J/ºC. Estos símbolos representan, la velocidad característica, la viscosidad y densidad del fluido, el diámetro de la tubería, el calor específico a presión constante, la conductividad térmica, y la coordenada x.

Tenemos 4 pi-grupos : $Nu_D = fn\,(Re_D, Pr, x/D)$

La solución de la constante temperatura de la pared, originalmente formulado por Graetz y resuelto por Sellars,Tribus y Klein, incluye un arreglo de estos grupos adimensionales, Llamado número Número de Graetz:

Número de Graetz, $Gz \equiv \frac{\mathrm{Re}_D \Pr D}{x}$

Pr es el número de Prandtl, Re_D el número de Reynolds definido para una tubería de diámetro D.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.

Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.

Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.

Página: 110.

110.
Flujos paralelos. Capa límite térmica.
Un metal líquido fluye regularmente entre dos placas paralelas, se paradas una distancia l. La placa superior está aislada, mientras la de abajo se mantiene a una temperatura uniforme T_W, pero hay una parte que está aislada, cuando $x \geq x_0$.

La temperatura del líquido a la entrada es T_0 y desde $\frac{\delta}{\Delta} \to 0$, la velocidad del líquido, puede asumirse uniforme, U.
Despreciamos los efectos de la conducción axial.
Se define el número de Graetz como:

$$Gz = \frac{Pe}{x/l} = \frac{Ul/a}{x/l} = \frac{Ul^2}{xa}$$

x: coordenada longitudinal.
a: difusividad térmica.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 312.
312.
Convección forzada. Flujo laminar en conductos.
Régimen laminar en la entrada, correlaciones.
Se define el número de Graetz como:

$$\lambda = \text{Número de Graetz} = \frac{\text{x/D}}{\text{Pe}}$$

x es la coordenada longitudinal, donde varía la presión en el interior de un conducto, D es el diámetro, y Pe es el número de Péclet.

Año:1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 470, 541.
470.
Transferencia de calor por convección: Análisis práctico-convección forzada. Flujo interno.
Flujo laminar.
Se define el número de Graetz como:

$$Gz = \frac{\text{Re}\,\text{Pr}}{x/D} = \frac{\text{P}e}{x/D}$$

Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de una tubería, Re es el número de Reynolds, Pr el número de Prandtl, Pe el número de Péclet, x/D es una distancia adimensional (D es el diámetro del tubo, x coordenada longitudinal)
541.
Tabla. Parámetros adimensionales para trasnferencia de calor por convección: convección forzada.

Grupo adimensional: Número de Graetz
Símbolo: Gz
Definición: $\dfrac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{x/D} = \dfrac{\mathrm{P}e}{x/D}$
Interpretación $\dfrac{\text{Proporción entalpía del flujo}}{\text{Conducción de calor axial}}$

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 300.

300.
Convección forzada para flujo en el interior de conductos
Flujo laminar completamente desarrollado hidrodinámica y térmicamente.
El número de Graetz (Gz) se define como:

$$(Gz)^{-1} = \frac{x/D}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

Estamos estudiando el caso de flujo que circula en el interior de un conducto.
D es el diámetro del tubo, x es la distancia axial a lo largo del conducto medida desde el comienzo de la sección calentada.
Re es el número de Reynolds, Pr es el número de Prandtl.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Páginas: 113, 139.

113.
Transferencia de calor laminar en conductos.
Conductos circulares.
Se define el número de Graetz como:

$$\text{Gz} = \text{Número de Graetz} = \frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,D}{z} = \frac{D^2 V_{ab}}{\alpha z} = \frac{4}{z'}$$

Coordenadas cilíndricas (r, ϑ,z)
Pr es el número de Prandtl, Re el número de Reynolds, D el diámetro de la tubería, V_{ab} velocidad a la entrada de la tubería.

139.
Transferencia de calor laminar en conductos. **Flujo totalmente desarrollado en conductos no circulares.**
Se defin e el número de Graetz como:

$$\text{Gz} = \text{Número de Graetz} = \frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,D_h}{z} = \frac{D_h^{\,2} V_{ab}}{\alpha z}$$

Coordenadas cilíndricas (r,ϑ,z)
Pr es el número de Prandtl, Re el número de Reynolds, D el diámetro de la tubería, V_{ab} velocidad a la entrada de la tubería, D_h es el diámetro hidráulico.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 443

443
Flujo interno. Flujo laminar en tubos circulares.
Región de entrada.

El problema de longitud de entrada combinado (térmica y de velocidad) corresponde al caso para el que los perfiles de temperatura y velocidad se desarrollan de manera simultánea.

Se obtienen soluciones para condiciones de longitud de entrada, y en la figura se presentan resultados seleccionados. Los números de Nusselt son, en principio, infinito en x=0 y diminuyen a sus valores asintóticos (completamente desarrollados) al aumentar *x*. Cuando se grafican contra el parámetro adimensional $x/(D\ Re_D\ Pr)$, que es el recíproco del número de Graetz Gz_D $Gz_D \equiv (D/x) Re_D\ Pr$, la forma en la que Nu_D varía con Gz_D^{-1} es independiente de Pr para el prblema de la longitud de entrada térmica. En cambio, para el problema de la longitud de entrada combinada, los resultados dependen del número de Prandtl y se presenta para Pr=0.7, que es representativo para la mayoría de los gases.

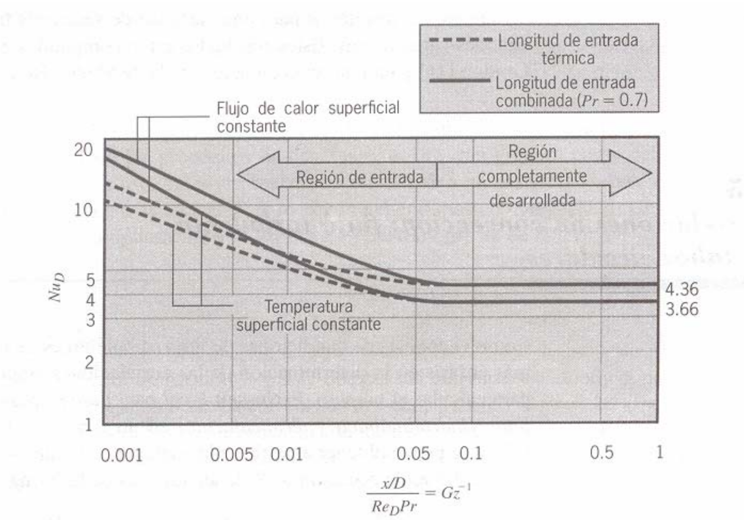


Figura 1 número de Graetz. Número de Nusselt local obtenido de soluciones de longitud de entrada para flujo laminar en un tubo circular. Grafica adaptada con permiso

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.25, 17.68.

1.25.
Tabla grupos adimensionales.
Grupo adimensional: Número de Froude.
Símbolo: Gz

Definición: $\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\dfrac{D}{L}=\dfrac{\rho c_p V D^2}{kL}$

Significado físico: Relación entre la capacidad térmica del flujo y la convección de calor.

17.68.

Grupos adimensionales par flujo interno con transferencia de calor por convección forzada y flujo friccionante usados en el diseño de la transferencia de calor.

Grupo adimensional: número de Graetz.

Definición: $Gz=\dfrac{\dot{m}c_p}{kL}=\dfrac{PeP}{4L}=\dfrac{P}{4D_h}\dfrac{1}{x^*}$

Significado físico: Convencionalmente usado en ingeniería química, utiliza x^* cuando la longitud del flujo en Gz se trata como una longitud variable.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 696

696.

Modelos de transferencia de calor por convección.

Unos de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:

Número de Graetz :

$$Gz=\frac{\langle v\rangle A\rho C_p}{KL}=\mathrm{Re}_D\,\mathrm{Pr}\frac{D}{L}=\frac{\text{volumen de energía térmica transportada}}{\text{razón de energía térmica de conducción}}$$

v es la velocidad característica, A el área, ρ la densidad del fluido, C_p el calor específico a presión constante, K la conductividad térmica, L la longitud característica, Re_D el número de Reynolds basado en el diámetro del tubo, Pr es el número de Prandtl, D el diámetro de la tubería.

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 387.

387.

Convección forzada en el interior de tubos y ductos. **Correlaciones para convección forzada laminar.**

Efecto de convección natural.

La influencia de la convección natural en la transferencia de calor hacia fluidos en tubos horizontales isotérmicos investigada por Depew y August.

El número de Graetz queda definido como :

$$Gz = \left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Re}_D \Pr\left(\frac{D}{L}\right).$$

D es el diámetro de la tubería, L la longitud característica, Re_D el número de Reynolds basado en el diámetro, Pr el número de Prandtl.

3.10. Número De Grashof

Franz Grashof. Ingeniero Alemán. Nació en 1826 en Dusseldorf, Alemania. Dejó la escuela a la edad de 15 años para trabajar como mecánico, mientras asistía a la escuela de formación profesional.
Estudió matemáticas, física, y diseño de máquinas en el Instituto Técnico Berlín Royal.
Grashof fue uno de los fundadores de la sociedad de ingenieros Alemanes y asumió grandes cargos como autor, editor, corrector y expedidor de publicaciones.
Fue profesor de mecánica aplicada e ingeniería mecánica. Realizó varias conferencias muy conocidas sobre "la fuerza de los materiales", "hidráulica", "teoría de calor e ingeniería general".
Falleció en 1893 en Karslruhe.

Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Página: 121.

121.

Productos adimensionales estándar en la teoría de calor.

Se define el número de Grashof como:

$$G = \frac{\beta\theta g L^3 \rho^2}{\mu^2}$$

L la longitud característica, ρ la densidad del fluido, β es el coeficiente de expansión térmica, g la constante gravitacional, μ la viscosidad del fluido, θ es la temperatura.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 193, 206.

193.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor. Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Convección libre.

En la convección libre, la fuerza de empuje hidrostático que actúa sobre la partícula que se encuentra a más temperatura, luego menor densidad, que el fluido que la rodea debe intervenir en la ecuación de movimiento como una fuerza e volumen. El término correspondiente al campo gravitatorio terrestre aparece exclusivamente en la ecuación de la coordenada vertical del movimiento. Consideremos por ejemplo, una pared vertical con la temperatura superior a la del fluido que la rodea. La capa calentada por la pared disminuye de densidad y experimenta, por ello, un empuje hacia arriba con respecto al fluido inmediato. Se puede expresar la variación del volumen específico $V_e = \frac{1}{\rho}$ con la temperatura por medio del coeficiente de dilatación

$$\beta = \frac{1}{V_e}\frac{dV_e}{dT}$$

Por consiguiente, mantenemos la hipótesis de propiedades (η,c_p, k) independientes de la temperatura, excepto para la densidad ρ.

El valor del coeficiente de dilatación que se considera es el que corresponde a la temperatura media del flujo si las diferencias de temperaturas son considerables o, si son muy pequeñas, el que define la temperatura del fluido no perturbado fuera de la capa limite. De la ecuación de los gases perfectos:

$$V_e = \frac{RT}{p}$$

Se deduce $\beta = \frac{1}{T}$ para los gases. Designando θ_∞ la diferencia entre la temperatura de la partícula y la del fluido no perturbado, el empuje hidrostático por unidad de volumen es:

$G = \beta \rho g \theta_\infty$

Esta fuerza debe agregarse al segundo miembro de la ecuación de movimiento

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1 \theta_{\infty,1} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2} \right)$$

$$f_\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{y} \quad f_g = \frac{g_2}{g}$$

Teniendo en cuenta que está dirigida hacia arriba, dirección y sentido que suponemos coinciden con los del eje x. Al asignar el subíndice 1 al modelo 1 y el 2 al modelo 2, obtenemos:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1 \theta_{\infty,1} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2} \right)$$

Y necesitamos, además de los coeficientes de proporcionalidad de las ecuaciones:

Velocidades u, υ, w $\quad f_u = \frac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\quad f_p = \frac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\quad f_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\quad f_\nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}$

Temperaturas T, θ $\quad f_T = \frac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $\quad f_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $\quad f_h = \frac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $\quad f_k = \frac{k_2}{k_1}$

$$f_\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{y} \quad f_g = \frac{g_2}{g_1}$$

Siguiendo el método de cálculo empleado en la parte de calculo de número de Reynolds por convección forzada de este mismo libro, se obtiene:

$$\frac{f_u^2}{f_L} = \frac{f_p}{ff_L} = f_g f_\beta f_T = \frac{f_\nu f_u}{f_L^2}$$

Por ser pequeñas las diferencias de presión que ocurren en las corrientes de convección libre, no se deduce ningún parámetro adimensional del segundo miembro de la ecuación. No existe ninguna velocidad conocida; en cambio, la velocidad en la placa es nula y también vale cero en puntos situados fuera de la capa límite y a gran distancia de la misma, luego no tiene sentido la relación f_u y se puede prescindir de ella. Por último teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas para convección forzada (en el apartado número de Reynolds de este mismo libro, página 189, en la misma pregunta)

$$\frac{f_u f_T}{f_L} = \frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}$$

$$f_h f_T = \frac{f_k f_T}{f_L}$$

Que se aplican en este caso sin ninguna modificación, podemos deducir el criterio de semejanza que exponemos a continuación:

$$\frac{\mathrm{g}\beta\theta_\infty L^3}{v^2} = const$$

Este parámetro se conoce como número de Grashof, se designa por medio de N_{Gr}.

206.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor Significado físico de los parámetros adimensionales.

Se puede encontrar el significado físico del número de Grashof observando cómo se ha deducido de la ecuación diferencial. Al igualar los términos primero y tercero de la ecuación (ecuación obtenida en número de Grashof de este mismo libro, página 193)

$$\frac{f_u^2}{f_L} = \frac{f_p}{ff_L} = f_g f_\beta f_T = \frac{f_v f_u}{f_L^2}$$

Obtenemos:

$$\frac{g\beta\theta_\infty L}{u^2} = \frac{N_{Gr}}{\left(N_{\mathrm{Re}}\right)^2} = \frac{\rho g\beta\theta_\infty}{\rho u^2 / L}$$

Que se puede interpretar como la relación entre la fuerza de empuje hidrostático por unidad de volumen $\rho g\beta\theta_\infty$ y la fuerza de inercia por unidad de volumen $\rho u^2 / L$.

Si multiplicamos por $N_{\mathrm{Re}}{}^2$ resulta el número de Grahof en su forma ordinaria, que sólo contiene magnitudes dadas. Es fácil demostrar que cabe, también, interpretar el número de Grashof como relación entre el producto de las fuerzas de inercia y empuje y el cuadrado de la fuerza viscosa.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.

Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.

Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.

Página: 192

192.

Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección.

Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.

El parámetro adimensional $Gr \equiv \dfrac{g\beta\vartheta_w l_0^3}{v^2}$ se llama número de Grashof y caracteriza la fuerza de empuje que aparece en el fluido, debido a la diferencia de densidad, ya que $\beta\vartheta = \dfrac{\rho_0 - \rho}{\rho}$ en donde ρ_0 y ρ son las densidades del fluido en dos puntos distintos del flujo, el número de Grashof puede sustituirse por su modificación de esta forma:

$$Ar = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0}$$

El parámetro Ar se llama número de Arquímedes. Es idéntico al número de Grashof, con la condición de β constante. Generalmente, se usa el número de Arquímedes cuando se estudian los procesos de convección libre en los líquidos que contienen partículas sólidas, burbujas, o gotas de otro líquido.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 220, 221.

220, 221.

Transferencia de calor por convección. Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

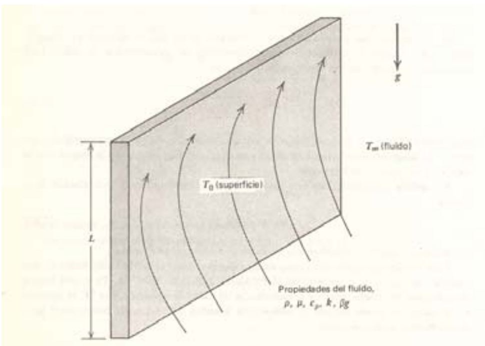
Estudiamos el caso e la figura, en el que no hay velocidad especificada; el flujo es el resultado de la transferencia de energía entre la placa a temperatura T_0 y el del fluido a temperatura ambiente T_∞. Las propiedades de interés del fluido son ρ, μ, c_p,k y β. La última propiedad mencionada es el coeficiente de dilatación térmica, usado para representar la variación en la densidad del flujo con la temperatura en la forma: $\rho = \rho_0 (1 + \beta \Delta T)$, en donde ρ_0 es la densidad de referencia dentro de la capa límite y ΔT es la diferencia de temperaturas entre el fluido en la superficie de la placa y la correspondiente lejos de la placa.
Se puede escribir la fuerza boyantez por volumen unitario, F_B, como:

$F_B = (\rho - \rho_0) g$ y sustituyendo en la ecuación interior:

$$F_B = \rho_0 \beta g \Delta T$$

Así, en el análisis dimensional, se deben incluir las variables β, g y ΔT en este proceso de convección natural.
Trataremos a β y g como una sola variable en el análisis dimensional.

Figura 1 número de Grashoft. Parámetros de análisis dimensional para la convección forzada en un conducto circular



Variable	Símbolo	Dimensiones.
Altura	L	L
Diferencia de temperatura	ΔT	T
Coeficiente de dilatación térmica	βg	$L/t^2 T$
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	$L^2/t^2 T$
Conductividad térmica del fluido	k	$ML/t^3 T$
Coeficiente de transferencia de calor	h	$M/t^3 T$

Aplicando el teorma de pi de Buckingham se tiene que se deben formar cuatro grupos pi adimensionales. Si se designa como un grupo núcleo a las variables L, ρ, μ y k, los grupos pi son:

$\pi_1 = L^a \rho^b \mu^c k^d \Delta T$

$\pi_2 = L^e \rho^f \mu^g k^h \beta g$

$\pi_3 = L^i \rho^j \mu^k k^l c_p$

$\pi_4 = L^m \rho^n \mu^0 k^p h$

Calculamos π_1 y π_2 obetiendo:

$$\pi_1 = \frac{L^2 \rho^2 k \Delta T}{\mu^3} \qquad \pi_2 = \frac{L \mu \beta g}{k}$$

El análisis y el trabajo experimental han demostrado que siempre aparecen juntos los dos primeros grupos en forma de un solo grupo adimensional. El parámetro que se forma es:

$$\pi_1 \pi_2 = \frac{L^2 \rho^2 k \Delta T}{\mu^3} \frac{L \mu \beta g}{k} = \frac{\rho^2 \beta g}{\mu^2} L^3 \Delta T$$

Conocido como número de Grashof, designado por Gr y definido en la forma:

$$Gr \equiv \frac{\rho^2 \beta g}{\mu^2} L^3 \Delta T$$

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 369, 565.

369.

Convección natural en una sola fase fluida y durante la película de condensación.

Convección natural laminar en una superficie isotérmica vertical.

Análisis dimensional y datos experimentales.

La ecuación funcional para el coeficiente de transferencia de calor h, en convección natural es h o $\overline{h} = fn(k, |T_W - T_\infty|, x$ o $L, \upsilon, \alpha, g, \beta)$

Hay ocho variables en W,m,s y ºC, así que 8-4=4 pi-grupos. Para $\overline{h}$ y la longitud característica L los grupos son:

$$Nu_L \equiv \frac{\bar{h}L}{k} \quad \Pr \equiv \frac{\upsilon}{\alpha} \quad \Pi_3 \equiv \frac{L_3}{\upsilon^2}|g| \quad \Pi_4 \equiv \beta|T_W - T_\infty| = \beta\Delta T$$

$\Pi_3\Pi_4 = Gr_L = \dfrac{g\beta\Delta T L^3}{\upsilon^2}$, conocido como número de Grashof.

565.

Una introducción a la transferencia de masa. Coeficientes en la transferencia de masa.

Convección natural en la transferencia de masa.

Definimos el número de Grashof como $Gr_L = \dfrac{g\Delta\rho L^3}{\rho\upsilon^2}$

Donde el termino $\Delta\rho$ se obtiene de la ecuación de convección natural para flujos :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = (1 - \frac{\rho_\infty}{\rho})g + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Eliminamos ρ de la ecuación, mediante analogía con la transferencia de calor en convección natural $(1 - \dfrac{\rho_\infty}{\rho}) = \beta(T - T_\infty)$; $\beta\Delta T = \dfrac{\Delta\rho}{\rho}$.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Página: 216.

216

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Grashof

$$Gr = \frac{\beta g\rho^2 L^3\Delta T}{\mu^2} = \frac{g\beta L^3\Delta T}{v^2}$$

Interpretación:

Relación entre las fuerzas ascensionales multiplicado por las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas elevado al cuadrado.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 54, 471.

54.

Desarrollo de las ecuaciones gobernantes. Flujos viscosos.

Se define el número de Grashof como la siguiente relación:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T l^3}{v^2}$$

g es la aceleración gravitacional, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, ΔT diferencia de temperatura, l longitud, v viscosidad cinemática.

471.
Análisis dimensional. Fundamentos de análisis dimensional.
Estudiamos el caso de la caida de una esferea en un fluido bajo los efectos de la gravedad, el fluido tiene densidad ρ y viscosidad μ. La diferencia de densidad entre la esfera y el fluido $\Delta\rho$.
El número de Grashof se define como:

$$Gr = \frac{g}{v^2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)D^3$$

D: diámetro de la esfera.

$$v = \frac{\mu}{\rho}.$$

Año: 1985.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.
505.
Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.
Nombre del grupo adimensional: Grashof (Gr)

Grupo: $Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L_c^3}{\upsilon^2}$

Donde T_w es la temperatura de la placa, T_∞ es la temperatura de la corriente libre, g es la aceleración gravitacional, β coeficiente de expansión térmica, υ es la viscosidad cinemática.

Interpretación física: $\frac{\text{(Fuerzas de flotación)(Fuerzas de inercia)}}{\text{(Fuerzas viscosas)}^2}$

Año: 1988.
Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 533, 540, 273, 385, 398, 386(correlaciones), 417,387, 401(correlaciones).
533.
Introducción a los efectos del cambio de fase. Parámetros adimensionales.
Se define el número de Grashof como:

$Gr = \frac{\rho g\Delta\rho L^3}{\mu^2}$; también se puede expresar de la forma:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{v^2}$$

Dependiendo del proceso físico es más conveniente utilizar una o la otra.
ρ es la densidad del fluido, μ la viscosidad, v la viscosidad cinemática, g la constante gravitacional, ΔT la diferencia de temperaturas , como puede ser entre la pared y la temperatura de un fluido como vapor saturado, $\Delta\rho$ el cambio de densidad a lo largo de la capa límite, el peso específico de flotabilidad sería g$\Delta\rho$, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, L es la longitud del cuerpo donde circula el fluido.

540.
Transferencia de calor con cambio de fase. Película de condensación.
El número de Grashof en la película de condensación.
El número de Grashof para película de condensado es:

$$Gr_{película} = \frac{\rho g \Delta \rho h'_{fg} L^3}{\mu k \Delta T} = \frac{\rho g \Delta \rho L^3}{\mu^2} \frac{c_p \mu}{k} \frac{h'_{fg}}{c_p \Delta T}$$

ρ, μ, k, c_p son la densidad, viscosidad, conductividad y calor específico del fluido en estado líquido, h'_{fg} es el calor latente en KJ/Kg, ΔT es la diferencia entre la temperatura de vapor saturado y la temperatura de la pared., L longitud de la placa vertical fría que es introducida en vapor saturado.
273.
Principios de convección. Análisis dimensional.
El número de Grashof se define como:

$$Gr_L = \frac{g \Delta \rho L^3}{v^2 \rho_0}$$

y nos dá el efecto de la flotabilidad.
v la viscosidad cinemática, g la constante gravitacional, $\Delta\rho$ el cambio de densidad a lo largo de la capa límite, el peso específico de flotabilidad sería g $\Delta\rho$, L es la longitud del cuerpo donde circula el fluido.
385.
Convección libre. El número de Grashof.
Se define el número de Grashof para convección libre como:

$$Gr_x = \left(u_{avg} x / v\right)^2 = g\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_\infty}\right)\left(\frac{x^3}{v^2}\right), \text{ donde}$$

$u_{avg} = \left[\left(1 - \rho_w / \rho_\infty\right) g x\right]^{1/2}$:velocidad media
Estudiamos el caso de un fluido que desciende por una placa vertical a temperatura distinta del fluido.
El subíndice w hace referencia a la pared de la placa, ∞ a la corriente libre, ρ es la densidad, v la viscosidad cinemática, y x es la coordenada paralela a la placa, y su origen está en el borde de ataque.
398.
Convección libre. Convección libre en una placa vertical.
Correlación de flujo de calor constante.
Sparrow y Gregg índican un número de Grashof modificado, para el caso de calor constante en la pared, en convección libre.

$$Gr_x^* = Gr_x Nu_x = \frac{g \beta q''_w x^4}{k v^2}$$

q''_w es el flujo de calor constante de la pared
k es la conductividad, v la viscosidad cinemática, g la constante gravitacional, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, x es la coordenada paralela a la placa vertical, teniendo como origen, el borde de ataque.

417.
Convección libre.
El número de Grashof en convección libre es análogo al cuadrado del número de Reynolds en convección forzada.
387.
Convección forzada. El coeficiente de expansión térmica.
Se define el número de Grashof como:
$$Gr_x = g\beta\left(T_W - T_\infty\right)x^3 / v^2$$
g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, T es la temperatura, el subíndice w hace referencia a la pared e ∞ a la corriente libre, v es la viscosidad cinemática, y x la coordenada paralela a la placa vertical, teniendo como origen el borde de ataque.

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere
Páginas: 276, 277, 275.
276.
Flujo y transporte.
Definimos el siguiente proceso, con coeficiente de transmisión h y con temperaturas t_0 la de la superficie y t_∞ la del ambiente.
El flujo de calor es:
$$Q = hA\left(t_0 - t_\infty\right)$$
L es la dimensión característica de la superficie.
La velocidad u es generada por un flujo externo en la elevación L en la región de perturbación $\rho_r - \rho = \rho_\infty - \rho = \Delta\rho$ puede ser estimada por la ecuación de la energía cinética $\frac{\rho u^2}{2}$ por unidad de volumen, el trabajo dentro de la fuerza de flotabilidad en la distancia L, gL $\Delta\rho$ por unidad de volumen. Así:
$$\frac{\rho u^2}{2} \simeq gL\Delta\rho$$
Despreciando las fuerzas viscosas y otros efectos pequeños.
El número de Reynolds se define como:
$$\mathrm{Re} = \frac{uL}{v} \propto \sqrt{\frac{gL^3\Delta\rho}{v^2\rho}} = \sqrt{\left(\frac{gL^3}{v^2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)} = \sqrt{Gr}$$
v es la viscosidad cinemática, g es la constante gravitacional, Gr es el número de Grashof, que sustituye al número de Reynolds en los flujos forzados cuando estamos en flujos inducidos por flotabilidad.
275-276-277
Transporte de masa combinado con térmico. Formulación de semejanza y soluciones para una placa plana vertical.
Transferencia de masa. Transporte de masa y calor combinado.

Se define el número de Grashof local como:

$$Gr_x = \frac{gx^3}{\nu^2}\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

g es la constante gravitacional, ν la viscosidad cinemática, x la coordenada paralela a la placa con origen en el borde de ataque, ρ es la densidad del fluido, $\Delta\rho$ es la diferencia de densidad en el fluido.

Se define el número de Grashof de especies local de la siguiente forma:

$$Gr_{x,c} = \frac{g\beta x^3\left(C_0 - C_\infty\right)}{\nu^2}$$

β es el coeficiente volumétrico de expansión térmica, C_0 es la concentración, el subíndice 0 hace referencia a condiciones en la superficie, y el subíndice ∞ a una distancia media.

Se define el número de Grashof combinado como:

$$Gr_x' = Gr_x + Gr_{x,c}$$

Se define el número de Grashof con variación exponencial $t_0 - t_\infty$, en la forma ($d = Me^{mx}$,profundidad de la capa):

$$Gr_m = \frac{g\beta d}{m^3\nu^2}$$

y $Gr_{m,C} = \dfrac{g\beta^* e}{m^3\nu^2}$

$$e = M_C e^{mx}$$

β^* es el coeficiente de expansión en especie.

M flujo de momento, número de Hartmann.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.

Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.

Editorial: Cambridge University Press.

Página: 396-397.

396, 397.

Análisis dimensional para transferencia de calor. Convección libre.

En la convección libre, el movimiento del fluido se produce por una diferencia de densidad.

Estudiamos un proceso donde el coeficiente de transferencia depende de:

$h = f\left(L, g, \Delta\rho, \rho, \mu, c_p, k\right)$. El número de Gashof se define como:

$Gr = \dfrac{\rho\Delta\rho g L^3}{\mu^2}$, para este caso podemos decir que *Nu = f(Gr,Pr)* y análogamente para transferencia de masa *Sh = f(Gr,Sc).*

Si tenemos el coeficiente de expansión térmica del fluido de la siguiente forma:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$$

Para pequeños cambios de temperatura $\Delta\rho = -\rho\beta\Delta T$

Ignorando en signo negativo, tenemos un número de Grashof alternativo.

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2}$$

Para transferencia de masa el número de Grashof es:

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta' \Delta y L^3}{\mu^2}$$

Donde $\Delta\rho = \rho_A \beta' \Delta y$ siendo $\beta' = \frac{(M_{rB} - M_{rA})}{M_{rA}}$

Estamos asumiendo gases ideales con densidad la de la mezcla de A y B, M_r es la masa molecular relativa.

L es una longitud, ρ la densidad del fluido, ρ_A densidad de A, g la constante gravitacional.

Año: 1991.

Libro: Dimensional Análisis and Scale-up in chemical Engineering. Análisis dimensional y escalonamiento en ingeniería química.
Autores: Zlokarnik M.
Editorial: Springer-Verlag.

Página: 54.

54.

Tratamiento de las variables propiedades físicas por análisis dimensional.

En procesos característicos de transferencia de calor, la temperatura depende de la densidad. Se emplea normalmente el número de Grashof así se toma en cuenta la variación de la densidad, este número es útil si está presente la acción de la gravedad.

$$Gr \equiv \beta \Delta T Ga = \beta \Delta T \, \mathrm{Re}^2 \, Fr^{-1} = \beta g \Delta T l^3 v^{-2}$$

β es el coeficiente de expansión térmica, ΔT la variación de temperatura, Ga el número de Galielo, Re el número de Reynolds, Fro el número de Froude, l la longitud característica, v la viscosidad cinemática.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 388, 437, 551, 584, 558.

388.

Transferencia de calor por convección. Enunciado de problema.

Se define el número de Grashof como:

$$Gr_L = \frac{g(\rho_\infty - \rho_s) L^3}{\rho v^2}$$

Estamos en el caso de una placa vertical de longitud L, con fuerza de flotabilidad representada por $g(\rho_\infty - \rho_s)$, ρ es la densidad del fluido, v la viscosidad cinemática.

437.

Transferencia de calor por convección: Análisis teórico.
Convección natural en superficies verticales.

Se define el número de Grashof local como:

$$Gr_x = \frac{g\beta\left(T_0 - T_\infty\right)x^3}{\nu^2}$$

El subíndice cero hace referencia a la pared e ∞ a la corriente libre, g es la constante gravitacional, ν la viscosidad cinemática, β el coeficiente de expansión térmica, T es la temperatura, x la coordenada paralela a la placa con origen el borde de ataque.

551.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico, convección natural.

Caracterización de parámetros por convección natural.

El número de Grashof se define como:

$$Gr_L = \frac{g\beta\left(T_S - T_F\right)L^3}{\nu^2} = \frac{Ra_L}{\Pr}$$

T_S es la temperatura del sólido, T_F es la temperatura de referencia, g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, L es la longitud de la placa, ν la viscosidad cinemática, Ra es el número de Rayleigh, Pr es el número de Prandtl.

584.

Transferencia de calor por convección: Ebullición y condensación.

Caracterización de parámetros en procesos de transferencia de calor en dos fases.

El número de Grashof se define como:

$$Gr_L = \frac{g\left(\rho_f - \rho_g\right)L^3}{\rho\nu^2} = \frac{\rho g\left(\rho_f - \rho_g\right)L^3}{\mu^2}$$

Representa la relación de los efectos de flotabilidad y los efectos viscosos para flujo en dos fases.

El subíndice f hace referencia al líquido y g al gas, ρ es la densidad del fluido, g la constante gravitacional, μ es la viscosidad del fluido, L la longitud característica.

558.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico. Convección natural. Flujo sobre una pared vertical plana.

Flujo de calor uniforme en la pared.

El número de Grashof local de flujo se define como:

$$Gr_x^* = Nu_x Gr_x = \frac{g\beta q_0'' x^4}{k\nu^2}$$

g la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, q_0'' en flujo uniforme de calor en la pared, k es la conductividad y ν la viscosidad cinemática, x es la coordenada paralela a la placa con origen en el borde de ataque.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.

Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.

Editorial: McGraw-Hill.

Páginas: 400, 404, 411.

400.
Convección libre. Capa límite.
Soluciones de similitud en flujo laminar sobre una placa vertical a temperatura constante.
Se define el número de Grashof local como:

$$Gr_x = \frac{g\beta x^3 \left(t_0 - t_\infty\right)}{v^2}$$

g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, x es la coordenada vertical, t_0 la temperatura en la pared y t_∞ la temperatura de la corriente libre, v es la viscosidad cinemática..

404.
Convección libre. Capa límite.
Soluciones de similitud con temperatura en la superficie variable.
Se define el número de Grashof modificado como:

$$Gr_x^* = Gr_x Nu_x = \frac{g\beta}{kv^2}\dot{q}_0^{"} x^4$$

Gr_x es el número de Grashof local, Nu_x es el número de Nusselt local, g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, x es la coordenada vertical, k es la conductividad térmica del fluido, v es la viscosidad cinemática, $\dot{q}_0^{"}$ es el flujo de calor en la superficie.

411.
Transferencia de calor para otras geometrías distintas de una placa vertical.
Moran, Lloyd, y otros indican que para geometrías inclinadas se sustituye g por $g\cos\vartheta$ en el número de Grashof.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 420.

420.
Convección libre. Parámetros adimensionales de la convección libre.
Estudiamos el caso de convección libre sobre una placa vertical**.**
Se define el número de Grashof como:

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \left(T_W - T_\infty\right)}{v^2}$$

g es la constante gravitacional, β coeficiente volumétrico de expansión térmica del fluido, L la longitud de la placa, v la viscosidad cinemática, T_W es la temperatura de la pared, T_∞ es la temperatura fuera de la capa límite.

El número de Grashof representa la relación de las fuerzas de flotabilidad y las fuerzas viscosas sobre el fluido.
El número de Grashof en convección libre juega el mismo papel que el número de Reynolds en convección forzada.
Así en convección libre, la transición de flujo laminar a turbulento es gobernada por el número crítico de Grashof.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 166-168.

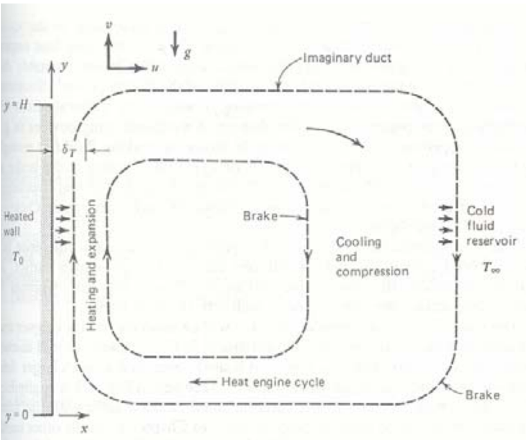
166-168.
Convección externa natural. Análisis de escala.
Fluidos con Prandtl bajo.

El número de Grashof es definido como:

$$Gr_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{v^2} = \frac{Ra_H}{\Pr}$$

β: Coeficiente de expansión térmica, ΔT es la diferencia de temperatura, H la longitud característica, v la viscosidad cinemática, Ra el número de Rayleigh, Pr el número de Prandtl.

Figura 2 número de Grashof. Convección natural a lo largo de una pared vertical, y el calor que es el motor responsable de flujo conducido.



El número de Grashof solemos ver que es interpretado en los textos como el parámetro que describe la razón de flotabilidad entre fuerzas viscosas en la capa límite por convección natural. Para ver el error de esta interpretación, consideramos la convección natural de el aire a lo largo de una pared vertical fría en una habitación, donde $Gr_H \sim 10^8\text{-}10^9$. De acuerdo con la interpretación de arriba, las fuerzas viscosas deben ser insignificantes en comparación con la fuerza del cuerpo por que el número de Grashof es enorme en comparación con la unidad. Esto con toda certeza no es cierto, desde el caso del aire, siempre existe un equilibrio entre fricción y flotabilidad sin un equilibrio entre las fuerzas, el chorro en la pared no puede existir en estado de equilibrio. La idea de que la razón de escalas de inercia entre fricción como Gr_H viene de un análisis incorrecto de escala interpretado en una región distinta de la región de la capa límite.

El número adimensional Gr_H no tiene significado. Tiene significado ¼ de la potencia de este número.

$$Gr_H^{1/4} \sim \frac{\text{altura de la pared}}{\text{pared cortada por el espesor de lacapa}} \quad \text{(wall shear layer thickness)}$$

Pr<1

El significado de $Gr_H^{1/4}$ es puramente geométrico: este valore numérico cuenta para la la delgadez de la región de la capa límite ocupada por la flotabilidad inducida del flujo.

Cuando, en un problema el valor calculado de Gr_H es enorme comparado con la unidad, la naturaleza nos está diciendo que en la vida real $Gr_H^{1/4}$ no será necesario que sea elevado a la cuarta potencia.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 385.

385.
Convección natural.
Convección natural laminar para una placa vertical con temperatura constante en un fluido infinito. Solución exacta.

Definimos el número de Grashof como :

$$Gr = \frac{g\beta\left|T_w - T_\infty\right|x^3}{v_\infty^{\;2}}$$

g es la constante gravitacional, β Coeficiente de expansión térmica, $T_w - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la pared y la corriente libre, x la coordenada local, v_∞ la viscosidad de la corriente libre.

Y=0; T=T_w
Y=∞*;T=*T_∞
Y: coordenada horizontal.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 20, 292, 294.

20.
Transferencia de calor elemental.
Modos de transferencia de calor.
Convección de calor.

Estamos en el caso de convección natural de un flujo sobre una superficie vertical caliente.

En gases, la localización de la transición entre flujo laminar y turbulento en la capa límite, esta determinada por un valor crítico, de un grupo adimensional llamado , número de Grashof. El número de Grashof se define como $Gr_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{v^2}$ donde ΔT =T_s-T_e, g es la aceleración gravitacional m/s^2, x es la distancia desde la parte superior de la superficie donde la capa límite comienza, y β es el coeficiente volumétrico de expansión, el cual para un gas ideal es 1/T , donde T es la temperatura absoluta en K.

292-294.

Fundamentos de la convección y correlaciones.

Análisis dimensional.

Convección natural en una superficie plana vertical.

La placa está a temperatura T_s y el fluido a temperatura T_e.

$$\overline{q_s} = f(\Delta T, \beta, g, \rho, \mu, k, c_p, L)$$

$$\Pi = \overline{q_s}^a \Delta T^b \beta^c g^d \rho^e \mu^f k^g c_p{}^h L^i$$

Si ponemos en función de las unidades primarias: Kg,m,s,K y W

La suma de los exponentes de cada una de las dimensiones primarias da como resultado:

Kg: e+f-h=0

m: -2a+d-3e-f-g+i=0

s: -2d-f+h=0

K: b-c-g-h=0

W: a+g+h=0

Hay 9-5= 4 números adimensionales independientes.

Por experiencia en convección tenemos Nt, y Pr son grupos adimensionales. $\Pi_3 = \beta\Delta T$, es obviamente un grupo adimensional independiente de Nu y Pr.

Nos falta un grupo por obtener:

Si elegimos: d=1,a=b=g=0.

e+f-h=0

1-3e-f+i=0

-2-f+h=0

-c-h=0

h=0

Por lo tanto: c=0, f=-2, e=2, i=3. Obtenemos: $\Pi_4 = \frac{g\rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{gL^3}{v^2}$

Los grupos Π_3 y Π_4 no tienen nombres puesto que teóricamente y experimentalmente la convección natural depende del producto de ambas. Este grupo resultado del producto de ambas se le conoce como número de Grashof:

$$Gr_L = \frac{g\beta\Delta T L^3}{v^2}$$

294.

Tabla de número adimensionales.

Grupo	Definición	Se usa en
Número de Grashof	$Gr_L = \frac{g\beta\Delta T L^3}{v^2}$	Flujos naturales con Pr ~ 1.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera, David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 320, 487.

320

Introducción a la convección. Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo
Número de grashof (Gr_L).
Definición

$$\frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

Interpretación
Razón de las fuerzas de empuje a las viscosas.

487

Convección libre.

Consideraciones de similitud.

Consideramos los parámetros adimensionales que gobiernan el flujo de convección libre y la transferencia de calor. Como para la convección forzada, los parámetros se pueden obtener al quitar las dimensiones a las ecuaciones gobernantes.

Al introducir

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \qquad y^* \equiv \frac{y}{L}$$

$$u^* \equiv \frac{u}{u_0} \qquad v^* \equiv \frac{v}{u_0}$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_S - T_\infty}$$

Donde L es una longitud característica y u_0 es una velocidad de referencia arbitraria, la ecuación de momento quedaría

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{u_0^{\,2}} T^* + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

El término del lado derecho de la ecuación es un parámetro adimensional consecuencia directa de la fuerza de empuje. Sin embargo, como se expresa en términos de la velocidad de referencia desconocida u_0, no es conveniente en su forma actual. Se acostumbra por tanto trabajar con una forma alternativa que se obtiene al multiplicar por $Re_L^2=(u_0L/v)^2$. El resultado se denomina número de Grashof Gr_L.

$$\mathrm{Gr_L} \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L}{u_0^{\,2}} \left(\frac{u_0 L}{\nu}\right)^2 = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

El número de Grashof juega el mismo papel en la convección libre que el número de Reynolds en la convección forzada. El número de Reynolds proporciona una medida de la razón de las fuerzas inerciales a las viscosas que actúan sobre un elemento fluido. En contraste, el número de Grashof indica la razón de las fuerzas viscosas que actúan sobre el fluido.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 233.

233

Sistemas de convección natural. Transferencia de calor por convección natural en una placa plana vertical.

Se define el número de Grashof como

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{v^2}$$

g es la constante gravitacional, β es el coeficiente volumétrico de expansión térmica, $T_p - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la pared y la corriente libre x la coordenada local, v la viscosidad cinemática.

El número de Grashof puede interpretarse, físicamente, como un grupo adimensional que representa el cociente entre las fuerzas de flotabilidad y las fuerzas viscosas en la corriente de convección natural. Juega un papel análogo al número de Reynolds en la convección forzada, y es la variable principal utilizada como criterio de la transición de capa limite laminar a turbulenta.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.25, 17.68.

1.25.

Tabla grupos adimensionales.

Grupo adimensional: Número de Grashof..
Símbolo: Gr
Definición: $\frac{g\beta\Delta TL^3}{v^2}$
Significado físico: Relación entre la flotabilidad y las fuerzas viscosas.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 24, 378, 379, 387.

24.

Diferentes tipos de transferencia de calor.

Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de un tubo y se va calentando.

El siguiente grupo adimensional define el número de Grashof

$$Gr = \frac{gL^3{}_0}{v_F{}^2} \frac{\rho_W - \rho_F}{\rho_F}$$

Éste combina el número de Galileo y la cantidad característica $\frac{\rho_W - \rho_F}{\rho_F}$.

Donde g es la aceleración de la gravedad, w hace referencia a la pared y el subíndice F al fluido, L_0 es la longitud característica , ρ es la densidad del fluido, v la viscosidad cinemática.

