

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Industrial



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

PROYECTO FIN DE CARRERA

**DESARROLLO Y ANÁLISIS DE UN PROCEDIMIENTO OPERATORIO PARA LA
MEDICIÓN DE PIEZAS CIRCULARES MEDIANTE PROYECTOR DE PERFILES**

Alumno: **Miguel Angostos Acedo**

Director: Joaquín López Rodríguez

Cartagena, Julio 2012

“La calidad nunca es un accidente; siempre es el resultado de un esfuerzo de la inteligencia”

John Ruskin – Crítico y escritor británico

“He ofendido a Dios y a la humanidad porque mi trabajo no tuvo la calidad que debía haber tenido”

Leonardo da Vinci – Pintor, escultor e inventor

“En la carrera por la calidad no hay línea de meta”

Robert Kearns – Ingeniero estadounidense inventor del limpiaparabrisas

ÍNDICE

Motivación y objetivos	6
Introducción	6
Objetivo	7
Estructura	7
Capítulo 1. Concepto preliminares	9
1.1 Metrología.....	9
1.1.1. Definición de Metrología	10
1.1.2. Breve historia de la Metrología	10
1.1.3. Importancia de la Metrología	13
1.1.4. Campos de estudio	14
1.2. Tratamiento de datos en procesos de medición	15
1.2.1. Definición de incertidumbre	15
1.2.2. Errores de medida y causas de incertidumbre	16
1.2.3. Estimación de la variabilidad	20
1.2.4. Criterio de rechazo de Chauvenet	22
1.2.5. Expresión de una medida	25
Capítulo 2. El proyector de perfiles	26
2.1 Introducción	26
2.2 Ventajas del proyector de perfiles	28
2.3 Aplicaciones potenciales del proyector de perfiles	29
2.4 Clasificación.....	30
2.5 Elementos principales y funcionamiento básico.....	31
2.6 Proyector de perfiles del laboratorio de Metrología de la UPCT	35
Capítulo 3. Estudio teórico del método de la flecha	37
3.1 Introducción	37
3.1.1. Definición de ejes absolutos y relativos	38

3.2. El método de la flecha	39
3.2.1. Cálculo de la cuerda y la flecha	40
3.2.2. Cálculo del radio	40
3.2.3. Cálculo de la incertidumbre	42
3.3. Análisis del método de la flecha	44
3.3.1. Identificación de factores que afectan a la incertidumbre	44
3.3.2. Estudio de la influencia del ángulo de posicionamiento (θ) en la medición	46
3.3.3. Estudio de la influencia del error de coseno (γ)	56
3.3.4. Influencia conjunta de θ y γ	69
Capítulo 4. Procedimiento operatorio propuesto del método de la flecha	72
4.1 Introducción	72
4.1 Causas de incertidumbre particulares asociadas al proceso de medición	73
4.3 Corrección de la flecha	77
4.3.1. Corrección práctica	77
4.3.2. Tratamiento de datos posterior. Método iterativo	78
4.4. Procedimiento operatorio propuesto	81
4.4.1. Procedimiento de medida	81
4.4.2. Procedimiento iterativo	84
4.5. Resultados prácticos	85
Anexos	94
Anexo 1. Toma y tratamiento de datos	95
Anexo 2. Códigos de Matlab®	114
Anexo 3. Hoja de registro del procedimiento operatorio propuesto del método de la flecha	124
Anexo 4. Especificaciones técnicas sobre el anillo patrón utilizado	126
Glosario de términos	129
Bibliografía	133

Motivación y objetivos

INTRODUCCIÓN

En un principio, los medios de fabricación eran artesanos, entonces la medición en el proceso era secundaria, ya que la producción pieza a pieza se controlaba múltiples veces en el curso de la misma, hasta conseguir el ajuste deseado.

Más tarde tras la revolución industrial, conforme hubo una necesidad creciente en la intercambiabilidad entre piezas, se fue haciendo preciso llevar un control sobre las dimensiones de las piezas a fabricar. Fue entonces cuando surgieron técnicas de medición, que ayudaban a tener controlado un sistema de producción o de inspección.

Posteriormente, tras el resurgimiento industrial de Japón aparece la necesidad de adoptar sistemas de calidad más rigurosos. La consecución de una buena medición con precisión se hizo necesaria y surgieron múltiples aparatos y técnicas que lo permitieron.

Podemos concluir entonces que un método de medición con una buena precisión es inherente a la calidad.



OBJETIVO

El objeto de este proyecto es proponer un nuevo procedimiento operatorio de mayor precisión para la medición del radio interior en circunferencias o sectores circulares mediante un proyector de perfiles.

Para la consecución de dicho procedimiento operatorio se llevará a cabo un análisis detallado de los errores involucrados en el proceso de medición con el fin de minimizar la incertidumbre de la medida.

El procedimiento de medida del radio sigue las directrices del método de la flecha, obteniendo dos parámetros básicos para el cálculo del radio (la cuerda y la flecha), los cuales se ven alterados por dos factores que tienen gran repercusión en el proceso de medición: el error de coseno y el ángulo de posicionamiento.

Se realizará un estudio detallado del procedimiento propuesto y los casos genéricos de cada medición. Los dos factores como son el error de coseno y el ángulo de posicionamiento serán estudiados por separado y posteriormente se analizará su influencia de manera conjunta.

ESTRUCTURA

El proyecto está dividido en cuatro capítulos, en los que se explican los fundamentos básicos necesarios para entender la parte teórica y de tratamiento de datos, el proyector de perfiles, el método de la flecha y su análisis teórico, una parte práctica donde se corroborarán los aspectos teóricos estudiados, un procedimiento detallado para la consecución de un resultado más preciso junto con unas hojas de registro para dicho procedimiento, unos anexos y finalmente un glosario de términos técnicos empleados en el proyecto.

Para realizar el análisis de la incertidumbre asociado al método de medición se han utilizado conceptos básicos de trigonometría, cálculo y estadística. Así mismo se hará uso de

herramientas informáticas tales como hojas de cálculo (Excel®), programas de diseño asistido por ordenador (AutoCad®), programas de cálculo computacional (Matlab®), y programas de análisis estadístico (Statistix®).

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo se define el concepto de la Metrología y su aplicación, y los fundamentos básicos para expresar una medida adecuadamente.

1.1 METROLOGÍA

El incremento de la competencia, motivado fundamentalmente por la globalización de las actividades comerciales, así como la presión social y gubernamental exige cada vez una mayor calidad en los productos. Es por eso que las empresas han ido adoptando de manera paulatina sistemas de calidad que aseguren unos mejores productos.

Uno de los componentes de este sistema de calidad es la función metrológica. La Metrología es una herramienta indispensable, que contribuye a la calidad y a la libre circulación de los productos industriales y que comprende todo el conjunto de instrumentos utilizados para realizar la elección, la calibración, la verificación y el mantenimiento de los medios de medida que participan en la consecución de la calidad del producto.



Otra función de la Metrología definida en el preámbulo de los capítulos de las normas ISO 9000 es: *“El papel de la función metrológica consiste en dominar la aptitud del empleo de todos los medios de medida utilizados en la empresa y dotarlos de aseguramiento”*.

1.1.1 DEFINICIÓN DE METROLOGÍA

Definimos Metrología como la ciencia de la medida que engloba todo tipo de mediciones realizadas con niveles de incertidumbre conocidos, en cualquier campo de la actividad humana. Sus principios fundamentales son el resultado de la medición y la incertidumbre de medida.

La Metrología cubre tres actividades principales:

- La definición de las unidades de medida internacionalmente aceptadas p.ej.: el metro, el amperio, el segundo, etc.
- La realización de las unidades de medida por métodos científicos; p.ej., la realización del metro (patrones calibrados) mediante láseres estabilizados.
- El establecimiento de cadenas de trazabilidad determinando y documentando el valor y exactitud de las mediciones y diseminando dicho conocimiento.

1.1.2 BREVE HISTORIA DE LA METROLOGÍA

Los registros más antiguos de la historia reflejan la necesidad que tuvieron las personas de medir y crear unidades especiales de medida para el intercambio comercial. De esta cuestión las primeras unidades de medidas que surgieron fueron las de tipo antropológico (la palma, la cuarta o palmo, el dedo, la pulgada, etc.) ya que resultaba la forma más sencilla y fácil de llegar a un entendimiento entre las personas que realizaban un intercambio comercial.

Con el tiempo se observó que este tipo de medidas eran muy variables necesitando unificarlas mediante unidades de medida patrón materializadas, las cuales fueron conservadas cuidadosamente como elementos de referencia para dilucidar cualquier



diferencia e incluso en algunos pueblos se consideraron como joyas públicas, que se fueron desarrollando en la búsqueda de una medida estable y universalmente reproducible.

Tal era la importancia de los patrones para los arquitectos reales del antiguo Egipto, que si olvidaban o descuidaban su deber de calibrar el patrón de longitud (la unidad era el codo real del faraón) se enfrentaban a la pena de muerte. Es así como nacieron los primeros conceptos que sirvieron de base a la Metrología.

En la cultura griega y romana, se hacía necesario el regular numerosas funciones de la vida cotidiana como la medición de parcelas, pesaje de mercancías, medición del tiempo etc., todo ello sin contribuir a un incremento del conocimiento científico.

Los árabes desarrollaron importantes estudios sobre el peso y densidad de los cuerpos, además, perfeccionaron la balanza hidrostática.

- **Comienzo de la Metrología de precisión**

Hasta el Renacimiento, la mayor parte de la información existente sobre Metrología se refiere a su aplicación en las transacciones comerciales. Solo a partir del Renacimiento se hace visible la distinción entre Metrología científica y otras actividades metrológicas, que podríamos denominar “de aplicación”.

Las municiones de metal en las postrimerías del siglo XV hacen surgir la noción de calibre, lo que permite fabricar munición de reserva.

Las exigencias de piezas más precisas en la fabricación mecánica, la navegación, etc., determinan un desarrollo importante de los instrumentos de medida de longitud, tiempo y masa a partir del siglo XVI. De hecho, el micrómetro, primer instrumento para medidas precisas de longitud, fue inventado por William Gascoigne en 1637.

La especialización del trabajo y la demanda de mayores series de productos iguales impusieron la necesidad de intercambiabilidad. Esta intercambiabilidad no se alcanzó hasta el pasado siglo con la introducción de las tolerancias en la especificación de los componentes de cierta responsabilidad.



En 1779 se deposita en los archivos de Francia el primer prototipo del metro, formado por una regla de platino sin inscripciones ni marcas.

A comienzos del siglo XX Francia propuso la adopción de un sistema internacional para la definición de tolerancias. Así nace el sistema ISA (*International Federation of the National Standardizing Associations*) que en 1947, fue sustituido por la norma ISO de la recién constituida *International Organization for Standardization*, siendo el sistema internacional, el más ampliamente utilizado hoy día.

- **Metrología actual en España. CEM**

En España, a finales del siglo XIX, como respuesta a la incipiente necesidad de una uniformidad legal y administrativa en aspectos metroológicos surge lo que puede considerarse como la *primera ley fundamental de la Metrología española*, que dejaba claramente establecido el concepto de uniformidad. “*En todos los dominios españoles habrá un solo sistema de medidas y pesas*”. Con este espíritu nacieron diferentes laboratorios y asociaciones de científicos e ingenieros militares preocupados por estos aspectos, pero fue en 1990 cuando se creó el que hoy conocemos como *Centro Español de Metrología (CEM)*.

El CEM es un organismo autónomo adscrito a la Secretaría General de Industria y de la Pequeña y Mediana Empresa del Ministerio de Industria, Energía y Turismo. Fue creado por la Ley 31/1990 de Presupuestos Generales del Estado.

El Centro Español de Metrología es el máximo órgano técnico en el campo de la Metrología en España.

Sus competencias son las siguientes:

- Custodia, conservación y diseminación de los patrones nacionales de las unidades de medida.
- Soporte de trazabilidad a la red de laboratorios de calibración y ensayo e industria.
- Ejercicio de las funciones de la Administración General del Estado en materia de Metrología legal.
- Ejecución de proyectos de investigación y desarrollo en el ámbito metroológico.
- Gestión del Registro de Control Metroológico.



- Formación de especialistas en Metrología.
- Representación de España ante las organizaciones metroológicas internacionales.

1.1.3 IMPORTANCIA DE LA METROLOGÍA

Debido al desarrollo considerable que han experimentado en los últimos tiempos los distintos procesos de fabricación, supone un esfuerzo por parte de los fabricantes poder lanzar al mercado productos competitivos que ofrezcan una interesante relación calidad-precio. Esto trae consigo la necesidad de una mejora de la calidad de los ajustes exigiendo una mejor tolerancia en el acabado de los productos, y para ello los fabricantes deben adoptar una serie de acciones dirigidas a actualizar y ampliar sus sistemas de calidad.

Una regla general observada a lo largo de la historia es que cuanto más barato es un género, más deprisa se hace su medición y con menor precisión. Hoy día diríamos que tanto la técnica de medición como el instrumento deben adaptarse a la tolerancia de medida que deseamos comprobar y que, en efecto, mayores tolerancias permiten una medición más rápida y menos cuidada.

La medición sistemática, con un nivel de incertidumbre conocido, es una de las bases del control de calidad industrial y, en general, en las industrias más modernas, el coste de las mediciones supone del 10% al 15% de los costes de producción. Las buenas mediciones pueden, sin embargo, aumentar significativamente el valor, la vigencia y la calidad del producto.

En todo proceso de fabricación es necesario que se cumplan unas tolerancias previamente especificadas que aseguren la funcionalidad del conjunto fabricado. Esto asegura la intercambiabilidad de elementos análogos. Por lo tanto, para asegurar esa analogía en las piezas no es necesario establecer unos valores exactos para las magnitudes a medir, sino que es suficiente con establecer unos valores admisibles (tolerancias).

Para definir si el valor concreto de una magnitud está dentro de tolerancia, es preciso “medir”, y esa medida ha de asegurarse con una calidad necesaria en cada caso particular; precisamente por eso surge la Metrología.



La Metrología es esencial en la investigación científica, la cual constituye a su vez la base del desarrollo de la propia Metrología. La Ciencia se mueve continuamente hacia los extremos de lo posible y la Metrología fundamentalmente se ocupa de los aspectos metrológicos de los nuevos descubrimientos. El contar con mejores herramientas metrológicas permite a los investigadores continuar con sus descubrimientos, y sólo aquellos campos de la Metrología que aporten desarrollos, pueden seguir siendo colaboradores de la industria y de la investigación.