El cambio de densidad con la temperatura se puede expresar

$$\frac{\varrho_W - \varrho_F}{\varrho_F} = \beta_F (\vartheta_W - \vartheta_F)$$

Y entonces el número de Grashof se convierte en :

$$Gr = Ga\,\beta_F (\vartheta_W - \vartheta_F) = \frac{g\,\beta_F (\vartheta_W - \vartheta_F)\, L_0^3}{\nu^2}$$

Donde β es el coeficiente de expansión, en este caso es calculada por la temperatura del fluido y v es calculada con el promedio de temperatura entre el fluido y la pared.

378-379.

Transferencia de masa y de calor por convección.

Flujo libre.

Consideramos una pared vertical caliente a una temperatura ϑ_0, en frente de ella hay un fluido que antes de calentarse, estaba en equilibrio hidrostático, y tenía una temperatura ϑ_∞ , desde el principio hasta el fin

Se define el número de Grashof como:

$$\frac{\beta_\infty (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)\, g\, L^3}{\nu^2} := Gr$$

β es el coeficiente de expansión, v la viscosidad cinemática.

Para gases ideales , el coeficiente de expansión:

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{R}{p} = \frac{1}{T}$$

379.

Placa inclinada.

Para una placa inclinada el número de Grashof es:

Consideramos una pared caliente a una temperatura ϑ_0, en frente de ella hay un fluido que antes de calentarse, estaba en equilibrio hidrostático, y tenía una temperatura ϑ_∞, g la constante gravitacional, L la longitud característica, υ la viscosidad cinemática.

$$Gr_{\varphi} = \frac{\beta_{\infty}\,(\vartheta_0 - \vartheta_{\infty})\,g\,L^3\,\cos\varphi}{\nu^2}$$

Donde φ es el ángulo de la placa , que se mide respecto el eje vertical.

387

Transferencia de masa en flujo libre.

En un proceso simultáneo de transferencia de masa y calor en mezclas binarias la densidad es función de:

$$\varrho = \varrho(p, T, \xi)$$

Donde :

$$\varrho_0 = \varrho_{\infty} + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\right)_{p,T}(\xi_0 - \xi_{\infty})$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)_{T,p} = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\right)_{T,p} := \gamma$$

$$\varrho_0 = \varrho_{\infty} - \varrho_{\infty}\,\gamma_{\infty}\,(\xi_0 - \xi_{\infty})$$

El número de Grashof

$$Gr = \frac{(\varrho_{\infty} - \varrho_0)\,g\,L^3}{\varrho_{\infty}\,\nu^2}$$

g es la constante gravitacional, L la longitud característica, υ la viscosidad cinemática.

Se convierte en:

$$Gr' = \frac{\gamma_{\infty}\,(\xi_0 - \xi_{\infty})\,g\,L^3}{\nu^2}$$

Se introduce un número de Grashof modificado, donde la densidad viene dada por la serie de Taylor:

$$\varrho_0 = \varrho_{\infty} + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial T}\right)_{p,\xi}(\vartheta_0 - \vartheta_{\infty}) + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\right)_{p,T}(\xi_0 - \xi_{\infty})$$

$$\varrho_0 = \varrho_{\infty} - \varrho_{\infty}\,\beta_{\infty}\,(\vartheta_0 - \vartheta_{\infty}) - \varrho_{\infty}\,\gamma_{\infty}\,(\xi_0 - \xi_{\infty})$$

El número de Grashof modificado se expresa:

$$Gr = \frac{\beta_{\infty}\,(\vartheta_0 - \vartheta_{\infty})\,g\,L^3}{\nu^2} + \frac{\gamma_{\infty}\,(\xi_0 - \xi_{\infty})\,g\,L^3}{\nu^2}$$

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Páginas: 684, 695, 908.

684.
Modelos de transferencia de calor. Coeficientes de transferencia de calor.
Para la transferencia de calor por convección de un fluido en flujo turbulento en una tubería las variables que intervienen son:
$f_2(D,k,\mu,\rho,C_P,g,\beta,\Delta T,L,h)=0$
D: diámetro de la tubería.
K: conductividad térmica del fluido.
V: velocidad del fluio.
ρ :densidad del fluido.
μ : viscosidad del fluido.
C_P :calor específico del fluido.
h: coeficiente de transferencia de calor.
Para el caso de convección natural, además:
g: aceleración de la gravedad
β : coeficiente térmico de expansión volumétrica.
ΔT : diferencia de temperatura entre la superficie calentada y el fluido.
L: longitud de la sección calentada.
Por análisis dimensional de este conjunto de variables se obtiene una completa colección de grupos adimensionales.

$$\frac{hD}{k}=F_2\left[\left(\frac{Dv\rho}{\mu}\right),\left(\frac{C_P\mu}{K}\right),\left(\frac{L}{D}\right),\left(\frac{L^3\rho^2 g\Delta T\beta}{\mu^2}\right),\left(\frac{L^3\rho^2 g}{\mu^2}\right),\left(\frac{L^2\rho^2 K\Delta T}{\mu^3}\right)\right]$$

Para el caso de un calor horizontal infinito en la parte plana del plato en ausencia de fuerzas de convección, queda:

$$\frac{hD}{k}=F_2\left[\left(\frac{C_P\mu}{K}\right),\left(\frac{L^3\rho^2 g\Delta T\beta}{\mu^2}\right)\right]$$

ó

Nu= F_2[Pr,Gr] donde Gr = $\left(\frac{L^3\rho^2 g\Delta T\beta}{\mu^2}\right)$ es la razón entre la flotabilidad y las fuerzas viscosas

695.
Modelos de transferencia de calor. Modelos de transferencia de calor por convección. Coeficientes de transferencia de calor.
Unos de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:
El número de Grashof para transferencia de calor

$$Gr_h = \left(\frac{L^3 \rho^2 g \Delta T \beta}{\mu^2} \right) = \frac{\text{temperatura inducida por las fuerzas de flotabilidad}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

g: aceleración de la gravedad
β : coeficiente térmico de expansión volumétrica.
ΔT : diferencia de temperatura entre la superficie calentada y el fluido.
L: longitud de la sección calentada.
μ : viscosidad del fluido.
ρ : densidad del fluido.

908.
Modelos para transferencia de masa. Análisis dimensional de transferencia de masa por convección.
Para transferencia de masa por difusión molecular y convección forzada las variables que intervienen son:
D: longitud
Difusividad: D_{AB}
v: velocidad del fluido.
ρ : densidad del fluido.
μ : viscosidad del fluido.
K ρ : coeficiente de transferencia de masa.
Para el caso de convección natural además:
g: aceleración de la gravedad.
$\Delta\rho A$: diferencia de densidad másica.
Por análisis dimensional, llegamos a que el número de Grashof para transferencia de masa queda definido:

$$Gr \equiv \frac{gD^3 \rho \Delta \rho A}{\mu^2}$$

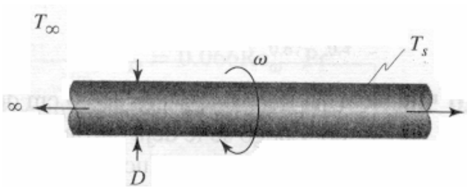
Año: 2002.
Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 254, 306-307, 327, 330, 321-322.
254.
Tabla Grupos adimensionales relevantes en la transferencia d calor y el flujo de fluidos.
Grupo: número de Grashof
Definición: $\frac{g\beta(T_S - T_\infty)L^3}{v^2}$
Interpretación: Relación entre fuerzas flotantes y viscosas.
306-307.
Convección natural. Parámetros de similitud para convencional natural.
Se define el número de Grashof como:
Número de Grashof $\frac{g\beta(T - T_\infty)L^3}{v^2}$
g es la constante gravitacional, β: coeficiente térmico de expansión volumétrica,

$T - T_\infty$ diferencia de temperatura entre T y la temperatura de la corriente libre, L la longitud característica, v la viscosidad cinemática.

Representa la relación de las fuerzas de flotación con las fuerzas viscosas.
g es la constante gravitacional, β: coeficiente térmico de expansión volumétrica,
$T - T_\infty$ diferencia de temperatura entre T y la temperatura de la corriente libre, L la longitud característica, v la viscosidad cinemática.

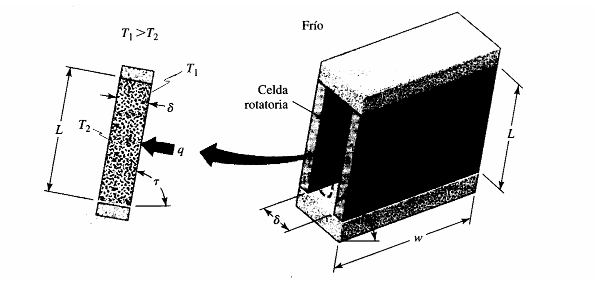
327.
Convección natural.
Cilindros, discos y esferas rotatorios.
La convección natural simple determinada por el número de Grashof convencional
$\frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{v^2}$ controla la razón de transferencia de calor.
g es la constante gravitacional, β: coeficiente térmico de expansión volumétrica, $T_s - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre el sólido y la corriente libre, v la viscosidad cinemática, D el diámetro.

Figura 3 número de Grashof. Convección natural en el exterior de un cilindro que gira con velocidad w.



330.
Convección natural. Fuerzas combinadas y convección natural.
Cuando el número de Grashof tiene un orden de magnitud igual o mayor que el cuadrado del número de Reynolds, no es posible ignorar los efectos de la convección natural, en comparación con la convección forzada.
321-322.
Convección natural. Correlación empírica para varias formas geométricas.
Espacios cerrados.
Si el espacio cerrado se compone de dos superficies paralelas isotérmicas con temperaturas T_1 y T_2 separadas una distancia δ, una altura L y las caras superior e inferior están aisladas, g es la constante gravitacional, v la viscosidad cinemática, el número de Grashof se define mediante.

$$Gr_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{v^2}$$
Figura 4 número de Grashof.



Año:2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Página: 219, 222, 223.

219.

Flujos flotables.

Estamos en el caso de convección natural sobre una pared vertical a temperatura T_w, T_e es la temperatura exterior de la capa, g es la aceleración gravitacional, L es la longitud de la placa, v viscosidad cinemática, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica.

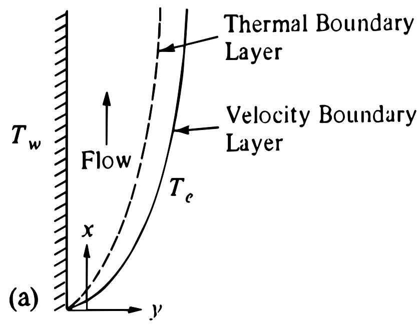


Figura 5 número de Grashof. Convección natural sobre una placa vertical con $T_w > T_e$

El número de Grashof se representa como:

$$Gr_L = \frac{u_c^2 L^2}{v^2} = \frac{g\beta L^3 \left(T_w - T_e\right)}{v^2}$$

222-223.

Flujos flotables Convección natural en la capa límite.

Flujo laminar en placas verticales.

El número de Grashof local viene dado por:

$$Gr_x = \frac{u_c^2(x) x^2}{v^2} = \frac{g\beta x^3 \left(T_w - T_e\right)}{v^2}$$

Estamos en el caso de convección natural sobre una pared vertical a temperatura T_w, T_e es la temperatura exterior de la capa, g es la aceleración gravitacional, x es la coordenada paralela a la placa vertical, v viscosidad cinemática, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica.

El número de Grashof basado en el flujo de calor viene dado por:

$$Gr_x^* = \frac{g\beta\dot{q}_w x^4}{k\nu^4}$$

$\dot{q}_w$ es el flujo de calor en la pared, k es la conductividad, g es la aceleración gravitacional, ν es la viscosidad cinemática, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, y x es la coordenada en la dirección paralela a la placa.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A..
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 465-466.

465-466

Convección natural.

Ecuación del movimiento y el número de Grashof.

Es posible hacer adimensionales las ecuaciones que rigen la convección natural y las condiciones en la frontera dividiendo todas las variables dependientes e independientes entre cantidades constantes apropiadas.

Considérese una placa plana caliente vertical sumergida en una masa inmóvil de fluido. Suponemos que el flujo por convección natural es estacionario, laminar bidimensional, y que le fluido es newtoniano con propiedades constantes incluyendo la densidad, diferencia entre el interior y el exterior de la capa frontera la que da lugar a la fuerza de empuje y sostiene el flujo (aproximación de Boussinesq) Tomemos la dirección hacia arriba a lo largo de la placa como la x y la normal a la superficie como la y.

$$x^* = \frac{x}{L_C} \qquad y^* = \frac{y}{L_C} \qquad u^* = \frac{u}{V} \qquad v^* = \frac{v}{V} \quad \text{y} \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_S - T_\infty}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de cantidad de movimiento y simplificando:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left[\frac{g\beta(T_S - T_\infty)L_C^3}{\nu^2}\right]\frac{T^*}{\mathrm{Re}_L^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

El parámetro adimensional que se encuentra entre corchetes representa los efectos de la convección natural y se llama número de Grashof, Gr_L.

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_S - T_\infty)L_C^3}{\nu^2}$$

g = aceleración gravitacional, m/s^2

β = coeficiente de expansión volumétrica.

T_s = Temperatura de la superficie en ºC.

T_∞ = Temperatura del fluido suficientemente lejos de la superficie, ºC

L_c =longitud característica de la configuración geométrica, m.

ν = viscosidad cinemática del fluido, m^2/s.

El número de Grashof, el cual también es adimensional y representa la razón entre la fuerza de empuje y la fuerza viscosa que actúan sobre el fluido, rige el régimen de flujo en la convección natural

3.11. Número De Mach.

Ernst Mach. Nació en 1838 y murió en 1916. Físico y filósofo austriaco, nacido en Turas (Moravia) y fallecido en Haar, cerca de Munich. Educado en Viena, enseñó matemáticas en la Universidad de Graz (1864-67), física en la de Praga (1867-95) y filosofía en la de Viena (1895-1901).

Realizó estudios experimentales de carácter físico y sobre la fisiología de los sentidos, y escribió, entre otras obras, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch Dargestellt* (La mecánica en su desarrollo histórico, 1883) y *Beiträge zur Analyse der Empfindungen* (Contribución al análisis de las sensaciones, 1896). Más tarde se dedicó a los problemas generales de la metodología científica.

Hasta hace pocos años no se han conocido sus investigaciones en el campo de la balística, en las que estudió las propiedades de las ondas de choque producidas en las explosiones. El comportamiento de esas ondas se describe todavía actualmente en términos tales como reflexión Mach, efecto Mach, etc., conceptos de gran importancia en el estudio de los efectos de la bomba atómica, lo mismo que el del número de Mach en la aerodinámica.

Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models . Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Página: 17.

17.

Conjunto completo de números adimensionales.

Se define el número de Mach como:

$$M = \frac{V}{c}$$

V es la velocidad característica del fluido, c es la velocidad del sonido, que se puede expresar de la forma: $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, en un gas p es la presión, γ es una constante adimensional (1.4 para gases biatómicos)

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.
Página: 303.

303.

Transmisión de calor en fluidos con velocidades grandes. Consideraciones generales.

El número de Mach se define como $N_{Ma} = \frac{U}{c}$ y es un parámetro adimensional.

U es la velocidad del fluido, y c es la velocidad del sonido en el gas considerado.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 310.

310.

Problemas especiales de transmisión de calor por convección en medios de una sola fase. Transmisión del calor en gases a altas velocidades.

El parámetro $\frac{w}{a}$ es la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido en el mismo punto. Esta relación se simboliza por M y se llama número de Mach. El número de Mach caracteriza la relación entre la energía cinética del flujo y su entalpía.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 310.

310.

Capa límite laminar y turbulenta. Coeficiente de transferencia de calor, para flujo laminar, incomprensible sobre una superficie plana.

La predicción de los resultados, están restringidos a la capa límite laminar en fluidos incompresible y bidimensional, en una superficie plana isotérmica, donde las velocidades no son demasiado elevadas.

El número de Mach del flujo es menor que ¼. Una condición relacionada es que la energía cinética sea substancialmente menor que la unidad.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Mach

$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{\gamma r T}}$$

Interpretación:

Relación de la velocidad local del fluido y la celeridad local del sonido.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Mach (M)

Grupo: $M = \frac{u_\infty}{u_c}$

Interpretación física: $\frac{\text{Velocidad}}{\text{Velocidad del sonido}}$

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 23, 300, 390.

23.
Propiedades y movimiento del fluido.
Semejanza dinámica y el uso de las relaciones adimensionales.

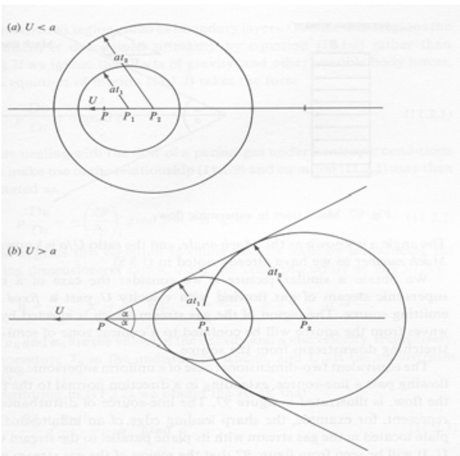
El número de Mach es la relación de la velocidad de corriente no perturbada U y el valor local de la velocidad del sonido, de las ondas del gas, para un gas perfecto la velocidad del sonido, está relacionada con la temperatura T por $a = \sqrt{\gamma R'T}$ donde γ es la relación de los calores específicos, y R es la constante de los gases específica. Por lo tanto el número de Mach es:

$$Ma = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{\gamma R'T}}$$

300.
Gases dinámicos.
Los efectos de la compresibilidad.

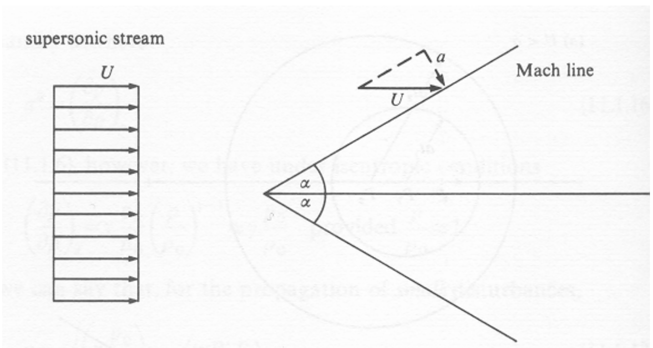
Estudiamos el caso de las perturbaciones que surgen cuando la fuente se mueve a velocidad subsónica y supersónica. Es el caso representado en la figura: la perturbación de un movimiento a una velocidad constante U y un gas uniforme estático.

Figura 1 número de Mach: Efectos de la perturbación de un movimiento.



Para el caso de fuente en movimiento a velocidad supersónica $U > a$ (a velocidad del sonido de las ondas del gas).

Figura 2 número de Mach. Líneas de Mach en flujo supersónico.



El número de Mach se puede expresar:

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{a}{U}\sin^{-1}\frac{1}{Ma}$$

α es un semiángulo.

390.

Análisis dimensional de procesos de transferencia.

Notas sobre las dimensiones para temperatura y calor.

Consideramos la transferencia de calor de un fluido que fluye en el interior de una tubería circular. El valor del flujo de calor q depende de la diferencia de temperatura ΔT entre la pared de la tubería y el fluido, del diámetro D , de la velocidad media u_m y la temperatura media del fluido T_m y de las propiedades físicas k, ρ, c_p, μ.

El número de Mach se define como:

$$Ma = \frac{u_m}{\sqrt{\gamma RT}}$$

Donde γ es la relación entre los calores específicos, R es la constante de los gases y T la temperatura.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 383.

383.

Transferencia de calor por convección con altas velocidades. Capa límite laminar para gases con propiedades variables.

Se define el número de Mach como una velocidad de corriente libre adimensional de la siguiente forma:

$$M = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma RT_\infty}}$$

u_∞ es la velocidad de la corriente libre, γ es el cociente de los calores específicos, R es la constante de los gases, y T_∞ es la temperatura del gas en la zona no perturbada.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Página: 492.

492.

Análisis de convección. Similitud y modelado.

Si en un túnel de viento, si el número de Mach es 5 veces, más grande que el valor de diseño, debemos tener cuidado para asegurar que es suficientemente pequeño de forma que implique que el flujo es incompresible.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.26.

1.26.
Tabla grupos adimensionales.
Grupo adimensional: Número de Mach.
Símbolo: Ma
Definición: $\frac{V}{a}$
Significado físico: Relación entre la velocidad del flujo y la velocidad del sonido.
Principal área de uso: flujo compresible.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 293, 389, 391.

293.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Ecuaciones de la capa límite. Velocidad en la capa límite.
El número de Mach es:

$$Ma = w_{\mathrm{m}}/w_{\mathrm{S}}$$

Donde w_m es la velocidad y w_s la velocidad del sonido.

389.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujos compresibles.
El número de Mach se define como:

$$Ma = w/w_{\mathrm{S}}$$

Donde w es la velocidad y w_s la velocidad del sonido.

391.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujos compresibles.
El número de Mach se define:

$$Ma_{\delta} = w_{\delta}/w_{\mathrm{S}\delta}$$

Donde la velocidad del sonido de los gases ideales asociada a la temperatura T_{δ} es:

$$w_{\mathrm{S}\delta} = \sqrt{\kappa R T_{\delta}} = \sqrt{c_p (\kappa - 1) T_{\delta}}$$

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Páginas: 32, 225.

32.

Fluido Compresible frente a fluido incompresible.

El número de Mach es un número adimensional el cual representa la relación entre la velocidad local y la velocidad del sonido.

225.

Teorema de Bucckingham

Variables adimensionales para flujo en tuberías.

El conjunto de variables depende de la importancia que tengan en la situación física modelada. Para el flujo de un fluido en una tubería el conjunto de variables es:

L: longitud de la tubería
D: diámetro de la tubería
g: aceleración de la gravedad.
<v> :velocidad másica del fluido
ρ :densidad del fluido
μ: la viscosidad del fluido.
σ: la tensión superficial del fluido.
c: la velocidad del sonido en el fluido.
Δp: la diferencia de presión a lo largo de la tubería.

Primero elegimos el sistema de unidades en el que nosotros queremos trabajar. Elegimos el sistema MLt. No incluimos la temperatura porque suponemos un sistema isotermo donde las variaciones de temperatura se pueden considerar despreciables.

Así:

	M	L	t
L		1	
D		1	
g		1	-2
v		1	-1
ρ	1	-3	
μ	1	-1	-1
σ	1		-2
c		1	-1
Δ p	1	-1	-2

Como resultado da la matriz dimensional:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Buscamos el determinante más grande distinto de cero que podemos encontrar en esta matriz y este es un determinante de orden 3x3.

Por tanto el rango de la matriz dimensional es 3, así 9-3= 6. Con lo que nosotros solo podemos encontrar 6 grupos adimensionales independientes.

Así obtenemos el número de Mach:

$$Ma = \frac{\langle v \rangle}{c} = \frac{\text{velocidad del fluido}}{\text{velocidad del sonido}}.$$

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 281.

281.

Análisis de la transferencia de calor por convección. Condiciones de frontera especiales y flujo de alta velocidad.

Se define número de Mach como la relación de la velocidad del flujo del gas con la velocidad acústica. $M = \frac{U_\infty}{a_\infty}$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma R_u T}{M}}$$

γ = Relación de calor específico, c_p/c_v

R_u =constante universal de los gases.

T = temperatura absoluta

M = peso molecular del gas.

3.12. Número De Nusselt.

Wilhelm Nusselt. Ingeniero Alemán, nació en 1882 en Nurnberg Alemania y falleció en Manchen en 1957. Estudió Maquinaria en la Universidad Técnica de Berlín-Charlottenburg y Manchen, graduándose en 1909. Llevó a cabo avanzados estudios en física y matemáticas y fue un asistente de O. Knolblanch en el laboratorio para física técnica en Manchen. Completó su tesis doctoral sobre la “Conductividad de los materiales aislantes” en 1907, usando la “esfera de Nusselt” para sus experimentos. Realizó un destacadísimo trabajo sobre la transferencia de calor y momento en tubos.
En 1915 publicó “Las leyes básicas de la transferencia de calor” en el cual propuso los grupos adimensionales ahora conocidos, como los principales parámetros en la teoría de similitud de transferencia de calor. Realizó otros importantes trabajos sobre la película de condensación y vapor sobre una superficie vertical, la combustión de carbón pulverizado y la analogía entre la transferencia de calor y masa. Descubrió en sus trabajos matemáticos, las soluciones bien conocidas para transferencia de calor laminar, en la región de entrada de los tubos para intercambio de calor en flujo cruzado y la teoría básica de regeneradores.
Fue profesor en la Universidad Técnica de Karlsruhe desde 1920-1925 y de la de Manchen desde 1925 hasta 1952. Falleció en Septiembre de 1957.

Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Página: 121.

121. Productos adimensionales estándar en la teoría de calor.

Se define el número de Nusselt como:

$$N = \frac{hL}{k}$$

L la longitud característica, h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad térmica del fluido.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.
Páginas: 52, 190-195, 303, 204, 208.

52.

Campos de temperaturas variables en el tiempo sin fuentes de calor.

Se define el número de Nusselt como:

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k_f}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud y k_f es la conductividad del fluido. Se diferencia del número de Biot en la conductividad, pues en Biot, la conductividad es la del sólido.

190-195.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales. Convección forzada.

Consideramos dos tubos de diferente diámetro, por cada uno de los cuales circula un fluido distinto en régimen estacionario. En ambos casos las velocidades, aunque diferentes, son tales que las fuerzas que las fuerzas viscosas y de inercia resultan del mismo orden. Suponemos que ambos fluidos son incompresibles. En cada tubo una diferencia de presiones aplicada en sus extremos crea la corriente; las fuerzas de volumen, tales como la gravitatoria, son pequeñas frente a las producidas por la presión y estamos en caso de convección forzada.

La viscosidad cinemática es: $v = \frac{\eta}{\rho}$

La ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^{\,2}}\right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

Ecuación de la energía:

$$u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^{\;2}} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^{\;2}} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^{\;2}} \right)$$

En la pared del tubo, todas las componentes de la velocidad son nulas y las temperaturas del fluido y de la pared son iguales. En el comienzo de la zona del tubo considerada existe cierta distribución de velocidades, que determina en el tubo la corriente total, la velocidad axial, la velocidad media , etc. Podemos expresar la corriente de calor en la pared en función del coeficiente de transmisión de calor h_1 y de la temperatura diferencial media θ_m con respecto a la temperatura de la pared. Resulta la ecuación:

$$h_1 \theta_{m1} = -k_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1} \right)_p$$

El subíndice p indica la pared y $\theta = T - T_P$

Como al tubo 2 se deben aplicar las mismas ecuaciones y condiciones de contorno, resultará lo anterior cambiando el subíndice 1 por el 2, si bien los valores de una determinada magnitud serán diferentes, en general, en los tubos y en las soluciones finales.

Postulamos que los sistemas son físicamente semejantes, o sea, que la relación entre las magnitudes correspondientes en los tubos 1 y 2 es constante. Por ejemplo, para todas las longitudes, incluso las coordenadas x, y, z de un punto, el coeficiente de proporcionalidad apropiado es f_L, $f_L = \frac{L_2}{L_1}$

Y de modo análogo, los otros coeficientes de proporcionalidad son:

Velocidades u, υ, w $\qquad f_u = \frac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\qquad f_p = \frac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\qquad f_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\qquad f_v = \frac{v_2}{v_1}$

Temperaturas T, θ $\qquad f_T = \frac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $\qquad f_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $\qquad f_h = \frac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $\qquad f_k = \frac{k_2}{k_1}$

Si en las ecuaciones de ecuación de movimiento proyectada, ecuación de continuidad, ecuación de la energía y la de la corriente de calor en la pared, escritas para el segundo tubo sustituimos las magnitudes $x_2, y_2, z_2, u_2, \upsilon_2, w_2, ...$

Por sus valores deducidos de las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad, se obtiene:
Ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$\frac{f_u^2}{f_L}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)=-\frac{f_p}{f_L f_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{f_v f_u}{f_{L^2}}v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^{\,2}}\right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{f_u}{f_L}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=0$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{f_u f_T}{f_L}\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)=\frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}\alpha_1\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^{\,2}}\right)$$

Ecuación de la corriente de calor:

$$f_h f_T h_1\theta_{m,1}=-\frac{f_k f_T}{f_L}k\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial n_1}\right)_p$$

Las anteriores ecuaciones, que describen los fenómenos que ocurren en el segundo tubo, son idénticas a sus correspondientes del primer tubo se si verifican las igualdades:

$$\frac{f_u^2}{f_L}=\frac{f_p}{f_L f_\rho}=\frac{f_v f_u}{f_{L^2}}\quad(1)$$

$$\frac{f_u f_T}{f_L}=\frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}\quad(2)$$

$$f_h f_T=\frac{f_k f_T}{f_L}\quad(3)$$

Se debe observar que la ecuación de continuidad no impone ninguna condición a las constantes de proporcionalidad, pues el cociente $\frac{f_u}{f_L}$ es arbitrario. Al sustituir en las ecuaciones anteriores los valores de los coeficientes de proporcionalidad definidos por las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad se obtienen condiciones de semejanza física que deben cumplir nuestros dos sistemas, y permiten que uno de ellos pueda ser considerado modelo del otro.

De la ecuación (3):

$$\frac{h_1 L_1}{k_1}=\frac{h_2 L_2}{k_2}=\frac{hL}{k}$$

Los parámetros adimensionales así deducidos se designan de acuerdo con una sugestión de Gröber, con los nombres de destacados científicos. Se suele emplear la siguiente notación

$\frac{hL}{k}=N_{Nu}$ número de Nusselt.

También se representan con las dos primeras letras del nombre científico muy corriente en la literatura alemana; Nu.
De las otras dos ecuaciones obtenemos los números de Reynolds y Peclet.

Si los parámetros números de Reynolds, Prandtl, Nusselt son iguales en los sistemas, hay semejanza física entre ellos y relaciones constantes entre las magnitudes correspondientes, lo cual se puede generalizar a todos los sistemas geométricamente semejantes, es decir todos los tubos circulares con iguales valores de los parámetros adimensionales citados. Obtenida la solución de un solo caso por cualquier procedimiento, debe ser posible expresarla en la forma:

$$F\left(N_{\text{Re}}, N_{\text{Pr}}, N_{Nu}\right) = 0$$

y es válida para todos los sistemas de iguales valores de los parámetros adimensionales y mientras rijan las mismas ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno permanecerá invariable las forma de la función F.

Para hallar la expresión de una determinada variable, por ejemplo h, despejamos de la ecuación el parámetro que la contenga, en nuestro caso N_{Nu}, y resultará.

$$N_{Nu} = F\left(N_{\text{Re}}, N_{\text{Pr}}\right).$$

Convección libre.

En la convección libre, la fuerza de empuje hidrostático que actúa sobre la partícula que se encuentra a más temperatura, luego menor densidad, que el fluido que la rodea debe intervenir en la ecuación de movimiento como una fuerza e volumen. El término correspondiente al campo gravitatorio terrestre aparece exclusivamente en la ecuación de la coordenada vertical del movimiento. Consideremos por ejemplo, una pared vertical con la temperatura superior a la del fluido que la rodea. La capa calentada por la pared disminuye de densidad y experimenta, por ello, un empuje hacia arriba con respecto al fluido inmediato. Se puede expresar la variación del volumen específico $V_e = \frac{1}{\rho}$ con la temperatura por medio del coeficiente de dilatación

$$\beta = \frac{1}{V_e}\frac{dV_e}{dT}$$

Por consiguiente, mantenemos la hipótesis de propiedades (η,c_p, k) independientes de la temperatura, excepto para la densidad ρ.

El valor del coeficiente de dilatación que se considera es el que corresponde a la temperatura media del flujo si las diferencias de temperaturas son considerables o , si son muy pequeñas, el que define la temperatura del fluido no perturbado fuera de la capa limite. De la ecuación de los gases perfectos:

$$V_e = \frac{RT}{p}$$

Se deduce $\beta = \frac{1}{T}$ para los gases. Designando θ_∞ la diferencia entre la temperatura de la partícula y la del fluido no perturbado, el empuje hidrostático por unidad de volumen es:

$$G = \beta\rho g\theta_\infty$$

Esta fuerza debe agregarse al segundo miembro de la ecuación de movimiento

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1\theta_{\infty,1} + \nu_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {z_1}^2}\right)$$

$$f_\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{y} \quad f_g = \frac{g_2}{g}$$

Teniendo en cuenta que está dirigida hacia arriba, dirección y sentido que suponemos coinciden con los del eje x. Al asignar el subíndice 1 al modelo 1 y el 2 al modelo 2, obtenemos:

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\beta_1 g_1\theta_{\infty,1}+\nu_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2}\right)$$

Y necesitamos, además de los coeficientes de proporcionalidad de las ecuaciones:

Velocidades u, υ, w $\qquad f_u=\frac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\qquad f_p=\frac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\qquad f_\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\qquad f_\nu=\frac{\nu_2}{\nu_1}$

Temperaturas T, θ $\qquad f_T=\frac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $\qquad f_\alpha=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $\qquad f_h=\frac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $\qquad f_k=\frac{k_2}{k_1}$

$f_\beta=\frac{\beta_2}{\beta_1}$ y $f_g=\frac{g_2}{g_1}$

Siguiendo el método de cálculo empleado en la parte de calculo de número de Reynolds por convección forzada de este mismo libro, se obtiene:

$$\frac{f_u^2}{f_L}=\frac{f_p}{ff_L}=f_g f_\beta f_T=\frac{f_\nu f_u}{f_L^2}$$

Por ser pequeñas las diferencias de presión que ocurren en las corrientes de convección libre, no se deduce ningún parámetro adimensional del segundo miembro de la ecuación. No existe ninguna velocidad conocida; en cambio, la velocidad en la placa es nula y también vale cero en puntos situados fuera de la capa límite y a gran distancia de la misma, luego no tiene sentido la relación f_u y se puede prescindir de ella. Por último teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas para convección forzada (en el apartado número de Reynolds de este mismo libro , página 189, en la misma pregunta)

$$\frac{f_u f_T}{f_L}=\frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}$$

$$f_h f_T=\frac{f_k f_T}{f_L}$$

Que se aplican en este caso sin ninguna modificación, podemos deducir el criterio de semejanza que exponemos a continuación:

$\frac{g\beta\theta_\infty L^3}{\nu^2} = const$, número de Grashof.

$\frac{\nu}{\alpha} = const$, número de Prandtl

$\frac{hL}{k} = const$, número de Nusselt.

De acuerdo con los resultados conseguidos, debe ser posible expresar la transmisión de calor en la convección libre por la ecuación:

$N_{Nu} = F\left(N_{Gr}, N_{\Pr}\right)$

Si en la ecuación

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1 \theta_{\infty,1} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2}\right)$$

despreciamos los términos de las aceleraciones obtenemos la ecuación del movimiento de deslizamiento con el término de empuje hidrostático. En este caso resulta una ecuación que contiene, además del número de Nusselt, un solo parámetro adimensional de la forma $\frac{g\beta\theta_\infty L^3}{\nu\alpha}$, que se puede expresar como producto de los números $N_{Gr}, N_{\Pr}$. La ecuación se puede escribir:

$N_{Nu} = F\left(N_{Gr} N_{\Pr}\right)$, deducida analíticamente por Lorentz.

Otro caso particular es el que supone que las fuerzas viscosas en la capa límite son despreciables frente a las de inercia. La ecuación a que se llega, deducida rigurosamente por Boussinesq:

$N_{Nu} = F\left(N_{Gr} N_{\Pr}{}^2\right)$

Cuando la pared del tubo calienta al fluido los efectos de la convección libre en las zonas próximas a la pared ayudan al movimiento ascendente del fluido: lo dificultan si quien recibe calor es la pared. Al tener prefijada una velocidad no se puede prescindir de la constante de proporcionalidad f_u, apareciendo como parámetro adimensional el número de Reynolds. Resulta la ecuación:

$N_{Nu} = F\left(N_{\mathrm{Re}}, N_{Gr}, N_{\Pr}\right)$

303.

Transmisión de calor a fluidos con velocidades grandes.
Consideraciones generales.

El número de Mach se define como $N_{Ma} = \frac{U}{c}$ y es un parámetro adimensional.

U es la velocidad del fluido, y c es la velocidad del sonido en el gas considerado. Por consiguiente, debemos deducir de lo anterior la probable influencia del número de Mach en la transmisión de calor con grandes velocidades del fluido, y de acuerdo con ello, podemos decir que:

$N_{Nu} = F\left(N_{\mathrm{Re}}, N_{\Pr}, N_{Ma}\right)$

204-208.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.
Significado físico de los parámetros adimensionales.

Si suponemos que existe una capa o lámina de fluido estacionario junto a la pared, la conductividad k, con salto de temperatura igual al que sirve para definir el coeficiente h, el espesor de dicha capa es k/h y como el número de Nusselt se puede escribir:

$$\frac{hL}{k}=\frac{L}{k/h}=N_{Nu}$$

Cabe interpretarlo como relación entre una longitud característica y el espesor de la lámina. También se puede escribir:

$$\frac{hL}{k}=\frac{h}{k/L}=N_{Nu}$$

E interpretar el número de Nusselt como relación entre el transporte de calor efectivo, expresado por el coeficiente h, y el que habría a través de una capa de fluido de espesor L en conducción pura. La tercera interpretación es: relación entre el gradiente e la distribución actual de temperaturas en la pared, $-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p$ y el gradiente de una distribución lineal de temperaturas en una capa de espesor L, o sea, $\left(T_p-T_f\right)/L$:

$$\frac{hL}{k}=\frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p}{\left(T_p-T_f\right)/L}=N_{Nu}$$

Si pensamos en la transmisión de calor entre dos paredes separadas por una lámina e fluido de espesor L y conductividad k, el número de Nusselt representa la relación entre la conductividad aparente $k_e=\frac{h}{L}$ y la conductividad verdadera k, y es la medida del calor transmitido por convección cuando se toma como unidad el calor transmitido por conducción pura a través de una lámina de fluido estancado:

$$\frac{hL}{k}=\frac{k_e}{k}=N_{Nu}$$

Se puede observar que la literatura francesa emplea la notación y terminología bastante diferentes, que a continuación comparamos con la nuestra:

Notación actual	Notación francesa
$N_{Nu}=\frac{hd}{k}$ número de Nusselt	$\mathscr{B}=\frac{\mathrm{hd}}{\mathrm{k}}$ número de Biot

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.

Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.

Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.

Página: 191.

191.
Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección.
Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.

El parámetro adimensional $Nu \equiv \frac{\alpha l_0}{v}$ se llama número de Nusselt, o criterio de transmisión de calor. El número de Nusselt caracteriza los procesos de transmisión de calor entre la pared y el fluido en contacto con ella.
α es el coeficiente superficial de transmisión de calor, l_0 longitud de referencia, v la viscosidad cinemática.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 217-218, 219, correlaciones 270, 272-273.

217- 218.
Transferencia de calor por convección.
Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

Este análisis dimensional no es muy exhaustivo. El lector puede encontrar un análisis más detallado en las obras de Welty, Wicks y Wilson y Langhaar.
Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de un cilindro, el fluido que fluye y la pared del cilindro están a diferentes temperaturas, la velocidad promedio es u_{prom}, y las propiedades de interés del fluido son la densidad, la viscosidad, el calor específico y conductividad térmica.
Vamos a considerar fundamentales cuatro dimensiones: la masa M, la longitud L, el tiempo t y la temperatura T. Todas las expresiones están expresadas en función de las anteriores. Las unidades de c_p, k y h incluyen un término de calor: para esta investigación se ha representado el calor por energía con dimensiones de ML^2/t^2

Variable	Símbolo	Dimensiones.
Velocidad	u	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fluido	k	ML/t^3T
Coeficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

El teorema de pi de Buckingham dice que el número de grupos independientes adimensionales i necesarios para correlacionar n variables dimensionales está dado por la expresión i = n – r
Donde r es el rango de una matriz que tiene n columnas y un número de renglones equivalente al número de dimensiones fundamentales –en este cuatro.
La matriz sujeto se forma como sigue:

	u	D	ρ	μ	c_p	k	h
M	0	0	1	1	0	1	1
L	1	1	-3	-1	2	1	0
t	-1	0	0	-1	-2	-3	-3
T	0	0	0	0	-1	-1	-1

El número en cada posición de la tabla es el exponente al que se debe elevar cada una de las dimensiones para representar adecuadamente la variable dada.
El rango de esta matriz es 4 luego se deben formar 7 – 4 = 3 parámetros adimensionales.
Cada parámetro adimensional se forma combinando un grupo núcleo de r variables con una de las variables restantes que no estén en el núcleo. El núcleo puede incluir cualquiera de las 4 variables (en este caso) que, entre ellas incluyan todas las dimensiones básicas. En forma arbitraria se escogen d, ρ, μ y k como el núcleo. Ahora se representan como grupos pi a los parámetros que se deben formar en donde:

$\pi_1 = \mathrm{D}^{a} \rho^{b} \mu^{c} \mathrm{k}^{d} u$

$\pi_2 = \mathrm{D}^{e} \rho^{f} \mu^{g} \mathrm{k}^{h} c_p$

$\pi_3 = \mathrm{D}^{i} \rho^{j} \mu^{k} \mathrm{k}^{l} h$

Cada grupo pi ha de ser adimensional, lo que se logra seleccionando adecuadamente los exponentes, b, c etc usando la muy sencilla técnica mecánica que ahora se ilustra.
Calculamos π_3.

$$1 = L^{i} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{j} \left(\frac{M}{Lt}\right)^{k} \left(\frac{ML}{t^3 T}\right)^{l} \frac{M}{t^3 T}$$

M : 0=j+k+1+1

L: 0=i-3j-k+1

t: 0=-k-3l-3

T: 0=-1-1

Despejando los valores de i, j, k, l se obtiene 1, 0, 0 y -1 respectivamente, con lo que se puede escribir.

$$\pi_3 = \frac{hD}{k} \equiv Nu_D$$

El parámetro que resulta se designa como Un, el número de Nusselt, que es una forma de un coeficiente adimensional de transferencia de calor. Este

$$Nu_L \equiv \frac{hL}{k}$$

En donde la longitud L toma distintos valores, dependiendo de la geometría del sistema. El análisis dimensional en este caso de flujo interno condujo a una relación de la forma *Nu = f (Re,Pr).*

219.
Transferencia de calor por convección.
Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

Estudiamos el caso e la figura, en el que no hay velocidad especificada; el flujo es el resultado de la transferencia de energía entre la placa a temperatura T_0 y el del fluido a temperatura ambiente T_∞. Las propiedades de interés del fluido son ρ, μ, c_p,k y β. La última propiedad mencionada es el coeficiente de dilatación térmica, usado para representar la variación en la densidad del flujo con la temperatura en la forma: $\rho = \rho_0\left(1+\beta\Delta T\right)$, en donde ρ_0 es la densidad de referencia dentro de la capa límite y ΔT es la diferencia de temperaturas entre el fluido en la superficie de la placa y la correspondiente lejos de la placa.

Se puede escribir la fuerza boyantez por volumen unitario, F_B, como:

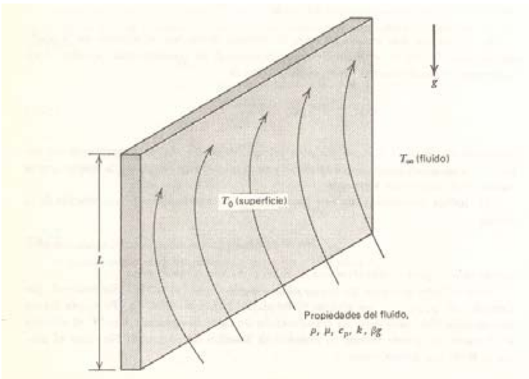
$F_B = \left(\rho - \rho_0\right)g$ y sustituyendo en la ecuación interior:

$F_B = \rho_0 \beta g \Delta T$

Así, en el análisis dimensional, se deben incluir las variables β, g y ΔT en este proceso de convección natural.

Trataremos a β y g como una sola variable en el análisis dimensional.

Figura 1 número de Nusselt. Parámetros de análisis dimensional para la convección forzada en una pared vertical.



Variable	Símbolo	Dimensiones.
Altura	L	L
Diferencia de temperatura	ΔT	T
Coeficiente de dilatación térmica	βg	L/t^2T
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fluido	k	ML/t^3T
Coeficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

Aplicando el teorma de pi de Buckingham se tiene que se deben formar cuatro grupos pi adimensionales. Si se designa como un grupo núcleo a las variables L, ρ, μ y k, los grupos pi son:

$\pi_1 = L^a \rho^b \mu^c k^d \Delta T$

$\pi_2 = L^e \rho^f \mu^g k^h \beta g$

$\pi_3 = L^i \rho^j \mu^k k^l c_p$

$\pi_4 = L^m \rho^n \mu^0 k^p h$

No vamos a mostrar todo el proceso mecánico de evaluación de los exponentes a, b, c etc, (ver apartado anterior: página217 de este mismo libro) necesarios para hacer adimensionales a los grupos pi. Los resultados de este procedimiento son resolviendo π_4:

$$\pi_4 = \frac{hL}{k} \equiv Nu_L$$

Que se conoce como número de Nusselt.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 311, 280, 563.

311.

Capa límite laminar y turbulenta.

Coeficiente de transferencia de calor, para flujo laminar, incomprensible sobre una superficie plana

El problema de la variación de calor continua en pared uniforme.

Tenemos que calcular el promedio de la diferencia de temperatura

$$\overline{T_W - T_\infty} = 1/L\int_0^L (T_W - T_\infty)dx = \frac{q_w L/k}{0.6795\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_L^{\;1/2}}$$

T_W es la temperatura de la pared, T_∞ es la temperatura de la corriente libre, q_w es el flujo de calor en la pared, k es la conductividad, Pr es el número de Prandtl, Re_L es el número de Nusselt basado en la longitud característica L.

$$\overline{Nu_L} = 0.6795\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_L^{\;1/2}$$

280.

Capa límite laminar y turbulenta. Capa límite térmica.

Caso de flujo de un fluido frío sobre una placa caliente.

Si T_W es la temperatura en la pared, T_∞ es la temperatura de la corriente libre, h es el coeficiente de transmisión de calor.

Se cumple que:

$$-k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = h(T_W - T_\infty)$$

También:

$$\left.\frac{\partial \dfrac{(T_W - T)}{(T_W - T_\infty)}}{\partial (y/L)}\right|_{y/L=0} = \frac{hL}{k_f} = Nu_L$$

El significado físico de Nu viene dado por $Nu_L = \dfrac{L}{\delta'_t}$

En otras palabras, el número de Nusselt es inversamente proporcional al espesor de la capa límite térmica.

563.

Coeficiente de transferencia de masa.

Baja proporción de transferencia de calor: La analogía entre trasnferencia de masa y de calor.

El número de Nusselt local es igual a:

$Nu_x = h^* x / k = f(\mathrm{Re}_x, \mathrm{Pr})$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad térmica, Pr es el número de Prandtl,

Cuando C=m_i

$Nu_{m,x} = g^*_{m,i} x / \rho D_{i,m} = f(\mathrm{Re}_x, Sc)$

C: concentración de contaminante.

T: m_i

α :$D_{i,m}$

Pr:Sc

K: ρ $D_{i,m}$

h^*:$g^*_{m,i}$

$Nu_{m,x}$, es el número de Nusselt para transferencia de masa. Nu_m es a veces llamado número de Sherwood, Sh.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.

Autores: J.F Sacadura.

Editorial: Teckique et Documentation, París.

Páginas: 216.

216

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Número de Nusselt

$Nu = \dfrac{hL}{\lambda}$

Formación:

(1) $\dfrac{hS\Delta T}{\lambda S \dfrac{\Delta T}{L}}$ **(2)** $\dfrac{\left(-\dfrac{\partial T}{\partial Y}\right)_{Y=0}}{\dfrac{\Delta T}{L}}$ **(3)** $\dfrac{L}{\delta_{th}}$

Interpretación:

(1). Relación de la cantidad de calor intercambiada por convección y la cantidad de calor intercambiada por conducción.

(2). Relación del gradiente de temperatura en la pared y el gradiente de temperatura medio.
(3). Relación entre la longitud de referencia y el espesor de la capa límite térmica.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 7, 100.

7.

Convección laminar y turbulenta..

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hl}{k} = \frac{\partial}{\partial(y/l)}\left(\frac{T_W - T}{T_W - T_\infty}\right)_W$$

T_W es la temperatura de la pared, T_∞ la de la corriente libre, y/l es una distancia adimensional normal a la superficie (estamos estudiando el caso de una superficie curvada, la coordenada y es normal a la superficie)

100.

Flujos paralelos. Capa límite térmica.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hl}{k} = -\frac{\left[\partial T/\partial(y/l)\right]_w}{T_W - T_\infty}$$

k es la conductividad característica, l la longitud característica, y es una coordenada curvilínea en la dirección de la transferencia de calor, w hace referencia a la pared, ∞ a la corriente libre y h es el coeficiente de transmisión de calor.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 463, 477, 505, 515, 526.

463.

Convección forzada. El número de Nusselt.

La cantidad $\frac{hL_c}{k}$ es una cantidad sin dimensiones, que recibe el nombre de número de Nusselt. El número de Nusselt es el gradiente de temperatura sin dimensiones para el fluido, evaluado en la intercara pared-fluido. La estructura del número de Nusselt es similar a la del número de Biot. La dieferencia es que la k que aparece en el número de Nusselt es la conductividad térmica del fluido, mientras que en el de Biot representa la del sólido.

477.

Convección forzada. La ecuación diferencial gobernante y su solución.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, k es la conductividad térmica del fluido y D el diámetro interior del tubo.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Nusselt (Nu).

Grupo: $Nu = \frac{hL_c}{k}$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, L_C es la longitud característica, y k la conductividad del fluido.

Interpretación física: razón de gradientes de temperatura.

515.

Convección forzada. Convección desde una placa plana-flujo laminar en la capa frontera térmica.

El número de Nusselt promedio es:

$$Nu_{promedio} = \frac{h_{promedio}L}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud característica, k la conductividad del fluido.

526

Convección forzada. Análisis diferencial de una capa frontera térmica.

Número de Nusselt local:

$$Nu = \frac{hx}{k}$$

$$Nu_{promedio} = \frac{h_{promedio}L}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud característica, k la conductividad del fluido, x es una coordenada local.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.

Autores: Frank M. White.

Editorial: Addison-Wesley

Páginas: 270, 343, 353.

270.

Principios de convección Análisis dimensional

El número de Nusselt.

La forma tradicional de el coeficiente de transmisión de calor adimensional es el número de Nusselt Nu, el cual puede ser definido como la relación de la transferencia de calor por convección ay la transferencia de calor por conducción del fluido bajo las mismas condiciones.

Consideramos una capa de fluido de anchura L y diferencia de temperatura $\left(T_W - T_\infty\right)$. Asumiendo que la capa se esta moviendo así que hay convección, el flujo de calor sería:

$$q_w" = h\left(T_w - T_\infty\right)$$

$$Nu_L = \frac{q_w"_{convección}}{q_w"_{conducción}} = \frac{hL}{k}$$

Números de Nusselt elevados, significa una alta eficiencia de la convección.

343.
Convección forzada. Convección forzada en flujos separados.
Flujo cruzado que pasa un cilindro
Se define el número de Nusselt medio como:

$$Nu_D = \frac{\overline{h}D}{k} = f\left(\mathrm{Re}_D, \mathrm{Pr}\right)$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, D el diámetro del cilindro y k la conductividad térmica.

353.
Convección forzada.
Flujo cruzado sobre bancos de tuberías.
Por análisis dimensional se obtiene:

$$\overline{Nu_D} = f\left(\mathrm{Re}_D, \mathrm{Pr}, \frac{S_L}{D}, \frac{S_T}{D}, N, disposición\right)$$

Re_D es el número de Reynolds, con longitud característica el diámetro D de los tubos, Pr es el número de Prandtl, S_L es la distancia entre columnas, medida desde los centros de los cilindros, S_T Es la separación entre filas, medida desde los centros de los cilindros, N es el número de en hilera (contadas paralelas a la corriente libre).

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere.
Página: 9.

9
Flujo y transporte.
El coeficiente de transferencia de calor o coeficiente de convección se puede expresar como un número, el número de Nusselt, de la siguiente forma:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la dimensión característica de la superficie, k la conductividad térmica del fluido.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Libro: Mecánica de fluidos y procesos de transferencia. J.M. Kay y R.M. Nedderman
Páginas: 257, 347, 388, 394, 427.

257.
Coeficientes de transferencia de calor. El número de Nusselt y de Stanton.
Se define el número de Nusselt como $Nu = \frac{hL}{k}$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad tñermica y L la longitud de referncia.

Para caso de una tubería $Nu = \frac{hD}{k}$

Donde D es el diámetro.

Para convección forzada se puede expresar *Nu = f (Re,Pr,Ec).*

347

Conducción de calor y transferencia de calor. Coeficientes de transferencia de calor.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

$$h = \frac{q}{(\Delta T)}$$

ΔT diferencia de temperatura entre los dos lados de una placa de espesor L

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad térmica y L la longitud de referencia.

$$Nu = \frac{h_f d}{k_f} = \frac{qd}{k_f \Delta T_f}$$

d es el diámetro de la tubería, $h_f = \frac{q}{(\Delta T_f)}$,es el coeficiente de transferencia de calor, $(T_0 - T_1)$ diferencia de temperatura entre la corriente libre y la pared del cilindro.

388-390.

Análisis dimensional de los procesos de transferencia.

Consideramos la transferencia de calor de un fluido que fluye en el interior de una tubería circular. El valor del flujo de calor q depende de la diferencia de temperatura ΔT entre la pared de la tubería y el fluido, del diámetro D , de la velocidad media u_m y la temperatura media del fluido T_m y de las propiedades físicas k, ρ, c_p, μ , así nosotros podemos afirmar que

$$q = f\left(\Delta T, k, c_p, \rho, \mu, D, u_m, T_m\right)$$

Por el teorema de π de Buckingham´s, esta conexión entre nueve cantidades, puede ser reducida a cuatro, si asumimos cinco dimensiones fundamentales

$$[m],[l],[t],[T],[Q]$$

Nosotros podemos tomar cinco cantidades primarias como sigue:

Cantidad	k	ρ	D	μ	ΔT
Dimensiones	$\left[\mathrm{Ql}^{-1} t^{-1} T^{-1}\right]$	$\left[\mathrm{ml}^{-3}\right]$	$[\mathrm{l}]$	$\left[m l^{-1} t^{-1}\right]$	$[t]$

Para π_1 podemos poner $\frac{q}{k^a \rho^b D^c \mu^d \Delta T^e}$

Dimensionalmente

$$\frac{[Q]}{\left[l^2 t\right]} = \frac{[Q]^a}{[ltT]^a} \frac{[m]^b}{\left[l^3\right]^b} [l]^c \frac{[m]^d}{[lt]^d} [T]^e$$

Por lo tanto

Q a=1

T 0=-a+e $\therefore e=1$

t -1=-a-d $\therefore d=0$

m 0=b+d $\therefore b=0$

l -2=-a-3b+c-d $\therefore c=-1$

Se obtiene el siguiente grupo adimensional

$$\pi_1 = \frac{qD}{k\Delta T}$$

Este es el número de Nusselt.

De forma similar:

$\pi_2 = \dfrac{\rho u_m D}{\mu}$, número de Reynolds.

$\pi_3 = \dfrac{\mu c_p}{k}$, número de Prandtl

$\pi_4 = \dfrac{T_m}{\Delta T}$, es una relación de temperatura.

De esta forma sustituyendo en $q = f\left(\Delta T, k, c_p, \rho, \mu, D, u_m, T_m\right)$

$$Nu = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \frac{T_m}{\Delta T}\right)$$

Si despreciamos la diferencia de temperatura debido a que es pequeña

$$Nu = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right)$$

Más remoto, el grupo adimensional $\dfrac{c_p \rho u_m D}{k}$ puede aparecer si tomamos k, ρ, D, u_m y T como cantidades primarias. Este define el número de Péclet Pé

Pé=RePr

Nu = f (Pé,Re)

Trabajando con [m],[l],[t],[T], nosotros necesitamos 5 grupos independientes, los cuales son $\dfrac{T_m}{\Delta T}$ y los números de Reynolds, Nusselt y Prandtl. El Número de Eckert es otra posibilidad. Hay otro número que está estrechamente relacionado y es el número de Mach $u_m / \sqrt{\gamma RT}$

En general podemos decir que

$$Nu = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, Ec, \frac{T_m}{\Delta T}\right)$$

Y si despreciamos $\dfrac{T_m}{\Delta T}$

$$Nu = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, Ec\right)$$

394.

Análisis dimensional de los procesos de transferencia. Significado físico de los grupos adimensionales.

El número de Nusselt es el coeficiente de transferencia de calor adimensional el cual nos da una medida de la relación de la verdadera transferencia de calor y la transferencia de calor si el proceso fuera puramente convectivo.

También nos da una medida del incremento en la transferencia de calor debido al movimiento del fluido.

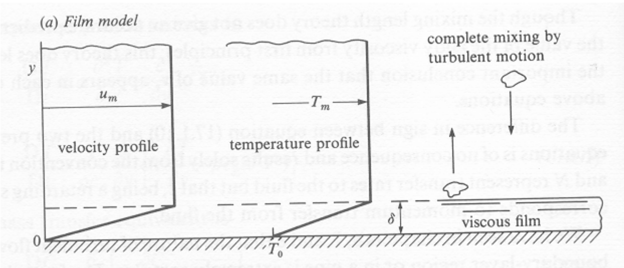
427.

Transferencia de calor y masa en flujos turbulentos. El modelo de película.

En el modelo de película se postula la existencia de una región laminar de espesor δ adyacente a la pared.

Consideramos δ<<D (diámetro de la tubería), así los valores de velocidad, temperatura y concentración son muy próximos a sus valores medios.

Figura 2 número de Nusselt. Modelo de película.



Tenemos en la parte laminar que:

La transferencia de masa por unidad de área q_0 y N_0

$$q_0 = k\frac{(T_0 - T_m)}{\delta}$$

$$N_0 = \mathscr{D}\left(\frac{C_0 - C_m}{\delta}\right)$$; C es la concentración, $\mathscr{D}$ la difusividad.

$$k_L = \frac{\mathscr{D}}{\delta} \qquad h = \frac{k}{\delta}$$. Eliminando δ y multiplicando por D.

$$h = \frac{q_0}{(T_0 - T_m)} \qquad \tau_0 = \mu\frac{u_m}{\delta} \dashrightarrow \frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{hD}{k}$$

$$\frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}\frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1}{2}c_f \,\mathrm{Re}$$

En el modelo de capa podemos decir que:

$$Nu = Sh = \frac{1}{2}c_f \,\mathrm{Re}$$

Si reconsideramos la suposición de que el espesor de la capa límite laminar era mucho menor que el diámetro de la tubería tenemos:

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{k}{\delta}\frac{D}{k} = \frac{D}{\delta} = \frac{1}{2}c_f \,\mathrm{Re}$$

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.

Autores: Thomas, L.c.

Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.

Páginas: 376, 386, 541.

376.

Transferencia de calor por convección Abordamiento del análisis de transferencia de calor por convección.

Coeficiente de fricción y coeficiente de transferencia de calor.
El coeficiente de transferencia de calor suele expresarse en términos adimensionales como el número de Nusselt:

$Nu_L = \frac{h_x L}{k}$; o el número de Nusselt medio:

$$\overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}L}{k}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{A_S}\int_{A_S} h_x dA_s$$

h el coeficiente de transmisión de calor, L es la longitud de referencia, k es la conductividad térmica

386.

Transferencia de calor por convección Características del flujo interno. Entrada térmica y regiones de flujo completamente desarrollado.

Se definen los siguientes números de Nusselt, dependiendo de si utilizamos $h, h_x, \bar{h}$, es decir el coeficiente de transmisión de calor, el coeficiente de transmisión de calor dependiente de la coordenada x y $\bar{h} = \frac{1}{x}\int_0^x h_x dx$.

$$Nu = \frac{hD_H}{k} \qquad (Nu)_x = \frac{h_x D_H}{k} \qquad \overline{Nu_L} = \frac{\bar{h}D_H}{k}$$

D_H es el diámetro hidráulico

k: conductividad térmica

541.

Tabla. Parámetros adimensionales para transferencia de calor por convección: convección forzada.

Grupo adimensional: Número de Nusselt.

Símbolo: Nu_L o Nu

Definición: $Nu = \frac{hL}{k}$

Interpretación $\frac{\text{Convección por el movimiento del fluido}}{\text{Conducción por el no movimiento de la capa de fluido}}$

Año: 1993.

Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.

Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.

Editorial: McGraw-Hill.

Páginas: 116, 163,185

116.

Transferencia de calor en flujo laminar en el interior de tuberías.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, D el diámetro de la tubería, k es la conductividad del sólido.

El número de Nusselt se puede expresar :

Nu=StPrRe

St es el número de Stanton, Pr el de Prandtl, Re el número de Reynolds.
El número de Nusselt y el de Stanton son dos formas diferentes de expresar en coeficiente de transferencia de calor de forma adimensional.

163.

Transferencia de calor: capa límite laminar externa.

Velocidad constante de corriente libre de un flujo a lo largo de una placa seminfinita a temperatura constante.

Se define el número de Nusselt local como:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k}$$

h_x es el coeficiente de transmisión de calor local, x es la coordenada longitudinal, k es la conductividad del fluido.

185.

Transferencia de calor: la capa límite laminar externa.

Flujo sobre cuerpos con separación de la capa límite.

Para estos casos se expresa el número de Nusselt para un tubo de sección circular de la forma: $Nu_d = C_1 \mathrm{Re}_d^{C_2}$.

Los valores C_1 y C_2 son recomendados por Morgan en la siguiente tabla:

Re_d	C_1	C_2
10^{-4}–4×10^{-3}	0.437	0.0895
4×10^{-3}–9×10^{-2}	0.565	0.136
9×10^{-2}–1	0.800	0.280
1–35	0.795	0.384
35–5×10^{3}	0.583	0.471
5×10^{3}–5×10^{4}	0.148	0.633
5×10^{4}–2×10^{5}	0.0208	0.814

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 268, 724.

268.

Convección. Parámetros adimensionales.

Se define el número de Nusselt basado en la longitud característica L como:

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{h\Delta T}{k\Delta T / L}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido y la pared, k es la conductividad térmica.
El número de Nusselt puede ser interpretado como la relación de la transferencia de calor por convección y la conducción a través de la capa de fluido de espesor L

724.

Transferencia de masa en flujo laminar y turbulento.

El número de Nusselt se define como:

$Nu = \dfrac{hd}{k}$ para flujo en el interior de un tubo.

h es el coeficiente de transmisión de calor, d el diámetro de la tubería, k la conductividad.

$Nu_x = \dfrac{hx}{k}$ para flujo en la capa límite.

x es la coordenada paralela a la placa con origen en el borde de ataque.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 37, 110, 114, 232, 163.

37.

Flujo capa límite laminar. **Capa límite laminar de velocidad y térmica.**

Expresamos el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud característica, k la conductividad del fluido.

110.

Flujo en conducto laminar.

Transferencia de calor para flujo en conductos totalmente desarrollado.

El número de Nusselt para tubos es:

$$Nu = \frac{hD}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, D el diámetro de la tubería, k la conductividad térmica del fluido.

114.

Flujo en conducto laminar. Transferencia de calor para flujos totalmente desarrollados.

Flujo de calor uniforme en la pared.

Para tubos no circulares, la sección que atraviesa, el número de Nusselt esta basado en el diámetro hidráulico.

$$Nu = \frac{hD_h}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, D_h es el diámetro hidráulico, k la conductividad del fluido.

232.

Convección natural interna.

Regimen de la capa límite

Definimos el número de Nusselt global como:

$\bar{N}u = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}_{\text{conducción pura}}}$ que puede ser escribido como $\bar{N}u = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{KH}\Delta T / L}$

Q es el flujo de calor, K es la conductividad térmica, H longitud característica, ΔT es la diferencia de temperatura, L longitud característica.

163.

Convección externa natural. **Análisis de escala.**

Fluidos con Pr altos.

Desde que la escala de el coeficiente de transferencia de calor es k/ δ_t , el número de Nusselt varía como $Nu = \frac{hH}{k}$ ~Ra_H

δ_t es el espesor de la capa límite térmica, k la conductividad del fluido, H la longitud característica.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Páginas: 71, 115, 123.

71.

Flujo de Poiseuille interior en conductos.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L la longitud característica, y k la conductividad del fluido.

115.

Flujo laminar en el interior de conductos.

Se define el número de Nusselt medio como:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}D}{k}.$$

$\overline{h}$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, D el diámetro de la tuberíay k la conductividad térmica.

123.

Misma definición página 115.

389.

Capa límite laminar en una placa vertical.

Se define el número de Nusselt medio como:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}x}{k}$$

$\overline{h}$ es el coeficiente de transmisión de calor medio, x la coordenada vertical paralela a la placa, y k es la conductividad del fluido.

391.

Misma definición página 389.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 322, 286, 663.

322.

Convección forzada.

Caso de pared no isoterma.

El número de Nusselt promedio es.

$$\overline{Nu_L} = \frac{q_s L}{k(\overline{T_S - T_e})}$$

Donde :

$$\dot{Q} = \overline{h_c} A(T_S - T_e)$$

$$\overline{h_c} = \frac{q_s}{(\overline{T_S - T_e})}$$

q_s es el calor en la superficie, L es la longitud característica, k la conductividad térmica, $T_S - T_e$ es la diferencia de temperatura entre el sólido y el exterior.

286.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

Flujo a través de un cilindro.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro D , la densidad ρ, y la viscosidad dinámica μ, también de la diferencia de temperatura T_S-T_E, y del calor específico C_p y la conductividad térmica k. Así:

$$\overline{q_s} = f(V, D, \rho, \mu, \Delta T, c_p, k)$$

Las unidades de las variables pueden ser escritas de la siguiente forma:

$\overline{q_s}$:w/m^2

V:m/s

D:m

ρ :Kg/m^3

μ :Kg/ms

ΔT :K

c_p : Ws/KgK

k:W/mK.

Hay 5 dimensiones primarias y 8 variables, así que según el teorema de pi de Buckingham hay tres grupos adimensionales.

El método más usual para determinar estos grupos adimensionales, es mediante el método de los índices.

$$\Pi = \overline{q_s}^a V^b D^c \rho^d \mu^e \Delta T^f c_p{}^g k^h$$

Los sustituimos por sus dimensiones.

Para hacer Π adimensional, la suma de los exponentes de cada dimensión primaria debe ser cero.

$Kg : d + e - g = 0$

$m : -2a + b + c - 3d - e - h = 0$

$s : -b - e + g = 0$

$K : f - g - h = 0$

$W : a + g + h = 0$

Tenemos tres distintas soluciones 8-5=3

Para a=1, f distinto de cero, y b=g=0.

d+e=0

-2 + c - 3 d - e - h = 0

e = 0

f - h = 0
1 + h = 0
Por lo tanto : h = -1, f = -1, e = 0, d = 0, c = 1, lo cual nos da:

$$\Pi_2 = \frac{\overline{q_s} D}{\Delta T k}$$

Este grupo adimensional, es el número de Nusselt promedio.
663.
Condensación, evaporación y ebullición.
Película de condensación laminar en una pared vertical.
El siguiente grupo adimensional define el número de Nusselt para condensación.

$$Nu = \frac{h(v_l^2 / g)^{1/3}}{k_l}$$

El subíndice *l* nos indica que es líquido.
h es el coeficiente de transmisión de calor, v_l es la viscosidad cinemática líquida, g es la constante gravitacional, k_l es la conductividad del líquido.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 314, 320.
314
Similitud de capas límite: ecuaciones de transferencia por convección normalizadas.
Forma funcional de las soluciones.
Partimos de la ecuación $h = -\frac{K_f}{L}\frac{(T_\infty - T_s)}{(T_s - T_\infty)}\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = +\frac{k_f}{L}\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$

K_f es la conductividad del fluido, L la longitud característica, $T_\infty - T_s$ es la diferencia de temperatura entre la corriente libre y la superficie, $\frac{\partial T^*}{\partial y^*}$ gradiente de temperatura respecto a la coordenada y.
Esta expresión implica definir un parámetro adimensional dependiente que se denomine Nusselt.
Número de Nusselt:

$$Nu = \frac{hL}{k_f} = +\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

Este parámetro es igual al gradiente de temperatura adimensional en la superficie y proporciona una medida de la transferencia de calor por convección que ocurre en la superficie. De la ecuación $T^* = f_3\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$ se sigue que para una geometría establecida, $Nu = f_4(x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$.
El número de Nusselt es para la capa límite térmica lo que el coeficiente de fricción es a la capa límite la velocidad. La ecuación anterior implica que para

una geometría dada, el número de Nusselt debe ser alguna función universal de $x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}$.Si se conociera esta función, serviría para calcular el valor de Nu para diferentes fluidos y para diferentes valores de LYV. Del conocimiento de Nu se puede encontrar el coeficiente de convección h y entonces se calcula el flujo de calor local. Además, como el coeficiente de transferencia de calor promedio se obtiene al integrar sobre la superficie del cuerpo, debe ser independiente de la variable espacial x*, De aquí se sigue que la dependencia funcional del número de Nusselt promedio es $Nu = \frac{hL}{k_f} = f_5(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$.

320

Introducción a la convección. Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo

Número de Nusselt (Nu_L)

Definición

hL/k_f

Interpretación.

Gradiente de temperatura adimensional en la superficie.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 164.

164.

Los principios de la convección. La capa límite térmica.

Llamamos número de Nusselt en honor a Wilhelm Nusselt al grupo adimensional

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k}$$

Esto es para el caso de una placa plana con coeficiente de transmisión de calor h, coordenada local x y conductividad del fluido k.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.24, 1.26, 16.65, 14.5, 5.4.

1.24.

Grupos adimensionales y similitud en la transferencia de calor.

Se define el número de Nusselt como:

$$\frac{hL}{k}\left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = Nu$$

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}, \; y^* = \frac{y}{L}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L es la longitud característica, k es la conductividad térmica, T es la temperatura, el subíndice w hace referencia a la pared del sólido y el subíndice infinito hace referencia a la corriente libre.

1.26.
Tabla grupos adimensionales.
Grupo adimensional: Número de Nusselt.
Símbolo: Nu
Definición: $Nu = \frac{hL}{k}$
Significado físico: coeficiente de transferencia de calor adimensional, relación entre la transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción, en un fluido sobre un bloque de espesor L
Principal área de uso: transferencia de calor por convección.
16.65.
Analogía entre la transferencia de calor y masa.
Se define el número de Nusselt en transmisión de calor como:

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

Para la transferencia de masa se define el número de Sherwood como:

$$Sh = \frac{h_{D,i}L}{D}$$

h es el coeficiente de transferencia de calor y $h_{D,i}$ es el coeficiente de transferencia de masa, L es la longitud característica, k es la conductividad del fluido. D es la difusividad de masa.
14.5
Película de condensación en una placa vertical.
Se define el número de Nusselt medio como:

$$Nu_m = \frac{h_m L}{k_l}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, L es la longitud térmica, k_l es la conductividad del líquido.
5.4.
Convección forzada en flujos internos en conductos.
Se define el número de Nusselt local como:

$$Nu_x = \frac{h_x D_h}{k}$$

El número Nusselt medio es:

$$Nu_m = \frac{1}{x}\int_0^x Nu_x dx = \frac{h_m D_h}{k}$$

17.68.
Tabla grupos adimensionales para convección forzada en flujos internos, y flujos friccionantes, usados en el diseño de intercambiadores de calor.
Grupo adimensional: número de Nusselt.
Definición: $Nu_m = \frac{h}{k / D_h} = \frac{q^{"} D_h}{k\left(T_W - T_m\right)}$

Significado físico: relación entre la conducción por convección y la conducción pura molecular térmica k/D_h.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.

Pagina: 17, 302, 335, 20, 329, 332.

17.

Los diferentes tipos de transferencia de calor.

El producto del coeficiente de transferencia de calor α, la longitud característica L_0 y la conductividad térmica λ del fluido, es conocido como número de Nusselt.

$$Nu := \alpha L_0 / \lambda$$

302.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Ecuaciones de la capa límite.

Definimos el número de Nusselt como:

$$Nu_{\mathrm{m}} = \frac{\alpha_{\mathrm{m}} L}{\lambda} = f(Re, Pr)$$

λ: es la conductividad térmica, α_m es el coeficiente de difusión térmica medio, L la longitud característica, λ la conductividad del material, Re el número de Reynolds y Pr el número de Prandtl.

335.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujo externo forzado. Flujo a través de un haz de tubos.

El número de Nusselt para este caso es multiplicado por un factor geométrico f_A

$$Nu_{\mathrm{B}} = \frac{\alpha_{\mathrm{B}} l}{\lambda} = f_{\mathrm{A}} Nu_{\mathrm{m}}$$

α es el coeficiente de difusión térmica, l la longitud característica, λ la conductividad térmica.

20.

Aplicaciones técnicas. Los diferentes tipos de transferencia de calor.

El número de Nusselt local depende de

$$Nu = f\left(x^+, z^+, Re, Pr, Ec, K_{\mathrm{geom}}\right)$$

Donde :

$$x^+ := x/L_0$$

$$z^+ := z/L_0$$

x, z son coordenadas, L_0 una longitud de referencia característica. Re es el número de Reynolds, Pr el de Prandtl, Ec el de Eckert, K_{geom}.

El coeficiente de transferencia de calor medio, depende de z^+ y x^+, el número de Nusselt medio depende de :

$$Nu_{\mathrm{m}} = \frac{\alpha_{\mathrm{m}} L_0}{\lambda} = F\left(Re, Pr, Ec, K_{\mathrm{geom}}\right)$$

λ : es la conductividad térmica.

En el caso de un flujo en el interior de un tubo con L_0= d, tenemos :

$$\frac{\alpha_{\mathrm{m}} d}{\lambda} = F_{\mathrm{tube}}\left(\frac{w_0 d}{\nu}, \frac{\nu}{a}, \frac{L}{d}\right)$$

O también :

$$Nu_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{tube}}\left(Re, Pr, L/d\right)$$

Para el caso de un flujo que circula alrededor de una esfera y hay transferencia de calor entre ambos, tenemos:

$$\frac{\alpha_{\mathrm{m}} d}{\lambda} = F_{\mathrm{sphere}}\left(\frac{w_0 d}{\nu}, \frac{\nu}{a}\right)$$

$$Nu_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{sphere}}\left(Re, Pr\right)$$

w_0 es la velocidad característica, d el diámetro, υ la viscosidad cinemática, α el coeficiente de difusión térmica.

329.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujo externo forzado. Flujo turbulento.

En la transición, entre flujo laminar y flujo turbulento, se obtiene el número de Nusselt medio como:

$$Nu_{\mathrm{m}} = \sqrt{Nu^2_{\mathrm{m,\,lam}} + Nu^2_{\mathrm{m,\,turb}}}$$

El subíndice lam hace referencia a laminar y el turb a turbulento.

332.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujo externo forzado. Flujo a través de un cilindro.

El número de Nusselt puede ser descrito a través de la correlación empírica:

$$Nu_{\mathrm{m}} = c\, Re^m\, Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_0}\right)^p$$

El número de Reynolds está basado en el diámetro característico del cilindro.

C,m,n,p son tomados de la siguiente tabla, según Zukauskas.
Tabla para los valores de las constantes:

Re	c	m	n
1 to 40	0.76	0.4	0.37
40 to 10^3	0.52	0.5	0.37
10^3 to $2 \cdot 10^5$	0.26	0.6	0.37
$2 \cdot 10^5$ to 10^7	0.023	0.8	0.4
Heating the fluid:	p=0.25		
Cooling the fluid:	p=0.20		

Pr_0 : a la temperatura de la pared.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
Página: 695.

695.
Modelos de transferencia de calor por convección.
Coeficientes de transferencia de calor.

Unos de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:

Número de Nusselt

$Nu = \dfrac{hL}{k}$: gradiente de temperatura sobre la superficie adimensional.

h coeficiente de transmisión de calor, L longitud característica, k conductividad térmica.

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 245, 247 (no definición).

245.
Análisis de la transferencia de calor por convección. Ecuaciones de capa límite adimensionales y parámetros de similitud.
Número de Nusselt.

En el caso de transferencia de calor por convección, la incógnita clave es el coeficiente de transferencia de calor.

$$h_c = -\frac{k_f}{L}\left[\frac{(T_\infty - T_s)}{T_s - T_\infty}\right]\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\bigg|_{y^*=0} = +\frac{k_f}{L}\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\bigg|_{y^*=0}$$

El análisis de esta ecuación sugiere que la forma adimensional apropiada del coeficiente de transferencia de calor es el llamado número de Nusselt, Nu, definido como:

$$Nu = \frac{h_c L}{k_f} \equiv \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0}$$

De las ecuaciones

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L \Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Se observa que para una geometría dada, el número de Nusselt depende solo de x^*, Re_L y Pr:

$Nu=f_5(x^*, Re_L,Pr)$

Año:2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.

Autores: Tuncer Cebeci.

Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.

Páginas: 68, 76, 111, 123-125, 181, 199-205, 222-223, 230.

68.

Capa límite laminar. Flujos bidimensionales similares.

El número e Nusselt local se define como:

$$Nu_x = -\frac{x}{T_w - T_e}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w$$

T_w hace referencia a la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, x es la coordenada longitudinal e y la transversal.

76.

Capa límite laminar.

Flujos bidimensionales no similares. Método de Pohlhausen´s

El número de Nusselt local se define como:

$$Nu_x = -\frac{x}{T_w - T_e}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w$$

T_w hace referencia a la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre.

T_w hace referencia a la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, x es la coordenada longitudinal e y la transversal.

111.

Enunciado ejercicio

Aire a temperatura y presión standard fluye normalmente a un cilindro circular uniformemente calentado de radio R, a velocidad u

El número de Nusselt basado en el radio del cilindro es:

$$Nu = \sqrt{2} g'_w \sqrt{R}$$

Donde $R=\dfrac{u_\infty r_0}{v}$ u_∞ es la velocidad de la corriente libre, v la viscosidad cinemática, r_0 es el radio del cilindro y g'_w es el gradiente adimensional de temperatura en la pared

123-125.

Flujo laminar en conductos. Flujo completamente desarrollado en conductos.

Área constante en conductos.

Podemos escribir el número de Nusselt como:

$$Nu=\frac{\dot{q}_w}{\left(T_w-T_m\right)}\frac{d}{k}=\frac{\hat{h}d}{k}=\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}\frac{d}{T_w-T_m}$$

w: hace referencia a la pared.
m: hace referencia al término medio.
d: diámetro.
k: conductividad.
$\hat{h}$: coeficiente de transmisión de calor.
$\dot{q}_w$: flujo de calor en la pared.

$$T_m=\frac{\int \rho uTdA}{A\rho_m u_m}$$

Conductos de sección transversal no circular.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu=\frac{\dot{q}_w}{\left(T_w-T_m\right)}\frac{d_e}{k}$$

$d_e=\dfrac{4A}{s}$, es el diámetro hidráulico.

181.

Capa límite turbulenta. Chorro en pared y película enfriada.

El número de Nusselt se corresponde con el siguiente grupo adimensional

$$Nu_c\equiv\frac{\hat{h}x}{k_c}$$

Basado en la conductividad térmica, evaluada a la temperatura de enfriamiento T_c.
x: coordenada paralela a la placa.
h es el coeficiente de transmisión de calor, k_c la conductividad del fluido.

199-205.

Flujo turbulento en conductos. Flujo en conductos completamente desarrollado.

Perfil de velocidad y factor de fricción.

El número de Nusselt se define como:

$$Nu=\frac{\dot{q}_w}{\left(T_w-T_m\right)}\frac{d}{k}$$

w: hace referencia a la pared.
m: hace referencia al término medio.
d: diámetro.
k: conductividad.

$\dot{q}_w$: flujo de calor.

$$T_m = \frac{\int \rho u T dA}{A \rho_m u_m}$$

222-223.

Flujos con flotabilidad. Convección natural capas límite.

Flujo laminar en placas verticales.

Se define el número de Nusselt como:

$$Nu = \frac{\dot{q}_w}{\left(T_w - T_e\right)} \frac{x}{k}$$

T: temperatura.

w: hace referencia a la pared.

e: hace referencia a la corriente libre.

k: conductividad

x: distancia a lo largo de la placa.

$\dot{q}_w$ **:** flujo de calor**.**

230.

Flujos flotantes. Convección natural en la capa límite.

Placa horizontal.

Se define el número de Nusselt como $Nu = \frac{\dot{g}_w}{T_w - T_e} \frac{L}{k}$

T_w es la temperatura en la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, $\dot{g}_w$ es el gradiente de temperatura en la pared, L es la longitud de la placa, k es la conductividad térmica.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.

Autores: Cengel, Y.A..

Editorial: McGraw-Hill.

Páginas: 336, 358, 437.

336.

Fundamentos de la convección. Mecanismo físico de la convección.

Es común quitar las dimensiones del coeficiente de transferencia de calor h con el número de Nusselt, que se define como:

$$Nu = \frac{hL_C}{k}$$

k: conductividad térmica del fluido.

Lc: es la longitud característica.

h: coeficiente de transferencia de calor.

El número de Nusselt se concibe como un coeficiente adimensional de transferencia de calor por convección.

$$\frac{\dot{q}_{conv}}{\dot{q}_{cond}} = \frac{h\Delta T}{L\Delta T / L} = \frac{hL}{k} = Nu$$

Por lo tanto el número de Nusselt representa el mejoramiento de la transferencia de calor a través de una capa de fluido como resultado de la convección en relación con la conducción a través de la misma capa.

358.

Fundamentos de la convección

Formas funcionales de los coeficientes de fricción y de convección.

Definimos una temperatura adimensional T*

T=g₁(x*,y*,Re_L,Pr)*

De esta forma $Nu_x = \frac{hL}{k} = \left.\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=0} = g_2(x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$

Nótese que el número de Nusselt es equivalente al gradiente de temperatura adimensional en la superficie y, como consecuencia, se menciona de manera más apropiada como el coeficiente de transferencia de calor adimensional. Asimismo $Nu_x = g_2(x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$ y se puede usar una relación de ese tipo para fluidos diferentes que fluyen a velocidades distintas sobre configuraciones geométricas semejantes de longitudes diferentes.

x, y son coordenadas, Re_L y Pr son los números de Reynolds basado en la longitud L y de Prandtl

437.

Convección interna forzada. Flujo laminar en tubos.

Desarrollo del flujo laminar en la región de entrada.

Para un tubo circular de longitud L sujeto a temperatura superficial constante, el número promedio de Nusselt para la región de entrada térmica se puede determinar a partir de:

Región de entrada, laminar: $Nu = 3.66 + \frac{0.065(D/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1 + 0.04[(D/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}]^{2/3}}$

Número de Nusselt y factor de fricción para el flujo laminar completamente desarrollado en tubos de diversas secciones transversales.

$$Nu = \frac{hD_h}{k}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad del fluido y D_h es el diámetro hidráulico.

Cuando la diferencia entre las temperaturas de la superficie y del fluido es grande, puede ser necesario tomar en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura. En este caso, se puede determinar el número de Nusselt promedio para el flujo laminar en desarrollo en un tubo circular a partir de:

$$Nu = 1.86\left(\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0.14}$$

Todas las propiedades se evalúan en la temperatura media de la masa del fluido, excepto μ_s, la cual se evalúa en la temperatura de la superficie.

μ es la viscosidad.

El número de Nusselt promedio para la región de entrada térmica de flujo entre placas paralelas isotérmicas de longitud L se expresa como:

Región de entrada, laminar:

$$Nu = 7.54 + \frac{0.03(D_h/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{1 + 0.016[(D_h/L)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}]^{2/3}}$$

D_h: es el diámetro hidráulico.

L: longitud característica.

3.13. Número De Peclet.

Jean Claude Eugene Peclet. Físico francés, nació en 1793 y murió en 1857. Se convirtió en uno de los mejores eruditos de la Escuela Normale en París, Gay-Lussac y Dulong fueron sus profesores. Fue elegido profesor en la escuela de Marseille en 1816, donde enseñó física hasta 1827, entonces volvió a París donde fue nombrado Maitre de Conferences en la Escuela Normale y fue nombrado profesor en la importante Escuela Central de Artes e Industria.
Su libro más famoso es T*raité de la Chaleur et de Ses Applications aux Arts et aux Manufactures,* en 1829.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.

Autores: Gröber/Erk/Grigull.

Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 190, 205.

190.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Convección forzada.

Consideramos dos tubos de diferente diámetro, por cada uno de los cuales circula un fluido distinto en régimen estacionario. En ambos casos las velocidades, aunque diferentes, son tales que las fuerzas que las fuerzas viscosas y de inercia resultan del mismo orden. Suponemos que ambos fluidos son incompresibles. En cada tubo una diferencia de presiones aplicada en sus extremos crea la corriente; las fuerzas de volumen, tales como la gravitatoria, son pequeñas frente a las producidas por la presión y estamos en caso de convección forzada.

La viscosidad cinemática es: $v = \frac{\eta}{\rho}$

La ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + v_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {z_1}^2} \right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

Ecuación de la energía:

$$u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial {z_1}^2} \right)$$

En la pared del tubo, todas las componentes de la velocidad son nulas y las temperaturas del fluido y de la pared son iguales. En el comienzo de la zona del tubo considerada existe cierta distribución de velocidades, que determina en el tubo la corriente total, la velocidad axial, la velocidad media, etc. Podemos expresar la corriente de calor en la pared en función del coeficiente de transmisión de calor h_1 y de la temperatura diferencial media θ_m con respecto a la temperatura de la pared. Resulta la ecuación:

$$h_1 \theta_{m1} = -k_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1} \right)_p$$

El subíndice p indica la pared y $\theta = T - T_P$

Como al tubo 2 se deben aplicar las mismas ecuaciones y condiciones de contorno, resultará lo anterior cambiando el subíndice 1 por el 2, si bien los valores de una determinada magnitud serán diferentes, en general, en los tubos y en las soluciones finales.