1.1.4 CAMPOS DE ESTUDIO

La Metrología puede dividirse en tres principales campos:

- I. Metrología científica: Parte de la Metrología que se encarga de la custodia, mantenimiento y trazabilidad de los patrones, así como la investigación y desarrollo de nuevas técnicas de medición. Se ocupa de los problemas teóricos y prácticos relacionados con las unidades de medida (como la estructura de un sistema de unidades o la conversión de las unidades de medida en fórmulas), del problema de los errores en la medida; del problema en las propiedades metrológicas de los instrumentos de medidas aplicables independientemente de la magnitud involucrada.
- II. Metrología industrial: Esta disciplina se centra en las medidas aplicadas a la industria, a la producción y se basa en la calibración, control y mantenimiento adecuados de todos los equipos de medición empleados en producción, inspección y pruebas. Esto con la finalidad de que pueda garantizarse que los productos están conforme a las normativas. El equipo se controla con frecuencias establecidas y de forma que se conozca la incertidumbre de las mediciones.
- III. Metrología legal: Parte de la Metrología encargada del conjunto de procedimientos legales, administrativos y técnicos establecidos por la autoridad competente, a fin de especificar y asegurar de forma reglamentaria, el nivel de calidad y credibilidad de las mediciones utilizadas en controles oficiales, el comercio, la salud, la seguridad y el medio ambiente.



Consecuentemente, la Metrología científica, la industrial y la legal deben también desarrollarse, a fin de dar respuesta a las necesidades de la industria y la sociedad, manteniendo su relevancia y utilidad.

1.2 TRATAMIENTO DE DATOS EN PROCESOS DE MEDICIÓN

Cualquier empresa que fabrique componentes, subconjuntos o sistemas de mayor o menor complejidad precisa de un sistema metrológico perfectamente organizado que permita conocer la incertidumbre de los instrumentos y equipos de medida que intervienen en sus procesos de medición. Es por eso que a la hora de expresar el resultado de la medición de una magnitud física, es obligado dar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado.

1.2.1 DEFINICIÓN DE INCERTIDUMBRE

El valor verdadero de la magnitud a medir o mensurando siempre es desconocido debido a las imperfecciones que inevitablemente comporta el desarrollo de esta actividad.

La palabra “incertidumbre” significa duda. Así en el sentido más amplio, “incertidumbre de medida” significa duda sobre la validez del resultado de medición.

La incertidumbre (u) puede considerarse un estimador de variabilidad.

La incertidumbre expandida (U) es el resultado de multiplicar la incertidumbre de medida por un factor de cobertura (k). La incertidumbre expandida nos aporta un rango de valores en los que está acotada (con mayor o menor seguridad) la magnitud real del mensurando.

$$U = k \cdot u \quad (1.1)$$

Bajo la hipótesis de una ley normal, que es el caso más frecuente, la probabilidad de que la medida se encuentre bajo esa incertidumbre me proporciona un valor de k .



- 68 % para $k = 1$
- 95 % para $k = 2$
- 99,8 % para $k = 3$

1.2.2 ERRORES DE MEDIDA Y CAUSAS DE INCERTIDUMBRE

El error de medida es la desviación entre el resultado de la medición y el valor del mensurando, lo que corresponde a:

$$\text{Valor medido} = \text{valor del mensurando} + \text{error}$$

Pueden descomponerse los errores de medida atendiendo a su naturaleza en:

- Error aleatorio: fluctúa de manera imprevisible cuando una medición se repite manteniendo constantes las mismas condiciones. Son errores que no podemos controlar pero que se pueden tratar de disminuir mediante repeticiones de la medida.
- Error sistemático: Se considera prácticamente constante o que evoluciona de manera lenta y regular en función de las condiciones experimentales, p.ej.: desplazamiento de escala constante (o proporcional) del instrumento de medida. No existe un método único para reducir un error sistemático consistente en aplicar una corrección sobre el resultado de la medición. Para la disminución de su influencia se necesita un conocimiento profundo del proceso de medida con el fin de identificar el máximo número de causas de error.

Esta descomposición de los errores nos permite entonces escribir:

$$\text{Valor medido} = \text{valor del mensurando} + \text{error aleatorio} + \text{error sistemático}$$

Esto pone en evidencia la importancia de disminuir los errores con el fin de obtener un resultado tan próximo como sea posible al valor del mensurando. En esta operación, los errores aleatorios y los errores sistemáticos serán tratados consecuentemente de manera diferente.



La manera de expresar un error de medición puede ser como:

- **Error absoluto:** Es la diferencia expresada en valor absoluto entre el valor de la medida y el valor tomado como exacto. Tiene las mismas unidades que las de la medida.

$$E = |R^* - R| = |\Delta R| = |\text{valor de la medida} - \text{valor exacto}| \quad (1.2)$$

- **Error relativo:** Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto del mensurando. Es adimensional, por lo que no tiene unidades. Se expresa en tanto por 1.

$$E_r = \frac{|R^* - R|}{R} = \frac{|\Delta R|}{R} = \frac{|\text{valor de la medida} - \text{valor exacto}|}{\text{valor exacto}} \quad (1.3)$$

- **Error porcentual:** Es la expresión en tanto por ciento del error relativo.

$$E_r^{\%} = \frac{|R^* - R|}{R} \cdot 100 = \frac{|\Delta R|}{R} \cdot 100 = \frac{|\text{valor de la medida} - \text{valor exacto}|}{\text{valor exacto}} \cdot 100 \quad (1.4)$$



- **Causas de incertidumbre:**

La diferente naturaleza de los errores de medida se debe a que las causas que la provocan son a su vez de distinta índole. Es imposible un conocimiento exacto de todas las causas de incertidumbre, ya que éstas dependerán de las condiciones particulares de la medida, pero es conveniente conocer las más importantes y tener una idea que permita evaluar los errores más corrientes en todo proceso de medida.

Se pueden clasificar las causas de incertidumbre en cuatro grupos:

- I. Debidas al operador o procedimiento de medida
- II. Debidas al instrumento de medida
- III. Debidas a la pieza o magnitud de medida
- IV. Debidas a las condiciones ambientales

I. Incertidumbres debidas al operador o procedimiento de medida

El operador influye en los resultados de la medida por la imperfección de sus sentidos así como el grado de habilidad que posee. La tendencia actual de mejora de la calidad está tendiendo hacia la eliminación máxima del grado de intervención del operador.

Las incertidumbres más corrientes son:

- De lectura y /o paralelaje
- Por mal posicionamiento de la pieza
- Por presión excesiva

II. Incertidumbres debidas al instrumento de medida

Cualquiera que sea la precisión de diseño y fabricación de un instrumento, siempre presentará imperfecciones. Además, el instrumento con el tiempo y el uso irá adquiriendo fuentes de error (por ello surge la necesidad de un plan de calibración, entre otras razones).



Las incertidumbres más corrientes son:

- De diseño y fabricación
- Por presión y forma de los contactos de los aparatos al manejarlos
- Por desgaste del instrumento
- De alineación

III. **Incertidumbres debidas a la pieza o magnitud a medir**

Al realizar medidas en diferentes zonas de una misma cota pueden resultar ligeramente diferentes ya que la superficie de definición es imperfecta.

Las incertidumbres más corrientes son:

- De forma
- De deformación

IV. **Incertidumbres debidas a las condiciones ambientales o correcciones**

Son aquellas que son atribuibles a causas externas al proceso de medida.

Las incertidumbres más corrientes son:

- Variación de temperatura
- Humedad
- Vibraciones y movimientos indeseables
- Presión atmosférica
- Polvo y suciedad
- Corrientes de aire



1.2.3 ESTIMACIÓN DE LA VARIABILIDAD

Lo recomendable para reducir los errores aleatorios en un proceso de medición es la repetición de las medidas.

Siendo una aproximación al valor medido la media aritmética de todas las mediciones:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.5)$$

La varianza experimental de las observaciones es:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \quad (1.6)$$

Siendo la desviación típica experimental:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \quad (1.7)$$

Ésta última expresión es la más utilizada cuando se realizan mediciones de 10 o más piezas. En caso de realizar un proceso de medición con menos de 10 medidas se deberá de multiplicar por un factor corrector w (mostrado en la tabla 1.1), por lo que la desviación típica experimental será:

$$s = w \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \quad (1.8)$$



Tamaño muestra (n)	Factor corrector (w)
2	7,0
3	2,3
4	1,7
5	1,4
6	1,3
7	1,3
8	1,2
9	1,2
10 ó más	1,0

Tabla 1.1: Factor de corrección w en función del tamaño de la muestra n

La incertidumbre asociada al proceso de medición con n repeticiones se representa:

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1.9)$$

- **Ley de propagación de varianzas:**

En ocasiones el resultado final de la medida de una magnitud depende de otras medidas efectuadas individualmente. Es decir, en este caso se dice que y_0 depende de q parámetros x_i :

$$y_0 = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_i \dots x_q) \quad (1.10)$$

La ley de propagación de varianzas (o de incertidumbres) permite calcular la varianza compuesta u_c cuando se dispone de varias mediciones individuales que afectan a la medida final.

Suponiendo el caso en el que todas las variables x_i de las que depende la magnitud y_0 no están correlacionadas (esta hipótesis se corresponde a la mayoría de los casos de medición), podemos proponer:



$$u_y^2 = \sum_{i=1}^q \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}_i}^2 u_i^2 \quad (1.11)$$

Suele ser habitual representar las varianzas (u_i^2) de tipo A, estimadas estadísticamente, por s^2 .

1.2.4 CRITERIO DE RECHAZO DE CHAUVENET

El criterio de Chauvenet es un método que consiste en determinar si un dato experimental de un conjunto de mediciones es probable que sea un dato atípico.

La consecución de un dato atípico puede ser resultado de un mal proceso. Entonces, antes de realizar un análisis estadístico más profundo sobre el resultado de la medición, se procede a su filtrado previo, mediante la aplicación de dicho criterio.

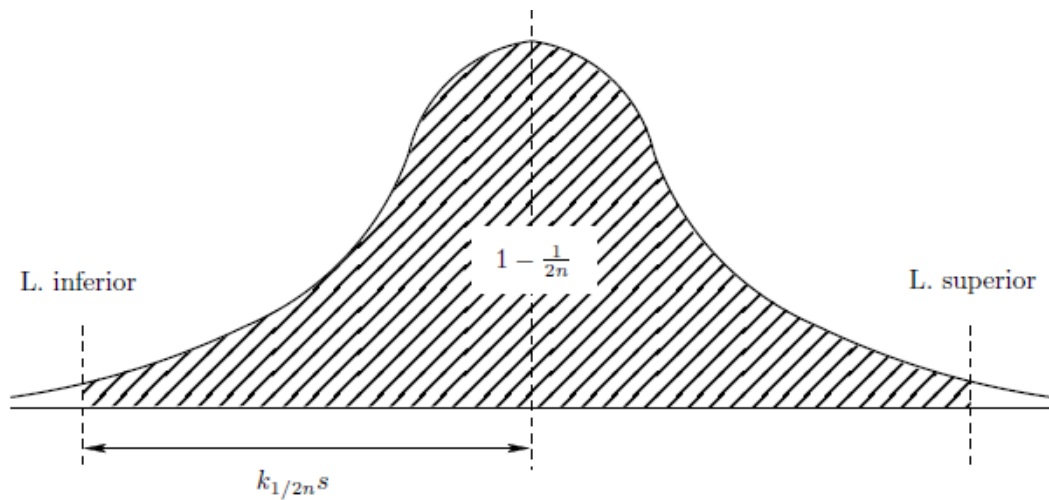
Se rechazan todas aquellas medidas cuya probabilidad de aparición sea inferior a $\alpha = \frac{1}{2 \cdot n}$.

Se establecen unos límites inferior y superior en función de la desviación típica de la muestra de datos, y todas las medidas que superen esos límites deben ser rechazadas.

$$\underbrace{\bar{x} - k(n) \cdot s}_{\text{Límite inferior}} \leq x_i \leq \underbrace{\bar{x} + k(n) \cdot s}_{\text{Límite superior}} \quad (1.12)$$

Donde $k(n)$ se refiere a la función asociada a la distribución normal siendo

$k(n) = k_{\alpha=1/2n}$ a la que también se le suele llamar: razón de máxima desviación admisible.



Figura¹ 1.1: Cálculo del coeficiente $k(n)$

- Cálculo de $k(n)^2$
 - Para una confianza de $1 - \alpha/2$ calculamos alfa, siendo $\alpha = \frac{1}{2 \cdot n}$
 - Tomamos el valor asociado de la tabla de la distribución normal para el valor de confianza α .

- Pasos para la aplicación del criterio:
 1. Se calculan los estimadores centrales (media, ecuación 1.5) y de dispersión (desviación típica, ecuación 1.8) de la muestra de datos.
 2. Calculamos $k(n)$ en función del número de mediciones.
 3. Se calculan los límites inferior y superior.

¹ Figura extraída del libro: "Fundamentos básicos de Metrología dimensional" de Joaquín López Rodríguez. Ver bibliografía.

² En la tabla 1.2 están representados algunos valores de $k(n)$ en función del número de mediciones.



4. Si se rechazara alguna medida, habría que volver a calcular la desviación típica, $k(n)$ y los límites inferior y superior.
 - **Nota:** El método de medida no se considerará aceptable si hubieran más de 2 rechazos cada vez que se aplica el criterio.
5. Aplicamos de manera reiterada el criterio hasta que no se rechace ninguna medida (todas las medidas dentro de los Límites inferior y superior).

nº	α	$1-\alpha/2$	$K(n)$	nº	α	$1-\alpha/2$	$K(n)$
2	0,250	0,8750	1,15	55	0,0091	0,9955	2,61
3	0,1667	0,9167	1,38	56	0,0089	0,9955	2,615
4	0,1250	0,9375	1,54	57	0,0088	0,9956	2,62
5	0,1000	0,9500	1,65	58	0,0086	0,9957	2,63
6	0,0833	0,9583	1,73	59	0,0085	0,9958	2,635
7	0,0714	0,9643	1,8	60	0,0083	0,9958	2,64
8	0,0625	0,9688	1,86	70	0,0071	0,9964	2,69
9	0,0556	0,9722	1,92	80	0,0063	0,9969	2,74
10	0,0500	0,9750	1,96	90	0,0056	0,9972	2,77
20	0,0250	0,9875	2,24	100	0,0050	0,9975	2,81
30	0,0167	0,9917	2,4	300	0,0017	0,9992	3,14
40	0,0125	0,9938	2,48	500	0,0010	0,9995	3,29
50	0,0100	0,9950	2,57	1000	0,0005	0,9998	3,48

Tabla 1.2: Cálculo del coeficiente $k(n)$ del criterio de Chauvenet



1.2.5 EXPRESIÓN DE UNA MEDIDA

Cualquier magnitud susceptible de medición no exacta debe de expresarse adecuadamente acotada por un intervalo.