Postulamos que los sistemas son físicamente semejantes, o sea, que la relación entre las magnitudes correspondientes en los tubos 1 y 2 es constante. Por ejemplo, para todas las longitudes, incluso las coordenadas x, y, z de un punto, el coeficiente de proporcionalidad apropiado es f_L, $f_L = \dfrac{L_2}{L_1}$

Y de modo análogo, los otros coeficientes de proporcionalidad son:

Velocidades u, υ, w $\quad f_u = \dfrac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\quad f_p = \dfrac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\quad f_\rho = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\quad f_v = \dfrac{v_2}{v_1}$

Temperaturas T, θ $\quad f_T = \dfrac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $\quad f_\alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $\quad f_h = \dfrac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $\quad f_k = \dfrac{k_2}{k_1}$

Si en las ecuaciones de ecuación de movimiento proyectada, ecuación de continuidad, ecuación de la energía y la de la corriente de calor en la pared, escritas para el segundo tubo sustituimos las magnitudes $x_2, y_2, z_2, u_2, \upsilon_2, w_2, ...$

Por sus valores deducidos de las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad, se obtiene:

Ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$\frac{f_u^2}{f_L}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)=-\frac{f_p}{f_L f_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{f_v f_u}{f_{L^2}}v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^{\ 2}}\right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{f_u}{f_L}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=0$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{f_u f_T}{f_L}\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)=\frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}\alpha_1\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^{\ 2}}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^{\ 2}}\right)$$

Ecuación de la corriente de calor:

$$f_h f_T h_1\theta_{m,1}=-\frac{f_k f_T}{f_L}k\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1}\right)_p$$

Las anteriores ecuaciones, que describen los fenómenos que ocurren en el segundo tubo, son idénticas a sus correspondientes del primer tubo se si verifican las igualdades:

$$\frac{f_u^2}{f_L} = \frac{f_p}{f_L f_\rho} = \frac{f_v f_u}{f_{L^2}} \quad (1)$$

$$\frac{f_u f_T}{f_L} = \frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}} \quad (2)$$

$$f_h f_T = \frac{f_k f_T}{f_L} \quad (3)$$

Se debe observar que la ecuación de continuidad no impone ninguna condición a las constantes de proporcionalidad, pues el cociente $\frac{f_u}{f_L}$ es arbitrario. Al sustituir en las ecuaciones anteriores los valores de los coeficientes de proporcionalidad definidos por las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad se obtienen condiciones de semejanza física que deben cumplir nuestros dos sistemas, y permiten que uno de ellos pueda ser considerado modelo del otro.
De la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{u_1 L_1}{\alpha_1} = \frac{u_2 L_2}{\alpha_2} = \frac{uL}{\alpha}$$

Los parámetros adimensionales así deducidos se designan de acuerdo con una sugestión de Gröber, con los nombres de destacados científicos. Se suele emplear la siguiente notación:

$\frac{uL}{\alpha} = N_{Pe}$ número de Peclet

205.
Leyes de semejanza de la transmisión de calor.
Significado físico de los parámetros adimensionales.
El número de Peclet se define como:

$$\frac{UL}{\alpha} = \frac{U\rho c_p}{k/L} = N_{Pe}$$

La magnitud $U\rho c_p$ representa la velocidad con que una corriente de fluido de velocidad U y capacidad calorífica por unidad de volumen $c_p\rho$ transporta calor, referido a la unidad de sección recta. El denominador es, la velocidad de conducción de calor, por unidad de superficie, a través de una capa de fluido de espesor L. Se supone en ambos casos la misma diferencia de temperaturas. El número de Péclet describe, también, el contenido físico de la ecuación de la energía, o sea el equilibrio entre convección y conducción.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 192, 321.

192.
Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección.
Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.
Se define el número de Péclet como:

$$Pe \equiv \frac{w_0 l_0}{\alpha}$$

w_0, l_0 son la velocidad y longitud de referencia, α el coeficiente de transmisión superficial.
Se puede transformar como sigue:

$$\frac{w_0 l_0}{\alpha} = \frac{w_0 l_0 c_p \rho}{\lambda} = \frac{\rho c_p w_0 \vartheta}{\frac{\lambda}{l_0}\vartheta}$$

En donde el numerador representa la cantidad de calor transportada por convección, y el denominador la cantidad de calor transportada por conducción.
El número de Péclet se obtiene dividiendo en la ecuación de la energía el término de convección por el de conducción.
w_0 es la velocidad de referencia, l_0 es la longitud de referencia, α es el coeficiente de transmisión de calor superficial, c_p es el calor específico, ρ es la densidad del fluido, λ la conductividad térmica, ϑ la diferencia de temperatura.
321.
Problemas especiales de transmisión del calor por convección en medios de una sola fase.
Transmisión de calor en metales líquidos.
El número de Péclet se puede obtener por el producto de los números adimensionales de Reynolds y Prandtl.
Para el caso de variación de temperatura en la sección transversal de un tubo circular de radio r, con flujo turbulento:

$$Pe_d = \mathrm{Re}_d \, \mathrm{Pr} = \frac{\bar{w} d}{\alpha}$$

$\bar{w}$ es la velocidad media del fluido, d el diámetro de la tubería, α es el coeficiente de transmisión de calor superficial.

Año: 1981.
Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 307.
307.
Capa límite laminar y turbulenta. Coeficiente de transferencia de calor, para flujo laminar, incomprensible sobre una superficie plana.
Para Pr bajos, el coeficiente de transmisión de calor depende de:

$$h = fn(x, k, \rho, c_p, u_\infty)$$

x coordenada longitudinal, k la conductividad térmica, ρ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.
Hay cinco variables en J/ºC , m y s, así que hay dos pi-grupos.

$$\Pi_1 = \frac{h_x}{k} \equiv Nu_x \qquad \Pi_2 \equiv \frac{u_\infty x}{\alpha} \equiv \mathrm{Re}_x \, \mathrm{Pr}$$

α es el coeficiente de difusión térmica.
El segundo grupo, es llamado número de Péclét.

$$Pe_x \equiv \frac{u_\infty x}{\alpha} = \frac{\rho C p u_\infty \delta_t}{k\delta_t / x} = \frac{\text{Proporción de capacidad de calor del fluido en la capa límite}}{\text{Conducción de calor axial en la capa límite}}$$

δ_t es el espesor de la capa límite térmica.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre**:**

Número Peclet

$Pe = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$

$$\mathrm{P}e = \frac{\rho c_p U L}{\lambda}$$

Interpretación:

Relación entre la transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores: Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 51, 474, 310, 317.

51.

Ecuaciones gobernantes. Flujos viscosos.

Se define el número de Péclet como:

$$Pe = \frac{\text{energy flow}}{\text{energy flux}} = \frac{\textit{convección}}{\textit{difusión}} \sim \frac{V\Delta T}{a\Delta T / l} = \frac{Vl}{a} = Pe$$

V es la velocidad característica, a es la difusividad térmica, l longitud característica.

474.

Análisis dimensional. Convección.

Se define el número de Péclet como:

$$\frac{\text{Flujo entalpía}}{\text{conducción}} \sim \frac{\rho c_p V D^2 \theta}{k D^2 \left(\theta / D\right)} = \frac{VD}{a} = Pe$$

V: velocidad característica.

a: la difusividad térmica.

D: el diámetro.

k: conductividad.

θ: temperatura.

c_p : temperatura.

ρ : densidad del fluido.

310.
Convección computacional. Elíptica parcial, ecuaciones diferenciales.
Se define el número de Péclet como:

$$Pe = \frac{U_0 L}{a}$$

U_0 : velocidad.
L: longitud.
a: difusividad térmica.
317.
Convección computacional. Elíptica parcial, ecuaciones diferenciales.
Ejemplo Consideramos flujo laminar en la entrada de dos placas paralelas espaciadas una distancia 2l. Las placas son isotermas mientras el fluido corriente arriba es isotermo a una temperatura diferente.
Se define el número de Péclet celda como:

$$Pe_c = \frac{U_0 \Delta x}{a}$$

Δx : es un incremento longitudinal (para resolver el problema, divide el espacio entre las dos placas en incrementos de x y de y)
U_0 : condiciones al inicio de las dos placas.
a: difusividad térmica.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Páginas: 484, 505.

484. Convección forzada.
El producto (RePr) se conoce como número de Peclet, Pe.

$$Pe = \frac{\rho u_{promedio} C_p D}{k} = \frac{u_{promedio} D}{\alpha}$$

Donde ρ es la densidad del fluido, $u_{promedio}$ es la velocidad promedio en el interior del tubo, C_p es el calor específico del fluido, D es el diámetro del tubo, k es el coeficiente de conductividad térmica, α es el coeficiente de difusividad térmica.
El número de Peclet es una medida de la razón de la energía térmica del que transfiere el fluido por convección a la energía térmica que conduce el mismo fluido.
505.
Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.
Nombre del grupo adimensional: Peclet (Pe)

Grupo: $Pe = \dfrac{\rho u_\infty C_p L_c}{k}$

Interpretación física: $\dfrac{\text{Transferencia de calor por convección}}{\text{Transferencia de calor por conducción}}$

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley.
Páginas: 312.

312.
Convección forzada. Flujo laminar en conductos.
Régimen laminar en la entrada, correlaciones.

Se define el número de Péclet como:

$Pe = Re_D Pr$

El número de Péclet es el producto de los números adimensionales de Reynolds en este caso, con longitud característica el diámetro pues estamos en el caso de fluido con convección forzada en el interior de un tubo, y de Prandtl.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.

Índice:

En el índice de relaciones adimensionales, Kay y Nedderman definen dos números de Péclet: número de Péclet Pe $\left(\frac{\rho U c_p d}{k} \text{ ó } \frac{\mathrm{Ud}}{\alpha} \right)$ y número de Péclet modificado Pé $\left(\frac{UD}{\mathscr{D}} \right)$, $\mathscr{D}$ es la difusividad (procesos de transferencia de masa).

μ es la viscosidad el fluido, c_p el calor específico a presión constante , k la conductividad del fluido, ρ es la densidad del fluido, d diámetro de la tubería, U es la velocidad característica, α es la difusión térmica.

Páginas: 256, 389.

256.
Ecuación de la energía.
Semejanza para transferencia de calor en un flujo de un fluido.

Se define él número de Péclet: Pé = $Re \times \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\rho U_0 c_p L}{k} = Re \times Pr$

μ es la viscosidad el fluido, c_p el calor específico a presión constante , k la conductividad del fluido, ρ es la densidad del fluido, d diámetro de la tubería, U es la velocidad característica, α es la difusión térmica.

El número de Péclet es la inversa de la relación entre la transferencia de calor por conducción sin el fluido y el cambio de energía por convección.

389.
Análisis dimensional para procesos de transferencia. Transferencia de calor por convección forzada.

El número de Péclet se define como el producto del número de Reynolds por el de Prandtl *Pé= Re x Pr.*

Nota: en la simbología menciona dos números de Péclet normal y modificado, como hemos mencionado al principio, pero en el libro solo aparece el número de Péclet con la expresión Pé siendo el normal y no el modificado.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 405, 541.

405.

Transferencia de calor por convección. Teoría flujo laminar.

Se define el número de Péclet como:

Pe= RePr

El número de Péclet representa la relación entre la entalpía del flujo con la proporción de calor por conducción

541.

Tabla. Parámetros adimensionales para transferencia de calor por convección: convección forzada.

Grupo adimensional: Número de Péclet
Símbolo: Pe
Definición: $Re_L Pr$

Interpretación $\dfrac{\text{Proporción entalpía del flujo}}{\text{Proporción de calor por conducción}}$

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 37

37.

Flujo capa límite laminar. Capa límite de velocidad y térmica.

Definimos el número de Peclet como:

$$\mathrm{P}e = \frac{U_\infty L}{\alpha}$$

U_∞ es la velocidad en la corriente libre. (u varía desde 0 en la pared hasta U_∞ en la corriente libre), L es la longitud característica, α es el coeficiente de difusión térmica.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Página: 13.

13.

Transferencia de calor laminar en conductos. Conducto circular.

El número de Peclet es:

$$Pe = \frac{DV_{ab}}{\alpha} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$$

D es el diámetro de la tubería circular, V es la velocidad característica, α es el coeficiente de difusión térmica, Re es el número de Reynolds, y Pr el número de Prandtl.

Básicamente el número de Peclet es una medida de la importancia relativa de la convección axial y la conducción axial.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 288, 294.

288.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

Flujo a través de un cilindro.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro D , la densidad ρ, y la viscosidad dinámica μ, también de la diferencia de temperatura T_S-T_E, y del calor específico C_p y la conductividad térmica k

Llamamos número de Péclét al producto de los números adimensionales Re y Pr, así: Pe=RePr= $\frac{VL}{\alpha}$

294.

Tabla de números adimensionales.

Grupo	Definición	Uso
Número de Péclét	Pe=$\frac{VL}{\alpha}$	Flujo laminar internos, deslizamiento flujos externos.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 320.

320

Introducción a la convección.

Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo.

Número de Peclet (Pe_L)

Definición.

(VL/α) =$Re_L Pr$

Interpretación

Parámetro de transferencia de calor independiente adimensional.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 197.

197.

Relaciones empíricas y prácticas en transferencia de calor por convección forzada.

El producto de los números de Reynolds y Prandtl que aparece en las correlaciones del flujo turbulento se llama número de Peclet

$$Pe = \frac{du\rho c_p}{k} = \mathrm{Re}_d \Pr$$

d es el diámetro del conducto, u la velocidad característica, ρ la densidad del fluido, c_p el calor específico, k la conductividad térmica, Re_d el númoer de Reynolds basado en el diámetro y Pr el número de Prandtl.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.26, 14.45, 17.68.

1.26.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Péclet
Símbolo: Pe.
Definición: $\mathrm{Re}\Pr = \frac{\rho c_p VL}{k}$
Significado físico: Parámetro adimensional de transferencia de calor independiente, relación entre la transferencia e calor por convección y conducción

14.45.

Condensación en las burbujas de vapor.

Se define el número de Peclet como:

$$Pe = \mathrm{Re}\Pr_l = \frac{2R_i V_\infty}{\alpha_l}$$

Re es el número de Reynolds, R es el radio de la esfera, V_∞ es la velocidad de la corriente libre, α_l es la difusividad térmica en fase líquida.

17.68.

Tabla grupos adimensionales para convección forzada en el interna y lujos friccionantes, usados en el diseño de intercambiadores de calor.

Grupo: número de Peclet.
Definición: $Pe = \mathrm{Re}\Pr = \frac{\rho c_p VD_h}{k} = \frac{VD_h}{\alpha}$
Significado físico: proporcional a la relación entre la energía térmica por convección y la energía térmica por conducción axialmente en el interior del fluido

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 21, 297.

21.

Aplicaciones técnicas. Diferentes tipos de transferencia de calor.

Los números adimensionales Nu, Re, Pr y Ec pueden ser reemplazados por otros números adimensionales, los cuales son productos de estos cuatro, números.
El número de Péclét, puede ser utilizado en vez del número de Reynolds:

$$Pe := \frac{w_0 L_0}{a} = \frac{w_0 \varrho c_p L_0}{\lambda} = Re\,Pr$$

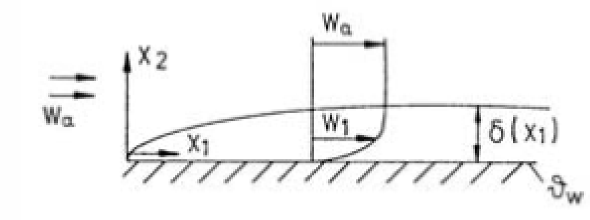
w_0 es la velocidad característica, L_0 la longitud de referencia, α el coeficiente de difusión térmica, ρ la densidad del fluido, c_p el calor específico a presión constante, λ es la conductividad térmica.

297.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Ecuaciones de la capa límite. Capa límite térmica.

Estamos en el caso de un cuerpo cuya superficie tiene una temperatura en la pared ϑ_0,
la cual es diferente a la del fluido que está a una temperatura ϑ_α.

Figura número de Peclet 1.



Asumimos un estado constante para flujo bidimensional, son excluidos grandes cambios de presión y temperatura, así podemos asumir conductividad térmica constante.
Definimos el siguiente grupo adimensional, llamando número de Péclét, el cual está relacionado con el número de Reynolds, de la siguiente forma:

$$Pe = \frac{w_m L}{a} = \frac{w_m L}{\nu}\frac{\nu}{a} = Re\,Pr$$

w_m: es una velocidad característica constante.
La difusividad térmica viene dada con la siguiente expresión:

$$a := \lambda / \varrho c_p$$

L es la longitud característica, υ la viscosidad cinemática.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
Páginas: 880, 696

880.
Modelos de transferencia de masa. Dispersión
El número de Peclet , $\frac{vL}{D}$ representa la razón de transporte de masa por el volumen del fluido que hay por la dispersión

696.
Modelos de transferencia de calor. Modelos de transferencia de calor por convección.
Coeficientes de transferencia de calor.
Unos de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:
El número de Peclet para transferencia de calor

$$Pe_h = \frac{vL}{\alpha} = \left[\frac{vL\rho}{\mu}\right]\left[\frac{\mu C_P}{K}\right] = \mathrm{Re}_L \Pr = \frac{vL\rho C_p}{k} = \frac{\text{volumen de energía térmica transportada}}{\text{proporción de energia por conducción}}$$

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Página: 254

254.
Análisis de la transferencia de calor por convección.
Tabla
Grupo: Número de Peclet (Pe_L)
Definición: $Re_L Pr$
Interpretación: Producto de los números de Reynolds y Prandtl.

Año:2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Páginas: 130, 150-151, 161.

130.
Flujo laminar en conductos.
Longitud de la corriente térmica de entrada para campo de velocidad completamente desarrollada. Muestreo de soluciones.
El número de Péclet se define como $\frac{u_m L}{\kappa}$ donde $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$ y $u_m = \frac{\int udA}{A}$

K es el coeficiente de conducción, ρ densidad del fluido, c_p el calor específico del fluido, u_m es la velocidad media.

150-151.

Capa límite turbulenta. El interior de la capa.

El perfil logarítmico.

El número de Péclet se puede expresar como: $\frac{u_\tau y}{v} \Pr \equiv \frac{u_\tau y}{k / \rho c_p}$

$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$ es la velocidad de fricción, τ_w es la tensión de cortadura en la superficie, v viscosidad cinemática, ρ densidad del fluido, c_p calor específico.

161.

Capa límite turbulenta. El exterior de la capa.

Se define el número de Péclet como: $\frac{u_e \theta}{v}$

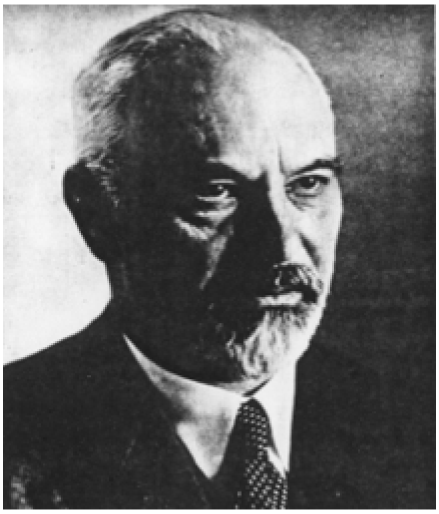
donde u_e es la velocidad de la corriente libre, v la viscosidad cinemática, θ es un área, la obtenemos por ejemplo del método integral para el campo de velocidad, integrando las expresión $\theta^2 = \frac{vA\int_0^x u_e^{B-1} dx}{u_e^B} + \theta_i^2 \frac{u_{e_i}^B}{u_e^B}$, a su vez ésta se desprende de la ecuación de momento de transferencia en flujos incompresibles laminares con gradiente de presión, pero sin transferencia de masa, basada en la observación experimental de datos y soluciones numéricas exactas para la capa límite laminar .

El subíndice i, hace referencia a las condiciones iniciales, A y B son constantes (Thwaites elige A=0.45, B=6, página 78), u_e es la velocidad de la corriente libre.

(Flujos axilsimétricos , incompresibles $\theta = \int_0^\infty r \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$)

3.14. Número de Prandtl.

Ludwig Prandtl . Nació en Freising en 1875 y murió en Gotinga 1953. Físico alemán. Profesor en la Universidad de Gotinga y director del Instituto Max Planck, se especializó en el estudio de la mecánica de fluidos. Estableció el concepto de *capa límite* para definir la porción de fluido en contacto con la superficie de un cuerpo sólido sumergido en él y en movimiento relativo. Investigó la turbulencia y halló la ley de distribución de velocidades en la capa límite turbulenta. Ideó el *tubo de Prandtl*, esencialmente igual al tubo de Pitot.



Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Página: 121.

121.

Productos adimensionales estándar en la teoría de calor.

Se define el número de Prandtl como:

$$Q = \frac{C\mu}{k}$$

L la longitud característica, h es el coeficiente de transmisión de calor, k la conductividad térmica del fluido.

C es el calor específico, μ la viscosidad y k la conductividad térmica.

Año1967.

Libro: Transmisión de calor.
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.
Página: 208, 191, 193, 205.

208.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Significado físico de los parámetros adimensionales.

Se puede observar que la literatura francesa emplea notación y terminología bastante diferentes, que a continuación comparamos con la nuestra:

Notación actual	Notación francesa.
$N_{\Pr} = \frac{v}{\alpha}$ Número de Prandtl	$S = \frac{\alpha}{v}$ Número de Stanton

191.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Convección forzada.

Se emplea mucho la relación:

$$\frac{\mathrm{N}_{\mathrm{pe}}}{\mathrm{N}_{\mathrm{Re}}} = \frac{v}{\alpha}$$

Donde $v = \frac{\eta}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, y α la difusividad térmica.

193.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Convección libre.

En la convección libre, la fuerza de empuje hidrostático que actúa sobre la partícula que se encuentra a más temperatura, luego menor densidad, que el fluido que la rodea debe intervenir en la ecuación de movimiento como una fuerza e volumen. El término correspondiente al campo gravitatorio terrestre aparece exclusivamente en la ecuación de la coordenada vertical del movimiento. Consideremos por ejemplo, una pared vertical con la temperatura superior a la del fluido que la rodea. La capa calentada por la pared disminuye de densidad y experimenta, por ello, un empuje hacia arriba con respecto al fluido inmediato. Se puede expresar la variación del volumen específico $V_e = \dfrac{1}{\rho}$ con la temperatura por medio del coeficiente de dilatación

$$\beta = \frac{1}{V_e}\frac{dV_e}{dT}$$

Por consiguiente, mantenemos la hipótesis de propiedades (η,c_p, k) independientes de la temperatura, excepto para la densidad ρ.

El valor del coeficiente de dilatación que se considera es el que corresponde a la temperatura media del flujo si las diferencias de temperaturas son considerables o , si son muy pequeñas, el que define la temperatura del fluido no perturbado fuera de la capa limite. De la ecuación de los gases perfectos:

$$V_e = \frac{RT}{p}$$

Se deduce $\beta = \dfrac{1}{T}$ para los gases. Designando θ_∞ la diferencia entre la temperatura de la partícula y la del fluido no perturbado, el empuje hidrostático por unidad de volumen es:

$$G = \beta\rho g\theta_\infty$$

Esta fuerza debe agregarse al segundo miembro de la ecuación de movimiento

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1\theta_{\infty,1} + v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2}\right)$$

$$f_\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{y} \quad f_g = \frac{g_2}{g}$$

Teniendo en cuenta que está dirigida hacia arriba, dirección y sentido que suponemos coinciden con los del eje x. Al asignar el subíndice 1 al modelo 1 y el 2 al modelo 2, obtenemos:

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \beta_1 g_1\theta_{\infty,1} + v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2}\right)$$

Y necesitamos, además de los coeficientes de proporcionalidad de las ecuaciones:

Velocidades u, υ, w $\quad f_u = \dfrac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\quad f_p = \dfrac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\quad f_\rho = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\quad f_v = \dfrac{v_2}{v_1}$

Temperaturas T, θ $\quad f_T = \dfrac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $f_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $f_h = \frac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $f_k = \frac{k_2}{k_1}$

$f_\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ y $f_g = \frac{g_2}{g_1}$

Siguiendo el método de cálculo empleado en la parte de calculo de número de Reynolds por convección forzada de este mismo libro, se obtiene:

$$\frac{f_u^2}{f_L} = \frac{f_P}{ff_L} = f_g f_\beta f_T = \frac{f_v f_u}{f_L^2}$$

Por ser pequeñas las diferencias de presión que ocurren en las corrientes de convección libre, no se deduce ningún parámetro adimensional del segundo miembro de la ecuación. No existe ninguna velocidad conocida; en cambio, la velocidad en la placa es nula y también vale cero en puntos situados fuera de la capa límite y a gran distancia de la misma, luego no tiene sentido la relación f_u y se puede prescindir de ella. Por último teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas para convección forzada (en el apartado número de Reynolds de este mismo libro, página 189, en la misma pregunta)

$$\frac{f_u f_T}{f_L} = \frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}$$

$$f_h f_T = \frac{f_k f_T}{f_L}$$

Que se aplican en este caso sin ninguna modificación, podemos deducir el criterio de semejanza que exponemos a continuación:

$$\frac{v}{\alpha} = const$$

El número definido por esta ecuación, se conoce como número de Prandtl y se representa por N_{Pr}

205.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Significado físico de los parámetros adimensionales.

El número de Prandtl $N_{\Pr} = \frac{v}{\alpha}$ compara dos propiedades relativas al transporte molecular: la viscosidad cinemática (o difusividad del ímpetu), que rige el transporte del ímpetu en el rozamiento, y la difusividad térmica α, que lo hace en el transporte de calor (energía) en la conducción. El transporte de ímpetu se debe a la velocidad y el de energía a los gradientes de temperatura. El número de Prandtl es, pues, característico de la relación que liga el campo de velocidades con el de temperaturas.

Se puede calcular el número de Prandtl para un gas ideal por medio de la teoría cinética; solo depende del número de átomos que constituyen la molécula de gas. Según la teoría elemental, el número de Prandtl debe ser independiente de la presión y de la temperatura.

En gases reales, el número de Prandtl se puede hallar, únicamente, utilizando procedimientos experimentales, midiendo separadamente v y α o por determinación directa.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 195, 234, 246.

195.
Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección.
Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.

El parámetro $\Pr = \frac{v}{\alpha}$ es un nuevo criterio, llamado número de Prandtl, que está compuesto totalmente de magnitudes físicas, por lo tanto, él mismo es un parámetro físico. Dicho número se puede representar de la siguiente forma:

$$\Pr \equiv \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

v es la viscosidad cinemática, α es el coeficiente de transmisión de calor superficial, μ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, λ la conductividad térmica.

234.
Transmisión de calor en una placa plana con flujo forzado longitudinal.
Transmisión de calor en la capa límite laminar.

Se define el número de Prandtl como:

$$\Pr = \frac{v}{\alpha}$$

v es la viscosidad cinemática, α es el coeficiente de transmisión de calor superficial.

246.
Transmisión de calor en una placa plana con flujo forzado longitudinal.
Transmisión de calor en una capa límite turbulenta.

El número de Prandtl es el criterio de semejanza entre los campos de velocidad y de temperatura.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 217, 218.

217.
Transferencia de calor por convección.
Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

Este análisis dimensional no es muy exhaustivo. El lector puede encontrar un análisis más detallado en las obras de Welty, Wicks y Wilson y Langhaar.

Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de un cilindro, el fluido que fluye y la pared del cilindro están a diferentes temperaturas, la

velocidad promedio es u_{prom}, y las propiedades de interés del fluido son la densidad, la viscosidad, el calor específico y conductividad térmica.
Vamos a considerar fundamentales cuatro dimensiones: la masa M, la longitud L, el tiempo t y la temperatura T. Todas las expresiones están expresadas en función de las anteriores. Las unidades de c_p, k y h incluyen un término de calor: para esta investigación se ha representado el calor por energía con dimensiones de ML^2/t^2

Variable	Símbolo	Dimensiones.
Velocidad	u	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fluido	k	ML/t^3T
Coeficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

El teorema de pi de Buckingham dice que el número de grupos independientes adimensionales i necesarios para correlacionar n variables dimensionales está dado por la expresión i = n – r
Donde r es el rango de una matriz que tiene n columnas y un número de renglones equivalente al número de dimensiones fundamentales –en este cuatro.
La matriz sujeto se forma como sigue:

	u	D	ρ	μ	c_p	k	h
M	0	0	1	1	0	1	1
L	1	1	-3	-1	2	1	0
t	-1	0	0	-1	-2	-3	-3
T	0	0	0	0	-1	-1	-1

El número en cada posición de la tabla es el exponente al que se debe elevar cada una de las dimensiones para representar adecuadamente la variable dada.
El rango de esta matriz es 4 luego se deben formar 7 – 4 = 3 parámetros adimensionales.
Cada parámetro adimensional se forma combinando un grupo núcleo de r variables con una de las variables restantes que no estén en el núcleo. El núcleo puede incluir cualquiera de las 4 variables (en este caso) que, entre ellas incluyan todas las dimensiones básicas. En forma arbitraria se escogen d, ρ, μ y k como el núcleo. Ahora se representan como grupos pi a los parámetros que se deben formar en donde:

$\pi_1 = D^a \rho^b \mu^c k^d u$

$\pi_2 = D^e \rho^f \mu^g k^h c_p$

$\pi_3 = D^i \rho^j \mu^k k^l h$

Cada grupo pi ha de ser adimensional, lo que se logra seleccionando adecuadamente los exponentes, b, c etc usando la muy sencilla técnica mecánica que ahora se ilustra.

π_2 se le escribe adimensionalmente en la forma

$$1 = L^e \left(\frac{M}{L^3}\right)^f \left(\frac{M}{Lt}\right)^g \left(\frac{ML}{t^3T}\right)^h \frac{L^2}{t^2T}$$

Para que se mantenga la igualdad, los exponentes en m, l, t y T deben ser iguales en ambos lados de la expresión. Notando que los exponentes son cero en el lado izquierdo, se genera el siguiente conjunto de ecuaciones algebráicas igualando los exponentes:

M : 0=f+g+h

L: 0=e-3f-g+h+2

t: 0=-g-3h-2

T: 0=-h-1

Se pueden resolver estas ecuaciones para dar valores de e, f, g y h iguales a 0,0, 1 y -1, respectivamente.
Se puede escribir por lo tanto:

$$\pi_2 = \frac{\mu c_p}{k} \equiv \mathrm{Pr}$$

Que se conoce como número de Prandtl, y es igual a la razón de las difusividades moleculares del impulso y del calor.

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\alpha}{v}$$

218.

Transferencia de calor por convección.

Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

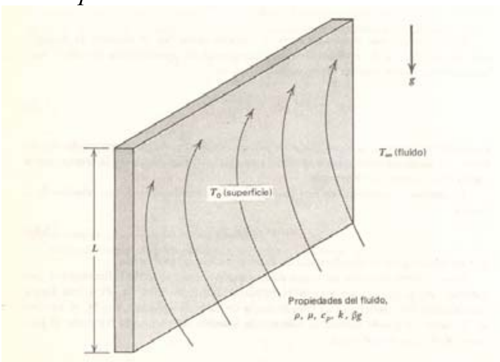
Estudiamos el caso e la figura, en el que no hay velocidad especificada; el flujo es el resultado de la transferencia de energía entre la placa a temperatura T_0 y el del fluido a temperatura ambiente T_∞. Las propiedades de interés del fluido son ρ, μ, c_p,k y β. La última propiedad mencionada es el coeficiente de dilatación térmica, usado para representar la variación en la densidad del flujo con la temperatura en la forma: $\rho = \rho_0\left(1+\beta\Delta T\right)$, en donde ρ_0 es la densidad de referencia dentro de la capa límite y ΔT es la diferencia de temperaturas entre el fluido en la superficie de la placa y la correspondiente lejos de la placa.
Se puede escribir la fuerza boyantez por volumen unitario, F_B, como:

$F_B = \left(\rho - \rho_0\right) g$ y sustituyendo en la ecuación interior:

$$F_B = \rho_0 \beta g \Delta T$$

Así, en el análisis dimensional, se deben incluir las variables β, g y ΔT en este proceso de convección natural.
Trataremos a β y g como una sola variable en el análisis dimensional.

Figura 1 número de Prandtl: Parámetros de análisis dimensional para la convección forzada en una pared vertical.



Variable	Símbolo	Dimensiones.
Altura	L	L
Diferencia de temperatura	ΔT	T
Coeficiente de dilatación térmica	βg	L/t^2T
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fluido	k	ML/t^3T
Coeficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

Aplicando el teorma de pi de Buckingham se tiene que se deben formar cuatro grupos pi adimensionales. Si se designa como un grupo núcleo a las variables L, ρ, μ y k, los grupos pi son:

$\pi_1 = L^a \rho^b \mu^c k^d \Delta T$

$\pi_2 = L^e \rho^f \mu^g k^h \beta g$

$\pi_3 = L^i \rho^j \mu^k k^l c_p$

$\pi_4 = L^m \rho^n \mu^0 k^p h$

No vamos a mostrar todo el proceso mecánico de evaluación de los exponentes a, b, c etc, (ver apartado anterior: página217 de este mismo libro) necesarios para hacer adimensionales a los grupos pi. Los resultados de este procedimiento son :

$$\pi_3 = \frac{\mu c_p}{k} \equiv \text{Pr}$$

Que se conoce como número de Prandtl.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 300, 318.

300.
El número de Prandtl y el espesor de la capa límite.
Análisis dimensional.

Miraremos detenidamente las implicaciones de semejanza entre la velocidad y la capa límite térmica. Estudiaremos el análisis dimensional sobre la transferencia de calor en la capa límite laminar.
La ecuación funcional dimensional, para el coeficiente de transferencia de calor h:

$$h = fn(k, x, \rho, c_p, \mu, u_\infty)$$

k es la conductividad, x la coordenada longitudinal, ρ la densidad del fluido, c_p es el calor específico, μ es la viscosidad del fluido, u_∞ es la velocidad de la corriente libre.
Hemos excluido T_W-T_∞ en la base de las hipótesis originales de Newton, $h \neq fn(\Delta T)$ durante la convección forzada. Así se obtienen 7 variables en J/ºC, m, Kg y s. Por lo tanto 7-4=3 pi-grupos.

$$\Pi_1 = \frac{h_x}{k} \equiv Nu_x \qquad \Pi_2 = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} \equiv \mathrm{Re}_x$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu c_p}{k} \equiv \frac{\upsilon}{\alpha} \equiv \mathrm{Pr}$$, número de Prandtl.

Así $Nu_x = fn(Re_x, Pr)$

Para comprender mejor el significado físico del número de prandtl, vamos a considerar brevemente como predecir su valor en un gas. Realizando un estudio para diferentes casos llegamos a la conclusión, de que Pr puede variar sobre casi ocho ordenes de magnitud en los fluidos comunes, es el resultado de mecanismos de analogía de la transferencia y momento de calor. En ambos los valores numéricos de Pr y la analogía de ellos mismos tiene sus orígenes en el mismo proceso básico del transporte molecular.

318.
Capa límite laminar y turbulenta. Capa límite turbulenta.

Pr es una propiedad física de los fluidos. Es tanto teóricamente como en la práctica cercano a la unidad para gases ideales, pero se distancia de forma radical de la unidad en gases no ideales.

$$\mathrm{Pr}_t \equiv \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}$$

Donde ε_m se llamada velocidad, remolino o difusividad y ε_h es la difusividad turbulenta de calor.
Pr_t es una propiedad del campo de los flujos más que de los fluidos. El valor numérico de Pr_t esta normalmente entre un factor de 1 y de 2.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 216.

216.
Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.
Nombre:
Número de Prandtl

$$\Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

Formación:

$$\frac{\mu / \rho}{a} = \frac{v}{a}$$

Interpretación:
Relación entre la difusividad de materia y la difusividad térmica.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 51, 101, 435.

51.
Desarrollo de las ecuaciones gobernantes. Ecuaciones gobernantes.
Flujos viscosos.
La relación entre el número de Péclet y y el número de Reynolds eliminando los efectos de flujo y geometría, se desprende el número de Prandtl.

$$\Pr = \frac{\text{(flux/flow)flujo de momento}}{\text{(flux/flow) de energía}} \sim \frac{v}{a}$$

v es la viscosidad cinemática, la difusividad térmica $a = \dfrac{k}{\rho c_v}$ para casos de fluidos $c_v = c_p$ calor específico a volumen constante, calor específico a presión constante, ρ es la densidad del fluido y k la conductividad térmica.

101.
Flujos paralelos. Capa límite térmica.
Para flujos incompresibles la ecuación de momento puede ser desacoplada de la ecuación de la energía y pueden ser resueltas por separado. Para flujos incompresibles isotérmicos, nosotros tenemos para el espesor de la capa límite de velocidad:

$\delta \sim v^n$, donde n es una fracción

Para el espesor de de la capa límite térmica $\Delta \sim a^n$

Por lo tanto se puede expresar el número de Prandtl como:

$$\Pr \sim \frac{\delta}{\Delta}$$

$a = \frac{k}{\rho c_v}$ es la difusividad térmica para casos de fluidos $c_v = c_p$ (calor específico a volumen constante, calor específico a presión constante), ρ es la densidad del fluido, k la conductividad térmica, v es la viscosidad cinemática.

435.

Predicción de la transferencia de calor.

Se define el número turbulento de Prandtl como:

$$\sigma_T = \frac{v_T}{a_T}$$

a_T : es la difusividad turbulenta de calor.

v_T : difusividad de momento turbulento

El número de Prandtl relaciona la difusividad turbulenta de momento, con la difusividad turbulenta de calor.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Página: 505.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Prandtl (Pr)

Grupo: $\Pr = \frac{c_p \mu}{k}$

Interpretación física: $\frac{\text{Difusividad de momento}}{\text{Difusividad térmica}}$

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley.
Páginas: 16, 269, 271, 625.

256.

La ley de Fick: Analogía entre calor, masa y momento.

Se define el número de Prandtl como:

$$\Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{v}{\alpha}$$

donde μ es la viscosidad el fluido, c_p calor específico, k la conductividad térmica y α es la difusividad térmica.

Es la relación entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica.

269.

Principios de convección. Ecuaciones de la capa límite

Se define el número de Prandtl como: $\Pr = \frac{c_p \mu}{k}$ done μ es la viscosidad el fluido, c_p calor específico, k la conductividad térmica.

271.
Principios de convección. Análisis dimensional.
Se define el número de Prandtl como: $\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{k}$ done μ es la viscosidad el fluido, c_p calor específico, k la conductividad térmica.
625.
Transferencia de masa. Ley de Fick de la difusión.
Se define el número de Prandtl como:

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{v}{\alpha}$$

Es la relación entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica.
donde μ es la viscosidad el fluido, c_p calor específico, k la conductividad térmica y α es la difusividad térmica.

Año: 1988.
Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere.
Páginas: 10,
10.
Flujo y transporte.
Se define el número de Prandtl como:
$\mathrm{Pr} = \frac{v}{\alpha}$, donde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ es la difusividad térmica, ρ la densidad del fluido, c_p es el calor específico, k la conductividad térmica, v la viscosidad cinemática.

Año: 1990.
Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 42, 256, 388, 394.
42.
Procesos de transferencia de un fluido.
Transporte de energía por movimiento molecular.
Se define el número de Prandtl como:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k_h}$$

$$dE = mc_v dT$$

E es la energía interna por molécula.
c_v es el calor específico de calor de un gas a volumen constante.
$E = \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{2}{3} kT$ Energía por movimiento molecular.
k: es la constante de Boultzman

T: temperatura absoluta de un gas.
La proporción de energía transportada por unidad de área

$$q = -\frac{1}{2} n_0 k \overline{\lambda_t v} \frac{dT}{dy} \qquad q = -k_h \frac{dT}{dy} \quad \text{-----}\rightarrow \quad k_h = \frac{1}{2} n_0 k \overline{\lambda_t v}$$

$$c_v = \frac{2}{3} \frac{k}{m}$$

$$k_h = \frac{1}{3} m n_0 c_v \overline{\lambda_t v} = \frac{1}{3} \rho c_v \overline{\lambda_t v} \quad \text{(conductividad térmica)}$$

Champan and Cowling llegaron al siguiente resultado para gases monoatómicos $k_h = \frac{5}{2} \frac{c_v \mu}{k}$ -----→ $\Pr = \frac{2}{5}\gamma$ (una molécula)

En el caso de gases perfectos $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

Para gases con moléculas poliatómicas, la expresión para la energía cinética de una molécula debe ser modificada para tener en cuenta tanto la energía rotacional y vibracional. Un análisis de este problema da como resultado la siguiente expresión para el número de Prandtl de un gas poliatómico.

$$\Pr = \frac{\mu c_p}{k_h} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$$

256.
La ecuación de la energía.
Semejanza para transferencia de calor en flujo de fluidos.

Se define el número de Prandtl como $\Pr = \frac{\mu c_p}{k}$

Donde μ es la viscosidad del fluido, k la conductividad y c_p el calor específico.

388.
Análisis dimensional de los procesos de transferencia.
Declaración de los principios básicos.

Consideramos la transferencia de calor de un fluido que fluye en el interior de una tubería circular. El valor del flujo de calor q depende de la diferencia de temperatura ΔT entre la pared de la tubería y el fluido, del diámetro D , de la velocidad media u_m y la temperatura media del fluido T_m y de las propiedades físicas k, ρ, c_p, μ, así nosotros podemos afirmar que

$$q = f\left(\Delta T, k, c_p, \rho, \mu, D, u_m, T_m\right)$$

Por el teorema de π de Buckingham´s, esta conexión entre nueve cantidades, puede ser reducida a cuatro, si asumimos cinco dimensiones fundamentales

$$[m],[l],[t],[T],[Q]$$

Nosotros podemos tomar cinco cantidades primarias como sigue:

Cantidad	k	ρ	D	μ	ΔT
Dimensiones	$\left[\mathrm{Ql}^{-1} t^{-1} T^{-1}\right]$	$\left[\mathrm{ml}^{-3}\right]$	$[\mathrm{l}]$	$\left[m l^{-1} t^{-1}\right]$	$[t]$

Para π_1 podemos poner $\frac{q}{k^a \rho^b D^c \mu^d \Delta T^e}$

Dimensionalmente

$$\frac{[Q]}{[l^2t]} = \frac{[Q]^a}{[ltT]^a}\frac{[m]^b}{[l^3]^b}[l]^c\frac{[m]^d}{[lt]^d}[T]^e$$

Por lo tanto

Q a=1

T 0=-a+e $\therefore e = 1$

t -1=-a-d $\therefore d = 0$

m 0=b+d $\therefore b = 0$

l -2=-a-3b+c-d $\therefore c = -1$

Así calculamos $\pi_1 = \frac{qD}{k\Delta T}$ y de forma similar $\pi_3 = \frac{\mu c_p}{k}$ conocido como número de Prandtl.

394.

Análisis dimensional de los procesos de transferencia.

Significado físico de los grupos adimensionales.

El número de Prandtl $\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)$ y el de Schimdt $\left(\frac{\nu}{D}\right)$ son simplemente las relaciones de la viscosidad cinemática con la térmica y la difusividad molecular y por lo tanto nos da una medida de la eficiencia relativa de un fluido como conductor de momento, calor y soluto (solote).

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.

Autores: Thomas, L.c.

Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.

Páginas: 371, 374

371.

Transferencia de calor por convección.

Tipos de fluido.

Se define el número de Prandtl como:

$$\Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

μ es la viscosidad del fluido, k la conductividad y c_p el calor específico.

374.

Transferencia de calor por convección.

La capa límite.

El número de Prandtl se define como:

$$\Pr = \frac{\mu}{\rho}\frac{\rho c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{Viscosidad cinemática}}{\text{Difusividad térmica}}$$

Donde μ es la viscosidad del fluido, k la conductividad y c_p el calor específico.

El número de Prandtl se puede ver como la representación de la relación de la efectividad de trasporte molecular de momento y la energía dentro de la capa límite hidrodinámica y térmica.

Año: 1993.
Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 17.

17. Leyes de los flujos.

Se define el número de Prandtl como:

$$\Pr = \frac{\mu}{\Gamma} = \frac{\mu c}{k}$$

$$\Gamma = \frac{k}{c}$$

k es la conductividad térmica, c es el calor específico, y μ la viscosidad del fluido.

Año: 1993.
Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 267.

267.
Convección- conceptos y relaciones básicas.
Parámetros adimensionales.

Se define el número de Prandtl de la siguiente forma:

$$\Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{v}{\alpha} = \frac{\text{Momento de difusividad molecular}}{\text{Difusividad molecular de calor}}$$

donde $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}$ es la difusividad térmica, ρ la densidad del fluido, c_p es el calor específico, k la conductividad térmica, v la viscosidad cinemática.

Representa la relación del momento y la energía de transporte por difusión del proceso.

Año: 1995.
Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 37, 566, 314

37.
Flujo en la capa límite laminar.
Capa límite de velocidad y térmica.

Encontramos el resultado interesante que el tamaño relativo de δ y δ_t (espesor de la capa límite de velocidad y térmica respectivamente) depende de el número de Prandtl

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

ν es la viscosidad cinemática, α es la difusividad térmica.

566.

Convección en un medio poroso. Medio poroso encerrado caliente por la parte de abajo.

Flujo de Forchheimer.

$$\Pr_p = \frac{H}{bK}\frac{\nu}{\alpha}$$

$\Pr_p$ es un número adimensional llamado número de Prandtl en medio poroso.

Estás variables son del análisis de la figura.

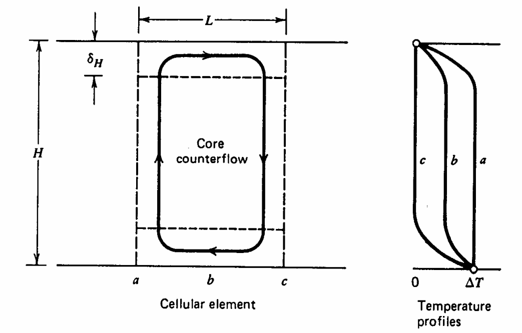


Figura 2 número de Prandtl: *Modelo de convección celular para determinar el número de Nusselt en el régimen de convección de una capa caliente por la parte de abajo.*

314.

Flujo en la capa límite turbulenta.

Transferencia de calor, flujo la capa límite turbulenta.

Se define el número de Prandtl turbulento:

$$\Pr_t \text{ , } \Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$$

ε_M = difusividad remolino térmica.

ε_H = difusividad remolino momento.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.

Autores: Louis C. Burmeister.

Editorial: John Wiley and Sons.

Páginas:10, 113, 272, 294.

10.

Análogias para difusión unidimensional.

El número de Prandtl es $\Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

Donde ν es la viscosidad cinemática y α la difusividad térmica.

113.

Transferencia de calor laminar en conductos.

Conductos circulares.

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$$

Donde v es la viscosidad cinemática, α la difusividad térmica, μ es la viscosidad del fluido, C_p es el calor específico a presión constante, K la conductividad térmica.

272.

Fundamentos de la turbulencia.

Difusividades turbulentas

El número turbulento de Prandtl es un número que suele ser constante, próximo a la unidad puesto que los mecanismos de los transportes de calor, momento y masa turbulentos deben ser los mismos.

294.

Capa límite turbulenta.

Distribución de temperatura en flujos paralelos.

Número de Prandtl turbulento: $\Pr_t = \dfrac{\varepsilon_m}{\alpha_t}$

ε_m es la difusividad de remolino turbulenta y α_t el coeficiente de difusividad térmica.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.

Autores: Mills. A.F

Editorial: McGraw-Hill.

Número de Prandtl: 287, 288, 464, 472.

287.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

Flujo a través de un cilindro.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro D , la densidad ρ, y la viscosidad dinámica μ, también de la diferencia de temperatura T_S-T_E, y del calor específico C_p y la conductividad térmica k. Así:

$\overline{q_s} = f(V, D, \rho, \mu, \Delta T, c_p, k)$

Las unidades de las variables pueden ser escritas de la siguiente forma:

$\overline{q_s}$:w/m^2

V:m/s

D:m

ρ :Kg/m^3

μ :Kg/ms

ΔT :K

c_p : Ws/KgK

k:W/mK.

Hay 5 dimensiones primarias y 8 variables, así que según el teorema de pi de Buckingham hay tres grupos adimensionales.

El método mas usual para determinar estos grupos adimensionales, es mediante el método de los índices.

$\Pi = \overline{q_s}^a V^b D^c \rho^d \mu^e \Delta T^f c_p{}^g k^h$

Los sustituimos por sus dimensiones.

Para hacer Π adimensional, la suma de los exponentes de cada dimensión primaria debe ser cero.

$$Kg: d+e-g=0$$
$$m: -2a+b+c-3d-e-h=0$$
$$s: -b-e+g=0$$
$$K: f-g-h=0$$
$$W: a+g+h=0$$

Tenemos tres distintas soluciones 8-5=3

Para obtener el grupo adimensional, llamado número de Prandtl , hacemos g=1,a=b=0:

d+e-1=0

c-3d-e-h=0

-e+1=0

f-1-h=0

1+h=0

Obtenemos h=-1, f=0, e=1, d=0, c=0, lo cual nos da :

$$\Pi_3 = \frac{c_p \mu}{k}.$$

El número de Prandtl puede escribirse como:

$$\Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{v}{k/\rho c_p} = \frac{v}{\alpha}$$

Como se puede ver es la relación entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica.

288.

Fundamentos de la convección y correlaciones.

Análisis dimensional.

Valores del número de Prandtl para varios fluidos .

Fluid	Temperature K	Prandtl Number
Sodium	1000	0.0038
Mercury	500	0.012
Lithium	700	0.031
Argon	400	0.67
Air	300	0.69
Saturated steam	373	0.98
Liquid ammonia	270	1.49
Water	460	0.98
	360	2.00
	275	12.9
Liquid refrigerant-12	250	4.6
Therminol 60	350	31.3
Ethylene glycol	300	151
SAE 50 oil	400	154
	300	6600

464.

Análisis de la convección. Flujo turbulento.

Longitud de mezcla de Prandtl y modelo de difusividad turbulenta

Transporte de calor.

Definimos el número de Prandtl $\Pr_t$ en analogía con el número de Prandtl, Pr

$$\Pr = \frac{v}{\alpha} \quad ; \quad \Pr_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$$

ε_M : difusividad turbulenta de momento.

ε_H : difusividad turbulenta de calor.

v es la viscosidad cinemática, α es la difusividad térmica.

472.

Análisis de la convección. Flujo turbulento.

Fuerzas del flujo a lo largo de una superficie plana.

El número de Prandtl turbulento.

Una Turbulencia con remolinos moviéndose transversalmente hacia el flujo principal, puede ser una expectativa de perdida de calor.

Si deseamos determinar el perfil de temperatura, es necesario ser meticulosos y especificar la variación de Pr_t, a lo largo de la capa límite.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.

Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.

Editorial: John Wiley and Sons.

Páginas: 312, 318, 320, 537.

312.

Convección. Similitud de capas límite: ecuaciones de transferencia por convección normalizadas.

Parámetros de similitud de la capa limite.

De la ecuación de transferencia por convección en la capa límite térmica:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\alpha}{vL} \frac{\partial^2 T}{\partial y^{*2}}$$

Notamos que el término $\frac{\alpha}{vL}$ es un grupo adimensional que se expresa como $\frac{v}{VL}\frac{\alpha}{v} = \left(\mathrm{Re}_L\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{v}\right)$. La razón de las propiedades, $\frac{\alpha}{v}$, también es adimensional y su recíproco se denomina número de Prandtl.

Número de Prandtl:

$$\Pr \equiv \frac{v}{\alpha}$$

v es la viscosidad cinemática y α es el coeficiente de difusión térmica.

318

Significado físico de los parámetros adimensionales.

La interpretación física del número de Prandtl se sigue de su definición como una razón de la difusividad del momento v a la difusividad térmica α. El número de Prandtl proporciona una medida de la efectividad relativa del transporte de momento y energía por difusión en las capas límite hidrodinámica y térmica, respectivamente. El número de Prandtl de los gases es cercano a la unidad, en cuyo caso la transferencia de energía y momento por difusión son comparables.

El valor de Prandtl influye fuertemente en el crecimiento relativo de las capas límite hidrodinámica y térmica. De hecho para capas límite laminares, es razonable esperar que

$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \Pr^n$; donde n es un exponente positivo.

320.

Significado físico de los parámetros adimensionales.

Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo

Número de Prandtl (Pr)

Definición

$$\frac{v}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k}$$

Interpretación

Razón de las difusividades de momento y térmica.

537.

Ebullición y condensación.

Parámetros adimensionales en la ebullición y la condensación.

Puesto que es difícil desarrollar ecuaciones de gobierno para los procesos de ebullición y condensación, los parámetros adimensionales apropiados se obtienen mediante el teorema de pi de Buckingham. Así obtenemos $h = \left[\Delta T, g(\rho_l - \rho_v), h_{fg}, \sigma, L, \rho, c_p, k, \mu\right]$

Donde ΔT es la diferencia entre las temperaturas de la superficie y de saturación, $g(\rho_l - \rho_v)$ la fuerza de cuerpo que surge de la diferencia de densidad líquido-vapor, h_{fg} el calor latente, σ la tensión superficial. L la longitud característica y las propiedades termofísicas del líquido o del vapor : ρ, c_p, k, μ (densidad, calor específico, conductividad térmica, visocisdad del fluido)

Dado que hay 10 variables en 5 dimensiones (m,Kg,s,J,K) HABRÁ (10-5)=5 pi grupos, que se pueden expresar en las siguientes formas :

$$\frac{hL}{k} = f\left[\frac{\rho g(\rho_l - \rho_v)L^3}{\mu^2}, \frac{c_p \Delta T}{h_{fg}}, \frac{\mu c_p}{k}, \frac{g(\rho_l - \rho_v)L^2}{\sigma}\right]$$

Asi Prandtl $\Pr \equiv \frac{\mu c_p}{k}$

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.

Autores: Holman, J.P

Editorial: McGraw-Hill.

Página: 163.

163

Los principios de la convección. La capa límite térmica.

Pr = (v/α). Al cociente (v/α) se le llama número de Prandtl en honor de Ludwig Prandtl, el científico alemán que introdujo los conceptos de la teoría de la capa límite.

Cuando se emplea un conjunto de unidades coherente, el número de Prandtl es adimensional

$$\Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu / \rho}{k / \rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k}$$

v es la viscosidad cinemática, α la difusividad térmica, μ la viscosidad del fluido, ρ la densidad del fluido, k la conductividad térmica, c_p el calor específico.

El número de Prandtl es el parámetro que relaciona los espesores relativos de las capas límites; hidrodinámica y térmica. La viscosidad cinemática de un fluido, contiene información sobre la velocidad a la que se puede difundir la cantidad del movimiento molecular. La difusividad térmica expresa lo mismo, referido a la difusión del calor en el fluido. Así, el cociente de estas dos cantidades debería expresar las magnitudes relativas de la difusión de la cantidad de movimiento y el calor en el fluido.

Pero estas velocidades de difusión son precisamente las magnitudes que determinan el espesor que tendrán las capas límite en un campo fluido externo dado; las difusividades grandes indican que la influencia de la viscosidad o de las temperaturas se hace notar más lejos en el campo fluido. El número de Prandtl es entonces el enlace entre en campo de velocidad y el campo de temperatura.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.26, 17.68.

1.26.
Tabla de grupos adimensionales.
Grupo: número de Prandtl
Símbolo: Pr.
Definición: $\frac{\mu c_p}{k} = \frac{v}{\alpha}$
Significado físico: relación del momento molecular y la difusividad térmica.

17.68.
Tabla grupos adimensionales para convección forzada en el interna y lujos friccionantes, usados en el diseño de intercambiadores de calor.
Grupo: número de Prandtl.
Definición: $\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{v}{\alpha}$
Significado físico: es un módulo propiedad del fluido que representa la relación entre la difusividad del momento y la difusividad térmica del fluido.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Número de Prandtl: 20.

20.
Diferentes tipos de transferencia de calor.
En la transferencia de calor entre un fluido que fluye en el interior de un tubo, de diámetro d_0 y longitud L_0.
La velocidad característica viene dada por w_0, la densidad y viscosidad del fluido son ρ y η respectivamente, la propiedad térmica de conducción λ, el calor específico del fluido es c_p, la diferencia de temperatura característica $\Delta\theta_0$.
Por lo tanto tenemos 7 variables:
$L_0, w_0, \varrho, \eta, \Delta\vartheta_0, \lambda, c_p$
Si realizamos análisis dimensional:

$$K_i = L_0^a \cdot w_0^b \cdot \varrho^c \cdot \eta^d \cdot \Delta\vartheta_0^e \cdot \lambda^f \cdot c_p^g \ , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

La dimensión de cada una de las siete cantidades se puede poner en función de las cuatro dimensiones fundamentales : L (longitud), tiempo (Z) , masa (M) y temperatura (T), los cuales son suficientes para describir los fenómenos termodinámicos y de transferencia de calor.
Por lo tanto podemos expresar Ki:

$$\dim K_i = \mathbf{L}^a \left(\mathbf{L}^b \cdot \mathbf{Z}^{-b}\right)\left(\mathbf{M}^c\mathbf{L}^{-3c}\right)\left(\mathbf{M}^d\mathbf{L}^{-d}\mathbf{Z}^{-d}\right)\mathbf{T}^e\left(\mathbf{M}^f\mathbf{L}^f\mathbf{Z}^{-3f}\mathbf{T}^{-f}\right)\left(\mathbf{L}^{2g}\mathbf{Z}^{-2g}\mathbf{T}^{-g}\right)$$

$\dim K_i = 2$

$$\begin{array}{llcccccccccccccccc}
\dim \mathbf{L} & = 1 : & a & + & b & - & 3c & - & d & & + & f & + & 2g & = & 0 \\
\dim \mathbf{Z} & = 1 : & & - & b & & & - & d & & - & 3f & - & 2g & = & 0 \\
\dim \mathbf{M} & = 1 : & & & & & c & + & d & & + & f & & & = & 0 \\
\dim \mathbf{T} & = 1 : & & & & & & & & e & - & f & - & g & = & 0
\end{array}$$

Los valores a, e y f, se obtienen de la tabla:

i	a	e	f	K_i
1	1	0	0	$w_0 \varrho L_0 \eta^{-1}$
2	0	0	-1	$\eta c_p \lambda^{-1}$
3	0	-1	0	$w_0^2 c_p^{-1} \Delta\vartheta_0^{-1}$

Se obtiene el grupo adimensional:

$$Pr := \frac{\eta\, c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \qquad \nu := \eta/\varrho$$

Se conoce como número de Prandtl y solo tiene propiedades del fluido.

Año: 1999.
Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
Número de Prandtl: 523, 688, 695.

523.
Modelos de transmisión de calor. La naturaleza del calor.
Transferencia de calor por convección forzada
Usando la definición de número de Prandtl:

$$\Pr = \frac{\mu C_P}{k}$$

μ es la viscosidad del fluido, C_P el calor específico, k la conductividad térmica.

688
Modelos de transferencia de calor. Coeficientes de transferencia de calor.
Por análisis dimensional demostramos que el grupo adimensional que relaciona el coeficiente entre la viscosidad y la conductividad térmica es el número de Prrandtl.

$$\Pr = \frac{\mu C_P}{k} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{\rho c_p}} = \frac{v}{\alpha}$$

Donde μ es la viscosidad del fluido, C_P el calor específico, k la conductividad térmica, v es la viscosidad cinemática y α es las difusividad térmica.
695.
Modelos de transferencia de calor por convección. Coeficientes de transferencia de calor.
Uno de los grupos adimensionales usados frecuentemente en correlaciones de transferencia de calor es:

$$\Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{v}{\alpha} = \frac{\text{momento de difusividad}}{\text{difusividad energía térmica}}$$

Año: 2002.
Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 242, 331, 360-361, 243, 269, 255, 260, 275.
242.
Análisis de la transferencia de calor por convección
Ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía para un flujo laminar sobre una placa plana.
La relación $\frac{v}{\alpha} = \frac{\mu / \rho}{k / \rho c_p}$ se le conoce como número de Prandtl

$$\Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{v}{\alpha}$$

Así, se observa que el número de Prandtl, el cual es la razón de las propiedades del fluido, controla la relación entre la velocidad y las distribuciones de temperaturas.
v es la viscosidad cinemática del fluido, α la difusividad térmica, μ la viscosidad, ρ la densidad el fluido y k la conductividad térmica,

331.
Convección natural.
Fuerzas combinadas y convección natural.
Para la convección forzada laminar sobre una placa plana vertical, Sparrow y Gregg demostraron que con números de Prandtl entre 0.01 y 10, el efecto de flotación en el coeficiente de transferencia de calor para convección pura será menor del 10%.
360.
Convección forzada en el interior de tubos y conductos.
Efecto del número de Prandtl.
El número de Prandtl es una función solo de las propiedades del fluido, y se define como la relación que existe entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica del fluido.

$$\Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k}$$

v es la viscosidad cinemática del fluido, α la difusividad térmica, μ la viscosidad, ρ la densidad el fluido y k la conductividad térmica,

La viscosidad cinemática v, o $\frac{\mu}{\rho}$, con frecuencia se relaciona con la difusividad de la cantidad de movimiento, debido a que se trata de una medida de la razón de transferencia de ímpetu entre las moléculas. La difusividad térmica de un fluido, también se conoce como difusividad molecular de calor, que es una medida de la relación que existe entre la capacidad de las moléculas para transmitir calor y para almacenar energía.
El número de Prandtl relaciona la distribución de temperaturas con la distribución de velocidades.
243.
Análisis de la transferencia de calor por convección
Ecuaciones de capa límite adimensionales y parámetros de similitud.
De las ecuaciones adimensionales de capa límite aparecen los parámetros de similitud adimensionales Re_L y Pr. Estos parámetros de similitud permiten aplicar las soluciones de un sistema a otro geométricamente similar, siempre que los parámetros de similitud tengan el mismo valor en ambos.
Ecuaciones de capa límite.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L \Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

269.
Análisis de la transferencia de calor por convección.
Aproximación integral al análisis de capa límite.
Evaluación de la transferencia de calor y de los coeficientes de fricción en flujo laminar. Caso placa plana.
Para fluidos con número de Prandtl igual o mayor que la unidad, ζ es igual o menor que la unidad, se obtiene: $\zeta^3 = \frac{10}{10.75}\frac{\alpha}{\nu}$ o $\delta_t = 0.976\delta\,\mathrm{Pr}^{1/3}$
donde
δ_t: espesor de la capa delimitadora de temperatura.
δ: espesor de la capa delimitadora de velocidad.
$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta}$
255.
Análisis de la transferencia de calor por convección.
Grupos adimensionales relevantes en la transferencia de calor y el flujo de fluidos.
Grupo: Número de Prandtl (Pr)
Definición: $\frac{c_p\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$
Interpretación: Relación entre la difusividad de cantidad de movimiento molecular y la difusividad térmica.
260.
Análisis de la transferencia de calor por convección.
Solución analítica para el flujo laminar de capa límite sobre una placa plana. Transferencia de calor por convección.
El número de Prandtl se define como:
Pr=$\frac{c_p\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$
ν es la viscosidad cinemática del fluido, α la difusividad térmica, μ la viscosidad, ρ la densidad el fluido y k la conductividad térmica,
Se define un espesor de capa delimitadora térmica δ_{th} como la distancia a partir de la superficie donde la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido alcanza el 99% del valor de corriente libre. Un análisis de los perfiles de temperaturas muestra que, para fluidos con Pr <1, la capa delimitadora térmica es más grande que la capa delimitadora hidrodinámica pero más pequeña cuando Pr>1. De acuerdo con los cálculos de Pohlhausen, la relación entre las capas térmica e hidrodinámica es aproximadamente.
$\frac{\delta}{\delta_{th}} = \mathrm{Pr}^{1/3}$.
275.
Análisis de la transferencia de calor por convección.
Analogía entre la cantidad de movimiento y la transferencia de calor en flujo turbulento sobre una superficie plana.
La relación de la viscosidad cinemática molecular con la difusividad molecular de calor, recibió el nombre de número de Prandtl. De la misma manera, la

relación de la viscosidad parásita turbulenta con la difusividad parásita $\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$ puede considerarse como un número de Prandtl turbulento Pr_t.

Año:2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Páginas: 7-9, 143-144, 154.

7-8-9.

Relación entre calor, momento y transferencia de masa.

El número de Prandtl se define como: $\Pr \equiv \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{k/\rho c_p}$.

Donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática y $k/\rho c_p$ es la difusividad térmica.

El número de Pr es la relación entre la habilidad del fluido para difundir momento con respecto la habilidad para difundir calor.

El número de Prandtl es análogo al número de Schimdt (Sc) en transferencia de masa cuyo valor es ν/D, donde ν es la viscosidad y D la difusividad.

143-144.

Capa límite turbulenta. Modelos turbulentos.

El número de Prandtl molecular, se corresponde con el siguiente grupo adimensional $\Pr \equiv \nu/k \equiv \mu/k$ por analogía está el número de Prandl turbulento definido como $\Pr \equiv \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}$, basado en la relación entre las difusividades turbulentas de momento y calor. ν es la viscosidad cinemática, k la conductividad térmica.

154.

Capa límite turbulenta. El interior de la capa.
Subcapas viscosa y de conducción.

Define el número de Pr como $\Pr \equiv \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}$ basado en la relación entre las difusividades turbulentas de momento y calor.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A..
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 341-342.

341-342.

Fundamentos de la convección. Capa límite térmica.

La mejor manera de describir el espesor relativo de las capas límite de velocidad y térmica es por medio del parámetro número de Prandtl adimensional definido como:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\text{Difusividad molecular de la cantidad de movimiento}}{\text{Difusividad molecular del calor}} = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}$$

3.15. Número De Rayleigh.

John William Strutt Rayleigh, tercer barón de Rayleigh; 1842-1919. Físico británico, nacido en Langford Grove (Essex) y fallecido en Witham (Essex), que heredó el título de su padre en 1873. Estudió en la Universidad de Cambridge, en la que llegó a desempeñar la cátedra Cavendish de física experimental (1879-84). En 1887 se trasladó a Londres y fue profesor de filosofía natural de la Real Institución hasta 1905. Fue también secretario de la Real Sociedad de Londres (1887-96) y presidente de la misma (1905-08). Desde 1892 hasta 1901 actuó como gobernador de Essex y fue canciller de la Universidad de Cambridge desde 1908.

Las primeras investigaciones de Rayleigh se recogen en su obra *The Theory of Sound* (2 vols., 1877-78), en la que se describe un nuevo procedimiento para medir las vibraciones acústicas. En el campo de la óptica realizó una serie de trabajos sobre la polarización de la luz, contribuyó a la teoría de la radiación del cuerpo negro y logró dar una explicación del color azul del cielo. También hizo estudios acerca de la capilaridad y del electromagnetismo y aportó ideas a la teoría de la formación y estabilidad de las venas líquidas.

Pero probablemente su labor científica más importante consistió en la cuidadosa determinación de las densidades de los gases atmosféricos. Buscando una explicación a la diferencia de densidades del nitrógeno del aire y del obtenido a partir del nitrato amónico, descubrió, en colaboración con sir William Ramsay, el elemento argón (1894). Ingresó en la Orden del Mérito con motivo de la coronación de Eduardo VII y recibió el premio Nobel de Física de 1904.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 370, 565, 387.

370.

Convección natural en una sola fase fluida y durante la película de condensación. Convección natural laminar en una superficie isotérmica vertical.

Análisis dimensional y datos experimentales

La ecuación funcional para el coeficiente de transferencia de calor h, en convección natural es h o $\overline{h} = fn(k, |T_W - T_\infty|, x \text{ o } L, \upsilon, \alpha, g, \beta)$

k es la conductividad térmica, $T_W - T_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la pared y el infinito, L es la longitud característica, υ es la viscosidad cinemática, g la constante gravitacional y β el coeficiente de dilatación térmica.

Hay ocho variables en W, m, s y ºC, así que 8 - 4 = 4 pi-grupos. Para $\overline{h}$ y la longitud característica L los grupos son:

$$Nu_L \equiv \frac{\overline{h}L}{k} \quad \Pr \equiv \frac{\upsilon}{\alpha} \quad \Pi_3 \equiv \frac{L_3}{\upsilon^2}|g| \quad \Pi_4 \equiv \beta|T_W - T_\infty| = \beta\Delta T$$

$$\Pi_3\Pi_4 = Gr_L = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\upsilon^2}$$

Nu=fn(Gr,Pr)

Un atributo de la ecuación funcional adimensional, es que la primera variable independiente es generalmente el producto de Gr por Pr, llamado número de Rayleigh Ra_L

$$Ra_L \equiv Gr_L \Pr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha\upsilon}$$

565.

Transferencia de masa. Convección natural en la transferencia de masa.

Definimos el número de Rayleigh, $Ra_L \equiv Gr_L \Pr = \dfrac{g\Delta\rho L^3}{\rho\alpha\upsilon} = \dfrac{g\Delta\rho L^3}{\mu\alpha}$

g es la constante gravitacional, L la longitud característica, α es la difusividad térmica, μ viscosidad del fluido.

El termino $\Delta\rho$ se obtiene de la ecuación de convección natural para flujos :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = (1 - \frac{\rho_\infty}{\rho})g + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Eliminamos ρ de la ecuación, mediante analogía con la transferencia de calor en convección natural $(1 - \dfrac{\rho_\infty}{\rho}) = \beta(T - T_\infty)$; $\beta\Delta T = \dfrac{\Delta\rho}{\rho}$.

387.

Cambio continuo de calor en pared uniforme. Convección natural en una sola fase fluida y durante la película de condensación.

Convección natural con flujo de calor uniforme.

Cuando q_w (flujo de calor) es especificado en vez de $\Delta T \equiv T_W - T_\infty$. Surge un problema y es que ΔT es ahora una variable dependiente desconocida, problema que no surge en convección forzada.

$$Nu_x \equiv \frac{q_w}{\Delta T}\frac{x}{k} \propto Ra^{1/4} \propto \Delta T^{1/4} x^{3/4}$$

$$\frac{\overline{\Delta T}}{C} = \int_0^1 \left(\frac{x}{L}\right)^{1/5} d\left(\frac{x}{L}\right) = 5/6$$

De esta forma, si nosotros queremos una ecuación para $Nu_x \equiv \dfrac{q_w x}{k\Delta T(x)}$,

podemos usar el número de Rayleigh.

$$Ra^*_x \equiv Ra_x Nu_x \equiv \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha\upsilon}\frac{q_w x}{\Delta T k} = \frac{g\beta q_w x^4}{k\alpha\upsilon}$$

g es la constante gravitacional, L la longitud característica, α es la difusividad térmica, μ viscosidad del fluido, ΔT es la diferencia de temperatura, υ la viscosidad cinemática, β el coeficiente de dilatación térmica.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 255.

Transferencia de calor por convección.

Números adimensionales.

Nombre:

Rayleigh

$$Ra = \frac{g\beta\theta L^3}{va}$$

$Ra = RePr$

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 54, 195, 478, 180.

54.

Ecuaciones gobernantes. Flujos de conducción- flotabilidad

Se define el número de Rayleigh como:

$$Ra = \frac{\text{Fuerzas de flotabilidad}}{\text{Cambio de momento del flujo}} \sim \frac{g\beta\Delta T l^3}{va}$$

El número de Rayleigh es el homólogo del número de Reynolds para convección forzada. La magnitud del número de Rayleigh determina si el flujo va a pasar de régimen laminar a turbulento, para una geometría dada.
g es la constante gravitacional, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, ΔT es la diferencia de temperatura, l es la longitud , v es la viscosidad cinemática, a es la difusividad térmica.

195.

Flujos paralelos cercanos a la capa límite. Flujos no paralelos (recirculación).

Para flujos no paralelos, no hay una velocidad de dirección dominante de movimiento, y la difusión y convección de momento y energía juegan idénticos papeles.
El número de Rayleigh se define como:

$$Ra = \frac{g\beta\left(T_2 - T_1\right)H^3}{va}$$

H es la altura de la cavidad, l es el ancho de la cavidad, T_2 es la temperatura de un lado de la cavidad y T_1 la del lado opuesto, g es la constante gravitacional, a es la difusividad térmica, v la viscosidad cinemática, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica.

478.

Análisis dimensional.

Convección de una sola longitud.

El número de Rayleigh se puede expresar como:

$$\frac{\text{Fuerzas de flotabilidad}}{\text{Fuerzas viscosa}} x \frac{\text{Flujo de entalpía}}{\text{Conducción}} \sim \frac{g\beta\Delta TD^3}{va} = Ra$$

g es la constante gravitacional, β es el coeficiente térmico de expansión volumétrica, ΔT es la diferencia de temperatura, D es el diámetro, v es la viscosidad cinemática, a es la difusividad térmica.(ojo hay un mal a lapiz)

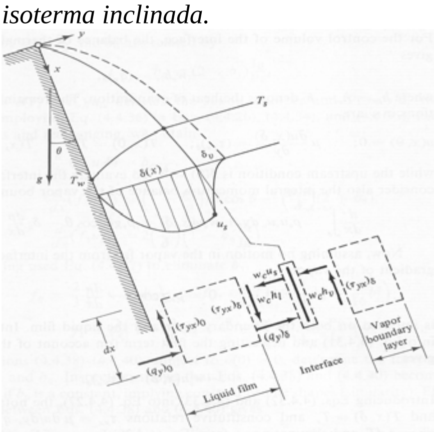
180.

Flujos paralelos cercanos a la capa límite. Cambio de fase.

Se define el número de Rayleigh como :

$$Ra_x = \frac{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) g\cos\theta x^3}{va}$$

Figura 1 número de Rayleigh. Película de condensado de vapor saturado sobre una placa isoterma inclinada.



Donde:

ρ : densidad del fluido

$\Delta\rho = \rho - \rho_v$ (v: vapor)

a : difusividad térmica.

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Páginas: 505, 594.

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Rayleigh (Ra)

Grupo: $Ra = \dfrac{gL_c^3\beta\left(T_w - T_\infty\right)}{v\alpha}$

Donde T_W es la temperatura de la placa, T_∞ es la temperatura de la corriente libre.

Interpretación física: $\dfrac{\text{Fuerzas debidas a flotación e inercia}}{\text{Fuerzas debidas a la viscosidad y difusión térmica}}$

Donde g es la aceleración gravitacional, L_c es la longitud característica vertical de la placa, $\left(T_w - T_\infty\right)$ diferencia de temperatura entre la placa y la corriente libre, v es la viscosidad cinemática, β es el coeficiente de expansión térmica y α es el coeficiente de difusividad térmica.

594.

Convección natural. Convección natural en una pared vertical.

La cantidad adimensional llamada número de Rayleigh se está usando cada vez más en la literatura sobre el tema, se define como:

$$Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta\Delta T L_c^{\;3}}{\alpha\upsilon}$$

Gr es el número de Grashof, Pr el número de Prandtl, g la constante gravitacional, β es el coeficiente de expansión térmica, α es el coeficiente de difusividad térmica, v es la viscosidad cinemática, ΔT la diferencia de temperatura y L_c la longitud característica.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 397, 413 (correlaciones).

397.

Convección libre. Convección libre en una placa vertical.

Se define el número de Rayleigh como el producto de Grashof por Prandtl de la siguiente forma:

$$Ra_x = Gr_x\,\mathrm{Pr} = \frac{\rho^2 c_p g\beta\left(T_W - T_\infty\right)x^3}{k\mu}$$

ρ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, g la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, T es la temperatura, w hace referencia a la pared, e ∞ la corriente libre, k la conductividad térmica y μ la viscosidad del fluido, x es la coordenada paralela a la placa, cuyo comienzo es el borde de ataque.

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere.
Página: 18.

Formulación general de flotabilidad inducida por flujos.
Un cálculo simple.
Estudiamos el caso de convección en una placa vertical.
Se define el número de Rayleigh como Ra = GrPr.

$$\mathrm{R}a = \frac{gc_p\rho^2\beta L^3\left(t_0 - t_\infty\right)}{\mu k}$$

g es la constante gravitacional, c_p es el calor específico, ρ es la densidad del fluido, β coeficiente volumétrico de expansión térmica, L es la longitud de la placa, t_0 es la temperatura en la superficie del sólido, t_∞ es la temperatura a una distancia media, μ es la viscosidad dinámica del fluido, k es la conductividad térmica.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 397.

397.
Análisis dimensional para transferencia de calor. Convección libre.
El producto de los números adimensionales de Grashof y Prandtl es algunas veces conocido como número adimensional de Rayleigh.
Ra = Gr x Pr.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 437, 551, 558.

437.
Transferencia de calor por convección: Análisis teórico.
Convección natural en superficies verticales.
Se define el número de Rayleigh como:

$$Ra_x = Gr_x \Pr = \frac{g\beta\left(T_0 - T_\infty\right)x^3}{\alpha v}$$

El subíndice cero hace referencia a la pared e ∞ a la corriente libre, g es la constante gravitacional, v la viscosidad cinemática, β el coeficiente de expansión térmica, T es la temperatura, x la coordenada paralela a la placa con origen el borde de ataque, α es la difusividad térmica.

El número de Rayleigh representa la relación de las fuerzas de flotabilidad y el cambio en fuerzas viscosas en la capa límite.

El número de Grashof es comparable con el de Rayleigh en convección forzada, el número de Rayleigh caracteriza el acoplamiento completo de momento y energía.

551.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico, convección natural. Caracterización de parámetros por convección natural.

El número de Rayleigh se define como:

$$Ra_L = \frac{g\beta\left(T_S - T_F\right)L^3}{\alpha v}$$

T_S es la temperatura del sólido, T_F es la temperatura de referencia, g es la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, L es la longitud de la placa, v la viscosidad cinemática, α el coeficiente de difusión térmica.

El número de Rayleigh aplicable a temperatura y concentración (incluyendo cambio de fase) en convección natural, viene dada por:

$Ra_L = Gr_L \Pr = \dfrac{g\left(\rho_F - \rho_s\right)L^3}{\rho\alpha v}$ donde los subíndices F significa parámetro de referencia y s es el sólido.

558.

Transferencia de calor por convección: Análisis práctico. Convección natural. Flujo sobre una pared vertical plana.

Flujo de calor uniforme en la pared.

El número de Rayleigh local para flujo de calor uniforme se define como:

$$Ra_x^* = Nu_x Ra_x = Gr_x^* \Pr = \frac{g\beta q_0'' x^4}{k v\alpha}$$

g la constante gravitacional, β el coeficiente de expansión térmica, q_0'' en flujo uniforme de calor en la pared, k es la conductividad y v la viscosidad cinemática, x es la coordenada paralela a la placa con origen en el borde de ataque y α la difusividad térmica.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.

Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.

Editorial: McGraw-Hill.

Página: 408.

408.

Convección libre en la capa límite.

Frecuentemente se usa el número de Rayleigh como $Ra_x = Gr_x \Pr$ donde Gr_x es el número de Grashof local, y Pr es el número de Prandtl.

Sin embargo muchos experimentos indican que el número de Rayleigh local no refleja una dependencia del número de Prandl.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 421.

421.

Convección libre. Parámetros adimensionales de la convección libre.

Se define el número de Rayleigh como:

$$Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta L^3\left(T_W - T_\infty\right)}{v^2}\mathrm{Pr} = \frac{g\beta L^3\left(T_W - T_\infty\right)}{v\alpha}$$

Estudiamos El caso de convección libre sobre una placa vertical.

g es la constante gravitacional, β coeficiente volumétrico de expansión térmica del fluido, L la longitud de la placa, v la viscosidad cinemática, T_W es la temperatura de la pared, T_∞ es la temperatura fuera de la capa límite, α es el coeficiente de difusión térmica, Pr es el número de Prandtl, Gr es el número de Grashof.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 537, 178, 274, 548, 490, 168, 163.

537.

Convección en un medio poroso. Convección natural capa límite.

El número de Rayleigh Darcy-modificado es:

$$Ra_y = \frac{Kg\beta y\Delta T}{\alpha v}$$

K es la permeabilidad, g es la constante gravitacional, β coeficiente de dilatación térmica, ΔT es la diferencia de temperatura, α coeficiente de difusión térmica, v el de viscosidad cinemática.

178.

Convección natural externa. Flujo de calor uniforme en una pared vertical.

La condición de flujo uniforme indica que q’’= constante.

El número Rayleigh basado en q’’ es:

$$Ra_y = \frac{KgH^4 q''}{\alpha v k}$$

H es la altura, K la permeabilidad, α coeficiente de difusión térmica, v el de viscosidad cinemática, k la conductividad térmica.

274.

Transición a turbulencia. Las leyes de escala de la transición.

El número de Rayleigh basado en la fuerza de la fuente de calor.

$$Ra_q = \frac{g\beta q y_{tr}}{\alpha v k}$$

y_{tr} : altura de transición

q: calor de la fuente.
α es el coeficiente de difusión térmica, v el de viscosidad cinemática, k la conductividad térmica.
548.
Convección en un medio poroso. Convección natural capa límite.
Definimos el número de Rayleigh como:

$$Ra_q = \frac{g\beta qK}{\alpha vk}.$$

K es la permeabilidad, g es la constante gravitacional, β coeficiente de dilatación térmica, q es el flujo de calor, α coeficiente de difusión térmica, v el de viscosidad cinemática.
490.
Transferencia de masa. Convección natural.
Flujo conducción-transferencia-masa.
Definimos el número de Rayleigh local para una capa límite vertical cuya flotabilidad es causa de la transferencia de masa.

$$Ra_{m.y} = \frac{g\beta_c (C_0 - C_\infty) y^3}{vD}$$

β_c: coeficiente de concentración de expansión $\beta_c = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial C}\right)_P$

$g\beta_c (C - C_\infty)$: fuerza del cuerpo debido a la no uniformidad de la concentración.
D es el coeficiente de difusión.
168.
Convección externa natural. Análisis de escala.
Ocurre como el número de Grashof, el numero de Rayleigh Ra_H no tiene significado. Si tiene significado es la ¼ potencia de estos números.

$$Ra_H{}^{1/4} \sim \frac{\text{altura de la pared}}{\text{espesor de la capa límite térmica}} \qquad \text{Pr>1}$$

El significado de $Ra_H{}^{1/4}$ es puramente geométrico, este valor numérico considera para la delgadez de la región de la capa límite turbulenta ocupada por el flujo inducido por la flotabilidad.
163.
Convección externa natural. Análisis de escala.
Definimos el número de Rayleigh como:

$$Ra_H = \frac{g\beta \Delta T H^3}{\alpha v}.$$

H: altura.
ΔT : diferencia de temperatura.
g: constante gravitacional.
β : coeficiente de dilatación térmica.
α : coeficiente de difusión térmica.
v : viscosidad cinemática.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Página: 389.

389.

Convección natural laminar para una placa vertical con temperatura constante en un fluido infinito. Solución exacta.

El número de Rayleigh se define como el producto de el número de Grashof por el número de Prandtl *Ra= GrPr*.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill.
Número de Rayleigh: 292, 294, 513.

292.

Fundamentos de la convección y correlaciones.
Análisis dimensional.

Convección natural en una superficie plana vertical.
La placa está a temperatura T_s y el fluido a temperatura T_e.
El número de Rayleigh se obtiene como producto de dos números adimensionales, el de Grashof y el de Prandtl.

$$Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \frac{\beta \Delta T g L^3}{v\alpha}$$

ΔT : diferencia de temperatura.
g: constante gravitacional.
β : coeficiente de dilatación térmica.
α : coeficiente de difusión térmica.
v : viscosidad cinemática.
Gr y Pr son los números de Grashof y Prandtl respectivamente.

294.

Tabla números adimensionales.

Grupo	Definición	Uso
Número de Rayleigh	$\mathrm{Ra} = \frac{\beta \Delta T g L^3}{v\alpha}$	Flujos naturales con $\mathrm{Pr} \gg 1$

513.

Análisis de la convección.

Análisis de escala. Convección natural capa límite laminar en una pared vertical.

Definimos el grupo adimensional $Ra = \frac{\beta\left(T_s - T_e\right) g L^3}{v\alpha}$, que es el número de Rayleigh.

Donde:
g: constante gravitacional.
β : coeficiente de dilatación térmica.
α : coeficiente de difusión térmica.
ν : viscosidad cinemática.
L: longitud característica.
$T_s - T_e$: es la diferencia de temperatura entre el sólido y la corriente libre.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Página: 490

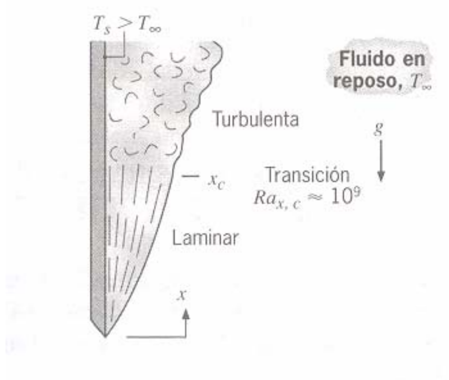
490.

Convección libre. Efectos de turbulencia.

Es importante advertir que las capas límite de convección libre no están restringidas al flujo laminar. Los flujos de convección libre normalmente se originan de una inestabilidad térmica. Es decir, el fluido más caliente, más ligero, se mueve verticalmente hacia arriba con relación al fluido más frío, mas pesado. Sin embargo, como con la convección forzada, también puede surgir inestabilidades hidrodinámicas. Es decir, loas perturbaciones en el flujo se pueden surgir inestabilidades hidrodinámicas. Es decir, las perturbaciones en el flujo se pueden amplificar, lo que conduce a la transición de flujo laminar a turbulento. Este proceso se muestra de manera esquemática en la figura . para una pared vertical calentada.

La transición en una capa límite de convección libre depende de la magnitud relativa de las fuerzas de empuje y viscosa en el fluido. Se acostumbra correlacionar su ocurrencia en términos del número de Rayleigh, que es simple el producto de los números de Grashof y Prandtl. Para las placas verticales el número de Rayleigh crítico es $Ra_{x,c} = Gr_{x,c} \Pr = \dfrac{g\beta(T_S - T_\infty)x^3}{\nu\alpha} \approx 10^9$

Figura 2 número de Rayleigh:
Transición de una capa límite de convección libre sobre una placa vertical



g: constante gravitacional.
β : coeficiente de dilatación térmica.
α : coeficiente de difusión térmica.
ν : viscosidad cinemática.
$T_S - T_\infty$: diferencia de temperatura entre el sólido y la corriente libre.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.26, 4.42, 5.103.

1.26.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Prandtl

Símbolo: Ra.

Definición: $Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \dfrac{\rho g \beta \Delta T L^3}{v\alpha}$

Significado físico: número de Grashof modificado, producto de los números de Grashof y Prandtl.

4.42.

Convección natural dentro de espacios cerrados.

Se define el número de Rayleigh basado en la longitud característica L como:

$$Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \frac{\rho g \beta \left(T_h - T_c\right) L^3}{v\alpha}$$

ρ es la densidad del fluido, g es la constante gravitacional, β es el coeficiente de expansión térmica, T_h es la temperatura de la parte inferior del sólido, y T_c es la temperatura de la parte superior del sólido, v es la viscosidad cinemática y α es la difusividad térmica. Gr y Pr son los números de Grashof y Prandtl.

5.103.

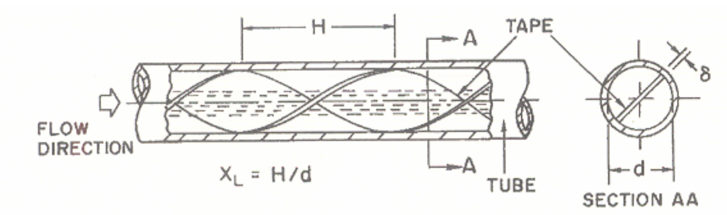
Convección forzada en el interior de conductos. Conductos con cinta enroscada e incrustrada.

Se define el número de Rayleigh como:

$$Ra = \frac{\rho g d^3 \beta \Delta T_W}{\mu a}$$

ρ es la densidad del fluido, g es la constante gravitacional, d es es diámetro mostrado en la figura, β es el coeficiente de expansión térmica, T_W es la temperatura en la pared, μ es la viscosidad del fluido, a es el radio del conducto circular.

Figura 3 número de Rayleigh. Tuno circular con cinta enroscada incriustada.



Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Número de Rayleigh: 254, 309, 323.

254.

Tabla

Grupo: Número de Rayleigh (Ra)

Definición: $Gr_L Pr$.

Interpretación: Producto de los números de Reynolds y Prandtl.

309.