El rango del intervalo de la magnitud viene definido por la incertidumbre tal como:

$$[y - U, y + U] \quad (1.13)$$

Con lo cual puede definirse la incertidumbre de una medida como *“el valor de un intervalo, generalmente simétrico, dentro del cual se encuentra, con una alta probabilidad, el valor verdadero de la magnitud medida”*.

De una manera más general:

$$y \pm U \quad (1.14)$$

Introduciendo la expresión de la incertidumbre expandida (1.1) en (1.11):

$$y \pm k \cdot u \quad (1.15)$$

Es muy importante que la apreciación decimal en la expresión de la medida se corresponda con la apreciación de la incertidumbre, y ésta a su vez con la apreciación del aparato de medición. Es decir, no puede haber una precisión mayor que la de la escala de medición utilizada, por lo tanto, si obtenemos una incertidumbre expandida menor que el menor valor de escala de nuestro aparato de medida, tomaremos ese valor del aparato de medida.

Capítulo 2

El proyector de perfiles

En este capítulo se describe el proyector de perfiles, su historia, usos y utilidades.

2.1 INTRODUCCIÓN

Un proyector de perfiles (*“optical projector”* en Inglés) es un equipo capacitado para medir e inspeccionar dimensiones y formas, por ampliación óptica, que permite la realización de medidas directas o con desplazamiento, sobre una pantalla de proyección.

El primer proyector de perfiles fue desarrollado poco después de la primera guerra mundial, con el objetivo de comprobar la forma o perfil de tornillos roscados.

Sin embargo, los primeros proyectores tenían grandes desventajas. Por ejemplo requerían de una habitación oscura para la visualización de las imágenes proyectadas y además la pantalla estaba muy alejada del operador y de la mesa con la pieza, lo cual era un gran inconveniente para la comparación de la sombra proyectada con una plantilla.

Posteriormente se introdujo un espejo en la trayectoria de la sombra para reflejar la imagen en la pantalla y acercarla frente al operador, y se encerró todo el sistema en una carcasa aislando la zona interior de la pantalla de la luz exterior, eliminando así la necesidad de una habitación oscura.

Aunque los primeros usos de los proyectores de perfiles se lo dieron los fabricantes de herramientas y piezas roscadas de gran calidad, las aplicaciones de este nuevo instrumento óptico no se quedaron limitadas a una rama particular de la industria metalúrgica.

El proyector de perfiles, una herramienta de inspección segura y versátil, se postuló rápidamente como una buena alternativa para multitud de aplicaciones; de hecho, en la actualidad, estos aparatos son indispensables en el equipamiento estándar para muchos de los campos de producción de alta calidad.

Motivos de la rápida expansión en las aplicaciones:

- La industria necesita de unos instrumentos de medición para la inspección y observación de piezas cada vez más fiables, precisos y consistentes.
- Las grandes mejoras que introdujeron los fabricantes a lo largo del tiempo que paliaron los defectos e hicieron de estos aparatos unos instrumentos más sencillos y cómodos de utilizar a la vez que más precisos.



Figura 2.1: Proyector de perfiles de eje vertical



2.2 Ventajas del proyector de perfiles

La versatilidad de los proyectores de perfiles viene justificada por la gran variedad de operaciones capaces de realizar con ellos debido a, los complementos, accesorios, formas de estabilizar la pieza y las variedades de movimiento.

Los proyectores en sus aplicaciones como instrumentos de inspección presentan muchas propiedades favorables:

- La imagen proyectada en la pantalla puede ser observada por varias personas simultáneamente; con lo que se puede realizar inspecciones en grupo.
- Se pueden observar, comparar y evaluar varias dimensiones y características en la forma de una pieza con una única configuración.
- La cantidad de dimensiones a inspeccionar en una pieza tanto individualmente como relacionadas con otras dimensiones de la misma pieza, pueden ser aumentadas sin necesidad de otro instrumento adicional siempre que estas dimensiones estén contenidas en un plano de observación común.
- Se pueden utilizar plantillas de comparación de formas para una inspección rápida y precisa.
- Es posible la medición directa de dimensiones gracias a la imagen proyectada en la pantalla y las reglas graduadas en los ejes de medición (la lectura puede ser de manera digital o analógica, o incluso con sensores ópticos que detectan el paso de luz a sombra o viceversa de forma automática).
- Una desventaja que distorsiona la medición en medidores de contacto es la sobrecompresión al efectuar la medida. Esto no ocurre en los proyectores de perfiles, con lo que reducen errores potenciales.
- Los medidores de contacto y en especial los fijos como los calibres, están sujetos a un desgaste y una posterior no conformidad para realizar el proceso de medición con lo que tienen una vida limitada. Este desgaste no ocurre en los proyectores de perfiles siendo su vida útil mucho mayor.
- Puede medirse la posición relativa de dos elementos tanto en longitud como en desviación gracias al goniómetro que puede incorporar la pantalla del proyector de perfiles.



- El uso de elementos de fijación permite hacer una toma de mediciones basado en sistemas de coordenadas. Pudiendo tomar medidas en una única dirección.

2.3 Aplicaciones potenciales del proyector de perfiles

Categoría de la inspección	Tipo de operación
Inspección por observación	<ul style="list-style-type: none"> - Propiedades superficiales, textura, acabados, fallos, grietas, rebabas, etc. - Contornos generales: rectitud, curvaturas, etc. - Contacto en piezas acopladas
Inspección por comparación con plantillas	<ul style="list-style-type: none"> - Inspección de formas estándar, por ejemplo: ángulos, radios, roscas, formas de engranajes, etc. - Control de tolerancias.
Mediciones	<ul style="list-style-type: none"> - Mediciones lineales (distancias) mediante el uso de escalas graduadas translúcidas. - Mediciones de ángulos dibujando sobre un papel translúcido o mediante un transportador de ángulos. - Calco de contornos sobre un papel translúcido apoyado sobre la pantalla para un posterior análisis
Mediciones con la ayuda de dispositivos acoplados	<ul style="list-style-type: none"> - Mediciones sobre los movimientos de la mesa de observación a través de los ejes X e Y (para dimensiones lineales) - Mediciones de ángulos con ayuda de un goniómetro instalado en la pantalla del proyector.

Tabla 2.1: Aplicaciones de los proyectores de perfiles



2.4 Clasificación

Existen numerosos modelos y tipos de construcciones para los proyectores de perfiles atendiendo a los siguientes criterios:

I. Según la orientación del eje de haz luminoso

a. Proyector de perfiles de eje horizontal

El haz luminoso incide sobre el mensurando horizontalmente. Estos proyectores poseen campos de medida grandes (de hasta 0,5 metros), adecuados para piezas grandes y pesadas, que se sitúan sobre mesas de acero dotadas de ranuras y elementos de fijación. A veces, todo el sistema de sustentación e iluminación se encuentra situado en un lateral del instrumento. Poseen precisiones peores que los proyectores de eje vertical. Los dos ejes longitudinales de medida suelen denominarse X y Z, utilizándose el eje Y para el enfoque.

El primer proyector de perfiles es el de N.P.L (“National Physical Laboratory of U.K.”) de tipo horizontal, que en su forma primitiva consistía en una modificación de un microscopio para verificación de roscas.

b. Proyector de perfiles de eje vertical

En este tipo de proyectores el haz luminoso incide verticalmente sobre el elemento a medir. La pieza suele situarse sobre mesas de cristal, a través de las cuales se transmite el haz luminoso. Se trata de instrumentos con campos de medida pequeños (de hasta 0,2 ó 0,3 metros como máximo en cada eje de medida), adecuados para piezas pequeñas y ligeras, siendo en cambio los de mayor precisión. En ellos los dos ejes longitudinales de medida se denominan X e Y, utilizándose el eje Z para el enfoque.



II. Según el tipo de iluminación utilizada para la proyección

a. Proyector con iluminación episcópica

La iluminación episcópica o proyección por luz transmitida consiste en un haz luminoso que se transmite a través de la pieza, proyectando el contorno o silueta situada en el plano focal en la pantalla de observación.

b. Proyector con iluminación diascópica

En estos proyectores la luz incide sobre la superficie de la pieza, reflejando su imagen iluminada en la pantalla. La calidad de la reflexión depende principalmente de la calidad de la superficie de la pieza.

c. Proyector con ambas iluminaciones

Actualmente el proyector más extendido aún a ambos tipos de iluminación, tanto episcópica como diascópica.

2.5 Elementos principales y funcionamiento básico

Con el objeto de producir una imagen no distorsionada, a la vez que amplificada, tanto de la imagen reflejada como de la silueta o contorno del objeto en la pantalla de observación, un proyector de perfiles consta de los siguientes elementos principales:

I. Fuente de luz

Normalmente está formado por una o varias lámparas de alta intensidad (1000 W o más) con el fin de producir una buena imagen incluso con valores de amplificación elevados.

En muchos equipos, esta fuente de luz está originada por lámparas halógenas, que proporcionan una muy buena potencia lumínica, pero por el contrario

producen mucho calor y se pueden alterar las mediciones por la dilatación de la pieza para tiempos muy largos de exposición; es por ello que los últimos desarrollos se centran en el aislamiento térmico de las carcasas que alojan las bombillas para que éstas no cedan calor por convección a la pieza.

II. Sistema óptico:

El sistema óptico es el alma del proyector de perfiles, ya que permite la amplificación de la imagen para una mejor visualización.

Está formado por dos grupos principales de lentes: grupo colimador y grupo de ampliación y transmisión.

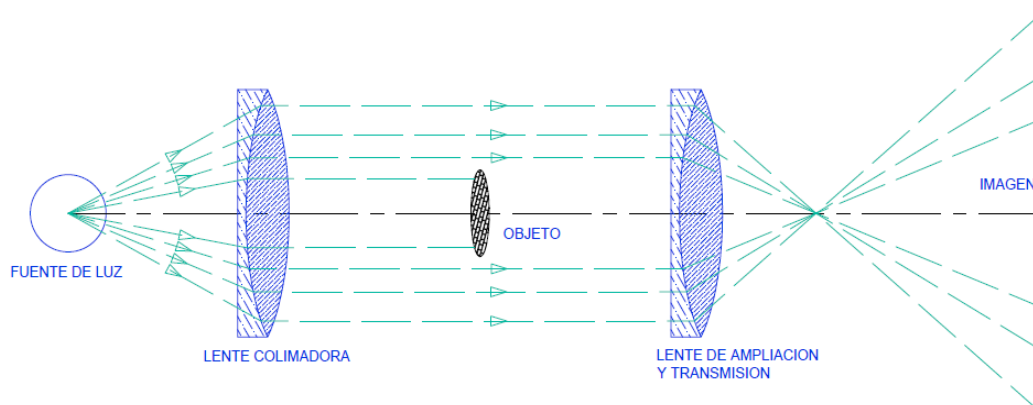


Figura 2.2: Sistema óptico general del proyector

- Grupo colimador: tiene como función transformar la luz original en un haz de rayos paralelos de intensidad uniforme en toda la zona de iluminación del objeto. El material de estas lentes debe de soportar la alta temperatura que le transmite la fuente de luz para no provocar distorsiones en la imagen.
- Grupo de ampliación y transmisión: sistema de lentes encargado de amplificar y proyectar la imagen reflejada o la silueta del mensurando, según la técnica de iluminación utilizada. Los proyectores de perfiles poseen diferentes ampliificaciones ópticas, habitualmente desde 10

aumentos hasta 200 aumentos. Estas ampliaciones permiten ver con mayor detalle los perfiles de las piezas, facilitando el enrase sobre sus contornos y la determinación de características constructivas. En ocasiones puede ser necesario una vista completa de la pieza o de una parte detallada de ella, por lo que se suele jugar con los diferentes tipos de enfoque. Los diferentes juegos de lentes de aumento suelen montarse sobre una misma torre, y basta con girar dicha torre para obtener diferentes aumentos.

Estos grupos, pueden ser monolentes o multilentes. Mediante la construcción de grupos multilentes se reducen errores como la *aberración esférica* (los rayos de la periferia de la lente no convergen en el mismo plano que los rayos que atraviesan zonas cercanas al centro de la lente).

III. Pantalla de observación

Elemento sobre el que aparece la imagen reflejada o la silueta del objeto bajo medición. Esta es una de las dimensiones características de un proyector de perfiles, ya que la dimensión del sistema óptico y las dimensiones externas del proyector son función del diámetro de la pantalla.



Figura 2.3: Pantalla de observación

La pantalla de proyección suele ser de vidrio esmerilado, una textura superficial, que evita el deslumbramiento y permite la visualización desde diferentes ángulos.

Dependiendo del diseño, puede ser perfectamente horizontal (lo que es incómodo para la inspección), parcialmente inclinada (es cómodo cuando se requiere la utilización de plantillas) o verticales (las más comunes por su comodidad para la observación).



La pantalla puede ser fija o puede girar sobre un anillo soporte para la medición de ángulos gracias a la cuadrícula impresa en la pantalla y un goniómetro (analógico o digital).

Los proyectores de perfiles deben situarse en recintos o áreas de bajo nivel de iluminación, para facilitar el contraste de la imagen, pudiéndose también efectuar las lecturas mediante sensores de transición claro-oscuro, o viceversa.

IV. Mesa soporte

La mesa soporte define el campo de medida del instrumento, es otra de las características importantes de un proyector de perfiles. La misión de la mesa es situar en el plano focal aquellas características del mensurando que se desean observar, con objeto de poder lograr un buen enrase de las líneas que las definen con las líneas del retículo de la pantalla de observación, o con las líneas de las plantillas de verificación.

La mesa soporte suele tener dos raíles perpendiculares (correspondientes a los ejes X e Y) que pueden desplazarse para la determinación de distancias gracias a los micrómetros que me proporcionan la posición respecto a una referencia determinada.

Con lo cual el movimiento de la mesa soporte es tridimensional, en el eje Z es para enfocar la pieza, y en los ejes X e Y para efectuar las mediciones.

El sistema de movimiento varía en función del modelo de proyector, son sistemas diferentes de fijación de la pieza y movimiento si es de tipo horizontal o de tipo vertical.

En ocasiones, la mesa soporte está adaptada para acoger sistemas de fijación de piezas para evitar el movimiento accidental de la pieza mientras se están efectuando mediciones o inspecciones.