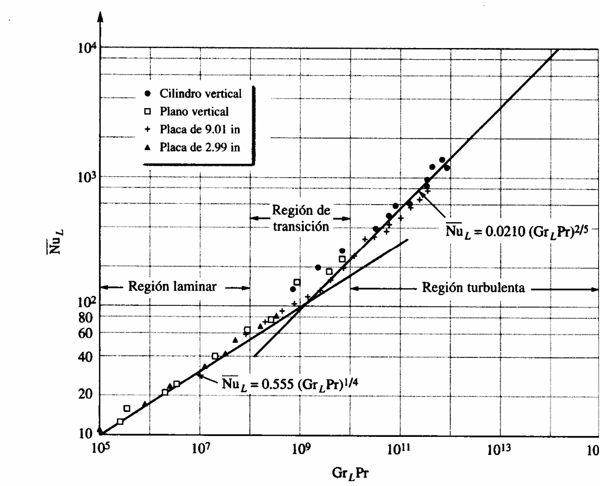
Convección natural. Parámetros de similitud.

Definimos número de Rayleigh como el grupo adimensional: $\dfrac{c_p \rho^2 \beta g \Delta T L^3}{\mu k}$

Caso placas y cilindros verticales.

c_p es el calor específico, ρ la densidad del fluido, β el coeficiente de dilatación térmica, g la constante gravitacional, ΔT diferencia de temperatura, L longitud característica, μ viscosidad del fluido, k la conductividad térmica.

Figura 4 número de Rayleigh. Tuno. *Correlación de datos para la transferencia de calor por convección natural proveniente de placas y cilindros verticales.*



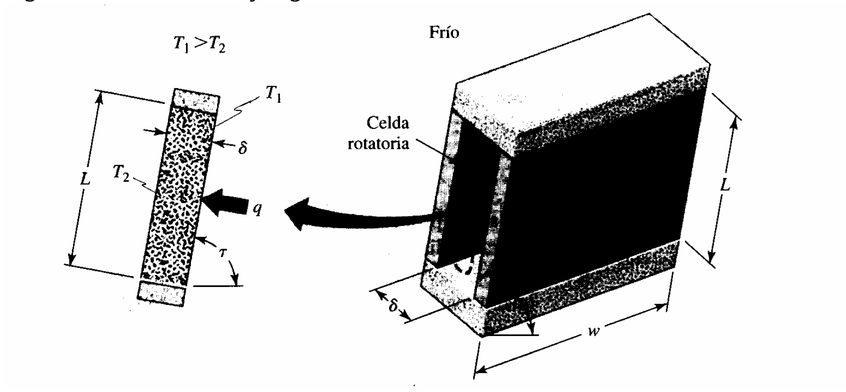
323.

Convección natural. Espacios cerrados.

Si el espacio cerrado se compone de dos superficies paralelas isotérmicas con temperaturas T_1 y T_2 separadas una distancia δ, una altura L y las caras superior e inferior están aisladas, el número de Grashof se define mediante.

$$Gr_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2}$$

Figura 5 número de Rayleigh.



Así el número de Rayleigh Ra_{δ} =Pr Gr_{δ}

g es la constante gravitacional, β el coeficiente de dilatación térmica y v la viscosidad cinemática.

Año: 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A..
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 466.

466.

Convección natural. Convección natural sobre superficies.

Las correlaciones empíricas sencillas para el número promedio de Nusselt Nu en la convección natural son de la forma:

$$Nu = \frac{hL_C}{k} = C(Gr_L \,\mathrm{Pr})^n = CRa_L^n$$

Donde Ra_L es el número de Rayleigh, el cual es el producto de los números de Grashof y Prandtl.

$$Ra_L = Gr_L \,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta(T_S - T_\infty)L^3{}_C}{v^2}\mathrm{Pr}$$

Los valores de las constantes n y C dependen de la configuración geométrica de la superficie y del régimen de flujo, el cual caracteriza el rango del número de Rayleigh.

g es la constante gravitacional, β el coeficiente de dilatación térmica, $T_S - T_\infty$ diferencia de temperatura entre la pared y la corriente libre, L_C longitud característica, v la viscosidad cinemática y Pr el número de Prandtl.

3.16. Número De Reynolds.

Osborne Reynolds. Nació en Belfast en 1842 y murió en Watchet, 1912 .Ingeniero británico. Profesor en la Universidad de Manchester, estudió las turbinas hidráulicas y la propulsión por hélices y perfeccionó los frenos hidráulicos. Se especializó en el estudio del movimiento de los fluidos, en particular de los fluidos viscosos, en los que destacó la importancia de un coeficiente adimensional, conocido como *número de Reynolds*, que relaciona las fuerzas de inercia y de viscosidad de un fluido.

Año: 1951.

Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models .Análisis dimensional y teoría de modelos.
Autores: Langhaar, H.L.
Editorial: Wiley.
Página: 121.

121.

Productos adimensionales estándar en la teoría de calor.

Se define el número de Reynolds como:

$$R = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

V es la velocidad característica, L la longitud característica, ρ la densidad, μ la viscosidad del fluido y ν la viscosidad cinemática.

Año1967.

***Libro*: Transmisión de calor.**
Autores: Gröber/Erk/Grigull.
Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.
Páginas: 173, 190, 204, 393, 208.

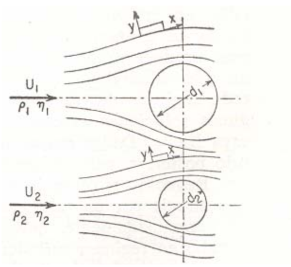
173.

Movimiento de fluidos y transporte de energía.

Corriente laminar y turbulenta; ley de semejanza de Reynolds.

Observamos el proceso mostrado en la figura.

Figura 1 número de Reynolds: deducción de la ley de semejanza de Reynolds.



La proyección sobre el eje x de la fuerza de inercia de la unidad de volumen es:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + ... \right)$$

Como queremos que las dos corrientes sean semejantes, las fuerzas de inercia deben ser proporcionales a las velocidad no perturbada U, mientras todas las longitudes y sus derivadas deben ser proporcionales a d.

La proyección sobre el eje x, por ejemplo de la fuerza viscosa por unidad de volumen es:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ... \right)$$

Luego esta fuerza debe ser proporcional a $\eta \frac{U^2}{d^2}$. Por tanto la relación:

$$\frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza viscosa}} = \frac{\rho U^2 / d}{\eta U^2 / d^2} = \frac{\rho U d}{\eta} = \frac{Ud}{v}$$

Debe ser constante en todos los puntos. Esta es, la magnitud sin dimensiones que describió Reynolds, denominada número de Reynolds y representada por N_{Re}.

Podemos decir que dos corrientes son semejantes si sus números de Reynolds son iguales, cualesquiera que sean los valores de u, d o v.

η es la viscosidad del fluido, d el diámetro del cilindro, ρ la densidad del fluido, v viscosidad cinemática.

190.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Deducción de parámetros adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales.

Convección forzada.

Consideramos dos tubos de diferente diámetro, por cada uno de los cuales circula un fluido distinto en régimen estacionario. En ambos casos las velocidades, aunque diferentes, son tales que las fuerzas viscosas y de inercia resultan del mismo orden. Suponemos que ambos fluidos son incompresibles. En cada tubo una diferencia de presiones aplicada en sus extremos crea la corriente; las fuerzas de volumen, tales como la gravitatoria, son pequeñas frente a las producidas por la presión y estamos en caso de convección forzada.

La viscosidad cinemática es: $v = \dfrac{\eta}{\rho}$

La ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + v_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1{}^2} \right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

Ecuación de la energía:

$$u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \upsilon_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1{}^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1{}^2} \right)$$

En la pared del tubo, todas las componentes de la velocidad son nulas y las temperaturas del fluido y de la pared son iguales. En el comienzo de la zona del tubo considerada existe cierta distribución de velocidades, que determina en el tubo la corriente total, la velocidad axial, la velocidad media, etc. Podemos expresar la corriente de calor en la pared en función del coeficiente de transmisión de calor h_1 y de la temperatura diferencial media θ_m con respecto a la temperatura de la pared. Resulta la ecuación:

$$h_1 \theta_{m1} = -k_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1} \right)_p$$

El subíndice p indica la pared y $\theta = T - T_P$

Como al tubo 2 se deben aplicar las mismas ecuaciones y condiciones de contorno, resultará lo anterior cambiando el subíndice 1 por el 2, si bien los valores de una determinada magnitud serán diferentes, en general, en los tubos y en las soluciones finales.

Postulamos que los sistemas son físicamente semejantes, o sea, que la relación entre las magnitudes correspondientes en los tubos 1 y 2 es constante. Por ejemplo, para todas las longitudes, incluso las coordenadas x, y, z de un punto, el coeficiente de proporcionalidad apropiado es f_L, $f_L = \frac{L_2}{L_1}$

Y de modo análogo, los otros coeficientes de proporcionalidad son:

Velocidades u, υ, w $\quad f_u = \frac{u_2}{u_1}$

Presiones p $\quad f_p = \frac{p_2}{p_1}$

Densidades ρ $\quad f_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Viscosidades cinemáticas $\quad f_v = \frac{v_2}{v_1}$

Temperaturas T, θ $\quad f_T = \frac{T_2}{T_1}$

Difusividades térmicas $\quad f_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Coeficientes de transmisión de calor h $\quad f_h = \frac{h_2}{h_1}$

Conductividades k $\quad f_k = \frac{k_2}{k_1}$

Si en las ecuaciones de ecuación de movimiento proyectada, ecuación de continuidad, ecuación de la energía y la de la corriente de calor en la pared, escritas para el segundo tubo, sustituimos las magnitudes $x_2, y_2, z_2, u_2, \upsilon_2, w_2, ...$ por sus valores deducidos de las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad, se obtiene:

Ecuación del movimiento proyectada sobre el eje x:

$$\frac{f_u^2}{f_L}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \upsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right) = -\frac{f_p}{f_L f_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{f_v f_u}{f_{L^2}} v_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{f_u}{f_L}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) = 0$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{f_u f_T}{f_L}\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \upsilon_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1} + w_1\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right) = \frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}}\alpha_1\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2}\right)$$

Ecuación de la corriente de calor:

$$f_h f_T h_1 \theta_{m,1} = -\frac{f_k f_T}{f_L} k\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n_1}\right)_p$$

Las anteriores ecuaciones, que describen los fenómenos que ocurren en el segundo tubo, son idénticas a sus correspondientes del primer tubo si se verifican las igualdades:

$$\frac{f_u^2}{f_L} = \frac{f_p}{f_L f_\rho} = \frac{f_v f_u}{f_{L^2}} \quad (1)$$

$$\frac{f_u f_T}{f_L} = \frac{f_\alpha f_T}{f_{L^2}} \quad (2)$$

$$f_h f_T = \frac{f_k f_T}{f_L} \quad (3)$$

Se debe observar que la ecuación de continuidad no impone ninguna condición a las constantes de proporcionalidad, pues el cociente $\frac{f_u}{f_L}$ es arbitrario. Al sustituir en las ecuaciones anteriores los valores de los coeficientes de proporcionalidad definidos por las ecuaciones de los coeficientes de proporcionalidad se obtienen condiciones de semejanza física que deben cumplir nuestros dos sistemas, y permiten que uno de ellos pueda ser considerado modelo del otro.
Así se obtiene de la ecuación (1)

$$\frac{u_1 L_1}{v_1} = \frac{u_2 L_2}{v_2} = \frac{uL}{v} \qquad \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} = \frac{\rho_2 u_2^2}{p_2} = \frac{\rho u^2}{p}$$

De la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{u_1 L_1}{\alpha_1} = \frac{u_2 L_2}{\alpha_2} = \frac{uL}{\alpha}$$

De la ecuación (3):

$$\frac{h_1 L_1}{k_1} = \frac{h_2 L_2}{k_2} = \frac{hL}{k}$$

Los parámetros adimensionales así deducidos se designan de acuerdo con una sugestión de Gröber, con los nombres de destacados científicos. Se suele emplear la siguiente notación

$\frac{uL}{v} = N_{\mathrm{Re}}$ número de Reynolds.

$\frac{uL}{\alpha} = N_{Pe}$ número de Peclet

$\frac{hL}{k} = N_{Nu}$ número de Nusselt.

También se representan con las dos primeras letras del nombre científico muy corriente en la literatura alemana; por ejemplo Re, Pe, Nu.

204.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor.

Significado físico de los parámetros adimensionales.

Al deducir el criterio de semejanza de Reynolds hemos visto que se puede considerar al número de Reynolds como la medida de la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas, pues:

$\frac{Ud}{v} = \frac{\rho U^2}{\eta U / d} = N_{\mathrm{Re}}$, donde d representa el diámetro del tubo, η la viscosidad U la velocidad, ρ la densidad, v la viscosidad cinemática.

393.
Transmisión de calor por evaporación.
Ebullición en convección libre junto a superficies horizontales y verticales.
El valor de las cuidadosas medidas logradas por Jacob y colaboradores y la importancia de las fórmulas deducidas por Jacob se hacen evidentes en el desarrollo posterior de la teoría debido a Rohsenow. Se define en ella un número de Reynolds N, $_{\mathrm{Re,b}}$

$$N_{\mathrm{Re},b} = \frac{G_b d_c}{\eta_f}$$

Para la superficie que produce la ebullición. G_b representa la densidad de la corriente de masa de vapor que produce la superficie, d_c es el diámetro crítico de una burbuja y η_f es la viscosidad dinámica del líquido que hierve a la temperatura de saturación T_S.
208.
Leyes de semejanza de la transmisión de calor.
Significado físico de los parámetros adimensionales.
Se puede observar que la literatura francesa emplea notación y terminología bastante diferentes, que a continuación comparamos con la nuestra.

Notación actual	Notación francesa.
$\mathrm{N}_{\mathrm{Re}} = \frac{Ud}{v}$ Número de Reynolds.	$\mathcal{R} = \frac{Ud}{v}$ Número de Reynolds.

Año: 1973.
Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Páginas: 191, 228, 252.
191.
Semejanza y simulación en la transmisión de calor por convección.
Parámetros y ecuaciones adimensionales de semejanza.
El parámetro adimensional:

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{w_0 l_0}{v}$$

w_0 es la velocidad de referencia.
l_0 es la longitud de referencia.
v la viscosidad cinemática.

Caracteriza la relación entre fuerzas de inercia y las viscosas. Realmente, el número de Reynolds se obtiene dividiendo el término que contiene las fuerzas de inercia en la ecuación del flujo por el término que contiene las fuerzas de viscosidad en la misma ecuación.

$$\frac{(\vec{w}, grad)\vec{w}}{\nabla^2 \vec{w}} = \frac{w_0^2 / l_0}{v w_0 / l_0^2} \frac{(\vec{W}, grad)\vec{W}}{\nabla^2 \vec{W}} = \frac{w_0 l_0}{v} \frac{(\vec{W}, grad)\vec{W}}{\nabla^2 \vec{W}}$$

El número d Reynolds es una propiedad importante, tanto del flujo isotérmico como del no isotérmico.

228.

Transmisión de calor en una placa plana con flujo forzado longitudinal.
Modelo de flujo sobre una superficie.

El tipo de flujo en una superficie se discrimina mediante el número Crítico de Reynolds, $\mathrm{Re} = \frac{w_0 x}{v}$, donde x es la distancia a lo largo de la placa medida desde su borde. También puede representarse de la siguiente forma:

$$\mathrm{Re} = \frac{w_0 x}{v} = \frac{w_0 l}{v}\frac{x}{l} = \mathrm{Re}_l\, X$$

l es la longitud de la placa, v la viscosidad cinemática y w_0 es la velocidad de referencia.

252.

Transmisión del calor en tubos con fluidos en flujo forzado.
Características del flujo y de la transmisión del calor en tubos.

El flujo en un tubo puede ser laminar o turbulento. La clase de flujo se determina mediante el valor de:

$\mathrm{Re} = \frac{\overline{w} d}{v}$, donde $\overline{w}$ es la velocidad media en el tubo, d el diámetro interior del tubo y v la viscosidad cinemática.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 189-190, 184, 185, 215-216.

189-190.

Transferencia de calor por convección. Conceptos fundamentales en la transferencia convectiva de calor.
Flujo interno.

Caso de un fluido que circula por el interior de una tubería de diámetro D y velocidad promedio u_{prom} con viscosidad μ y viscosidad cinemática v.

$$\mathrm{Re}_D \equiv \frac{D u_{prom} \rho}{\mu} = \frac{D u_{prom}}{v}$$

184.

Transferencia de calor por convección.
Flujo en la capa límite paralelo a una placa plana.

Consideramos el caso de un fluido que circula paralelo a una placa plana.
El número de Reynolds, que se representa por Re se define como:

$$\mathrm{Re}_x \equiv \frac{x u_\infty \rho}{\mu} = \frac{x u_\infty}{v}$$

Donde u_∞ es la velocidad de la corriente libre, x está en la dirección a lo largo de la superficie medida desde el borde de ataque, μ es la viscosidad del fluido, ρ es la densidad del fluido y v la viscosidad cinemática o la difusividad molecular del impulso. Se ve que el número de Reynolds es adimensional. Físicamente, se puede considerar al número de Reynolds como la razón de las fuerzas de inercia a las fuerzas viscosas.

185.
Capítulo 5. Transferencia de calor por convección.
Flujo externo sobre cuerpos romos.
Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re}_D \equiv \frac{Du_\infty \rho}{\mu} = \frac{Du_\infty}{\nu}$$

Estamos estudiando el caso de un flujo que choca con la superficie de un cilindro de diámetro D, el fluido tiene velocidad u_∞ en la corriente libre, μ es la viscosidad del fluido, ρ es la densidad del fluido y ν la viscosidad cinemática o la difusividad molecular del impulso.

215-216.
Transferencia de calor por convección.
Análisis dimensional .
Este análisis dimensional no es muy exhaustivo. El lector puede encontrar un análisis más detallado en las obras de Welty, Wicks y Wilson y Langhaar.
Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de un cilindro, el fluido que fluye y la pared del cilindro están a diferentes temperaturas, la velocidad promedio es u_{prom}, y las propiedades de interés del fluido son la densidad, la viscosidad, el calor específico y conductividad térmica.
Vamos a considerar fundamentalmente cuatro dimensiones: la masa M, la longitud L, el tiempo t y la temperatura T. Todas las expresiones están expresadas en función de las anteriores. Las unidades de c_p, k y h incluyen un término de calor: para esta investigación se ha representado el calor por energía con dimensiones de ML^2/t^2

Variable	Símbolo	Dimensiones.
Velocidad	u	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	L^2/t^2T
Conductividad térmica del fluido	k	ML/t^3T
Coeficiente de transferencia de calor	h	M/t^3T

El teorema de pi de Buckingham dice que el número de grupos independientes adimensionales i necesarios para correlacionar n variables dimensionales está dado por la expresión i = n – r
Donde r es el rango de una matriz que tiene n columnas y un número de renglones equivalente al número de dimensiones fundamentales –en este cuatro.
La matriz sujeto se forma como sigue:

	u	D	ρ	μ	c_p	k	h
M	0	0	1	1	0	1	1
L	1	1	-3	-1	2	1	0
t	-1	0	0	-1	-2	-3	-3
T	0	0	0	0	-1	-1	-1

El número, en cada posición de la tabla es el exponente al que se debe elevar cada una de las dimensiones para representar adecuadamente la variable dada.
El rango de esta matriz es 4 luego se deben formar 7 – 4 = 3 parámetros adimensionales.
Cada parámetro adimensional se forma combinando un grupo núcleo de r variables con una de las variables restantes que no estén en el núcleo. El núcleo puede incluir cualquiera de las 4 variables (en este caso) que, entre ellas incluyan todas las dimensiones básicas. En forma arbitraria se escogen d, ρ, μ y k como el núcleo. Ahora se representan como grupos pi a los parámetros que se deben formar en donde:

$\pi_1=\mathrm{D}^{a}\rho^{b}\mu^{c}\mathrm{k}^{d}u$

$\pi_2=\mathrm{D}^{e}\rho^{f}\mu^{g}\mathrm{k}^{h}c_p$

$\pi_3=\mathrm{D}^{i}\rho^{j}\mu^{k}\mathrm{k}^{l}h$

Cada grupo pi ha de ser adimensional, lo que se logra seleccionando adecuadamente los exponentes, b, c etc usando la muy sencilla técnica mecánica que ahora se ilustra.
Comenzando con π_1 se le escribe adimensionalmente en la forma

$$1 = L^a\left(\frac{M}{L^3}\right)^b\left(\frac{M}{Lt}\right)^c\left(\frac{ML}{t^3T}\right)^d\frac{L}{t}$$

Para que se mantenga la igualdad, los exponentes en m, l, t y T deben ser iguales en ambos lados de la expresión. Notando que los exponentes son cero en el lado izquierdo, se genera el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas igualando los exponentes:

M: 0=b+c+d

L: 0=a-3b-c+d+1

t: 0=-c-3d-1

T: 0=-d

Se pueden resolver estas ecuaciones para dar valores de a, b, c y d iguales a 1,1, -1,0, respectivamente. Se puede escribir el primer parámetro como:

$$\pi_1 = \frac{D\rho u}{\mu} \equiv \mathrm{Re}_D$$

Que se conoce como número de Reynolds.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Páginas: 276, 449 (dos fases).

276

Capa límite laminar y turbulenta. Algunas ideas introductorias.

La ecuación dimensional funcional para el espesor de la capa límite en una superficie plana es:

$$\delta = fn(u_\infty, \rho, \mu, x)$$

Donde x es la longitud a lo largo de la superficie y ρ y μ son la densidad en Kg/m^3 y viscosidad en Kg/m-s. Tenemos 5 variables en Kg, m y s, así prevemos 2 pi-grupos.

$$\frac{\delta}{x} = fn(\mathrm{Re}_x) \qquad \mathrm{Re}_x \equiv \frac{\rho u_\infty x}{\rho} = \frac{u_\infty x}{\upsilon}$$

Donde υ, es la viscosidad cinemática, y Re_x es el número de Reynolds. El número de Reynolds caracteriza la influencia relativa de las fuerzas de inercia y las viscosas en un problema de fluidos.

449.

Transferencia de calor en ebullición y otras configuraciones de cambio de fase. Convección forzada en ebullición en tubos.

Definimos el número de Reynolds, como : $\mathrm{Re}_{TP} = F^{1.25}[G(1-x)D/\mu_f] = F^{1.25}\,\mathrm{Re}_f$

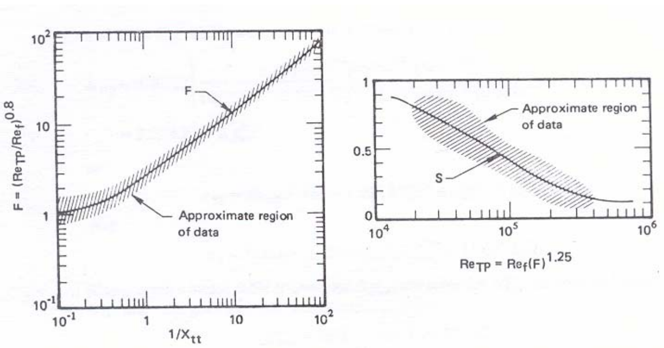


Figura 2 número de Reynolds: parámetros de flujo Chen`s en dos fases.

$$X_{tt} \equiv \sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)_f \Big/ \left(\frac{dp}{dx}\right)_g}$$

Obtenemos la función empirica F con X_{tt} de la *figura*. $F^{1/0.8}$ es la proporción del número de Reynolds para dos fases Re_{TP} y el número de Reynolds para una fase líquida convencional Re_f.

Flujo másico proporcional, a lo largo del tubo :

$$G \equiv \frac{\dot{m}}{A_{tubo}}$$

D = diámetro tubo

μ_f = viscosidad del líquido.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Página: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombres:

Reynolds

$$\frac{\rho UL}{\mu}=\frac{UL}{v}$$

Formación:

$$\frac{\frac{U^2}{L}\rho}{\frac{U}{L^2}\mu}$$

Interpretación:

Relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

U es la velocidad característica, L la longitud característica, ρ y μ la densidad y viscosidad del fluido.

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores: Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Páginas: 50, 317, 368, 258, 418, 425.

50.

Desarrollo de las ecuaciones gobernantes.

Flujos viscosos.

Se define el número de Reynolds como:

$$\frac{\text{Momento flujo (flow)}}{\text{Momento flujo cambiante (flux)}}=\frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}\sim\frac{VV}{vV/l}=\frac{Vl}{v}=\mathrm{Re}$$

V es la velocidad característica del fluido, l es la longitud considerada en el problema y v la viscosidad cinemática.

317.

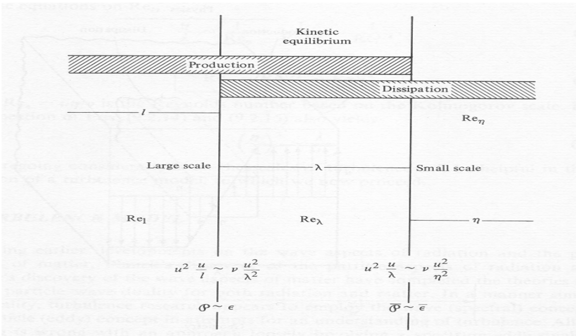
Convección computacional. Elíptica parcial, ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: Consideramos flujo laminar en la entrada de dos placas paralelas espaciadas una distancia 2l. Las placas son isotermas mientras el fluido corriente arriba es isotermo a una temperatura diferente. Calculamos la distribución de temperatura y velocidad.

Se define el número de Reynolds celda como:

$$\mathrm{Re}_c=\frac{U_0\Delta x}{v}$$

Δx : es un incremento longitudinal (para resolver el problema, divide el espacio entre las dos placas en incrementos de x y de y)
U_0 : velocidad al inicio de las dos placas.
v : viscosidad cinemática.
368.
Escalas térmicas y cinéticas y espectros. Flujo de Reynolds y escalas térmicas.
Se definen las siguientes escalas como se muestra en la figura de equilibrio cinético.
Figura 3 número de Reynolds: escalas térmicas y cinéticas.



Así se definen los siguientes números de Reynolds para las diferentes escalas:
Número de Reynolds para escala pequeña:

$$\mathrm{Re}_\eta = \frac{u\eta}{v}$$

Número de Reynolds para escala intermedia:

$$\mathrm{Re}_\lambda = \frac{u\lambda}{v}$$

Número de Reynolds para grandes escalas:

$$\mathrm{Re}_l = \frac{ul}{v}$$

Donde u es la velocidad y v la viscosidad cinemática.
258.
Convección periódica. Efectos no lineales. Ejemplo.
Se define el número de Reynolds corriente como

$$Rs = \frac{U_\infty^2}{wv}$$

El comportamiento del flujo en el exterior de la capa límite depende de este número.

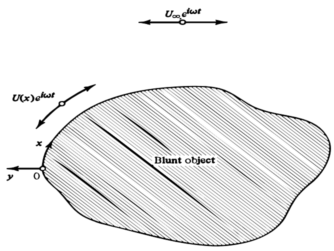


Figura 4 número de Reynolds. Objeto abrupto estacionario en un flujo oscilante.

$U(x)e^{iwt}$ es la velocidad del fluido viscoso cerca del cuerpo abrupto, y lejos de éste, la velocidad es $U_\infty e^{iwt}$.

418-420.
Pronóstico del flujo. Modelos de una ecuación.
Estos modelos hacen referencia a la descripción de los procesos de transporte turbulento en términos de un único parámetro, la longitud de mezcla l, la cual es obtenida algebraicamente. Así tenemos una ecuación balance para K y una ecuación algebraica para l
Se define el número de Reynolds turbulento local, cerca de la pared como:

$$R_T = \frac{K^{1/2}y}{v}$$

K es la energía cinética turbulenta $K = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$, $v_T = l_1 K^{1/2}$, l_1 es una longitud de escala representativa de los remolinos cuya energía constituye la mayor parte de K , *y* es la coordenada transversal.

425.
Pronóstico del flujo. Modelos de dos ecuaciones.
En este caso la ecuación algebraica del modelo de una ecuación se reemplaza por una ecuación de transporte y dos ecuaciones de transporte turbulento.
El número de Reynolds se define como: $R_T = \frac{K^2}{v\varepsilon}$, K es la energía cinética turbulenta $K = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$, $\varepsilon = v\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2}$ es la disipación isotrópica y la viscosidad cinemática turbulenta es $v_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$, donde C_μ es una incógnita del problema y es constante para altos números de Reynolds,

Año: 1985.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Páginas: 403,505.

403.
Convección. Flujos laminar y turbulento.
Experimento desarrollado en el interior de un tubo, en el que fluye agua, y la razón de flujo se regula mediante una válvula que se encuentra en el extremo donde termina el flujo. Se introduce colorante en el tubo por un orificio. Según varíe la apertura de la válvula, cambia la forma del flujo.
Define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_{promedio} L_c}{\mu}$$

Donde L_c es la dimensión característica, μ la viscosidad, ρ la densidad y $u_{promedio}$ la velocidad promedio.

505.
Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.
Nombre del grupo adimensional: Reynolds (Re)

Grupo: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho u_\infty L_c}{\mu}$

Interpretación física: $\dfrac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$

ρ es la densidad del fluido, u_∞ velocidad característica, L_c longitud característica, μ viscosidad del fluido.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley
Páginas: 256, 302, 550.

256.
Principios de convección. Flujo laminar, flujo turbulento.
Estamos estudiando el fluido que circula por un conducto.
Se define para flujo interno, el número de Reynolds como:

$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_D = VD/v$

Y para flujos externos de la siguiente forma:

$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_x = U_\infty x/v$

V es la velocidad del fluido, D el diámetro de la tubería, v la viscosidad cinemática x es la coordenada paralela la placa por donde circula el fluido, U_∞ la velocidad de la corriente libre.

302.
Flujo laminar en conductos. Velocidad y temperatura media.
Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re}_{Dh} = \frac{\rho V D_h}{\mu}$$

En flujo uniforme, el flujo de masa en el conducto es constante:

$\dot{m} = \rho V A = GA = \text{constante}$.

Si la densidad varía significativamente aguas abajo del conducto, es conveniente la "velocidad de masa"

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \overline{\rho V} = \frac{1}{A}\int \rho u dA$$

El número de Reynolds apropiado para densidad variable es:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{GD}{\mu}$$

Donde ρ es la densidad del fluido, μ la viscosidad del fluido, D_h el diámetro hidráulico y $D_h = D$ en tubería de sección transversal circular.

550.
Transferencia de calor con cambio de fase. Creación de núcleos en ebullición, correlaciones.
Se define el número de Reynolds para una burbuja como:

$$\mathrm{Re}_b = \frac{G_b D_b}{\mu_f}$$

Donde $G_b = \dot{m}_b / A$

El subíndice b hace referencia a la burbuja, f a la fase líquida.

D es el diámetro μ la viscosidad, $\dot{m}$ es el flujo másico, A es el área.

Año: 1988.

Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte.
Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia.
Editorial: Hemisphere.
Páginas: 10, 467.
10.

Flujo y transporte.
Definimos el siguiente proceso, con coeficiente de transmisión h y con temperaturas t_0 la de la superficie y t_∞ la del ambiente.
El flujo de calor es:

$$Q = hA\left(t_0 - t_\infty\right)$$

L es la dimensión característica de la superficie.
La velocidad u es generada por un flujo externo en la elevación L en la región de perturbación $\rho_r - \rho = \rho_\infty - \rho = \Delta\rho$ puede ser estimada por la ecuación de la energía cinética $\frac{\rho u^2}{2}$ por unidad de volumen, el trabajo la fuerza de flotabilidad en la distancia L, gL$\Delta\rho$ por unidad de volumen.
Así:

$$\frac{\rho u^2}{2} \simeq gL\Delta\rho$$

Despreciando las fuerzas viscosas y otros efectos pequeños.
El número de Reynolds se define como:

$$\mathrm{Re} = \frac{uL}{\nu} \propto \sqrt{\frac{gL^3\Delta\rho}{\nu^2\rho}} = \sqrt{\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right)\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)} = \sqrt{Gr}$$

ν es la viscosidad cinemática, g es la constante gravitacional, Gr es el número de Grashof, que sustituye al número de Reynolds en los flujos forzados cuando estamos en flujos inducidos por flotabilidad.
467.
Convección mezclada.
El número de Reynolds representa el vigor de los efectos del flujo forzado.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Páginas: 18, 137, 388f, 394f, 502f.

18.

Propiedades y movimiento del fluido. Flujo turbulento y laminar.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Donde D es el diámetro de la tubería y U es la velocidad media de el fluido, ρ y μ son la densidad y viscosidad del fluido.

El valor de este número nos indica el paso de régimen laminar a turbulento del fluido.

137.

Ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso. Semejanza dinámica.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{v}$$

Donde L es el diámetro de la esfera,
U_0: velocidad de la corriente libre.
ρ y μ: densidad y viscosidad del fluido.
v: viscosidad cinemática.

388f.

Análisis dimensional de los procesos de transferencia. Declaración de los principios básicos.

Consideramos la transferencia de calor de un fluido que fluye en el interior de una tubería circular. El valor del flujo de calor q depende de la diferencia de temperatura ΔT entre la pared de la tubería y el fluido, del diámetro D, de la velocidad media u_m y la temperatura media del fluido T_m y de las propiedades físicas k, ρ, c_p, μ, así nosotros podemos afirmar que

$$q = f\left(\Delta T, k, c_p, \rho, \mu, D, u_m, T_m\right)$$

Por el teorema de π de Buckingham, esta conexión entre nueve cantidades, puede ser reducida a cuatro, si asumimos cinco dimensiones fundamentales

$$[m],[l],[t],[T],[Q]$$

Nosotros podemos tomar cinco cantidades primarias como sigue:

Cantidad	k	ρ	D	μ	ΔT
Dimensiones	$\left[Q l^{-1} t^{-1} T^{-1}\right]$	$\left[m l^{-3}\right]$	$[l]$	$\left[m l^{-1} t^{-1}\right]$	$[t]$

Para π_1 podemos poner $\frac{q}{k^a \rho^b D^c \mu^d \Delta T^e}$

Dimensionalmente

$$\frac{[Q]}{\left[l^2 t\right]} = \frac{[Q]^a}{[ltT]^a} \frac{[m]^b}{\left[l^3\right]^b} [l]^c \frac{[m]^d}{[lt]^d} [T]^e$$

Por lo tanto

Q a=1

T 0=-a+e $\therefore e=1$

t -1=-a-d $\therefore d=0$

m 0=b+d $\therefore b=0$

l -2=-a-3b+c-d $\therefore c=-1$

De este modo:

$$\pi_1=\frac{qD}{k\Delta T}$$

Con un proceso similar llegamos a $\pi_2=\frac{\rho u_m D}{\mu}$, conocido como número de Reynolds.

394f.

Análisis dimensional de los procesos de transferencia. Significado físico de los grupos adimensionales.

El número de Reynolds es una medida de la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

502.f

Flujo , dos fases. Caída de película del fluido.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re}=\frac{4}{3}\frac{\rho^2 g\delta^3}{\mu^2}\frac{4}{3}\eta^2$$

Donde ρ es la densidad del fluido, g la aceleración de la gravedad, δ es el espesor de la película, μ es la viscosidad, η término adimensional.

Estamos en el caso de de una película de fluido sobre una pared vertical en caída.

Año: 1991.

Libro: Dimensional Análisis and Scale-up in chemical Engineering. Análisis dimensional y escalonamiento en ingeniería química.

Autores: Zlokarnik M.

Editorial: Springer-Verlag.

Página: 4.

4.

Introducción.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re}=\frac{Vl}{v}$$

El cual puede variar por una alteración de la velocidad característica V, o de la longitud característica, o de la viscosidad cinemática v.

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 374, 606.

374.

Transferencia de calor por convección. La capa límite.

Las características hidrodinámicas asociadas con las fuerzas de convección del flujo en la capa límite son generalmente expresadas en términos del número de Reynolds:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_F L}{v}$$

Donde L es la longitud de referencia, U_F la velocidad de referencia v la viscosidad cinemática.

El número de Reynolds representa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas que actúan sobre el fluido.

606.

Transferencia de calor por convección: Ebullición y condensación. Película de condensación.

El número de Reynolds definido para una película de líquido condensado es:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{D_H U_b}{v_f} = \frac{4a}{p}\frac{U_b}{v_f}$$

D_H es el diámetro hidráulico, el subíndice f hace referencia a condiciones de líquido saturado, v es la viscosidad cinemática, U_b *velocidad del volumen (el grueso de la velocidad),* $A = p\delta_f$; δ_f es el espesor de película local, y p el perímetro. Basado en el principio de continuidad, U_b puede expresarse en términos del flujo másico de condensación:

$$\dot{m} = \rho_f A U_b$$

ρ_f es la densidad del fluido en condiciones de líquido saturado.

El número de Reynolds para película de condensación se puede escribir:

$\mathrm{Re}_f = \dfrac{4\dot{m}}{p\mu_f}$; μ_f es la viscosidad del fluido en condiciones de líquido saturado.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 79, 408, 95, 231, 95.

79.

Transferencia de momento. Flujo laminar completamente desarrollado en tubos circulares.

Definimos el número de Reynolds como $\mathrm{Re} = \dfrac{2r_0\rho V}{\mu} = \dfrac{DV\rho}{\mu} = \dfrac{DG}{\mu}$

Donde D es el diámetro de la tubería, G es el flujo másico, r_0 es el radio de la tubería, ρ la densidad del fluido, V la velocidad del fluido, μ es la viscosidad del fluido.

408.
Capa límite convección libre. Regímenes de flujo convección libre.

Definimos el número de Reynolds como $\mathrm{Re}_x = \dfrac{Ux}{v} = \sqrt{\dfrac{g\beta(t_0 - t_\infty)}{v^2}}$

$\mathrm{Re}_x = Gr^{1/2}$

Gr es el número de Grashof, U es la velocidad característica, x es la coordenada vertical paralela a la placa vertical, v es la viscosidad cinemática, g es la constante gravitacional, β es el coeficiente de expansión térmica, $t_0 - t_\infty$ es la diferencia de temperatura entre la pared y la corriente libre.

95.
Transferencia de momento: capa límite externa laminar.
Definimos el número de Reynolds local como

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{v} = \frac{u_\infty \rho x}{\mu} = \frac{G_\infty x}{\mu}$$

u_∞ es la velocidad de la corriente libre, x es la coordenada longitudinal paralela a la placa, v es la viscosidad cinemática, ρ es la densidad del fluido, G_∞ es el gasto másico de la corriente libre.

231.
Transferencia de momento: capa límite turbulenta.
Los efectos de la rugosidad superficial.
Definimos el número de Reynolds de rugosidad como:

$$\mathrm{Re}_k = u_\tau k_s / v$$

Es un numero adimensional que nos da una medida de la rugosidad de la superficie.

u_τ: velocidad de cizalladura.

k_s: Usamos este símbolo como una dimensión de longitud para describir la rugosidad del elemento.

v: es la viscosidad cinemática.

Año: 1993.

Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 482-483, 267, 373-381, 385-387, 355, 288, 293.

482-483.
Ebullición y condensación. Teoría de película de condensación.
Número de Reynolds para flujo condensado.
Para establecer un criterio para la transición de flujo laminar a turbulento, se define el número de Reynolds para flujo condensado:

$$\mathrm{Re} = \frac{D_h u_m \rho_l}{\mu_l}$$

u_m es la velocidad media de la película condensada, D_h es el diámetro hidráulico para flujo condensado, dado por:

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4x \text{ área de la sección transversal para flujo condensado}}{\text{perímetro mojado}}$$

ρ_l es la densidad del líquido y μ_l la viscosidad del líquido.

El número de Reynolds se puede expresar como:

$$\mathrm{Re} = \frac{4\left(\rho_l u_m A\right)}{\mu_l P}$$

El número de Reynolds en la parte más baja de la superficie condensada puede ser expresado de forma más conveniente como:

$$\mathrm{Re} = \frac{4M}{\mu_l P}$$

M = proporción de flujo másico condensado en la parte mas baja de la superficie de condensación, en kilogramos por segundo. El perímetro mojado depende de la geometría:

$P = \pi D$; para tubo vertical de diámetro exterior D

2L; para tubo horizontal de longitud L

w; para placa vertical o inclinada de anchura w .

267.

Convección, conceptos y relaciones básicas. Parámetros adimensionales.

Consideramos el número de Reynolds basado en la longitud característica L, en la forma:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty L}{v} = \frac{u_\infty^2 / L}{v u_\infty / L^2} = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}}$$

u_∞ es la velocidad característica, v la viscosidad cinemática.

El número de Reynolds representa la relación de las fuerzas de inercia y las viscosas, y por lo tanto se puede emplear como criterio para determinar el cambio de régimen laminar a turbulento.

273-381.

Enunciados de ejercicios.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m D}{v}$$

Caso de flujo que circula por el interior de una tubería.

u_m es la velocidad media, D es el diámetro, v es la viscosidad cinemática.

385-387. **Convección forzada para flujo sobre cuerpos. Flujo a través de haz de tubos.**

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{DG_{max}}{\mu}$$

Donde $G_{max} = \rho u_{\max}$ = velocidad de flujo másico máxima , D es el diámetro de la tubería, μ es la viscosidad del fluido.

355.

Convección forzada para flujo sobre cuerpos. Coeficiente de resistencia para flujo sobre una placa plana.

Se define el número de Reynolds local como:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

u_∞ es la velocidad de la corriente libre, ν es la viscosidad cinemática, x es la coordenada paralela a la placa y que tiene como origen el borde de ataque.

288.

Convección forzada para flujo en el interior de conductos. Flujo laminar completamente desarrollado hidrodinámicamente y térmicamente.

Flujo en el interior de una tubería circular.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{u_m D}{\nu}$$

u_m es la velocidad media del fluido, D el diámetro del conducto, ν es la viscosidad cinemática.

293.

Convección forzada para flujo en el interior de tuberías. Flujo laminar completamente desarrollado hidrodinámicamente y térmicamente

Flujo en el interior de conductos de varias secciones transversales.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m D_h}{\nu}$$

u_m es la velocidad media del fluido en el conducto, D_h el diámetro hidráulico, ν es la viscosidad cinemática.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.

Autores: Adrian Bejan.

Editorial: John Wiley and Sons.

Páginas: 36, 39, 521, 99, 100, 410, 278-281, 38, 39.

36, 38, 39.

Flujo en la capa límite laminar. Capas límite térmica y de velocidad.

El espesor de la capa límite viene dado por:

$\delta \sim \left(\frac{\nu L}{U_\infty}\right)^{1/2}$ o lo que es lo mismo $\frac{\delta}{L} \sim \mathrm{Re}_L^{-1/2}$

Donde Re_L es el número de Reynolds basado en la longitud de la región de la capa límite térmica.

$\mathrm{Re}_L = \left(\frac{U_\infty L}{\nu}\right)$ en un flujo externo.

El número de Reynolds es interpretado como el orden de magnitud de la razón inercia entre fricción para un flujo particular. Esta interpretación no es siempre correcta debido a que al final de la región de la capa límite examinada arriba, hay siempre un balance entre inercia y fricción, mientras que Re_L puede alcanzar como máximo 10^5 antes de la transición a flujo turbulento.

La única interpretación física del número de Reynolds en flujos en la capa límite laminar es

$$\mathrm{Re}_L^{1/2} = \frac{\text{longitud de la pared}}{\text{espesor de la capa límite}}$$

En otras palabras, no es Re_L, pero la raiz cuadrada de Re_L significa algo: es un parámetro geométrico del flujo en la región, la razón de delgadez.

521.

Convección en un medio poroso. Modelo flujo de Darcy y modificación de Forcheimer.

Definimos Reynold como $\mathrm{Re} = \dfrac{uK^{1/2}}{v}$

Donde K es una constante empírica llamada permeabilidad

$$[K] = \frac{[\mu][u]}{\left[-\dfrac{dp}{dx}\right]} = (longitud)^2$$

μ es la viscosidad del fluido, u la velocidad característica del fluido y $\dfrac{dp}{dx}$ es el gradiente de presión.