2.6 PROYECTOR DE PERFILES DEL LABORATORIO DE METROLOGÍA DE LA UPCT

A continuación se detallan algunos datos e imágenes del proyector de perfiles del que dispone la Universidad Politécnica de Cartagena en el laboratorio de Metrología del departamento de ingeniería de materiales y fabricación.

Marca	PRAXIS
Modelo	PO-360-VTG
Tipo	Eje vertical
Iluminación	Episcópica y diascópica
Lentes	Aumentos de 10x y 20x (montado)
Apreciación	0.001 mm
Campo de medida	50 x 60 mm aproximadamente

Tabla 2.2: Datos del proyector de perfiles



Figura 2.4: Proyector de perfiles



Figura 2.5: Pantalla de observación y goniómetro digital



Figura 2.6: Mesa soporte y micrómetro digital

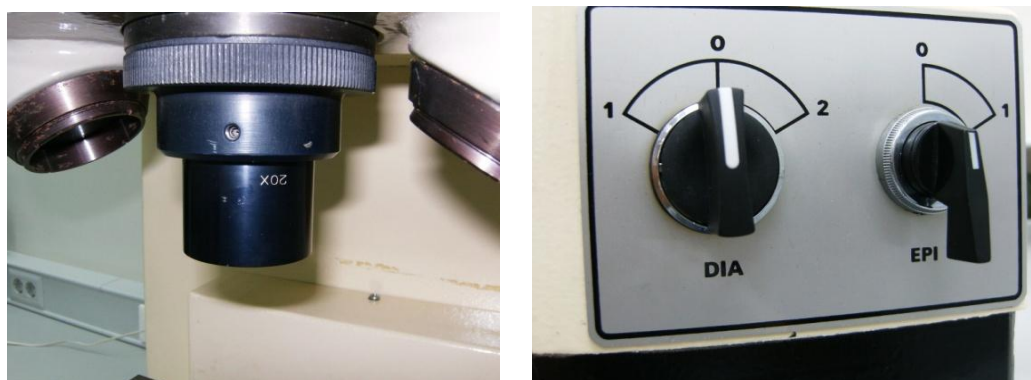


Figura 2.7: Óptica e iluminación (diascópica o episcópica)

Estudio teórico del método de la flecha

En el presente capítulo se realizará un análisis teórico del método de la flecha para medición del radio en circunferencias y sectores circulares.

3.1 INTRODUCCIÓN

En la industria de hoy, una de las necesidades que se pueden tener a la hora de inspeccionar un pieza es la medición del radio de una circunferencia interior o de un sector circular. Por ejemplo puede ser necesario verificar el radio de un cojinete, un agujero realizado por un taladro o una prensa con cabeza semicilíndrica.

Existen varios métodos para realizar dicha labor, siendo unos más fiables que otros.

Es objeto de dicho capítulo, el análisis del método de la flecha para la medición del radio interior de una pieza, con la intención de arrojar luz sobre los factores determinantes que influyen sobre la incertidumbre.

3.1.1 DEFINICIÓN DE EJES ABSOLUTOS Y RELATIVOS

Antes de proseguir con el capítulo se hace necesario definir una serie de ejes sobre los que referiremos las mediciones y que tendrán importancia en el desarrollo.

- Ejes absolutos: Los ejes marcados en rojo (x e y) son ejes absolutos definidos de manera arbitraria al comienzo del proceso de medición. Pueden tomarse haciendo cero con el micrómetro digital, o en cualquier valor de la escala del micrómetro analógico.
- Ejes relativos circunferencia: Los ejes representados en negro (ξ y η) se corresponden a ejes relativos que tienen el origen en el centro de la circunferencia, determinando la simetría de la figura. Son ejes fijos en todo momento, pero varían su posición al mover la pieza sobre la mesa soporte.
- Ejes relativos de la pantalla de observación: Son aquellos de color azul claro (x' e y') que representan la posición de la cuadrícula de la pantalla de observación. Estos ejes varían sobre el plano de observación al desplazar la mesa soporte o al girar la pantalla de observación mediante el tornillo de giro de la misma. Mediante su movimiento se determinan las coordenadas de los puntos de medición.

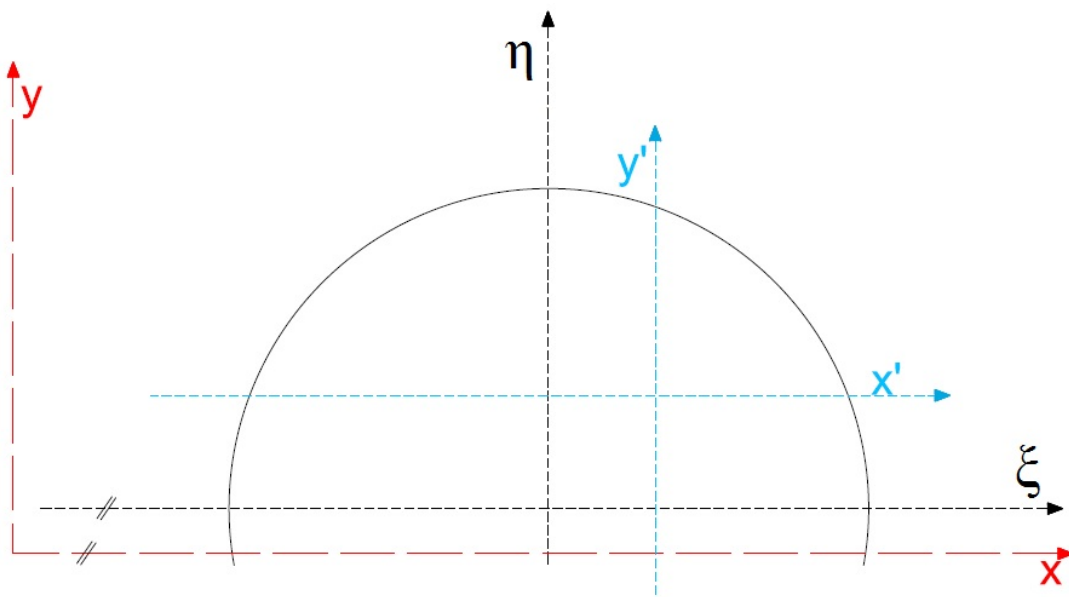


Figura 3.1: Ejes relativos y absolutos

3.2 EL MÉTODO DE LA FLECHA

El método de la flecha es una técnica que permite medir el radio de una circunferencia con un proyector de perfiles.

El método consiste en la obtención de los valores de la cuerda (c) y la flecha (f) de una circunferencia o sector circular. Estos valores se determinarán a partir de las coordenadas de los puntos A, B, y de la tangente T, indicados en la figura 3.2.

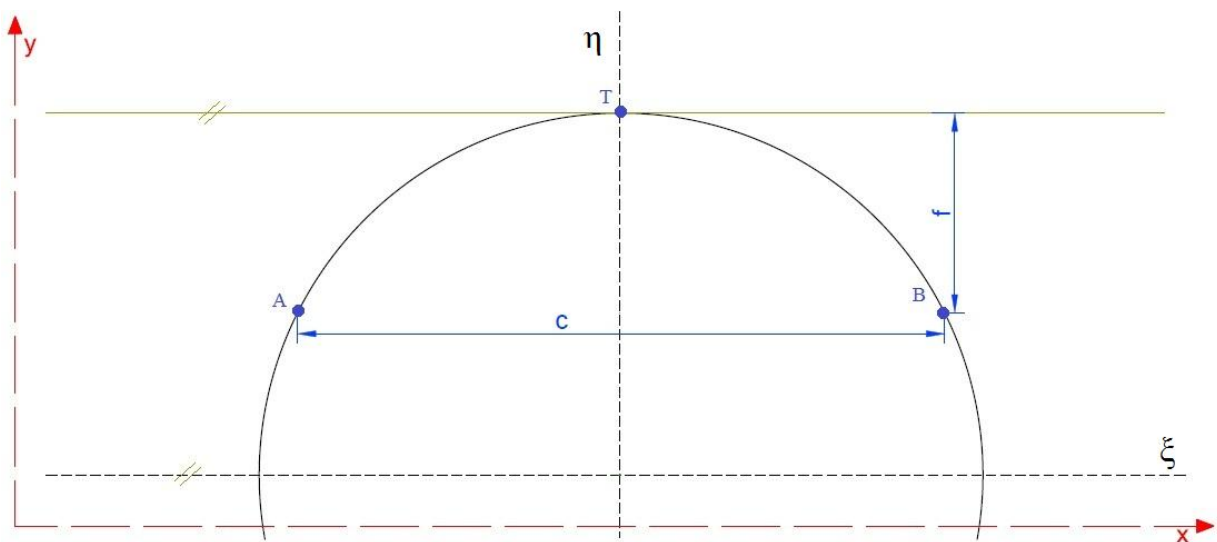


Figura 3.2: Método de la flecha

Suposiciones:

El método de la flecha es un método sencillo, que presupone unas condiciones ideales para el cálculo de la flecha:

- Circunferencia perfecta

Se toma la suposición de que la circunferencia que estamos midiendo es perfecta en todos sus puntos y no tiene errores de circularidad, es decir, cumple la ecuación para todos sus puntos:

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad (3.1)$$



- Máquina en perfecto estado

Los husillos se encuentran en perfecto paralelismo con la cuadrícula de la pantalla y eso nos proporciona siempre una tangente (punto T), en el punto determinado por el corte de la zona superior de la circunferencia y el eje η .

3.2.1 CÁLCULO DE LA CUERDA Y LA FLECHA

Para determinar la cuerda y la flecha, en un principio, es imprescindible establecer un origen de coordenadas absoluto de manera arbitraria (ver ejes x e y en *Figura 3.1*) sobre el que irán referidas todas las medidas.

De esta manera, la cuerda se calcula como:

$$c = x_B - x_A \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta que la medida vertical del punto A y B son la misma:

$$y_A = y_B = y_{A,B} \quad (3.3)$$

Podemos calcular la flecha como:

$$f = y_T - y_{A,B} \quad (3.4)$$

3.2.2 CÁLCULO DEL RADIO

Tras el cálculo de la cuerda y de la flecha y bajo las suposiciones iniciales para el método de la flecha explicadas anteriormente, se procede al cálculo del radio.

Estudiamos la relación trigonométrica del radio con el triángulo básico del método de la flecha.

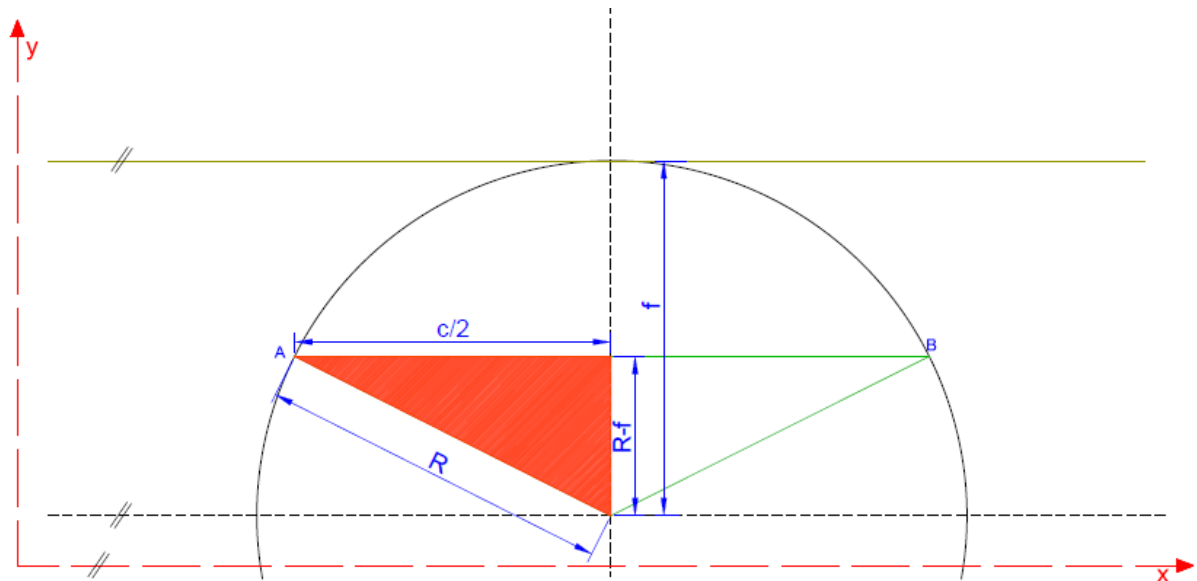


Figura 3.3: Triángulo básico del método de la flecha

Según la relación trigonométrica que puede apreciarse en la figura 3.3, escribimos:

$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (R - f)^2 \rightarrow R^2 = \frac{c^2}{4} + R^2 + f^2 - 2 R f$$

Con lo que nos queda la **ecuación básica del método** de la flecha:

$$R = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad (3.5)$$

Esta ecuación es la que nos permite calcular el radio de la circunferencia o sector circular midiendo una cuerda y una flecha.

Es la relación más importante del método de la flecha, y es consecuentemente, la ecuación de referencia sobre la que realizaremos los posteriores estudios.

3.2.3 CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE

Según la ecuación básica del método de la flecha (3.5), la consecución de la magnitud del radio depende de las medidas de la cuerda y de la flecha:

$$R = f(c, f)$$

La expresión de la varianza compuesta según la *ley de propagación de varianzas* para medidas independientes es:

$$u_R^2 = \sum_{i=1}^q \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}_i}^2 u_i^2 \quad (3.6)$$

Aplicado a nuestro caso particular:

$$u_R^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial c} \right)^2 u_c^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial f} \right)^2 u_f^2 \quad (3.7)$$

Las derivadas parciales son:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial c} \right) = \frac{c}{4f} \quad \left(\frac{\partial R}{\partial f} \right) = \frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2} \quad (3.8)$$

Con lo que la expresión de la varianza compuesta del radio queda:

$$u_R^2 = \left(\frac{c}{4f} \right)^2 u_c^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2} \right)^2 u_f^2 \quad (3.9)$$

Y la incertidumbre será:

$$u_R = \sqrt{u_R^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{4f} \right)^2 u_c^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2} \right)^2 u_f^2} \quad (3.10)$$

Es pues necesario para continuar con el estudio, conocer el valor de u_c^2 y u_f^2 .