Con el factor de fricción se puede expresar el número de Reynolds

$$f = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

99-100.

Flujo laminar en conductos. Flujo completamente desarrollado.

Es común encontrar en la literatura de convección, asignar a cualquier flujo de hagen-Poideuille un número de Reynolds definido para un tubo circular como $\mathrm{Re}_D = UD/v$.

En los libros de mecánica de fluidos se repite uno tras otro, la explicación que el número de Reynolds es la razón de dos escalas, en concreto, las fuerzas de inercia divididas por las fuerzas de fricción.

La proliferación de términos no explicados como el número de Reynolds es quizás el mejor ejemplo del envejecimiento de la mecánica de fluidos dentro del campo donde las nuevas generaciones obedientemente aceptan como dogma el lenguaje acuñado por los pioneros quienes vivieron y crearon en un tiempo cuando “algo se va” fue una regla.

Aunque hay ciertas regiones de flujo en las cuales se puede prever un número de Reynolds como la razón de fuerzas viscosas entre las de fricción, no está tan claro que el número de Reynolds siempre signifique lo mismo para todos los flujos. Hemos visto que en el flujo de la capa límite laminar, los efectos de inercia siempre mantienen un equilibrio con los efectos de fricción y que solamente el significado físico adjuntado para el número de Reynolds es la característica geométrica representada por la delgadez de la capa límite.

En el caso de flujos Hagen-Poiseuille a través de conductos rectos, es obvio que la interpretación inercia/fricción del número de Reynolds es un puro disparate. Los flujos Hagen-Poiseuille son flujos en los cuales la inercia del fluido es cero en todas partes: estos fluidos son gobernados por un permanente y perfecto equilibrio entre el gradiente longitudinal de presión impuesto y el efecto opuesto de la fricción ejercida por la pared en el flujo. Así, si tenemos que definir un grupo adimensional para el flujo laminar completamente desarrollado

a través de un conducto recto, este grupo solamente puede ser la razón : fuerzas de presión longitudinales entre fuerzas de fricción.
Hay otros signos que indican que el número de Reynolds no tiene significado en conductos con flujo laminar totalmente desarrollado.

Primero, es bien conocido que el calculado número de Reynolds en semejantes flujos puede alcanzar como máximo 2300 (nos damos cuenta que este número es considerablemente más alto que la unidad.
Un número tan grande, asociado con la inercia dividido por la fricción según es interpretado por el número de Reynolds, es una conclusión totalmente absurda. Otro signo es el factor de fricción f en un flujo laminar ambos f y τ_w son muy sensibles a los cambios del número de Reynolds, demostrando que el número de Reynolds es una inapropiada razón de escalas, y que $\frac{1}{2}\rho U^2$ es una inapropiada unidad de presión para un flujo de Hagen-Poiseuille.

El hecho que el número de Reynolds no está conceptualmente justificado en la discusión de un flujo laminar totalmente desarrollado no significa que no sea un grupo adimensional útil para la transferencia de calor en ingeniería. El número de Reynolds es útil, particularmente en la presentación de información de conductos con fricción en argumentos solo para ambos regímenes, turbulento y laminar. Por esa razón, la nomenclatura clásica del número de Reynolds se mantiene en el presente tratamiento.
Pero al mismo tiempo el lector deberá constantemente entender el hecho que el presunto significado general del concepto de número de Reynolds no está claro del todo, y que sería muy oportuno para el futuro investigar para aclarar este significado.

410.

Convección con cambio de fase. Condensación.

Película turbulenta en una superficie vertical.

El número de Reynolds local de una película líquida se puede definir como el siguiente grupo adimensional $\frac{\rho_l \bar{u}\, \delta}{\mu_l}$ en el cual δ es el espesor local y $\bar{u}$ velocidad hacia abajo de la escala representada. El producto $\rho_l \bar{u}\, \delta$ es del mismo orden de magnitud que la razón de masa del líquido local Γ, así el número de Reynolds puede ser expresado como la razón $\frac{\Gamma}{\mu_l}$. Esto es porque en el campo de la transferencia de calor por condensación, el número de Reynolds local de la película de líquido es definido históricamente como:

$$\mathrm{Re}_y = \frac{4}{\mu_l}\Gamma(y)$$

278-281.

Transición a turbulencia. Número de Reynolds local, criterio para la transición.

El grupo $\mathrm{Re}_l = \dfrac{VD}{v}$ es el número de Reynolds local, el cual se basa en la escala de velocidad longitudinal (V) y la dimensión transversal de la corriente (D), v es la viscosidad cinemática.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 113, 139, 162.

113.

Transferencia de calor laminar en conductos. Conductos circulares.

El número de Reynolds se define como:

$$\mathrm{Re} = \frac{DV_{av}}{v}$$

av: entrada al conducto, V es la velocidad característica, D el diámetro del conducto, v la viscosidad cinemática.

139.

Transferencia de calor laminar en conductos.

4.6. Flujo totalmente desarrollado en conductos no circulares.

Número de Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{D_h V_{av}}{v}$$

D_h es el diámetro hidráulico, *av* entrada al conducto, *V* es la velocidad característica y v la viscosidad cinemática.

162.

Capa límite laminar

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{v}$$

Donde L es la longitud de la placa plana, U es la velocidad característica y v la viscosidad cinemática.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 18, 283, 294, 662.

18.

Transferencia de calor elemental. Convección de calor.

Los flujos en un tubo pueden convertirse en turbulentos cuando el grupo adimensional llamado número de Reynolds, $\mathrm{Re}_D = \dfrac{VD}{v}$ excede la cantidad 2300.

Donde V es la velocidad en m/s, D es el diámetro de la tubería m, y ν es la viscosidad cinemática en m^2/s.

283.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

El grupo adimensional que caracteriza un flujo viscoso es el número de Reynolds , Re:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

Donde L es una longitud característica de la configuración, y para flujos eternos, V es normalmente, la velocidad de la corriente libre no afectada .Para flujos internos ρV Kg/m^2s se toma como una velocidad másica $G = \dot{m}/A_c$, donde $\dot{m}$ es la proporción de flujo másico y A_c es la sección transversal del fluido.

Si la densidad se puede asumir que es constante, entonces $G = \rho u_b$ donde u_b es la llamada velocidad másica.

286.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

Flujo a través de un cilindro.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro D , la densidad ρ, y la viscosidad dinámica μ, la diferencia de temperatura T_S-T_E, el calor específico C_p y la conductividad térmica k.

Así:

$$\overline{q_s} = f(V, D, \rho, \mu, \Delta T, c_p, k)$$

Las unidades de las variables pueden ser escritas de la siguiente forma:

$\overline{q_s}$ *:w/m²*

V:m/s

D:m

ρ *:Kg/m³*

μ *:Kg/ms*

ΔT *:K*

c_p *: Ws/KgK*

k: W/mK.

Hay 5 dimensiones primarias y 8 variables, así que según el teorema de pi de Buckingham hay tres grupos adimensionales.

El método más usual para determinar estos grupos adimensionales, es mediante el método de los índices.

$$\Pi = \overline{q_s}^a V^b D^c \rho^d \mu^e \Delta T^f c_p{}^g k^h$$

Los sustituimos por sus dimensiones.

Para hacer Π adimensional, la suma de los exponentes de cada dimensión primaria debe ser cero.

$$Kg: d + e - g = 0$$

$$m: -2a + b + c - 3d - e - h = 0$$

$$s: -b - e + g = 0$$

$$K: f - g - h = 0$$

$$W: a + g + h = 0$$

Tenemos tres distintas soluciones 8 - 5 = 3
Si hacemos b=1, a=g=0, Obtenemos el número de Reynolds:
d+e=0
1+c-3d-e-h=0
-1-e=0
f-h=0
h=0
h=0,f=0,e=-1,d=1,c=1, lo cual nos da : $\Pi_1 = \frac{\rho V D}{\mu}$, número de Reynolds.

294.
Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.
Tabla Números adimensionales.

Número de Reynolds: $\frac{VL}{v}$ Fuerza en los flujos.

662.
Condensación, evaporación y ebullición.
Película de condensación. Ondulada película laminar y turbulenta de condensación en una pared vertical.

El número de Reynolds de una película expresada en términos de la velocidad másica u_b y el diámetro hidráulico D_h de la película.

$$u_b = \frac{\Gamma}{\rho_l .1.\delta} = \frac{\Gamma}{\rho_l \delta} \qquad D_h = \frac{4A_C}{P} = \frac{4.1.\delta}{1}$$

La única superficie húmeda es la pared.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l u_b D_h}{\mu_l} = \frac{\rho_l (\Gamma / \rho_l \delta) 4\delta}{\mu_l} = \frac{4\Gamma}{\mu_l}$$

El número de Reynolds normalmente se utiliza para caracterizar la película del flujo.

Año: 1996.

Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 312, 318, 320, 420, crítico 295, 421.

312.
Tabla Ecuaciones de transferencia por convección y condiciones de frontera en forma adimensional.

Capa límite de Velocidad $u^* \frac{\partial u}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{v}{VL} \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^*}$

En esta ecuación, observamos que la cantidad v/VL es un grupo adimensional cuyo recíproco se denomina número de Reynolds.

$\mathrm{Re}_L \equiv VL / v$

Donde *V* es la velocidad característica, *L* la longitud característica y *v* la viscosidad cinemática.

318.
Significado físico de los parámetros adimensionales.

El número de Reynolds tiene interpretaciones físicas que se relacionan con las condiciones en las capas límite. Consideramos el número de Reynolds Re de la ecuación $\mathrm{Re}_L \equiv VL/v$, el cual se interpreta como la razón de las fuerzas de inercia a las fuerzas viscosas en la capa límite hidrodinámica. Para un volumen de control diferencial en esta capa límite, las fuerzas de inercia se asocian con un aumento en el flujo de momento del fluido que se mueve a través del volumen de control. La fuerzas de inercia son de la forma $\dfrac{\partial\left[(\rho u)u\right]}{\partial x}$, en cuyo caso una aproximación del orden de magnitud da $\mathrm{F_I} \approx \dfrac{\rho V^2}{L}$. De manera similar, la fuerza cortante neta es de la forma

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial\left[\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]}{\partial y}$$

y se aproxima como $\mathrm{F_S} \approx \dfrac{\mu V}{L^2}$. Por tanto, la razón de la fuerza es

$$\frac{\mathrm{F_I}}{\mathrm{F_S}} \approx \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{\rho VL}{\mu} = \mathrm{Re}$$

Esperamos entonces que las fuerzas de inercia dominen para valores grandes de Re y que las fuerzas viscosas dominen para Re pequeños.

320.

Significado físico de los parámetros adimensionales.

Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo

Número de Reynolds ($\mathrm{Re_L}$)

Definición

$$\frac{VL}{v}$$

Interpretación

Razón de las fuerzas de inercia y viscosas

420.

Flujo interno. Condiciones de flujo.

Cuando se trata de flujos internos, es importante conocer la extensión de la región de entrada, que depende de si el flujo es laminar o turbulento.

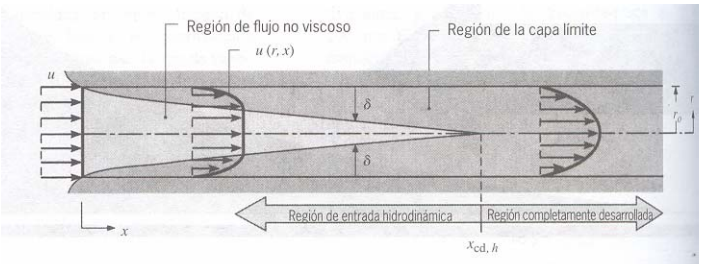


Figura 5 número de Reynolds. Desarrollo de la capa límite hidrodinámica laminar en un tubo circular.

El número de Reynolds para el flujo en un tubo circular se define como:

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

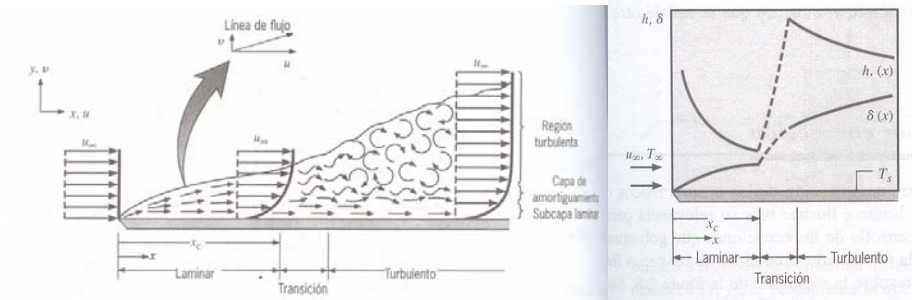
Donde u_m es la velocidad media del fluido sobre la sección trasversal del tubo, D es el diámetro del tubo y μ la viscosidad del fluido.

295.

Introducción a la convección. Flujo laminar y turbulento.

Al calcular el comportamiento de la capa límite, a menudo es razonable suponer que la transición comienza en alguna posición x_c. Esta posición se determina mediante un agrupamiento adimensional de variables llamado número de Reynolds,

Figura 6 número de Reynolds. Transición en la capa límite de régimen uniforme a turbulento.



Donde la longitud característica x es la distancia desde el borde de ataque. El número de Reynolds crítico es el valor de Re_x para el que comienza la transición.

$$\mathrm{Re}_x \equiv \frac{\rho u_\infty x}{\mu}$$

ρ y μ son la densidad y viscosidad del fluido, u_∞ la velocidad de la corriente libre.

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.
Páginas: 150, 358, 151.

150

Los principios de la convección. Flujo viscoso.

La transición de flujo laminar a turbulento en una placa plana tiene lugar cuando

$$\frac{u_\infty x}{v} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > 5x10^5$$

Donde

u_∞ =velocidad de la corriente libre

x = distancia desde el borde de ataque

v = (μ / ρ) = viscosidad cinemática.

Este agrupamiento de términos recibe el nombre de número de Reynolds, y es adimensional si se usa un conjunto de unidades coherentes para todas las propiedades.

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

151.

Los principios de la convección. Flujo viscoso.

En un tubo, se utiliza el número de Reynolds como criterio de flujo laminar y flujo turbulento. Para

$$\mathrm{Re}_d = \frac{u_m d}{\nu} > 2300$$

Se observa que el flujo es turbulento.

Podemos expresarlo también de la forma:

$$\dot{m} = \rho u_m A$$

$\dot{m}$ = flujo másico

u_m = velocidad media

A= área de la selección transversal.

Se define el flujo másico por unidad de área (G) $G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho u_m$

De modo que el número de Reynolds se puede escribir también

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu}$$

358.

Transferencia de calor por condensación y ebullición.

Fenómenos de transferencia de calor por condensación.

Cuando la placa sobre la que tiene lugar la condensación es suficientemente grande, o hay una cantidad suficiente de flujo condensado, puede aparecer una turbulencia en la película de éste. Esta turbulencia origina flujos de calor mayores. Como en los problemas de flujo de convección forzada, el criterio para determinar si el flujo es laminar o turbulento el número de Reynolds, y para el sistema de condensación éste se define como:

$$\mathrm{Re}_f = \frac{D_H \rho V}{\mu_f} = \frac{4A\rho V}{P\mu_f}$$

Donde

D_H = diámetro hidráulico.

A=área de flujo

P= perímetro cortante, o mojado

V= velocidad media de la corriente.

Pero $\dot{m} = \rho A V$

De modo que $\mathrm{Re}_f = \frac{4\dot{m}}{P\mu_f}$

Donde $\dot{m}$ es el flujo másico a través de la sección particular de la película de condensado.

Algunas veces el número de Reynolds se expresa en función del flujo másico por unidad de anchura de la placa Γ, de modo que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\Gamma}{\mu_f}$$

En el cálculo de los números de Reynolds, el flujo másico puede relacionarse con la transferencia total de calor y con el coeficiente de transferencia de calor mediante

$$q = \bar{h}\,A(T_{Sat} - T_P) = \dot{m}\,h_{fg}$$

donde A es el área total de la superficie de transferencia de calor. Así

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\,\bar{h}\,A(T_{sat} - T_p)}{h_{fg} P \mu_f}$$

Pero A = LW y P = W donde L y W son la altura y anchura de la placa, respectivamente, de modo que $\mathrm{Re}_f = \dfrac{4\,\bar{h}\,L(T_{sat} - T_p)}{h_{fg} P \mu_f}$

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.26, 5.3,17.68.

1.26.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Prandtl
Símbolo: Re.
Definición: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V L}{\mu}$
Significado físico: relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas.
Principal área de uno: convección forzada; similitud dinámica.

5.3.

Convección forzada en el interior de conductos.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m D_h}{\nu}$$

u_m es la velocidad media en el conducto, D_h es el diámetro hidráulico, ν es la viscosidad cinemática.

17.68.

Tabla grupos adimensionales para convección forzada interna y flujos friccionantes, usados en el diseño de intercambiadores de calor.

Grupo: número de Reynolds.
Definición: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} = \dfrac{G D_h}{\mu}$
Significado físico: modulo de los flujos, relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

1.9

Flujo laminar y turbulento en el exterior de un cilindro.

Se define el número de Reynolds crítico como:

$$\mathrm{Re}_{cr} = \left(\frac{V_\infty x}{v}\right)_{cr}$$

V_∞ es la velocidad de la corriente no perturbada, v es la viscosidad cinemática, x es la coordenada longitudinal.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 19, 288, 364, 289.

19.

Diferentes tipos de transferencia de calor.

En la transferencia de calor entre un fluido que fluye en el interior de un tubo, de diámetro d_0 y longitud L_0.

La velocidad característica viene dada por w_0, la densidad y viscosidad del fluido son ρ y η respectivamente, la propiedad térmica de conducción λ, el calor específico del fluido es c_p, la diferencia de temperatura característica $\Delta\theta_0$.

Por lo tanto tenemos 7 variables:

$L_0, w_0, \varrho, \eta, \Delta\vartheta_0, \lambda, c_p$

Si realizamos análisis dimensional:

$$K_i = L_0^a \cdot w_0^b \cdot \varrho^c \cdot \eta^d \cdot \Delta\vartheta_0^e \cdot \lambda^f \cdot c_p^g \;, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

La dimensión de cada una de las siete cantidades se puede poner en función de las cuatro dimensiones fundamentales: L (longitud), tiempo (Z) , masa (M) y temperatura (T), los cuales son suficientes para describir los fenómenos termodinámicos y de transferencia de calor.

Por lo tanto podemos expresar *Ki*:

$$\dim K_i = \mathbf{L}^a\left(\mathbf{L}^b \cdot \mathbf{Z}^{-b}\right)\left(\mathbf{M}^c\mathbf{L}^{-3c}\right)\left(\mathbf{M}^d\mathbf{L}^{-d}\mathbf{Z}^{-d}\right)\mathbf{T}^e\left(\mathbf{M}^f\mathbf{L}^f\mathbf{Z}^{-3f}\mathbf{T}^{-f}\right)\left(\mathbf{L}^{2g}\mathbf{Z}^{-2g}\mathbf{T}^{-g}\right)$$

$$\dim K_i = 1$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
\dim \mathbf{L} & = 1: & a & + & b & - & 3c & - & d & & + & f & + & 2g & = 0 \\
\dim \mathbf{Z} & = 1: & & - & b & & & - & d & & - & 3f & - & 2g & = 0 \\
\dim \mathbf{M} & = 1: & & & & & c & + & d & & + & f & & & = 0 \\
\dim \mathbf{T} & = 1: & & & & & & & & e & - & f & - & g & = 0
\end{array}$$

Los valores *a, e y f*, se obtienen de la tabla:

i	a	e	f	K_i
1	1	0	0	$w_0\varrho L_0\eta^{-1}$
2	0	0	-1	$\eta c_p\lambda^{-1}$
3	0	-1	0	$w_0^2 c_p^{-1}\Delta\vartheta_0^{-1}$

Y sustituyendo estos valores se obtiene para K_1.

$$Re := \frac{w_0\varrho L_0}{\eta} = \frac{w_0 L_0}{\nu}$$

Este grupo adimensional se conoce, como número de Reynolds.

288.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase.

Se define el número de Reynolds, como el siguiente grupo adimensional:

$$\mathrm{Re} = \frac{w_\alpha L}{v}$$

L: es la longitud.

w_α : es la velocidad.

v : viscosidad cinemática.

364.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Flujos en lechos.

Se define el número de Reynolds como:

$$\mathrm{Re} = \frac{w_s d_p}{v} = \mathrm{Re}_s$$

w_s : velocidad de caída de una particular en un fluido en reposo.

d_p : diámetro de una sola esfera..

v : viscosidad cinemática.

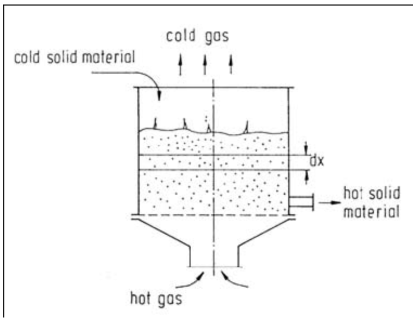


Figura 7 número de Reynolds.

289.

Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase. Influencia del número de Reynolds en el flujo.

Podemos interpretar el número de Reynolds como la relación de las fuerzas de inercia y las de fricción

$$\frac{\varrho w_\alpha^2/L}{\eta w_\alpha/L^2} = \frac{\varrho w_\alpha L}{\eta} = \frac{w_\alpha L}{\nu} = Re$$

Donde:

ρ : densidad.

$$\eta = \nu\varrho$$

v : viscosidad cinemática.

L: longitud característica.

w_α : velocidad característica.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Páginas: 20, 225, 338, 364, 523, 884.

20.

Comportamiento del fluido. Flujo laminar y turbulento.

Número de Reynolds : $\mathrm{Re} = \dfrac{DV\rho}{\mu} = \dfrac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$

El número de Reynolds esta compuesto por la densidad y viscosidad del fluido que circula por la tubería, el radio de la tubería y la velocidad del área media y representa la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

225.

Teorema de Bucckingham`s

Ejemplo: Variables adimensionales para flujo en tuberías.

El conjunto de variables depende de la importancia que tengan en la situación física modelada. Para el flujo de un fluido en una tubería el conjunto de variables es:

L: longitud de la tubería.
D: diámetro de la tubería.
g: aceleración de la gravedad.
<v> : velocidad másica del fluido.
ρ : densidad del fluido.
μ: la viscosidad del fluido.
σ: la tensión superficial del fluido.
c: la velocidad del sonido en el fluido.
Δp: la diferencia de presión a lo largo de la tubería.

Primero elegimos el sistema de unidades en el que nosotros queremos trabajar. Elegimos el sistema MLt. No incluimos la temperatura porque suponemos un sistema isotermo donde las variaciones de temperatura se pueden considerar despreciables.

Así:

	M	L	t
L		1	
D		1	
g		1	-2
<v>		1	-1
ρ	1	-3	
μ	1	-1	-1
σ	1		-2
c		1	-1
Δp	1	-1	-2

Como resultado da la matriz dimensional:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Buscamos el determinante más grande distinto de cero que podemos encontrar en esta matriz y este es un determinante de orden 3x3.
Por tanto el rango de la matriz dimensional es 3, así 9-3= 6. Con lo que nosotros solo podemos encontrar 6 grupos adimensionales independientes.
Así obtenemos:

$$\frac{D\langle V\rangle\rho}{\mu} = \mathrm{Re} = \mathrm{Re}\ \text{número de Rey}nolds = \frac{fuerzas\ \text{de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

338.
Flujo Turbulento.
El número de Reynolds es el resultado adimensional de la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas.
364.
Transferencia de momento en fluidos. Modelo de capa límite. Solución exacta de las ecuaciones del momento en la capa límite por semejanza de variables.
Ejemplo: Semejanza de variables obtenida a partir del análisis dimensional.
Para flujo sobre un palto, las pertinentes variables para predecir la velocidad en la dirección x son:

$$v_x = f(x, y, v_\infty, \rho, \mu)$$

Así $\varphi(v_x, x, y, v_\infty, \rho, \mu) = 0$

Usando el sistema MLt , la matriz dimensional es

	M	L	t
v_x	0	1	-1
x	0	1	0
y	0	1	0
v_∞	0	1	-1
ρ	1	-3	0
μ	-1	-1	-1

El rango de la matriz es 3.
Eligiendo el grupo (x, ρ, μ) y anticipando 6-3=3 grupos adimensionales.
Para π_1

$$\pi_1 = v_x\,(x)^a \rho^b \mu^c \longrightarrow \left(\frac{L}{t}\right)(\mathrm{L})^a \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\right)^b \left(\frac{M}{Lt}\right)^c$$

Aplicando homogeneidad dimensional:

M: b + c = 0 a = 1
L: 1 + a -3b-c = 0 b = 1
t: -1-c = 0 c = -1

Resultando: $\pi_1 = \dfrac{v_x x \rho}{\mu}$

Esta expresión es el número de Reynolds local, esta basado en la velocidad local y en la distancia local desde el frente del plato.

$$\mathrm{Re}_{x,v_x} = \frac{v_x x \rho}{\mu}$$

Para π_3

$$\pi_3 = v_\infty (x)^a \rho^b \mu^c \rightarrow \left(\frac{L}{t}\right)(L)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{Lt}\right)^c$$

Aplicando homogeneidad dimensional:

M: b+c=0 ⟶ a = -1
L : 1+a-3b-c=0 b = 0
T: c=0 c = 0

Resultando $\pi_3 = \dfrac{v_\infty x \rho}{\mu}$

Este el un número de Reynolds que está entre el número de Reynolds definido por π_1 y el número de Reynolds basado en la longitud total del plato .

$$\mathrm{Re}_{x,v_\infty} = \frac{v_\infty x \rho}{\mu}$$

523.

Modelos de transmisión de calor. Transferencia de calor por convección forzada.

Se define el número de Reynolds como $\mathrm{Re} = \dfrac{DV\rho}{\mu}$; donde D es el diámetro de la tubería, V la velocidad media del fluido en su interior, ρ y μ la densidad y viscosidad del fluido.

884.

Modelos de transferencia de masa por convección. La concentración de la capa límite.

Podemos escribir la ecuación diferencial adimensional la cual describe el campo de velocidad, en la transferencia de masa y la transferencia de calor como:

$$\frac{d^2\Omega}{d\eta^2} + K\frac{f(\eta)}{2}\frac{d\Omega}{d\eta} = 0$$

Donde:

Ω: velocidad adimensional.

K: coeficiente adimensional.

η: distancia adimensional que incorpora la distancia horizontal y vertical. Es una variable de semejanza.

$$\eta = y\sqrt{\frac{v_0}{vx}} = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}}$$

Año: 2002.

Libro: Principios de Transferencia de calor.
Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn.
Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
Páginas: 237, 254, 357, 243, 257, 425, 514, 636, 387, 356.

237.

Análisis de la transferencia de calor por convección. Fundamentos de capas límite. Caso de una placa plana

El parámetro adimensional que relaciona cuantitativamente las fuerzas viscosas e inerciales, y cuyo valor determina la transición de flujo laminar a turbulento, es el número de Reynolds $\mathrm{Re}_{x,}$ definido como:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} = \frac{U_\infty x}{v}$$

donde U_∞ = velocidad de fluido libre.

x= distancia con respecto al borde de entrada.

$v = \frac{\rho}{\mu}$ = viscosidad cinemática del fluido.

ρ = densidad del fluido.

254.

Análisis de la transferencia de calor por convección. Principio de similitud.

De acuerdo con este principio, a menudo llamado ley modelo, el comportamiento de dos sistemas será similar si las relaciones de sus dimensiones lineales, fuerzas, velocidades, etc, son las mismas. En condiciones de convección forzada en sistemas geométricamente similares, los campos de velocidad serán similares siempre que la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas sea igual en ambos fluidos. El número de Reynolds es la relación entre estas fuerzas y en consecuencia, se esperan condiciones de flujo similares en condiciones de convección forzada para un valor dado del número de Reynolds. El número de Prandtl es la relación de dos propiedades de transporte moleculares, la viscosidad cinemática, que afecta la distribución de velocidades, y la difusividad térmica que afecta e perfil de temperaturas. Por lo tanto, en sistemas geométricamente similares cuyos números de Prandtl y Reynolds son iguales, la distribución de temperaturas serán semejantes.

Tabla

Grupo: Número de Reynolds (Re_L)

Definición: $\frac{U_\infty L}{v}$

Interpretación: Relación entre las fuerzas inerciales y viscosas.

357.
Convección forzada en el interior de tubos y conductos.
Efecto del número de Reynolds en la transferencia de calor y en la caída de presión en un flujo plenamente establecido.

Para los flujos por conductos largos, la longitud característica en el número de Reynolds, es el diámetro hidráulico, y la velocidad utilizada es la promedio en el área de sección transversal $\overline{U}$.

$$\mathrm{Re}_{D_H} = \frac{\overline{U} D_H \rho}{\mu} = \frac{\overline{U} D_H}{\nu}.$$

ρ y μ son la densidad y viscosidad del fluido.

243.
Análisis de la transferencia de calor por convección Ecuaciones de capa límite adimensionales y parámetros de similitud.

De las ecuaciones adimensionales de capa límite aparecen los parámetros de similitud adimensionales Re_L y Pr. Estos parámetros de similitud permiten aplicar las soluciones de un sistema a otro geométricamente similar, siempre que los parámetros de similitud tengan el mismo valor en ambos.

Ecuaciones de capa límite.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L \, \mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

257.
Análisis de la transferencia de calor por convección. Solución analítica para flujo laminar de capa límite sobre una placa plana. Espesor de la capa delimitadora y fricción superficial.

Definimos número de Reynolds local como: $\mathrm{Re}_x = \rho U_\infty x / \mu$

Si el espesor de la capa delimitadora hidrodinámica se define como la distancia a partir de la superficie en la que la velocidad local u alcanza el 99% del valor de U_∞, el espesor de la capa delimitadora δ resulta.

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

425.
Convección forzada sobre superficies exteriores. Cilindros, esferas, y otras formas sólidas.

Las características del patrón de flujo y la capa límite dependen del número de Reynolds

$\mathrm{Re} = \rho U_\infty D / \mu$, donde para flujos sobre un cilindro o una esfera se basa la velocidad de la corriente libre de llegada U_∞ y el diámetro externo del cuerpo D. Las propiedades se evalúan en condiciones de corriente libre.

636.

Transferencia de calor con cambio de fase. .Ebullición nucleada en un recipiente.

El número de Reynolds es una medida de la turbulencia y del movimiento de mezcla asociado con el flujo. Para correlacionar los datos experimentales en el régimen de ebullición nucleada, se modifica el número de Reynolds convencional de modo que sea significativo en la turbulencia y movimiento de mezcla que se presentan en el proceso de ebullición. Un tipo especial de número de Reynolds, Re_b, que es una medida de la agitación del líquido en transferencia de calor en ebullición nucleada, se obtiene combinando el diámetro de la burbuja promedio D_b , la velocidad de masa de las burbujas por unidad de área, G_b y la viscosidad del , líquido, μ_l para formar el módulo adimensional

$$\mathrm{Re}_b = \frac{D_b G_b}{\mu_l}$$

Este parámetro, a menudo llamado número de Reynolds de burbuja, toma el lugar del número e Reynolds convencional en la ebullición nucleada.

387.

Convección forzada en el interior de tubos y conductos. Correlaciones para convección forzada laminar. Tubos espirales.

Las características del flujo y el coeficiente de transferencia de calor por convección en los tubos espirales se rigen por el número de Reynolds y la relación del diámetro de espiral D/d_c. El producto de estos dos números adimensionales se llama número de Dean

$$Dn \equiv \mathrm{Re}_D (\mathrm{D/dc})^{1/2} .$$

En el intervalo 2000>Dn>13.5 . Ito da la relación $\mathrm{Re}_{D,transición} = 2\left(\frac{D}{d_c}\right)^{0.32} x10^4$

327.

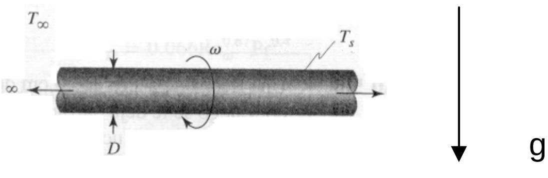
Convección natural.

Cilindros, discos y esferas rotatorios.

Definimos el número de Reynolds de velocidad periférica como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\pi D^2 w}{v}$$

Figura 8 número de Reynolds. Convección en la superficie de un cilindro que gira con velocidad w.



Año: 2002.

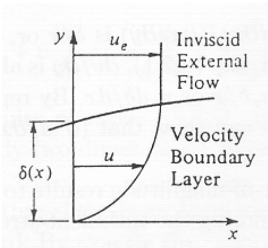
Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Página: 40, 161, 150, 158, 160, 155.

40.

Ecuaciones de la capa límite. Flujo incompresible bidimensional. Flujo laminar.

El número de Reynolds puede escribirse como $\left(u_e x/v\right)^{-1/2}$ pero también de la forma $\rho u_e^2/\left(\mu u_e/\delta\right)$ la relación entre la presión dinámica característica y la tensión viscosa característica.
Donde los términos se corresponden con la siguiente figura:

Figura 9 número de Reynolds. Perfil de velocidad en una superficie sólida.



150.

Capa límite turbulenta. El interior de la capa. El perfil logarítmico.

El número de Reynolds viene dado por:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\tau y}{v}$$

Definimos una velocidad de escala $u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$, llamada velocidad de fricción, y es la coordenada en el eje de ordenadas, τ_w la tensión de cortadura de la superficie, ρ densidad del fluido, v la viscosidad cinemática.

155.

Capa límite turbulenta. El interior de la capa.
El interior de la capa en una superficie rugosa.

Se define la variable adimensional, número rugoso de Reynolds como:

$$k^+ = \frac{u_\tau k}{v}$$

$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$ velocidad de escala llamada velocidad de fricción.

k es la altura rugosa, ρ densidad del fluido y v la viscosidad cinemática.

158.
Capa límite turbulenta. El exterior de la capa.
El perfil de velocidad.

Se define el número de Reynolds como: $R_\theta = \dfrac{u_e \theta}{v}$, donde u_e es la velocidad de la corriente libre, v la viscosidad cinemática, θ es un área, la obtenemos por ejemplo del método integral para el campo de velocidad, integrando las expresión $\theta^2 = \dfrac{vA\int_0^x u_e^{B-1} dx}{u_e^B} + \theta_i^2 \dfrac{u_{e_i}^B}{u_e^B}$, a su vez ésta se desprende de la ecuación de momento de transferencia en flujos incompresibles laminares con gradiente de presión, pero sin transferencia de masa, basada en la observación experimental de datos y soluciones numéricas exactas para la capa límite laminar. El subíndice i, hace referencia a las condiciones iniciales, A y B son constantes (Thwaites elige A=0.45, B=6, página 78), u_e es la velocidad de la corriente libre.

160.

Hace referencia al número de Reynolds $R_\theta = \dfrac{u_e \theta}{v}$, explicando casos para distintos valores.

161.
Capa límite turbulenta. Capa límite laminar con gradiente de presión cero.
Se definen los siguientes números de Reynolds.

$R_\theta = \dfrac{u_e \theta}{v}$ (ver definición en página 158.)

$R_x = \dfrac{u_e x}{v}$

donde x es la coordenada longitudinal desde el borde de ataque de una placa plana, u_e es la velocidad de la corriente libre y v la viscosidad cinemática.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 343.
343.
Fundamentos de la convección. Flujos laminar y turbulento.

Osborn Reynolds descubrió que el régimen de flujo depende principalmente de la razón de las fuerzas de inercia con respecto a las fuerzas viscosas en el fluido. Esta razón se conoce como número de Reynolds, el cual es una cantidad adimensional, y para flujo externo, se expresa como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{VL_c}{\upsilon} = \frac{\rho V L_c}{\mu}$$

Donde V es la velocidad de corriente superior, Lc es la longitud característica de la configuración geométrica y υ es la viscosidad cinemática del fluido.

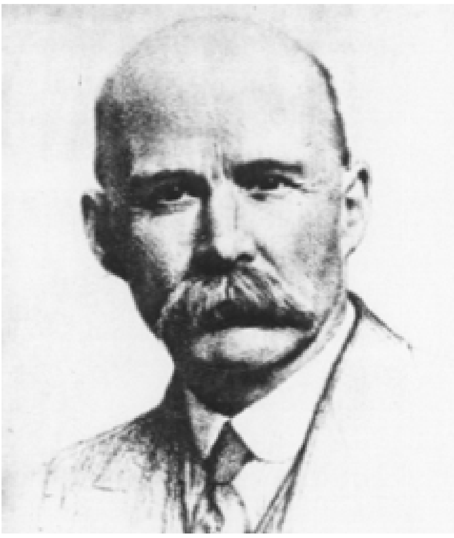
El número de Reynolds se puede concebir como la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas que actúan sobre un elemento de volumen de un fluido.

3.17. Número De Stanton.

Sir Thomas Edgard Stanton. Ingeniero británico, nació en Inglaterra en 1865 t falleció en 1931, un año después de retirarse. Ingresó en la Universidad de Owens y siguió el plan de estudios de ingeniería en el laboratorio de Withworth, dirigido por Osborne Reynolds.

Desde 1892 hasta 1896 fue tutor residente en matemáticas e ingeniería en el Hulme Hall of Residence. En 1899, se convirtió en profesor de Ingeniería en la Universidad de Bristol y también fue nombrado, Superintendente del departamento de ingeniería del Laboratorio Nacional de Física en Bristol.

El principal campo de estudio de Stanton fue el estudio del flujo de fluidos y fricción y problemas sobre la transmisión de calor, También realizó trabajos en estructuras, y diseño aeronáutico.



Año1967.

Libro: Transmisión de calor.

Autores: Gröber/Erk/Grigull.

Editorial: Selecciones Científicas, Madrid.

Página: 206-208,419.

206-208.

Leyes de semejanza de la transmisión de calor. Significado físico de los parámetros adimensionales.

El número de Stanton se define como:

$$\frac{N_{Nu}}{N_{\Pr}N_{\mathrm{Re}}}=\frac{h}{u\rho c_p}=N_{St}$$

Consideramos una longitud L de un tubo de decímetro d por el que circula un fluido con velocidad media U. Supongamos que el fluido cede, o recibe calor de la pared. Si la temperatura de la pared del tubo es T_p y la temperatura media del volumen de fluido que contiene la longitud L del tubo es T_m, la cantidad de calor que sale de la pared en unidad de tiempo es:

$$\dot{Q}_1=h\pi dL\left(T_p-T_m\right)$$

y si además, las temperaturas medias de las secciones extremas del tubo son T_1 y T_2, la velocidad con la que el fluido transporta el calor vale

$$\dot{Q}_2=\frac{\pi d^2}{4}\rho c_p\left(T_2-T_1\right)$$

Y si, además, las temperaturas medias de las secciones extremas del tubo son T_1 y T_2.

En régimen estacionario deben ser iguales $\dot{Q}_2$ y $\dot{Q}_1$, luego

$$N_{St}=\frac{N_{Nu}}{N_{\Pr}N_{\mathrm{Re}}}=\frac{T_2-T_1}{T_p-T_m}\frac{d}{4L}$$

Se puede interpretar el número de Stanton como el que resulta de comparar el cambio de temperatura del fluido con el salto de temperatura entre la pared y el fluido, o como la relación entre efecto del proceso de transmisión de calor y su causa, interpretación propuesta por Stender. También se puede considerar, como un coeficiente adimensional de transmisión de calor.

Se puede observar que la literatura francesa emplea notación y terminología bastantes diferentes, que a continuación comparamos con la nuestra:

Notación actual	Notación francesa.
$N_{St}=\frac{h}{U\rho c_p}$ Número de Stanton	$\mathfrak{M}=\frac{\mathrm{h}}{U\rho c_p}$ Número de Margoulis

419.

Transporte de masa.

El número de Stanton de la transmisión de calor es:

$$N_{St}=\frac{N_{Nu}}{N_{\Pr}N_{\mathrm{Re}}}=\frac{h}{u\rho c_p}$$

Se puede también modificar para aplicarlo al transporte de masa del siguiente modo:

$$N'_{St} = \frac{N'_{Nu}}{N_{\mathrm{Pr}} N_{\mathrm{Re}}} = \frac{\beta}{u}$$

Se puede interpretar el número de Stanton para el transporte de masa, de la misma forma que se considera para transmisión de calor. Se puede considerar β como velocidad de un componente de densidad $\left(\rho_{\mathrm{a,p}} - \rho_{\mathrm{a},\infty}\right)$, cuyo flujo de masa es g. Esta velocidad, normal a la pared, se compara con la velocidad de la corriente u paralela a la pared por medio del número de Stanton de transporte de masa.

Año: 1973.

Libro: Transmisión del calor.
Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel.
Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
Página: 247

247.

Transmisión de calor en una placa plana con flujo forzado longitudinal. Transmisión de calor en una capa límite turbulenta.

El grupo adimensional $\frac{\alpha}{\rho c_p w_0}$ se llama número de Stanton y se representa con el número St. Se puede expresar en función de los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl de la forma siguiente:

$$St = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0}$$

α es el coeficiente de transmisión de calor superficial, ρ es la densidad del fluido, c_p calor específico, w_0 es la velocidad de referencia.

Año: 1981.

Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería.
Autores: James R.Welty.
Editorial: Limusa, Mexico D.F
Página: 216, 217.

219-217.

Transferencia de calor por convección. Análisis dimensional en la transferencia convectiva de calor.

Estudiamos el caso de un fluido que circula por el interior de un cilindro, el fluido que fluye y la pared del cilindro están a diferentes temperaturas, la velocidad promedio es u_{prom}, y las propiedades de interés del fluido son la densidad, la viscosidad, el calor específico y conductividad térmica.

Vamos a considerar fundamentales cuatro dimensiones: la masa M, la longitud L, el tiempo t y la temperatura T. Todas las expresiones están expresadas en función de las anteriores. Las unidades de c_p, k y h incluyen un término de calor: para esta investigación se ha representado el calor por energía con dimensiones de ML^2/t^2

Variable	Símbolo	Dimensiones.
Velocidad	u	L/t
Diámetro del tubo	D	L
Densidad del fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad el fluido	μ	M/Lt
Calor específico del fluido	c_p	$L^2/t^2 T$
Conductividad térmica del fluido	k	$ML/t^3 T$
Coeficiente de transferencia de calor	h	$M/t^3 T$

Cada parámetro adimensional se forma combinando un grupo núcleo de r variables con una de las variables restantes que no estén en el núcleo. El núcleo puede incluir cualquiera de las 4 variables, si escogemos como núcleo d, ρ, μ y k se obtienen los parámetros adimensionales por el teorema de pi de Buckingham, en este caso el número de Reynolds, Prandtl y el de Nusselt.
Si escogemos otro núcleo por ejemplo D, ρ, μ, c_p, los grupos pi formados hubieran sido Re, Pr y una forma dimensional del coeficiente de transferencia de calor designado como St, el número de Stanton. Se puede formar el número de Stanton dividiendo Nu entre el producto RePr.

$$St \equiv \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{h}{\rho u c_p}$$

Se puede decir por lo tanto: *St = f (Re, Pr).*

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 313.
313.
Capa límite laminar y turbulenta. Analogía de Reynolds.

Definimos el número de Stanton como:

Número de Stanton $$St \equiv \frac{h}{\rho C_p u_\infty} \equiv \frac{Nu_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}}$$

El significado físico del número de Stanton es:

$$St \equiv \frac{h\Delta T}{\rho C_p u_\infty \Delta T} = \frac{\text{verdadera variación continua de calor para el fluido}}{\text{capacidad de variación continua de calor del flujo del fluido}}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ es la densidad del fluido, C_p el calor específico, u_∞ la velocidad de la corriente libre, Nu_x número de Nusselt local, Re_x número de Reynolds local, Pr número de Prandtl.

Año: 1982.

Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica.
Autores: J.F Sacadura.
Editorial: Teckique et Documentation, París.
Páginas: 216.

216.

Transferencia de calor por convección. Números adimensionales.

Nombre:

Número de Stanton o Margoulis.

$$St \text{ o Ma} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

Formación:

$$\frac{\Phi}{\rho c_p U L^2 \Delta T}$$

Interpretación:

Relación entre el flujo de calor y el flujo de calor referido a convección

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores: Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 159, 436, 474.

159.

Flujos paralelos cercanos. Capa límite de momento y térmica.

Se define el número de Stanton local, como:

$$St_x = \frac{Nu_x}{\mathrm{Re}_x\, P} = \frac{h}{\rho c U_\infty}$$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ la densidad del fluido, c el calor específico del fluido, U_∞ velocidad de la corriente libre.

Observamos que no depende de x.

Estamos aplicando la analogía de Reynolds , bajo ciertas condiciones hay una proporcionalidad entre la transferencia de calor y la fricción cerca de la superficie en convección forzada.

436.

Predicción de la transferencia de calor.

11.1. Analogía entre momento y calor.

Se define el número de Stanton como:

$$St = \frac{\bar{h}}{\rho c_p U_m}$$

$\bar{h}$: coeficiente de transmisión de calor medio.

ρ : densidad del fluido.

c_p : calor específico.

U_m : velocidad tras la capa de turbulencia principal, ver figura.

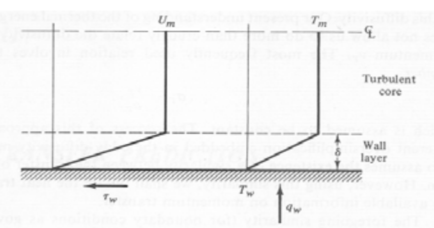


Figura 1 número de Stanton. Flujo turbulento en una tubería; analogía de Reynolds.

474.
Capítulo 12. Análisis dimensional.
12.2 Convección con una sola longitud.

Convección forzada. Ignorando el método de adimensionalización que gobierna las ecuaciones, procedemos directamente con el teorema de π. Considerando por ejemplo un estado bidimensional con una distribución de temperatura

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} = f\left(x, y, V, \rho, \mu, c_p, k\right)$$

El coeficiente de transmisión de calor local

$$h_x = f\left(x, V, \rho, \mu, c_p, k\right)$$

El valor medio sobre una distancia D

$$h = f\left(D, V, \rho, \mu, c_p, k\right)$$

En función de las cuatro unidades fundamentales

$$\left[\frac{M}{T^3\theta}\right] \equiv f\left[L, \frac{L}{T}, \frac{M}{L^3}, \frac{M}{LT}, \frac{L^2}{T^2\theta}, \frac{ML}{T^3\theta}\right]$$

Comenzamos el proceso de eliminación con la masa.

$$\frac{h}{\rho} = f_1\left(D, V, \nu, c_p, \frac{k}{\rho}\right)$$

Expresado en las unidades fundamentales

$$\left[\frac{L^3}{T^3\theta}\right] \equiv f_1\left[L, \frac{L}{T}, \frac{L^2}{T}, \frac{L^2}{T^2\theta}, \frac{L^4}{T^3\theta}\right]$$

Eliminando θ combinándola con c_p

$$\frac{h}{\rho c_p} = f_2\left(D, V, \nu, a\right) \qquad a = \frac{k}{\rho c_p}$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\left[\frac{L}{T}\right] \equiv f_2\left[L, \frac{L}{T}, \frac{L^2}{T}, \frac{L^2}{T}\right]$$

Eliminando el tiempo en combinación de V.

$$\frac{h}{\rho c_p V} = f_3\left(D, \frac{V}{\nu}, \frac{V}{a}\right)$$

Es equivalente a:

$$[0] \equiv f_3\left[L, \frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]$$

Finalmente eliminando L tenemos:

$$\frac{h}{\rho c_p V} = f_4\left(\frac{VD}{\nu}, \frac{VD}{a}\right)$$

$$St = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

Donde

$St = \dfrac{h}{\rho c_p V}$, es el número de Stanton, y $\mathrm{P}e = \dfrac{VD}{a}$ el número de Péclet.

Así que:

$$St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

Año: 1985.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond.
Editorial: Interamericana, México D.F.
Páginas: 496, 505.

496.

Convección forzada. Transferencia de calor para flujo turbulento en tubos circulares.

La siguiente cantidad sin dimensiones se define como Número de Stanton:
Nu/RePr

505.

Tabla. Interpretación física de algunos grupos sin dimensiones.

Nombre del grupo adimensional: Stanton (St)

Grupo: $St = \frac{h}{\rho C_p u_\infty}$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ la densidad del fluido, C_p es el calor específico y u_∞ velocidad de la corriente libre.

Interpretación física: $\frac{\text{Transferencia de calor en la pared.}}{\text{Transferencia de calor por convección.}}$.

Año: 1988.

Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor.
Autores: Frank M. White.
Editorial: Addison-Wesley.
Páginas: 274, 298, 325 (correlaciones).

274.

Principios de convección Análisis dimensional

El número de Nusselt no es la única forma de un coeficiente de transferencia de calor adimensional. Frecuentemente se usa un parámetro alternativo llamado número de Stanton, St:

$$St = \frac{h}{\rho U c_p}$$

Se puede expresar

$$St \equiv Nu_L / \left(\mathrm{Re}_L\,\mathrm{Pr}\right)$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ es la densidad del fluido, U la velocidad característica, c_p el calor específico, Nu el número de Nusselt, Pr el número de Prandtl, Re el número de Reynolds, L hace referencia a la longitud de escala.

El coeficiente de fricción se relaciona con el número de Stanton, por lo menos para ciertas geometrías, notablemente placas lisas y tuberías. Se puede decir por lo tanto que:

$$St = f\left(C_f, \mathrm{Pr}, \text{forma genérica}\right)$$

298.

Convección forzada. Solución integral para flujo laminar en flujo sobre una placa plana.

El número de Stanton local se define como:

$$St_x \equiv \frac{Nu_x}{\mathrm{Re}_x \, \mathrm{Pr}}$$

Nu_x es el número de Nusselt local, Re_x es el número de Reynolds local, Pr es el número de Prandtl.

Año: 1990.

Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes .Mecánica de fluidos y procesos de transferencia.
Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman.
Editorial: Cambridge University Press.
Página: 179, 258, 389f, 404f, 427f.

179.

Flujo turbulento Viscosidad turbulenta y modelos de longitud de mezcla para flujo turbulento.

Se define el número de Stanton como:

$$St = \frac{q_T}{\rho \bar{u}_m c_p \Delta T}$$

q_T es el flujo de calor , ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido T_m y la temperatura de la pared T_0, $\bar{u}_m$ es la velocidad media del fluido, c_p el calor específico.

258-259.

La ecuación de la energía. Coeficientes de transferencia de calor. El número de Nusselt y de Stanton.

El número de Stanton $St = \dfrac{h}{\rho u_m c_p \Delta T}$

Donde h es el coeficiente de transmisión de calor, u_m es la velocidad media, ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido T_m y la temperatura de la pared T_0, c_p el calor específico. Estamos estudiando el fluido que circula en el interior de una tubería.

El número de Stanton nos da una medida de la verdadera relación del transporte de calor por convección desde la superficie del fluido con una teórica proporción de transporte de calor por convección el cual se puede conseguir por un fluido con velocidad másica ρu_m, experimentando un aumento de temperatura igual a la diferencia de temperatura ΔT .

Para convección forzada $St = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, Ec\right)$.

389

Análisis dimensional de los procesos de transferencia. Declaración de los principios básicos.

Consideramos la transferencia de calor de un fluido que fluye en el interior de una tubería circular. El valor del flujo de calor q depende de la diferencia de temperatura ΔT entre la pared de la tubería y el fluido, del diámetro D , de la velocidad media u_m y la temperatura media del fluido T_m y de las propiedades físicas k, ρ, c_p, μ.

Si despreciamos la diferencia de temperatura, en estas circunstancias

$St = f(\text{Re}, \text{Pr})$

$St = Nu / (\text{Re}, \text{Pr})$.

404.

Transferencia de calor y masa en flujo laminar. La térmica y concentración capa límite.

Se define el número de Stanton como:

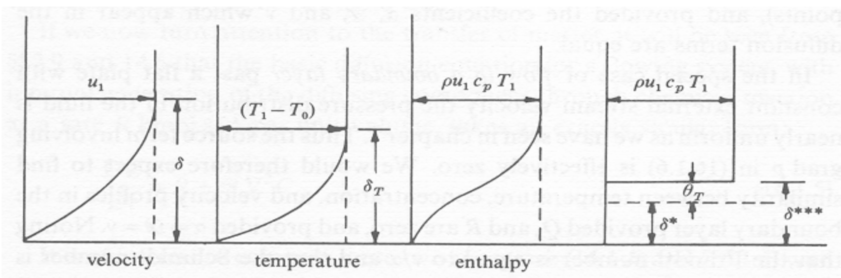
$$St = \frac{h}{\rho u_1 c_p} = \frac{d\theta_T}{dx}$$

$$h = \frac{q_0}{(T_0 - T_1)}$$

Las variables se corresponden a la siguiente figura.

U es la velocidad, ρ la densidad del fluido, h coeficiente de transmisión de calor, θ_T espesor térmico, c_p el calor específico.

Figura 2 número de Stanton. Perfiles de velocidad, temperatura y entalpía en la capa límite laminar.



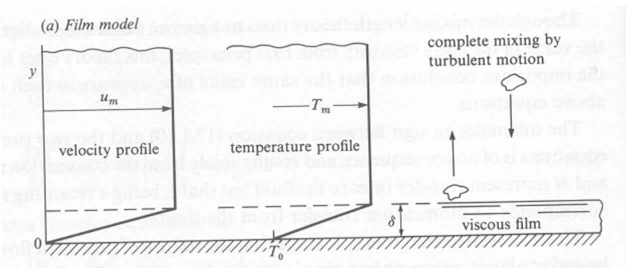
427

Transferencia de calor y masa en flujos turbulentos. El modelo de película.

En el modelo de película, se postula la existencia de una región laminar de espesor δ adyacente a la pared.

Consideramos δ <<D (diámetro de la tubería), así los valores de velocidad, temperatura y concentración son muy próximos a sus valores medios.

Figura 3 número de Stanton. Modelo de película.



Tenemos en la parte laminar que:

La transferencia de masa por unidad de área q_0 y N_0

$$q_0 = k\frac{(T_0 - T_m)}{\delta}$$

$N_0 = \mathscr{D}\left(\frac{C_0 - C_m}{\delta}\right)$; C es la concentración, $\mathscr{D}$ la difusividad.

$k_L = \frac{\mathscr{D}}{\delta} \qquad h = \frac{k}{\delta}$. Eliminando δ y multiplicando por D.

$$h = \frac{q_0}{(T_0 - T_m)} \qquad \tau_0 = \mu \frac{u_m}{\delta} \dashrightarrow \frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{hD}{k}$$

En el modelo de capa podemos decir que :

$$\frac{\tau_0 D}{\mu u_m} = \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_m^2}\frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1}{2}c_f \operatorname{Re}$$

StPr = St'Sc = c_f/2

Año: 1992.

Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor.
Autores: Thomas, L.c.
Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
Páginas: 376, 386, 541.

376.

Transferencia de calor por convección Abordamiento del análisis de transferencia de calor por convección.

Coeficiente de fricción y coeficiente de transferencia de calor.

Se define el número adimensional de Stanton como:

$St = \frac{Nu_L}{\operatorname{Re}_L \operatorname{Pr}} = \frac{h_x}{\rho c_p U_F}$ y el valor del número de Stanton medio:

$$\overline{St} = \frac{\overline{Nu_L}}{\operatorname{Re}_L \operatorname{Pr}} = \frac{\bar{h}}{\rho c_p U_F}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{A_S}\int_{A_S} h_x dA_s$$

ρ y c_p son la densidad y el calor específico del fluido, h el coeficiente de transmisión de calor, U_F, la velocidad de referencia, L es la longitud de referencia.

El número de Stanton combina los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl, e indica la relación entre la magnitud del verdadero flujo de convección de calor y la capacidad de entalpía del flujo del fluido.

386.

Transferencia de calor por convección Características del flujo interno.

Entrada térmica y regiones de flujo completamente desarrollado.

Se definen los siguientes números de Stanton, dependiendo de si utilizamos $h, h_x, \bar{h}$, es decir el coeficiente de transmisión de calor, el coeficiente de transmisión de calor dependiente de la coordenada x y $\bar{h} = \frac{1}{x}\int_0^x h_x dx$.

$$St = \frac{h}{\rho c_p U_b} \qquad (St)_x = \frac{h_x}{\rho c_p U_b} \qquad \overline{St} = \frac{\overline{h}}{\rho c_p U_b}$$

ρ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, U_b es la velocidad de volumen

541.
Tabla. Parámetros adimensionales para transferencia de calor por convección: convección forzada.
Grupo adimensional: Número de Stanton
Símbolo: St
Definición: $\frac{Nu_L}{\mathrm{Re}_L \, \mathrm{Pr}}$

Interpretación $\frac{\text{Flujo de calor por convección real}}{\text{Capacidad de flujo de energía entálpica}}$

Año: 1993.
Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición.
Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 116.
116.
Transferencia de calor: flujo laminar en el interior de tuberías.
Se define el número de Stanton como:

$$St = \frac{h}{V\rho c} \text{ o } \frac{h}{Gc}.$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, V es la velocidad del fluido, ρ es la densidad del fluido, c el calor específico y G el gasto másico.
El número de Stanton es una forma de expresar el coeficiente de transmisión de calor de forma adimensional, otra forma de expresarlo de forma adimensional es el número de Nusselt.

Año: 1993.
Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico.
Autores: M. Necati Özisik.
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 236, 268.
236.
Convección- conceptos y relaciones básicas. Flujo sobre un cuerpo.
Se define el número de Stanton local como:

$$St_x = \frac{h(x)}{\rho c_p u_\infty}$$

Que se puede expresar también en la forma:

$$St_x = \frac{h(x)x/k}{(v/\alpha)(u_\infty x/v)} = \frac{Nu_x}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_x}$$

h(x) es el coeficiente de transmisión de calor, ρ es la densidad del fluido, c_p es el calor específico, u_∞ es la velocidad de la corriente libre, v es la viscosidad cinemática, Un es el número de Nusselt, Pr es el número de Prandtl, Re es el número de Reynolds, x es la coordenada paralela a la placa con origen desde el borde de ataque.

268.

Convección- conceptos y relaciones básicas. Parámetros adimensionales.

Se define el número de Stanton como:

$$St = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{h\Delta T}{\rho c_p u_m \Delta T}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ es la densidad del fluido, c_p es el calor específico, u_m es la velocidad media, ΔT es la diferencia de temperatura entre el fluido y la pared. El numerador representa el flujo de calor del fluido y el denominador representa la capacidad de transferencia de calor del flujo del fluido.

Año: 1995.

Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección.
Autores: Adrian Bejan.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 316, 379, 485.

316.

Flujo turbulento en la capa límite.

Transferencia de calor en el flujo en la capa límite

Definimos el siguiente grupo adimensional como número de Stanton:

$$St_x = \frac{h}{\rho c_p U_\infty} = \frac{Nu_x}{Pe_x} = \frac{Nu_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ la densidad del fluido, U_∞ la velocidad de la corriente libre, Nu_x número de Nusselt local, Pe_x número de Peclet local, Re_x número de Reynolds local, Pr número de Prandtl.

379.

Flujo turbulento libre. Temperatura de distribución

Suponemos que el número de Prandtl turbulento es constante e igual a 1.

Nosotros podemos hacer la interesante conclusión que en la mitad del plano el coeficiente de transferencia de calor es independiente de x, o que en la mitad del plano el número de Stanton es constante e igual a $\left(4\pi^{1/2}\sigma\right)^{-1} \cong 0.01$.

485.

Otras configuraciones de convección externa forzada.

El número de Stanton local se puede escribir:

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p U_\infty} = \frac{h_x \alpha}{k U_\infty} = \frac{q''_0 \alpha}{(T_0 - T_\infty) k U_\infty}$$

h_x es el coeficiente de transmisión local, ρ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, U_∞ velocidad de la corriente libre, α coeficiente de difusividad térmica, k conductividad térmica, q''_0 flujo de calor en la superficie, $T_0 - T_\infty$ diferencia de temperatura entre la pared del sólido y la corriente libre.

El número de Stanton local de transferencia de masa es:

$$St_m = \frac{h_m}{U_\infty}$$

h_m es el coeficiente de transferencia de masa.

Año: 1995.

Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 288, 294, 827.

286.

Fundamentos de la convección y correlaciones. Análisis dimensional.

Flujo a través de un cilindro.

Las variables del campo fluido son la velocidad V, el diámetro del dilindro D , la densidad ρ, la viscosidad dinámica μ, la diferencia de temperatura T_S-T_E entre el sólido y el exterior, el calor específico C_p del fluido y la conductividad térmica k. Así:

$$\overline{q_s} = f(V, D, \rho, \mu, \Delta T, c_p, k)$$

Las unidades de las variables pueden ser escritas de la siguiente forma:

$\overline{q_s}$:w/m^2
V:m/s
D:m
ρ :Kg/m^3
μ :Kg/ms
ΔT :K
c_p : Ws/KgK
k:W/mK.

Hay 5 dimensiones primarias y 8 variables, así que según el teorema de pi de Buckingham hay tres grupos adimensionales.

El método mas usual para determinar estos grupos adimensionales , es mediante el método de los índices.

$$\Pi = \overline{q_s}^{a} V^b D^c \rho^d \mu^e \Delta T^f c_p^{\,g} k^h$$

Los sustituimos por sus dimensiones.

Podemos dar valores a los índices para obtener un grupo adimensional, que correspondería a Π_2 y sería el número de Nusselt, o bien dar otros valores a los índices y obtener el número de Stanton. Así:

$$a = 1,\ f \neq 0, c = h = 0.$$

$$d + e - g = 0$$

$$-2 + b - 3d - e = 0$$

$$-b - e + g = 0$$

$$f - g = 0$$

$$1 + g = 0$$

Obtenemos: g=-1,f=-1,b=-1,d=-1,e=0, lo que nos da el siguiente grupo adimensional

$\Pi'_2 = \dfrac{\overline{q_s}}{\Delta T \rho c_p V}$ que es el número de Stanton promedio. Si sustituimos $\overline{h_c} = \dfrac{\overline{q_s}}{\Delta T}$

$$\overline{St} = \frac{\overline{h_c}}{\rho c_p V} = \frac{\overline{h_c}}{c_p G}.$$

El número de Stanton es un alternativo coeficiente de calor adimensional y se relaciona con el número de Nusselt de la siguiente forma.

$$St = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

294.

Tabla grupos adimensionales.

Grupo	Definición	Uso
Número de Stanton	$St = \dfrac{h_c}{\rho c_p V}$	Fuerzas de flujos

827.

Intercambiadores de calor. Elementos en el diseño de los intercambiadores de calor

El número de Stanton se corresponde con el siguiente grupo adimensional:

$$St = \frac{h_c}{\rho c_p V} = \frac{h_c}{c_p(\dot{m} Ac)}.$$

h_c es el coeficiente de transferencia de calor en la superficie del intercambiador, c_p el calor específico, V velocidad, $\dot{m}$ flujo másico, Ac área del intercambiador.

Año: 1996.
Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 320, 328.

320.
Convección.
Tabla: Grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo
Número de Stanton (St)
Definición

$$\frac{h}{\rho V c_p} = \frac{Nu_L}{\mathrm{Re}_L \, \mathrm{Pr}}$$

Interpretación
Número de Nusselt modificado.
Grupo
Número de Stanton para transferencia de masa (St_m)
Definición

$$\frac{h_m}{V} = \frac{Sh_L}{\mathrm{Re}_L \, Sc}$$

Interpretación
Razón de las fuerzas de inercia a las de tensión superficial

328.
Convección. **Analogía de Reynolds.**

Es posible obtener una segunda analogía de capa límite al observar que para $\frac{dp^*}{dx^*} = 0$ y *Pr=Sc=1*,las ecuaciones de conservación son de la misma forma. Además, como $u_\infty = V$ si $\frac{dp^*}{dx^*} = 0$, las condiciones de frontera de las ecuaciones tienen igual forma por consiguiente, las soluciones para u^*, T^*, C_A^* deben ser equivalentes. Es decir de las ecuaciones

$$u^* = f_1\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

$$T^* = f_3\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

$$C_A^* = f_6\left(x^*, y^*, \mathrm{Re}_L, Sc, \frac{dp^*}{dx^*}\right)$$

$f_1=f_3=f_6$

Además, el coeficiente de fricción, el número de Nusselt y el número de Sheerwood están relacionados por el requisito de $f_2=f_4=f_8$ de las ecuaciones:

$$C_f = \frac{2}{\mathrm{Re}_L} f_2(x^*, \mathrm{Re}_L)$$

$$Nu = f_4(x^*, \mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr})$$

$$Sh = f_7(x^*, \mathrm{Re}_L, Sc)$$

Concluimos que el coeficiente de fricción $C_f = \frac{\mathrm{Re}_L}{2} = Nu = Sh$ (1)

Al reemplazar Nu y Sh por el número de St y por St_m respectivamente.

$$St \equiv \frac{h}{\rho V c_p} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

h es el coeficiente de transmisión de calor, ρ la densidad del fluido, V la velocidad, c_p el calor específico, Nu es el número de Nusselt, Pr el número de Prandtl y Re el de Reynolds.

$$St_m \equiv \frac{h_m}{V} = \frac{Sh}{\mathrm{Re}\,Sc}$$

h_m es el coeficiente de transferencia de masa.
La ecuación (1) se puede expresar $(C_f)/2=St=St_m$

Año: 1997.

Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición.
Autores: Holman, J.P
Editorial: McGraw-Hill.

Página: 167

167.

Principios de la convección.

Definimos el número de Stanton para el caso de una placa plana como:

$$St_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

α

h_x es el coeficiente de transmisión de calor local, ρ la densidad del fluido, c_p el calor específico, u_∞ la velocidad de la corriente libre.

Año: 1998.

Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.27, 17.68.

1.27.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Stanton
Símbolo: St.
Definición: $St = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{h}{\rho c_p V}$

Significado físico: coeficiente adimensional de transferencia de calor, relación entre la transferencia de calor en la superficie y la transportada por el fluido por su capacidad calorífica..

17.68.

Tabla grupos adimensionales para convección forzada interna y flujos friccionantes, usados en el diseño de intercambiadores de calor.

Grupo: número de Stanton.

Definición: $St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$

Significado físico: relación entre el calor transferido por convección y la cantidad virtualmente transferida por unidad de área. No depende de dimensión característica geométrica.

Año: 1998.

Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada.
Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan.
Editorial: Springer-Verlag.
Páginas: 21, 22, 326, 327, 328.

21-22.

Diferentes tipos de transferencia de calor.

En la literatura americana el número de Nusselt se suele reemplazar, por el número de Stanton:

$$St := \frac{\alpha}{w_0 \varrho c_p} = \frac{Nu}{Re\,Pr}$$

El número de Stanton es útil, para describir la transferencia de calor en canales,

$$St_{\mathrm{m}} := \alpha_{\mathrm{m}} / w_0 \varrho c_p$$

$$w_0 = \dot{M} / A_{\mathrm{q}} \varrho$$

w_0, es la velocidad principal del flujo, ρ es la densidad del fluido, c_p el calor específico, α es el coeficiente de difusión térmica en un canal con sección transversal constante, de área A_q

El calor transferido entre la pared del canal y el fluido es:

$$\dot{Q} = \alpha_{\mathrm{m}} A \Delta\vartheta = \dot{M} c_p (\vartheta_{\mathrm{Fa}} - \vartheta_{\mathrm{Fe}})$$

El número de Stanton es :

$$St_{\mathrm{m}} = \frac{A_{\mathrm{q}}}{A} \frac{\vartheta_{\mathrm{Fa}} - \vartheta_{\mathrm{Fe}}}{\Delta\vartheta}$$

$\vartheta_{\mathrm{Fa}} - \vartheta_{\mathrm{Fe}}$: diferencia de temperatura entre entrada y salida del fluido.

$$St_{\mathrm{m}} = \frac{A_{\mathrm{q}}}{A} \ln \frac{(\vartheta_{\mathrm{W}} - \vartheta_{\mathrm{F}})_{\mathrm{e}}}{(\vartheta_{\mathrm{W}} - \vartheta_{\mathrm{F}})_{\mathrm{a}}}$$

A: área del canal.
Subíndice *w: pared*
Subíndice *F : fluido.*

326-327-328.
Convección de calor y transferencia de masa. Flujo para una sola fase.
Flujo externo forzado. **Flujo turbulento.**
El número de Stanton se puede expresar:

$$St = \frac{Nu_x}{Re_x Pr}$$

Nu_x es el número de Nusselt local, Re_x es el número de Reynolds local y Pr es el número de Prandtl.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
Páginas: 689, 895.

689.
Modelos de transferencia de calor.
Coeficientes de transferencia de calor.
Definimos el número de Stanton (St_H) para transferencia de calor como:

$$St_H \equiv \frac{h}{C_p \rho \langle v \rangle} = \frac{\left(\frac{hD}{k}\right)}{\left(\frac{D\langle V \rangle \rho}{\mu}\right)\left(\frac{\mu \rho C_p}{\rho K}\right)} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}$$

h es el coeficiente de transferencia de calor, C_p el calor específico, ρ la densidad del fluido, $\langle v \rangle$ la velocidad característica, D es el diámetro, μ la viscosidad, Nu el número de Nusselt, Re el número de Reynolds, Pr el númoer de Prandtl.

895
Modelos de transferencia de masa.
Diseño de ecuaciones para una fase, coeficientes de transferencia de masa.

$$\frac{Sh}{Sc\,\mathrm{Re}} \equiv St_M = \frac{f}{2}$$

Donde $\frac{f}{2} = \frac{Sh}{\mathrm{Re}\,Sc} Sc^{2/3} = St_M Sc^{2/3} \equiv j_M$ (j-factor para transferencia de masa) aplicable para 0.6<Sc<3000.
Sh es el número de Sherwood, y Sc el número de Schmidt, *f* es el factor de fricción.

Año:2002.

Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.
Autores: Tuncer Cebeci.
Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
Páginas: 9, 48, 68-69, 82, 167, 172-173, 209.

9.

Relaciones entre transferencia de calor, momento y masa.

El número de Stanton se define como :

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \left(T_w - T_e\right) u_e}$$

$\dot{q}_w$ es la transferencia de calor que se produce en la superficie, ρ es la densidad del fluido, u_e es la velocidad de la corriente libre, T_w es la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido.

48.

Ecuaciones de la capa límite.

Se define el número de Stanton como:

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \left(T_w - T_e\right) u_e}$$

$\dot{q}_w$ es la transferencia de calor que se produce en la superficie, ρ es la densidad del fluido, u_e es la velocidad de la corriente libre, T_w es la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido..

68-69.

Capa límite laminar. Flujo bidimensional similar.

Soluciones para pequeños y grandes números de Prandtl.

El número de Stanton se define como:

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \left(T_w - T_e\right) u_e} = \frac{-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}{\rho c_p \left(T_w - T_e\right) u_e} = \frac{Nu_x}{\Pr \mathrm{R}_x}$$

$\dot{q}_w$ es la transferencia de calor que se produce en la superficie, ρ es la densidad del fluido, u_e es la velocidad de la corriente libre, T_w es la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido, Nu_x es el número de Nusselt local, Pr el número de Prandtl, R_x es el número de Reynolds local con velocidad la de la corriente libre.

82.

Capa límite laminar. Flujos no similares bidimensionales.

Método integral de Smith y Spalding para el campo de temperatura.

El número de Stanton adimensional es:

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \left(T_w - T_e\right) u_e} = \frac{k}{\rho c_p u_e \delta_c} = \frac{Nu_x}{\Pr \mathrm{Re}_x}$$

Usando la definición de δ_c (el espesor de condución);

$$\delta_c \equiv \frac{k\left(T_w - T_e\right)}{\dot{q}_w} \equiv -\frac{T_w - T_e}{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}$$

Usando correlaciones de Thwaites:

$$\delta_c^2 = \frac{vA\int_0^x u_e^{B-1} dx}{u_e^B} + \delta_{ci}^2 \frac{u_{ei}^B}{u_e^B}$$

Las constantes A y B dependen del número de Prandtl.

$\dot{q}_w$ es la transferencia de calor que se produce en la superficie, ρ es la densidad del fluido, u_e es la velocidad de la corriente libre, T_w es la temperatura de la pared, T_e es la temperatura de la corriente libre, c_p es el calor específico del fluido, Nu_x es el número de Nusselt local, Pr el número de Prandtl, R_x es el número de Reynolds local con velocidad la de la corriente libre.

Año 2004.

Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico.
Autores: Cengel, Y.A..
Editorial: McGraw-Hill.
Página: 359.

359.

Fundamenteos de la convección. **Analogías entre la cantidad de movimiento y la transferencia de calor.**

Definimos el número de Stanton:

$$St = \frac{h}{\rho C_p V} = \frac{Nu}{\mathrm{Re}_L \Pr}$$

h es el coeficiente de transferencia de calor, ρ es la densidad del fluido, C_p el calor específico, V la velocidad. Un es el número de Nusselt, Re_L es el número de Reynolds basado en la longitud característica L, Pr es el número de Prandtl.
El número de Stanton es un coeficiente de transferencia de calor adimensional.

3.18. Número De Weber.

Wilhelm Eduard Weber. Nació en Wittenberg en 1804, y murió en 1891. Físico alemán. Profesor en las universidades de Halle y Gotinga, estudió el magnetismo terrestre, construyó un telégrafo electromagnético y un electrodinamómetro, e introdujo el sistema absoluto de unidades eléctricas según las directrices del sistema de unidades magnéticas. Elaboró una teoría sobre el magnetismo, que posteriormente fue perfeccionada por Langevin.

Año: 1981.

Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed.
Autores: Lienhard, J. H.
Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
Página: 445.

445.

Transferencia de calor en ebullición y otras configuraciones de cambio de fase. Transición en ebullición y sistemas que influyen.

Máximo apogeo de variación continua de calor en flujos externos.

Definimos el número de Weber como:

$$We_L \equiv \frac{\rho_g u_\infty L}{\sigma} = \frac{\text{Fuerzas de inercia/L}}{\text{Fuerzas superficiales/L}}$$

ρ_g es la densidad del gas, u_∞ la velocidad de la corriente libre, L la longitud característica y σ la tensión superficial..

Año: 1984.

Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección.
Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen.
Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
Página: 488.

488.

Análisis dimensional.

Se define el número de Weber como:

$$We = \frac{\rho V^2 D}{\sigma}$$

V es la velocidad del fluido, g la aceleración gravitacional, D el diámetro de la esfera, σ la tensión superficial.

Año: 1995.

Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición.
Autores: Louis C. Burmeister.
Editorial: John Wiley and Sons
Página: 536.

536.

Condensación en el interior de tubos.

Se define el número de weber como:

$$We = \frac{\rho_L w^2 D^3}{4\sigma}$$

w: velocidad angular, ρ_L la densidad del líquido, D diámetro de la tubería, σ la tensión superficial.

Año: 1995.
Libro: Transferencia de calor.
Autores: Mills. A.F
Editorial: McGraw-Hill
Página: 739.

739.

Condensación, evaporación y ebullición. Calor en tuberías.

Definimos el número de Weber como:

$$We = \frac{\rho_v V_v^2 L}{\sigma}$$

Donde el subíndice *v*, se refiere a vapor.

L: es la longitud característica y se toma del diámetro hidráulico de la superficie porosa.

σ : tensión superficial.

Año: 1996.
Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición.
Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt.
Editorial: John Wiley and Sons.
Páginas: 321, 353.

321

Convección.Tabla de grupos adimensionales seleccionados de transferencia de calor y masa.

Grupo: número de Webber (We)

Definición: $\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$

Interpretación: razón de las fuerzas de inercia a las de tensión superficial.

553

Ebullición por convección forzada externa.

El número de Webber, We_D, es la razón de las fuerzas de inercia a la tensión superficial y tiene la forma para un líquido de velocidad V que se mueve en flujo cruzado sobre un cilindro de diámetro D

$$We_D \equiv \frac{\rho_v V^2 D}{\sigma}.$$

ρ_v es la densidad del vapor y σ la tensión superficial.

Año: 1998.
Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición.
Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho.
Editorial: McGraw-Hill
Páginas: 1.27, 12.9.

1.27.

Tabla de grupos adimensionales.

Grupo: número de Weber.

Símbolo: We.

Definición: $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$

Significado físico: relación entre las fuerzas de inercia y la tensión superficial.
12.9.
Transferencia de calor en tuberías. Altas velocidades de vapor.
Se define el número de Weber como:

$$We = \frac{2\left(r_{h,w}\right)\rho_V V_V^2}{\sigma}$$

$r_{h,w}$ es el radio hidráulico, ρ_V es la densidad de vapor, V_V es la velocidad del vapor y σ es la tensión superficial.

Año: 1999.

Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa.
Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn.
Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York
Página: 225.
225.
Teorema de Bucckingham
Variables adimensionales para flujo en tuberías.
El conjunto de variables depende de la importancia que tengan en la situación física modelada. Para el flujo de un fluido en una tubería el conjunto de variables es:

L: longitud de la tubería
D: diámetro de la tubería
g: aceleración de la gravedad.
<v> :velocidad másica del fluido
ρ :densidad del fluido
μ: la viscosidad del fluido.
σ: la tensión superficial del fluido.
c: la velocidad del sonido en el fluido.
Δp: la diferencia de presión a lo largo de la tubería.

Primero elegimos el sistema de unidades en el que nosotros queremos trabajar. Elegimos el sistema MLt. No incluimos la temperatura porque suponemos un sistema isotermo donde las variaciones de temperatura se pueden considerar despreciables.

Así:

	M	L	t
L		1	
D		1	
g		1	-2
v		1	-1
ρ	1	-3	
μ	1	-1	-1
σ	1		-2
c		1	-1
Δp	1	-1	-2

Como resultado da la matriz dimensional:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Buscamos el determinante mas grande distinto de cero que podemos encontrar en esta matriz y este es un determinante de orden 3x3.

Por tanto el rango de la matriz dimensional es 3, así 9-3= 6. Con lo que nosotros solo podemos encontrar 6 grupos adimensionales independientes.

Así obtenemos:

$$We = \frac{L\langle v\rangle \rho}{\sigma} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas interfaciales}}$$

4. Contribuciones y conclusiones.

4.1. Contribuciones en el análisis dimensional.

Se ha realizado una revisión histórico-crítica del análisis dimensional desde sus comienzos hasta nuestros días, mostrando su evolución y desarrollo tanto en el concepto de definición, como en los procesos de cálculo para llevarlo a cabo. Posteriormente se ha profundizado en el estudio del análisis dimensional, basándonos en la visión de Palacios en su libro referente "Análisis Dimensional".
Para concluir con este punto hemos mostrado ejemplos de expertos en la materia como son Von Karman, Palacios, Langhaar y Zlokarnik. En estos ejemplos nos hemos centrado en los procesos físicos de transmisión de calor.

4.2. Contribuciones en los números adimensionales.

Hemos realizado un estudio exhaustivo de diferentes libros expertos en la materia de transmisión de calor y masa de los siguientes números adimensionales:

-Número de Biot
-Número de Boussinesq
-Coeficiente de fricción
-Coeficiente de resistencia
-Número de Eckert
-Número de Euler
-Número de Fourier
-Número de Froude
-Número de Graetz
-Número de Grashof
-Número de Mach.
-Número de Nusselt
-Número de Peclet
-Número de Prandtl
-Número de Rayleigh
-Número de Reynolds
-Número de Stanton
-Número de Weber

Se ha expuesto de cada uno de estos números adimensionales, lo marcado según sus autores en referencia a significado físico, obtención del número adimensional ya sea por análisis dimensional u otro proceso analítico, y también su relación con otros números adimensionales. Además hemos reflejado las críticas de cada autor sobre los números adimensionales y sus ideas sobre estos.

4.3. Conclusiones.

En este proyecto observamos la evolución y conflictos de ideas por parte de los distintos estudiosos del análisis dimensional a lo largo de la historia, llegando al análisis dimensional de nuestros días con sus distintas variantes.

Queda reflejado en el estudio de los diferentes textos sobre los números adimensionales, la no homogeneidad por parte de los autores en el uso y definición de los números.

Podemos dividir los textos en dos grupos, los que no toman las definiciones de los números adimensionales de anteriores científicos como dogma, haciendo una crítica, y los que no se han parado a estudiar su definición, simplemente la toman para explicar mediante ese número adimensional un proceso físico y aún así suele haber diferencia de opiniones sobre la correcta utilización de ese grupo adimensional en ese particular proceso.

En mi opinión tras el estudio de estos libros de texto, podemos decir que no está claro la correcta utilización de los números adimensionales en procesos físicos concretos, resaltaré un comentario de Adrian Bejan en su libro sobre convección de calor.

“ *Es común encontrar en la literatura de convección, asignar a cualquier flujo de Hagen-Poideuille un número de Reynolds definido para un tubo circular como* $\mathrm{Re}_D = UD/v$.
En los libros de mecánica de fluidos se repite uno tras otro, la explicación que el número de Reynolds es la razón de dos escalas, en concreto, las fuerzas de inercia divididas por las fuerzas de fricción.
La proliferación de términos no explicados como el número de Reynolds es quizás el mejor ejemplo del envejecimiento de la mecánica de fluidos dentro del campo donde las nuevas generaciones obedientemente aceptan como dogma el lenguaje acuñado por los pioneros quienes vivieron y crearon en un tiempo cuando “algo se va” fue una regla.
Aunque hay ciertas regiones de flujo en las cuales se puede prever un número de Reynolds como la razón de fuerzas viscosas entre las de fricción, no está tan claro que el número de Reynolds siempre signifique lo mismo para todos los flujos..
En el caso de flujos Hagen-Poiseuille a través de conductos rectos, es obvio que la interpretación inercia/fricción del número de Reynolds es un puro disparate. Los flujos Hagen-Poiseuille son flujos en los cuales la inercia del fluido es cero en todas partes: estos fluidos son gobernados por un permanente y perfecto equilibrio entre el gradiente longitudinal de presión impuesto y el efecto opuesto de la fricción ejercida por la pared en el flujo. Así, si tenemos que definir un grupo adimensional para el flujo laminar completamente desarrollado a través de un conducto recto, este grupo solamente puede ser la razón fuerzas de presión longitudinales entre fuerzas de fricción.”

Bibliografía.

1. *Año: 1946.* The Analogy Between Fluid Friction and Heat Transfer. Analogía Entre el Coeficiente de Fricción y el de Transferencia de Calor. Por Von Karman, Trans A.S.M.E, vol 61, 139,pp. 705-710.
2. *Año 1951.* Libro: Dimensional Análisis and Theory of Models. Análisis. dimensional y teoría de modelos. Autores: Langhaar, H.L. Editorial Wiley.
3. Año: 1964. Libro: Análisis dimensional. Autor: Palacios,J. Editorial: Espasa-Calpe.
4. *Año1967.Libro:* Transmisión de calor. Autores: Gröber/Erk/Grigull. Editorial Selecciones Científicas, Madrid.
5. Año: 1971. Historico-critical review of dimensional analysis. Revisión histórico-crítica del análisis dimensional. Autor: Macagno, E. O. J. Franklin Inst. 292, 391–402 .
6. *Año: 1973.* Libro: Transmisión del calor.Autores: V. Isachenko, V. Osipova, A.Sukomel. Editorial: Marcombo, S.A. Barcelona.
7. *Año: 1981.* Libro: Transferencia de calor aplicada a la ingeniería. Autores: James R.Welty. Editorial: Limusa, Mexico D.F.
8. *Año: 1981.* Libro: A Heat Transfer Textbook, 2ª Ed. Autores: Lienhard, J. H. Editorial: Prentice-Hall. Inc., New Jeresey.
9. *Año: 1982.* Libro: Initiation aux transferts thermiques. Iniciación a la transferencia térmica. Autores: J.F Sacadura. Editorial: Teckique et Documentation, París.
10. *Año: 1984.* Libro: Convective Heat Transfer. Transferencia de calor por convección. Autores:Vedat S. Arpaci. Poul S. Larsen. Editorial: Prentice-Hall. Inc. New Jersey.
11. *Año: 1985.* Libro: Transferencia de calor. Autores: B.V.Karlekar. R.M.Desmond. Editorial: Interamericana, México D.F.
12. *Año: 1988.* Libro: Heat and Mass Transfer. Transferencia de masa y calor. Autores: Frank M. White. Editorial: Addison-Wesley.
13. *Año: 1988.* Libro: Buoyancy Induced Flows and Transport .Flotabilidad inducida flujos y transporte. Autores: Benjamin Gebhart, Yogesh Jaluria, Roop L. Mahajan, Bahgat Sammakia. Editorial: Hemisphere.
14. *Año:1990.* Libro: Fluid Mechanics and Transfer Processes. Mecánica de fluidos y procesos de transferencia. Autores: J.M. Kay y R.M. Nedderman. Editorial: Cambridge University Press.
15. *Año: 1991.* Libro: Dimensional Análisis and Scale-up in chemical Engineering. Análisis dimensional y escalonamiento en ingeniería química. Autores: Zlokarnik M. Editorial: Springer-Verlag.
16. Año:1992. Libro: Heat Transfer. Transferencia de calor. Autores: Thomas, L.c. Editorial: Pretince-Hall. Inc., New Jersey.
17. *Año: 1993.* Libro: Transferencia de Calor y masa por convección. Tercera edición. Autores: W.M,Kays, M.E.Crawford. Editorial: McGraw-Hill.
18. Año: 1993. Libro: Transferencia de calor. Un enfoque básico. Autores: M. Necati Özisik. Editorial: McGraw-Hill.
19. Año: 1995. Libro: Convection Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Autores: Adrian Bejan. Editorial: John Wiley and Sons.

20. *Año: 1995.* Libro: Convective heat transfer. Second Edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición. Autores: Louis C. Burmeister. Editorial: John Wiley and Sons.
21. *Año: 1995.*Libro: Transferencia de calor. Autores: Mills. A.F. Editorial: McGraw-Hill.
22. *Año: 1996.* Libro: Fundamentos de transferencia de calor. Cuarta edición. Autores: Frank P.Incropera , David P. De Witt. Editorial: John Wiley and Sons.
23. *Año: 1997.* Libro: Transferencia de calor. 8ª Edición. Autores: Holman, J.P. Editorial: McGraw-Hill.
24. *Año: 1998.* Libro: Handbook of Heat Transfer. Manual de Transferencia de Calor. Tercera edición. Autores: Warren M. Rohsenow, James P. Harnett, Young I. Cho. Editorial: McGraw-Hill.
25. *Año: 1998*. Libro: Heat and Mass Transfer. Second Revised Edition. Transferencia de calor y masa. Segunda edición revisada. Autores: Hans Dieter Baher and Karl Stephan. Editorial: Springer-Verlag.
26. Año: 1999. Libro: Momentum Heat and Mass Transfer Fundamentals. Fundamentos de transferencia de momento de calor y masa. Autores: David P. Kessler y Robert A. Green Korn. Editorial: Maecel Dekker, Inc., New York.
27. *Año: 2002.* Libro: Principios de Transferencia de calor. Autores: Kreith, F., y M.S. Bohn. Editorial: Thomson Editores, S.A., Madrid.
28. *Año: 2002.*Libro: Convective Heat Transfer. Second edition. Transferencia de calor por convección. Segunda edición revisada.Autores: Tuncer Cebeci. Editorial: Springer-Verlag. Horizons Publishing.
29. *Año 2004.* Libro: Heat transfer. A Practical Approach. Second edition. Transferencia de Calor. Un Enfoque Práctico. Autores: Cengel, Y.A.Editorial: McGraw-Hill.