Se ha verificado de manera experimental³ que la relación entre u_c y u_f es aproximadamente:

$$\frac{u_c}{u_f} \approx 1,8 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{u_c}{u_f}\right)^2 \approx 3,25 \quad \rightarrow \quad u_c^2 \approx 3,25 u_f^2 \quad (3.11)$$

Para adimensionalizar la ecuación de la varianza compuesta, se introduce la relación de las incertidumbres de la cuerda y la flecha (3.11) en la ecuación (3.9):

$$u_R^2 = \left(\frac{c}{4f}\right)^2 u_c^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2}\right)^2 u_f^2 \rightarrow u_R^2 = 3,25 \left(\frac{c}{4f}\right)^2 u_f^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2}\right)^2 u_f^2 \rightarrow$$
$$\frac{u_R^2}{u_f^2} = 3,25 \left(\frac{c}{4f}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2}\right)^2 \quad (3.12)$$

La expresión siguiente se corresponde con la incertidumbre adimensional del radio:

$$\frac{u_R}{u_f} = \sqrt{3,25 \left(\frac{c}{4f}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2}\right)^2} \quad (3.13)$$

³ Ver anexo 1, apartado 1, donde se muestra la primera toma de datos para el cálculo de las incertidumbres asociadas a la medición de la flecha y la cuerda.

3.3 ANÁLISIS DEL MÉTODO DE LA FLECHA

El análisis del método de la flecha tiene como fin último el determinar una zona óptima para la realización de la medición de la flecha y la cuerda. Es necesario entonces, realizar un estudio de las variables que afectan a la incertidumbre del método utilizado. Obviaremos los posibles errores cometidos en el procedimiento de toma de medidas, influencia del operador, ambiente, etc.

3.3.1 IDENTIFICACIÓN DE FACTORES QUE AFECTAN A LA INCERTIDUMBRE

El método de la flecha, planteado al comienzo del capítulo, está sujeto a unas ciertas suposiciones que permiten que se aborde el problema de manera ideal. Pero son algunas de ellas las que afectan a la incertidumbre del resultado final.

Una de las suposiciones hace referencia al perfecto paralelismo entre los husillos de los ejes de la mesa con la cuadrícula de la circunferencia. Esto que de manera ideal se plantea en el método de la flecha, es complicado de conseguir, dando como resultado lo que se conoce como *error de coseno*, que determinaremos por el *ángulo de desviación* γ .

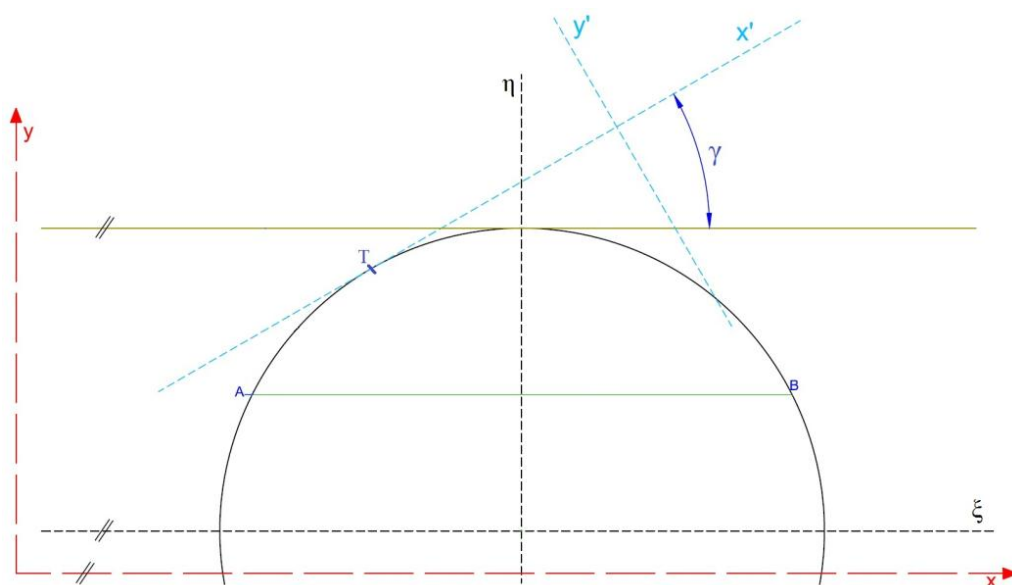


Figura 3.4: Error de coseno representado por el ángulo de desviación γ

Además de las suposiciones anteriores, se puede plantear la pregunta: ¿Influye la zona de la circunferencia donde tomo las medidas? Es decir, nos gustaría conocer si existe alguna diferencia entre tomar las medidas en una zona baja, media o superior de la circunferencia.

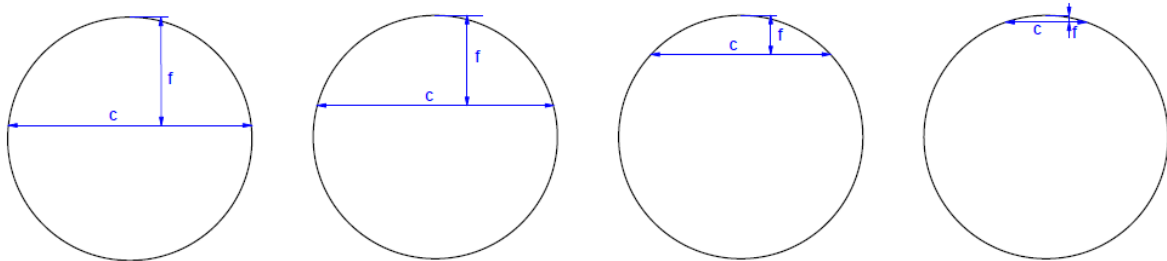


Figura 3.5: Distintas zona de medición de la cuerda y la flecha.

La determinación de la zona o posición de la cuerda y la flecha en la circunferencia viene definida por el *ángulo de posicionamiento* θ .

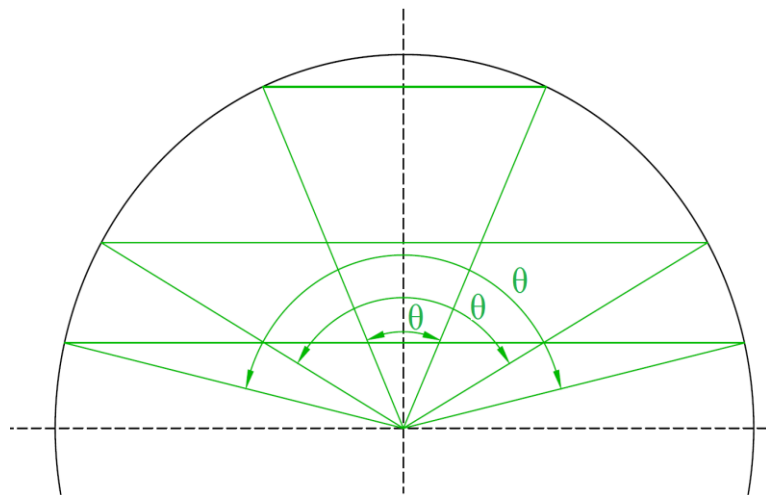


Figura 3.6: Determinación de la zona de la circunferencia mediante θ

Entonces, nuestro estudio se centrará principalmente en cómo afecta el error de coseno (ángulo γ) y la zona de medición de la circunferencia (ó ángulo de posicionamiento θ) a la incertidumbre del método de la flecha.

3.3.2 ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL ÁNGULO DE POSICIONAMIENTO θ EN LA MEDICION

Este apartado trata de estudiar cómo influye la zona de medición de la cuerda y la flecha en la incertidumbre del cálculo de R , (ver figuras 3.5 y 3.6).

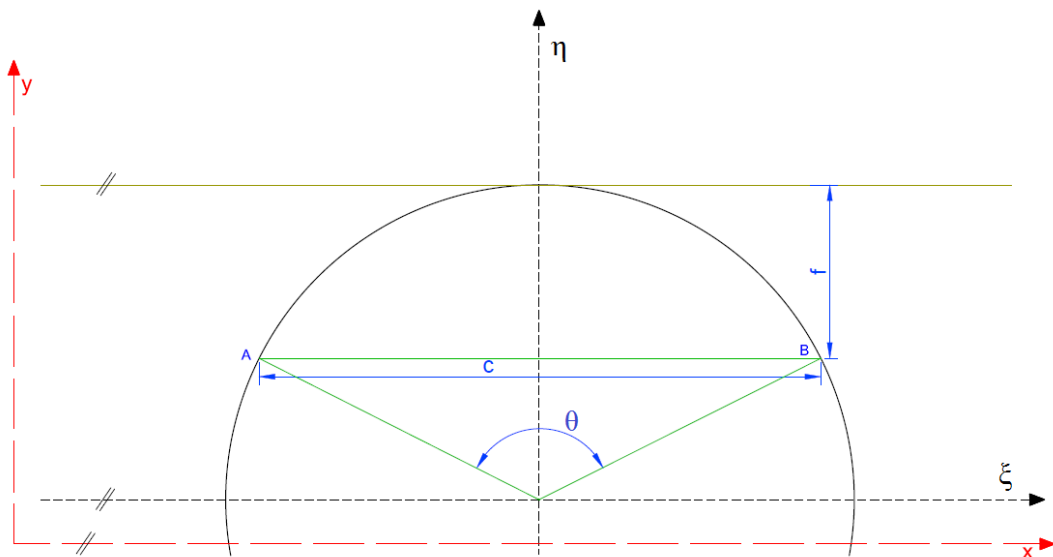


Figura 3.7: Cuerda y flecha en función del ángulo de posicionamiento θ

El análisis sobre la influencia de este factor en el proceso de medición obviará un posible error de coseno, es decir, se considerará $\gamma = 0$.

Realizamos de nuevo el análisis del triángulo básico del método de la flecha, esta vez incluyendo la variable de posicionamiento θ .

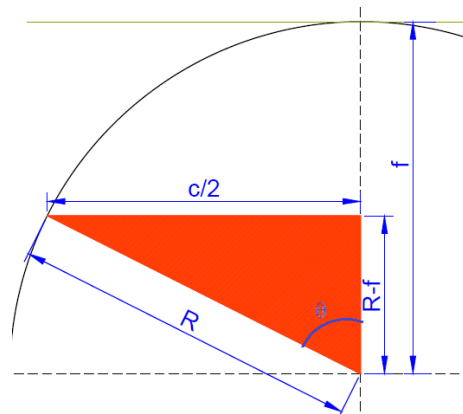


Figura 3.8: Triángulo básico

Además de la ecuación básica del método de la flecha (3.5), podemos sacar otras relaciones en función del ángulo de posicionamiento:

$$R = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

Donde:

$$c = 2 R \operatorname{sen} (\theta/2) \quad (3.14)$$

$$f = R (1 - \cos (\theta/2)) \quad (3.15)$$

- Estudio de la incertidumbre en función del ángulo de posicionamiento

Para el estudio de la incertidumbre de la medida indirecta del radio haremos uso de la *ley de propagación de varianzas*. Recordamos la ecuación (3.13) que presenta la incertidumbre adimensionalizada:

$$\frac{u_R}{u_f} = \sqrt{3,25 \left(\frac{c}{4f} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2} \right)^2}$$

Introducimos las ecuaciones de la cuerda (3.14) y de la flecha (3.15) en función de θ en la ecuación anterior (3.13):

$$\frac{u_R}{u_f} = \sqrt{3,25 \left(\frac{2 R \operatorname{sen} (\theta/2)}{4 R (1 - \cos (\theta/2))} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{(2 R \operatorname{sen} (\theta/2))^2}{8 (R (1 - \cos (\theta/2)))^2} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{3,25 \left(\frac{\operatorname{sen} (\theta/2)}{2 (1 - \cos (\theta/2))} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 (\theta/2)}{2 (1 - \cos (\theta/2))^2} \right)^2} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \cos (\theta/2))^2 = \cos^2(\theta/2) + 1 - 2 \cos (\theta/2) \\ - \operatorname{sen}^2(\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - 1 \end{array} \right\}$$

$$= \sqrt{3,25 \left(\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2(1 - \cos(\theta/2))} \right)^2 + \left(\frac{\cos^2(\theta/2) + 1 - 2 \cos(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) - 1}{2(1 - \cos(\theta/2))^2} \right)^2}$$

Por lo que la ecuación adimensionalizada de la incertidumbre queda:

$$\frac{u_R}{u_f} = \sqrt{\underbrace{3,25 \left(\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2(1 - \cos(\theta/2))} \right)^2}_Q + \underbrace{\left(\frac{\cos^2(\theta/2) - \cos(\theta/2)}{(1 - \cos(\theta/2))^2} \right)^2}_P} \quad (3.16)$$

Siendo Q el término correspondiente a la aportación de la cuerda y P el término correspondiente al de la flecha.

$$Q = 3,25 \left(\frac{c}{4f} \right)^2 = 3,25 \left(\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2(1 - \cos(\theta/2))} \right)^2 \quad (3.17)$$

$$P = \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{8f^2} \right)^2 = \left(\left(\frac{\cos^2(\theta/2) - \cos(\theta/2)}{(1 - \cos(\theta/2))^2} \right)^2 \right)^2 \quad (3.18)$$

La ecuación anterior (3.16) refleja que la incertidumbre depende claramente del ángulo que posiciona la cuerda y la flecha.

Para hacer un estudio en función de θ , se procede a desarrollar un código⁴ en MATLAB®, que calcula los términos P y Q en función del ángulo de posicionamiento y los traslada a la ecuación anterior (3.16). De este modo, se puede obtener fácilmente una representación gráfica de la incertidumbre en función del ángulo de posicionamiento.

Las siguientes figuras representan la incertidumbre adimensional del radio, ecuación (3.16), en función de θ :

⁴ Consultar anexo 2. Códigos de Matlab®. Código 1 (incertidumbretetah1) y código 2 (incertidumbretetah2)

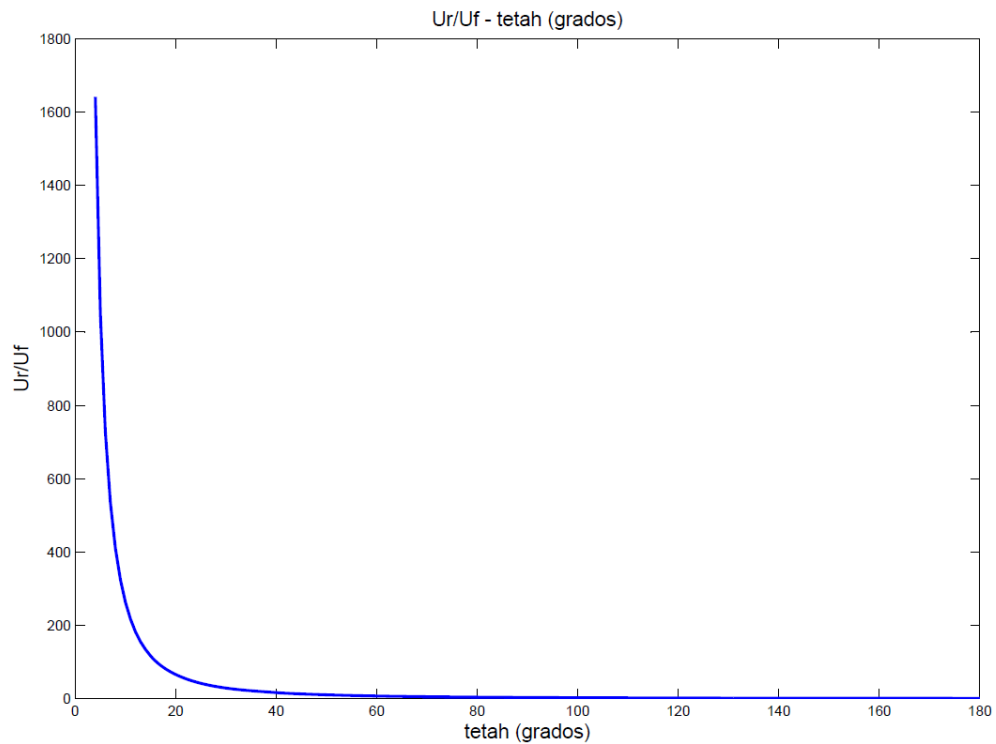


Figura 3.9: Representación de la incertidumbre adimensional en función de θ (desde 1° hasta 180°)

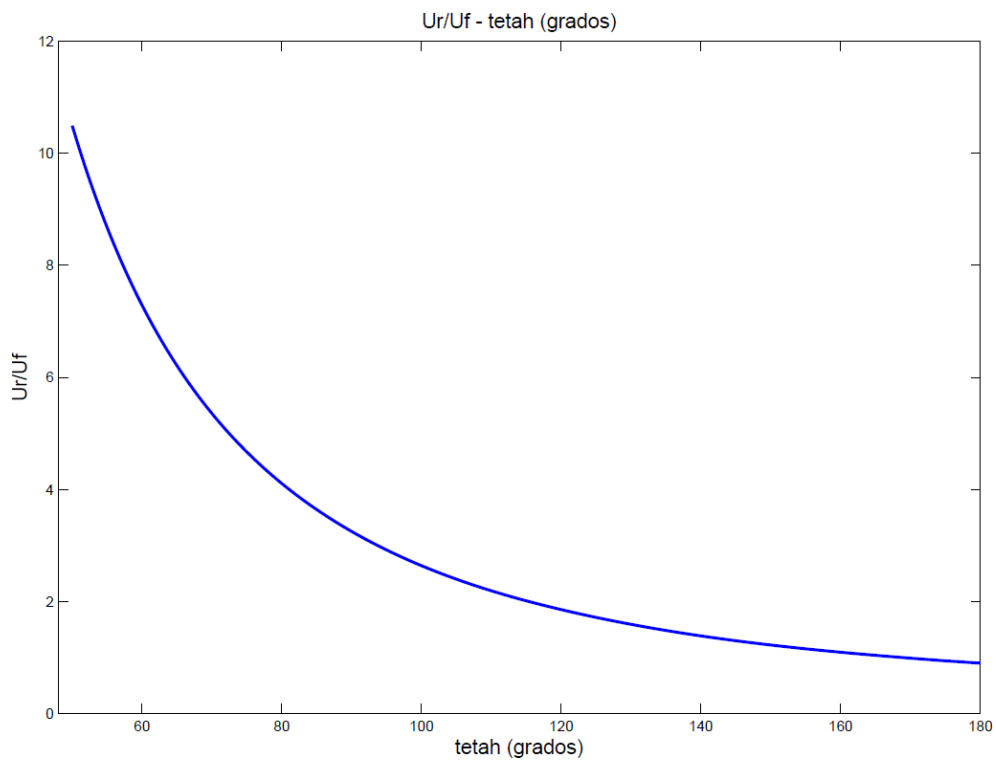


Figura 3.10 Representación de la incertidumbre adimensional en función de θ (desde 50° hasta 180°)



Podemos observar en las figuras anteriores como la incertidumbre adimensional tiene unos valores muy grandes para ángulos de posicionamiento muy bajos ($\theta < 10^\circ$).

Si continuamos aumentando los valores de θ (figura 3.10) vemos que la incertidumbre, aunque más pequeña que en comparación con los valores inferiores a 10° , sigue teniendo una tendencia decreciente, obteniéndose el mínimo en $\theta = 180^\circ$.

A continuación nos surge la duda de ¿qué factor aporta mayor grado de incertidumbre?, ¿la cuerda o la flecha?. Es por ello que con un código similar de Matlab® se procede a representar gráficamente los términos correspondientes P (flecha) y Q (cuerda).

Pudiendo observar de manera rápida, que la mayor contribución a la incertidumbre para valores bajos de θ es el término de la flecha, aunque llegado un punto ($\theta \approx 95^\circ$) se hace menos representativo que la cuerda.

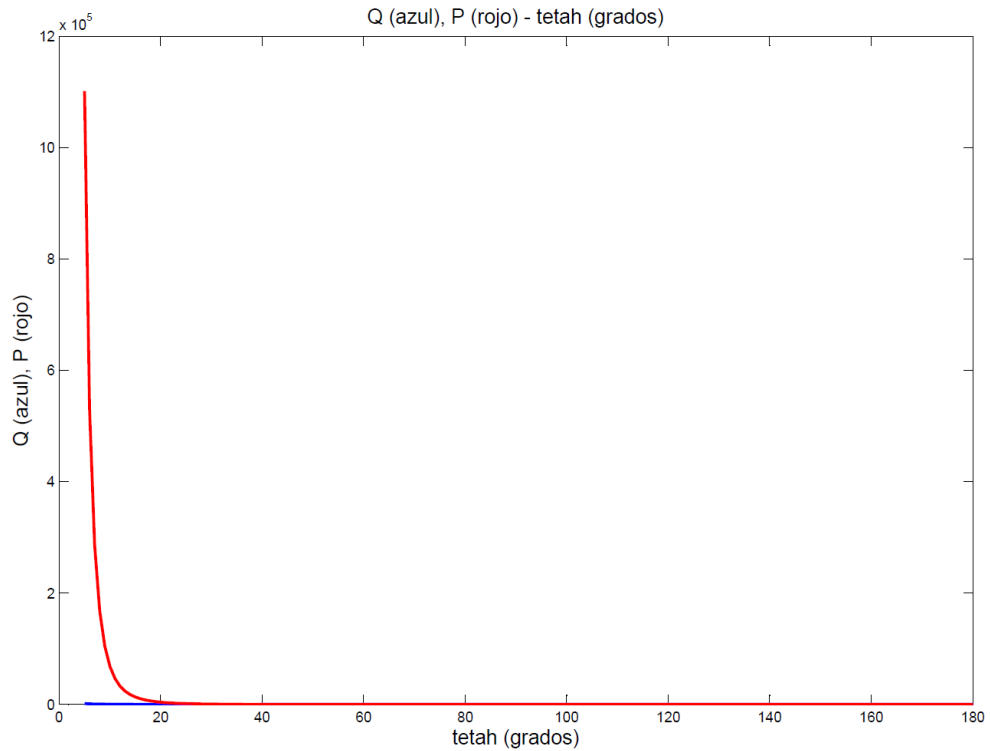


Figura 3.11: Representación de los factores P y Q en función de θ (desde 1° hasta 180°)

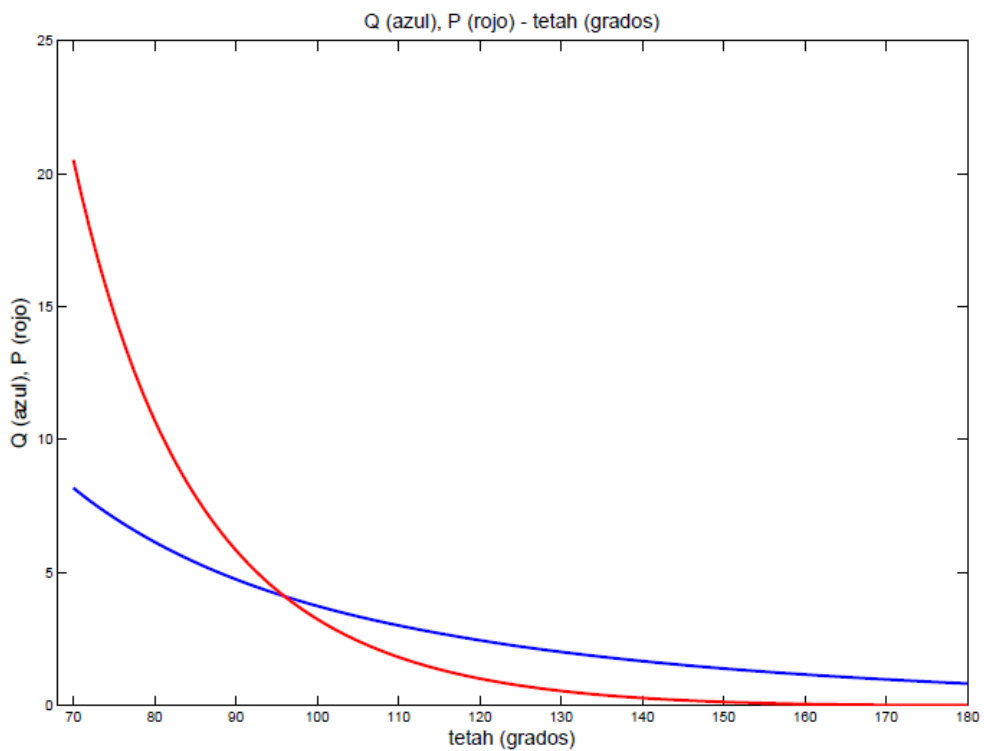


Figura 3.12: Representación de los factores P y Q en función de θ (desde 70° hasta 180°)

- **Estudio del error relativo en función del ángulo de posicionamiento**

Debido a la posibilidad real de equivocarse (dentro de unos márgenes admisibles) en la medición a consecuencia de la influencia de diversos factores, humanos, ambientales o de la propia máquina, se pretende analizar qué parámetro (cuerda o flecha) afecta en mayor medida al resultado final en función del ángulo de posicionamiento.

Para ello se lleva a cabo un análisis⁵ similar estudiando el error relativo cometido por la variación de una micra en la cuerda ($\Delta c=1 \mu\text{m}$) y en la flecha ($\Delta f=1 \mu\text{m}$).

El error relativo del radio surge de la comparación del radio ideal con el radio que se puede medir tras cometer un fallo en la medición de la cuerda($c+\Delta c$) o de la flecha ($f+\Delta f$).

$$E_R^{rel} = \frac{\text{Error del radio}}{\text{Radio}} = \frac{|E_R|}{R} = \frac{|R - R^*|}{R} \quad (3.19)$$

Representamos de manera conjunta el error relativo en ambos parámetros(E_r^{cuerda} de color azul y E_r^{flecha} de color rojo):

⁵ Consultar anexo 2: Código Matlab®. Código 3 (incrementos)

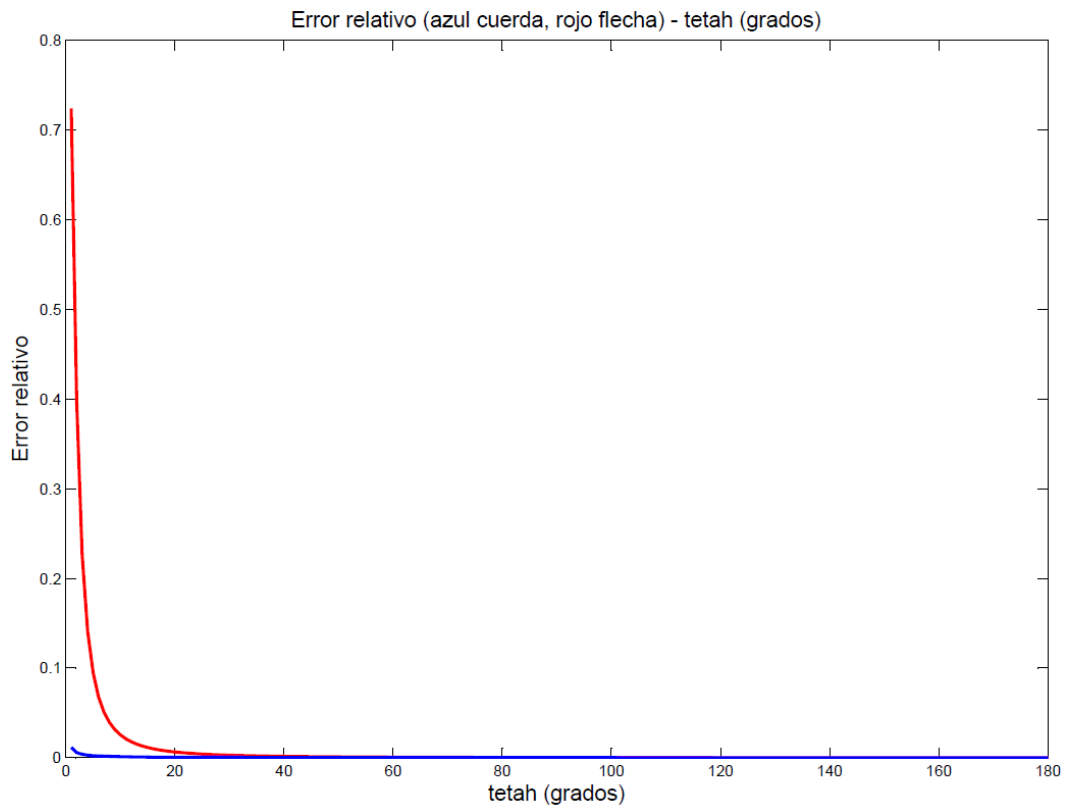


Figura 3.13: Error relativo teniendo un fallo de una micra en función de θ (1° hasta 180°)

Puede observarse como el error relativo correspondiente a una desviación de una micra es mucho más importante en la flecha para valores de θ inferiores a 20° .

Representando la misma gráfica ampliada para valores de θ a partir de 60° (ver figura 3.14), observamos que se invierte la importancia (θ en torno a 125°) de un error cometido en la medición, pasando a repercutir más un fallo de una micra en la cuerda que en la flecha.

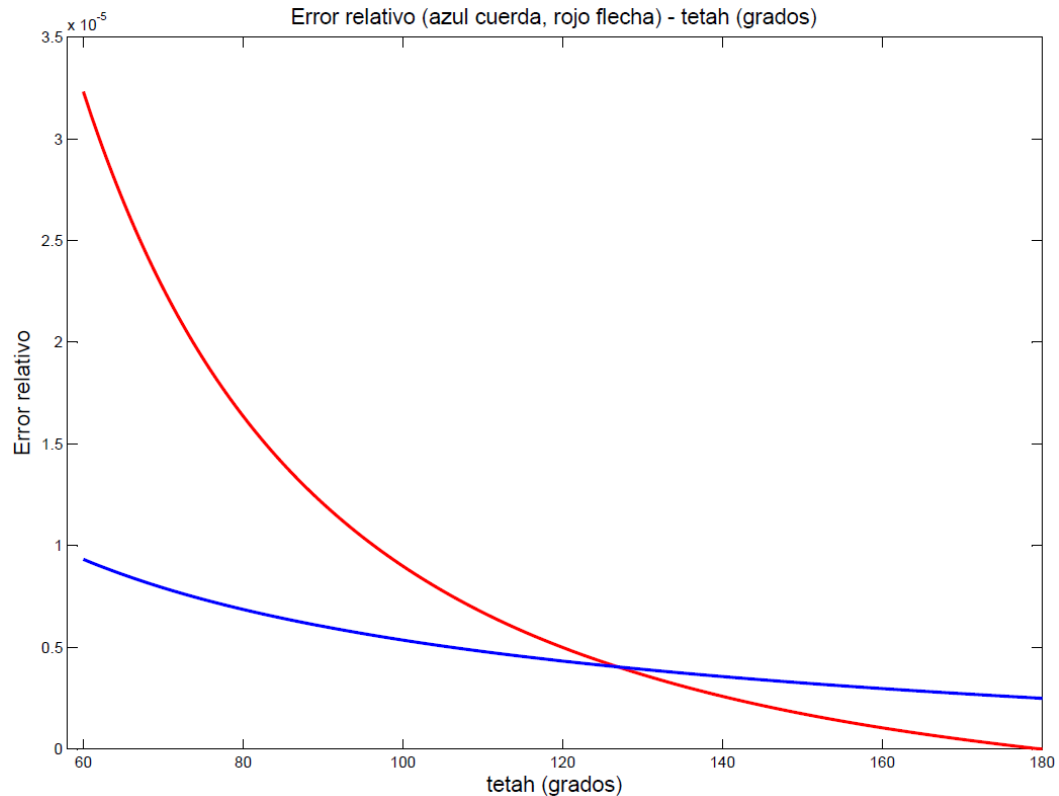


Figura 3.14: Error relativo teniendo un fallo de una micra en función de θ (60° hasta 180°)

- Conclusiones

A raíz de los desarrollos de las ecuaciones anteriores y de las representaciones gráficas se pueden destacar tres conclusiones sobre la incertidumbre en función del ángulo de posicionamiento:

- A valores muy bajos del ángulo de posicionamiento θ (zona superior de la circunferencia) la incertidumbre se dispara y es muy grande. El término correspondiente a la flecha es el que origina ese comportamiento tan acusado en valores pequeños θ .
- Un incremento de θ origina que el término P correspondiente a la influencia de la flecha disminuya, y por consecuencia la incertidumbre de la medida también disminuye. Por lo que se puede sacar la conclusión de que la zona óptima para tomar las mediciones es la zona central de la circunferencia ($\theta = 180^\circ$).



- Para un valor aproximado de 95° el peso que tiene el término de la cuerda en la incertidumbre se iguala al de la flecha y desde ese punto hasta los 180° el término Q (cuerda) tiene mayor repercusión sobre la incertidumbre, (ver la gráfica de la figura 3.12).

Observando las gráficas 3.13 y 3.14 correspondientes al error relativo cometido por una variación de una micra sobre el valor exacto en la cuerda y la flecha, podemos concluir:

- Un fallo en la medición de la flecha tiene gran repercusión para valores de θ pequeños.
- A partir de 125° , se hace más determinante una variación sobre el valor real de la cuerda, que en la flecha.

La conclusión más importante es que a valores muy pequeños de θ , existe una gran inestabilidad originando una mayor incertidumbre y un posible error relativo mucho mayor que lo que podría cometerse en comparación con ángulos de posicionamiento cercanos a 180° .

Entonces hay que prestar mucha atención y cuidado en obtener una buena medición de la cuerda ya que es mucho más determinante que la medición de la flecha para $\theta \approx 180^\circ$.

3.3.3 ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL ERROR DE COSENO

El siguiente parámetro para estudiar su influencia en el método de la flecha es el error de coseno.

- Definición del error de coseno

El error de coseno es la falta de paralelismo entre los husillos que mueven la mesa soporte (desplazamiento vertical y horizontal) y la cuadrícula de la pantalla de observación (ver figura 3.15).

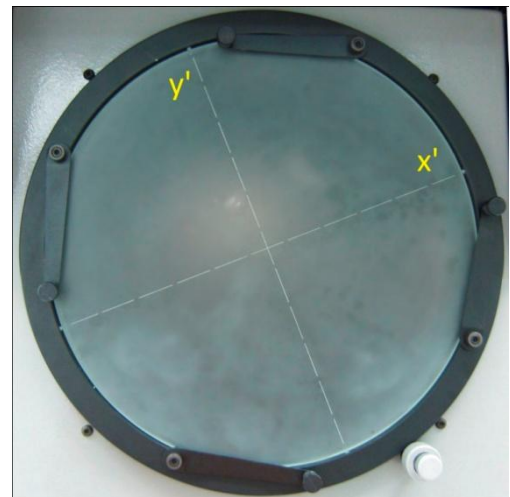


Figura 3.15: Relación entre los ejes de movimiento (imagen izquierda) y la cuadrícula de la pantalla de observación (imagen derecha)

Dicha falta de paralelismo en algunos proyectores de perfiles se puede corregir mediante el giro de la pantalla de observación o mediante la corrección en la orientación de los husillos.

Suponiendo fijos los ejes de los husillos, el movimiento de giro de la pantalla proporciona una desviación definida como γ . En la siguiente figura, se puede apreciar como los ejes relativos (x' e y') están girados un determinado ángulo γ respecto a los ejes de los husillos.

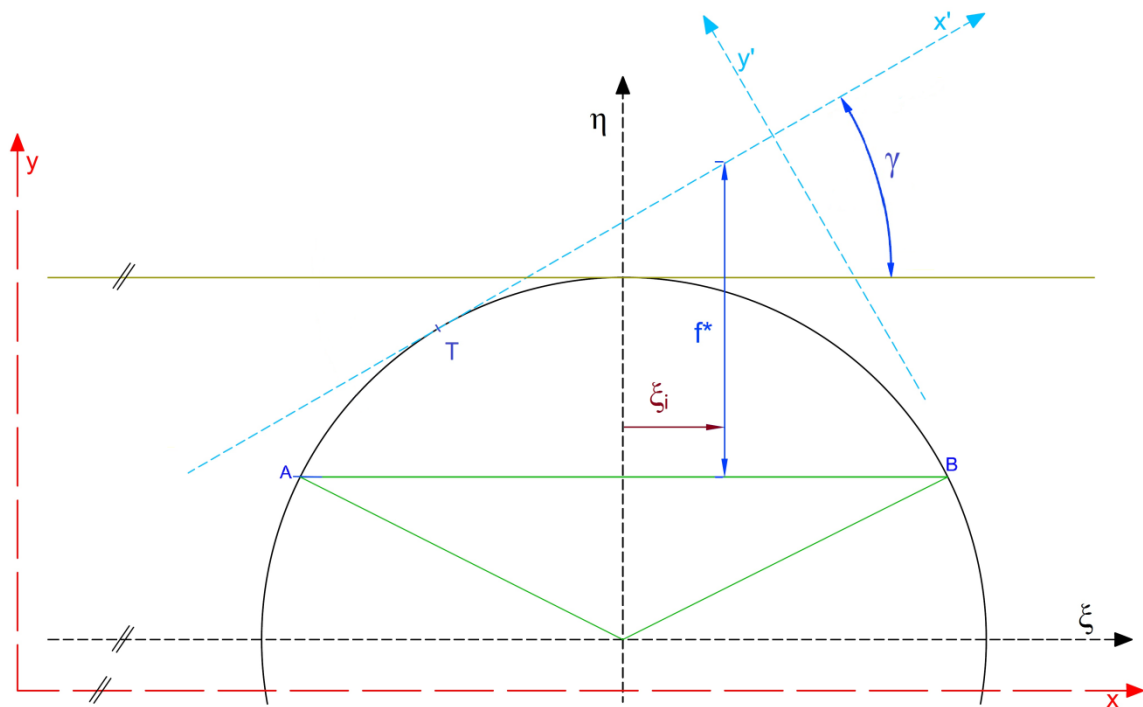


Figura 3.16: Ejes relativos de la cruceta debidos al error de coseno

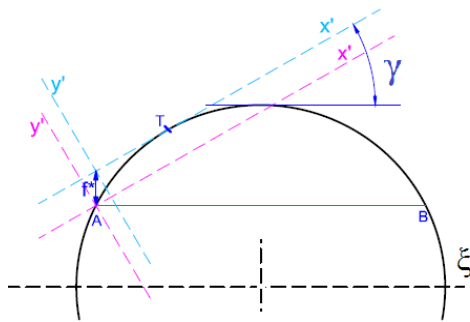
- **Consecuencias del error de coseno**

El hecho de existir un error de coseno en el proyector de perfiles supone:

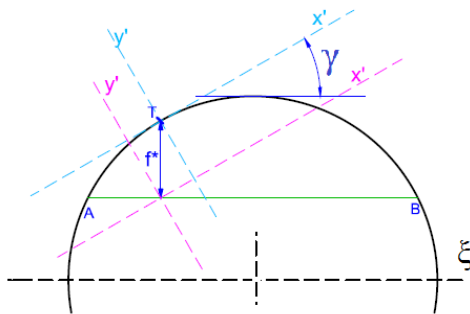
- El punto de tangencia ya no se produce en el eje η que contiene el centro de la circunferencia.
- La flecha, que se mide como diferencia de cotas, vendrá por tanto condicionada por la zona donde se realiza la medición de la tangente, (ver figuras 3.17)
- Si la flecha medida (f^*) no es como la ideal, se comete por tanto un error en la medición de la flecha, afectando así al cálculo del radio.

Además, hay que tener en cuenta que si $\gamma \neq 0$, la distancia ξ_i desde donde se realiza la tangente afectará significativamente al error de la flecha (véase la figura 3.17).

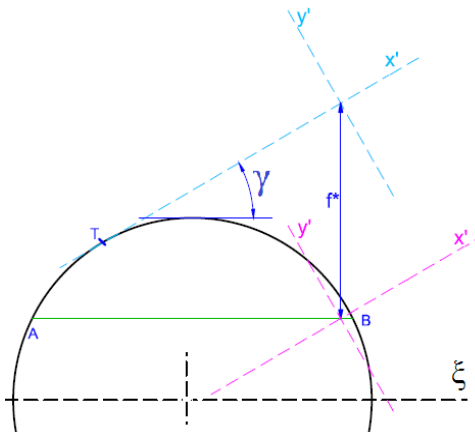
Se define *posición de tangencia* como la distancia horizontal (ξ_i) respecto al origen de coordenadas relativos de la circunferencia (ξ y η) desde donde se desplaza el husillo vertical para realizar la tangente.



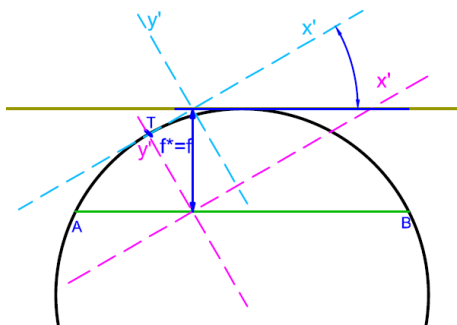
Haciendo tangente para medir la flecha desde la izquierda nos proporciona una flecha más pequeña que la ideal.



Haciendo tangente con la flecha en el punto de tangencia.



Haciendo tangente desde la zona de la derecha donde nos proporciona una flecha mayor a la ideal.



Distancia ξ_i óptima donde al desplazar el husillo para hacer tangencia, la flecha es igual a la ideal.

Figuras 3.17: Error de coseno y mediciones de la flecha en función de la posición de tangencia (ξ_i).

En las figuras anteriores los ejes relativos de la cuadrícula en color rosa se corresponden a la posición inicial de la cuadrícula antes de realizar la operación de subida con los husillos para hacer tangente. Los ejes en color azul claro se corresponden a la situación de éstos una vez hecha tangente.

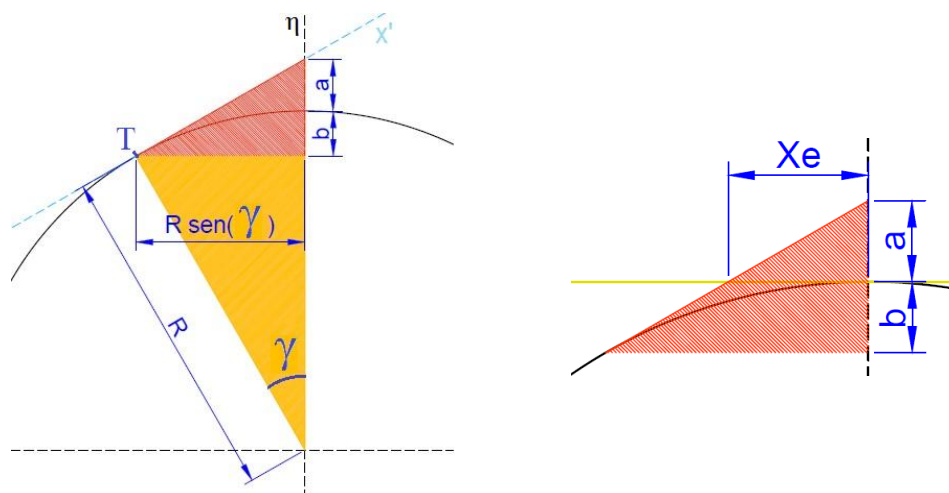
Véase que el punto de tangencia T es independiente de la zona horizontal determinada por ξ_i donde se realiza la tangente (ver figuras 3.17).

- **Análisis de la zona donde la tangente es ideal**

Tras las evidencias de los apartados anteriores y bajo el caso de presentarse un ángulo de desviación γ , es necesario volver a realizar un análisis de la ecuación básica del método de la flecha para la obtención del radio de la pieza.

Se dibujan dos triángulos definidos por el punto de tangencia:

- El triángulo rectángulo rojo superior está delimitado por los ejes relativos x' , η y el punto de tangencia T . A su vez, el cateto vertical está dividido en dos zonas separadas por el punto de intersección de la tangente ideal (línea amarilla de la figura de la derecha) o el punto superior más alto de la circunferencia.
- El triángulo rectángulo naranja está inscrito en la circunferencia delimitado por el punto de tangencia, centro de la circunferencia y por el eje relativo η .



Figuras 3.18: Triángulos determinados por el punto de tangencia

Primero buscamos las relaciones trigonométricas derivadas del triángulo rojo superior.

La tangente:
$$\tan \gamma = \frac{b + a}{R \cos \gamma} \rightarrow b + a = R \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \quad (3.20)$$

Como b es parte del radio de la circunferencia:

$$R - b = R \cos \gamma \rightarrow b = R (1 - \cos \gamma) \quad (3.21)$$

Introducimos la relación (3.21) en (3.20)

$$R (1 - \cos \gamma) + a = R \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma}$$

Despejando, sacamos el valor de a :

$$a = R \left(\frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{\cos \gamma} - \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} \right) \rightarrow a = \frac{R (1 - \cos \gamma)}{\cos \gamma} \quad (3.22)$$

Si nos fijamos en la ecuación (3.21) y el numerador de la (3.22) existe una relación entre a y b tal:

$$\frac{b}{a} = \cos \gamma \quad (3.23)$$

Por la identidad de la razón, se puede establecer la relación:

$$\frac{a}{x_e} = \tan \gamma \rightarrow \frac{R \left(\frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma} \right)}{x_e} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \rightarrow x_e = \frac{R (1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} \quad (3.24)$$

x_e se corresponde con la distancia horizontal respecto al eje η del punto que corta la tangente ideal y el eje relativo x' (ver figura 3.18). Es por tanto x_e la distancia respecto al eje η que se debe emplear para obtener la flecha ideal.

x_e nos proporciona el sentido contrario a la orientación según el eje ξ , por lo que ahora buscamos darle sentido a x_e para que nos indique si está orientado hacia la parte izquierda de la circunferencia (negativo según eje ξ), o hacia la derecha (positivo según eje ξ), con lo que el parámetro x_e orientado nos queda:

$$x_e^* = \frac{R (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma} \quad (3.25)$$

Entonces podemos decir que x_e^* nos determina la *posición de tangencia ideal* en función del radio y del ángulo de desviación que nos señala la zona izquierda o derecha de la circunferencia (ver figura 3.20).

Nota: x_e^* depende del radio, por lo que su cálculo debe realizarse de manera iterativa.

La siguiente tabla resume en función del ángulo de desviación la zona de la circunferencia donde la flecha es exacta y el signo de los valores x_e y x_e^* .

Ángulo de desviación	x_e	x_e^*	Zona de la circunferencia de flecha exacta
$\gamma > 0$	positivo	Negativo	Izquierda
$\gamma < 0$	negativo	Positivo	Derecha

Tabla 3.1: signos de la distancia respecto a η para obtener la flecha ideal

Observando la ecuación anterior, la posición de tangencia ideal es dependiente del radio, pero viene determinada por un ángulo δ independiente de él, como puede apreciarse en la siguiente figura:

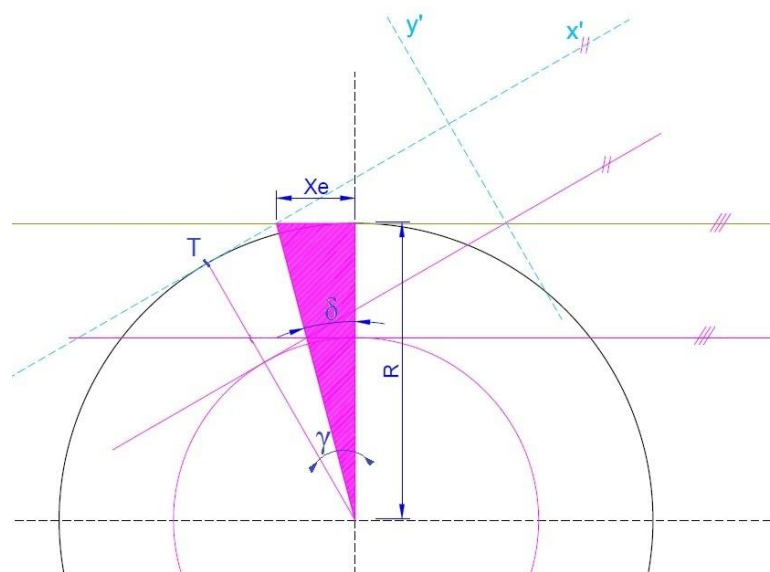


Figura 3.19: Ángulo δ independiente del radio

De la figura anterior se saca la relación:

$$\tan \delta = \frac{x_e}{R} = \frac{\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\operatorname{sen} \gamma}}{R} = \frac{1 - \cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} \rightarrow \delta = \operatorname{atan} \left(\frac{1 - \cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} \right) \quad (3.26)$$

Y se corrobora lo que se aprecia: el ángulo δ que determina la zona donde la flecha es exacta, es independientemente del radio.

Se puede constatar que el ángulo que define la zona donde la flecha es exacta (posición de tangencia ideal) es la mitad de gamma:

$$\delta = \gamma/2 \quad (3.27)$$

- Desarrollo de la ecuación básica del método de la flecha en función de γ

Es notable entonces, que el tener un cierto ángulo γ de desviación nos puede proporcionar una flecha errónea en función de la distancia ξ_i desde la que desplazemos el husillo vertical para realizar tangente.

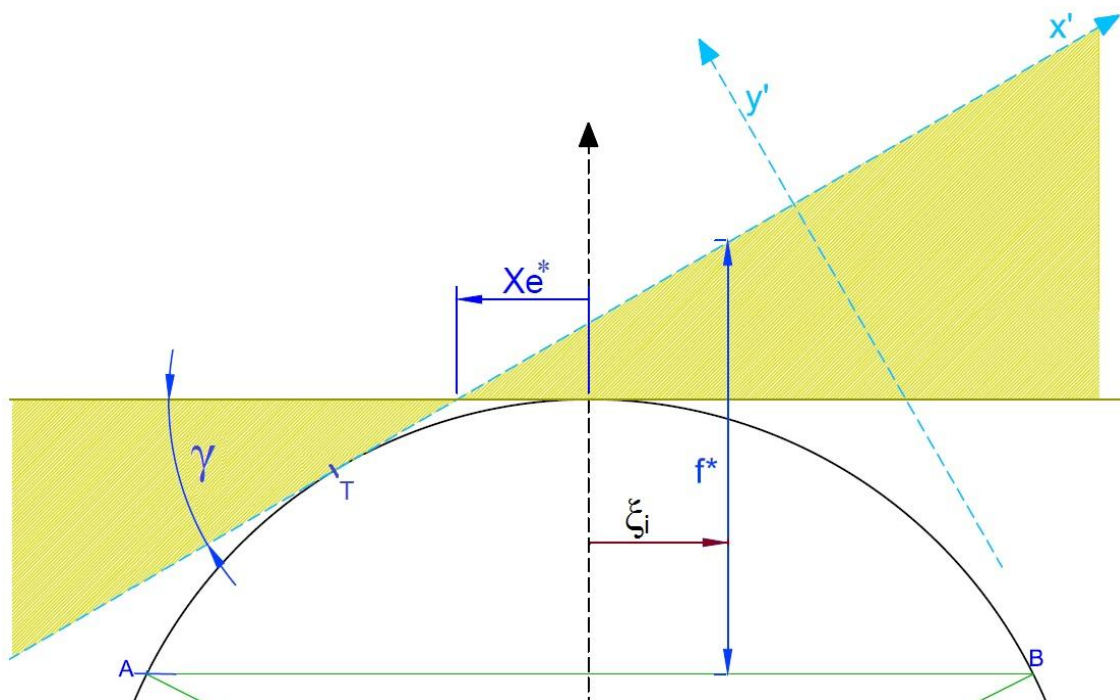


Figura 3.20: Error cometido por la flecha según la distancia ξ_i



La flecha real f^* obtenida en el proceso de medición viene determinada por la posición de tangencia ξ_i .

Se puede apreciar cómo se comete un error (zona amarilla subrayada) respecto a la flecha ideal que viene delimitada por la tangente ideal. Por lo que la flecha real f^* será la suma de la flecha ideal más el error cometido (ε):

$$f^* = f + \varepsilon \quad (3.28)$$

Por lo que la flecha ideal será:

$$f = f^* - \varepsilon \quad (3.29)$$

Según la figura anterior, podemos expresar el **error de la medida de la flecha** como:

$$\varepsilon = (x_e + \xi_i) \tan \gamma = \left(\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi_i \right) \tan \gamma \quad (3.30)$$

El error tendrá un signo positivo cuando sea un error por exceso, y un signo negativo cuando sea un error por defecto, que se anulará cuando:

- Caso a: $\gamma = 0$
- Caso b: Realicemos la tangente desde la posición de tangencia ideal:

$$\xi_{i(\varepsilon=0)} = -x_e = x_e^* = \frac{R(\cos \gamma - 1)}{\text{sen } \gamma} \quad (3.31)$$

Haciendo un barrido de izquierda a derecha, el error (negativo) se irá haciendo cada vez más pequeño conforme ξ_i se vaya acercando a cero, hasta que se hace nulo en $\xi_i = x_e^*$ y posteriormente si seguimos desplazándonos hacia la derecha, el error se irá incrementando con signo positivo. (ver figura 3.20).

Introduciendo la expresión del error cometido en la flecha (3.30) en la expresión de la flecha ideal (3.29):

$$f = f^* - \varepsilon = f^* - \left(\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi_i \right) \tan \gamma \quad (3.32)$$



Llevando la expresión de la flecha obtenida (3.32) a la ecuación básica del método de la flecha:

$$R = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2} = \frac{c^2}{8(f^* - \varepsilon)} + \frac{f^* - \varepsilon}{2} \rightarrow$$

$$R = \frac{c^2}{8 \left[f^* - \left(\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi \right) \tan \gamma \right]} + \frac{\left[f^* - \left(\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi \right) \tan \gamma \right]}{2} \quad (3.33)$$

Se obtiene la **ecuación ampliada del método de la flecha** para el cálculo del radio. Esta nueva expresión depende del ángulo de desviación γ .

Cuando la desviación sea nula, la ecuación será la misma que la ecuación básica del método de la flecha (3.5).

Es una expresión donde no es posible obtener el radio de manera directa puesto que su cálculo a su vez depende de sí mismo para tener en cuenta el error cometido.

Es posible conocer la cuerda, la flecha obtenida, incluso aproximar el ángulo de desviación γ y la posición ξ , pero para hallar el radio se precisa de un método iterativo.

- **Influencia de γ . Error relativo:**

Como se ha explicado anteriormente, un pequeño error de coseno produce grandes distorsiones en la medida de la flecha, afectando posteriormente al cálculo del radio.

$$\varepsilon = \left(\frac{R(1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi_i \right) \tan \gamma$$

Según la figura 3.20, el error de la flecha (sombreado amarillo) tiene un crecimiento lineal determinado por el ángulo γ y la variación de la posición respecto al eje relativo ξ de la circunferencia.

Si adimensionalizamos el error cometido por la flecha en función del radio:

$$\varepsilon_{adim} = \frac{\varepsilon}{R} = \left(\frac{1 - \cos \gamma}{\text{sen } \gamma} + \frac{\xi_i}{R} \right) \tan \gamma \quad (3.34)$$

Podemos observar que el error adimensional cometido por la flecha es dependiente de la posición adimensional $\left(\frac{\xi_i}{R}\right)$ y del ángulo de desviación.

Realizamos un código⁶ con el que poder representar gráficamente la ecuación anterior. A continuación se representa el error adimensional en función de γ para un $\frac{\xi_i}{R} = 0$:

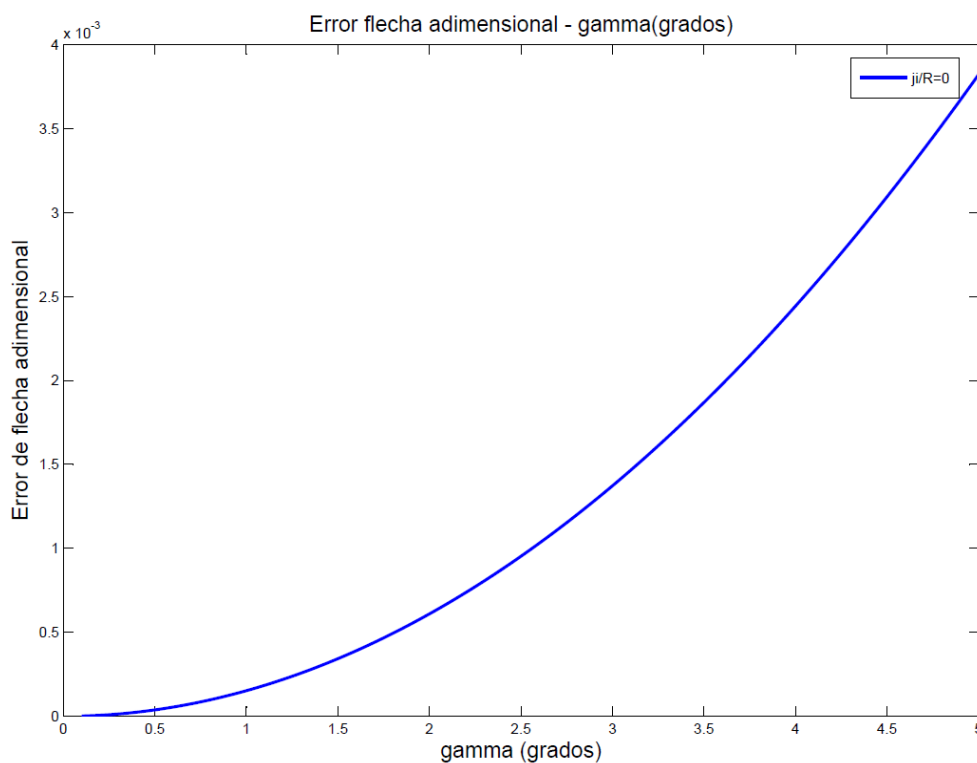


Figura 3.21: Error adimensional de la flecha en función de γ para $\frac{\xi_i}{R} = 0$

Podríamos pensar que la tendencia es exponencial, pero para un $\frac{\xi_i}{R} = 0.1$ la tendencia se suaviza:

⁶ Consultar anexo 2: Códigos de Matlab®. En concreto los códigos 4, 5 y 6 (errorgamma, errorgamma2 y errorgamma3, en 3D)

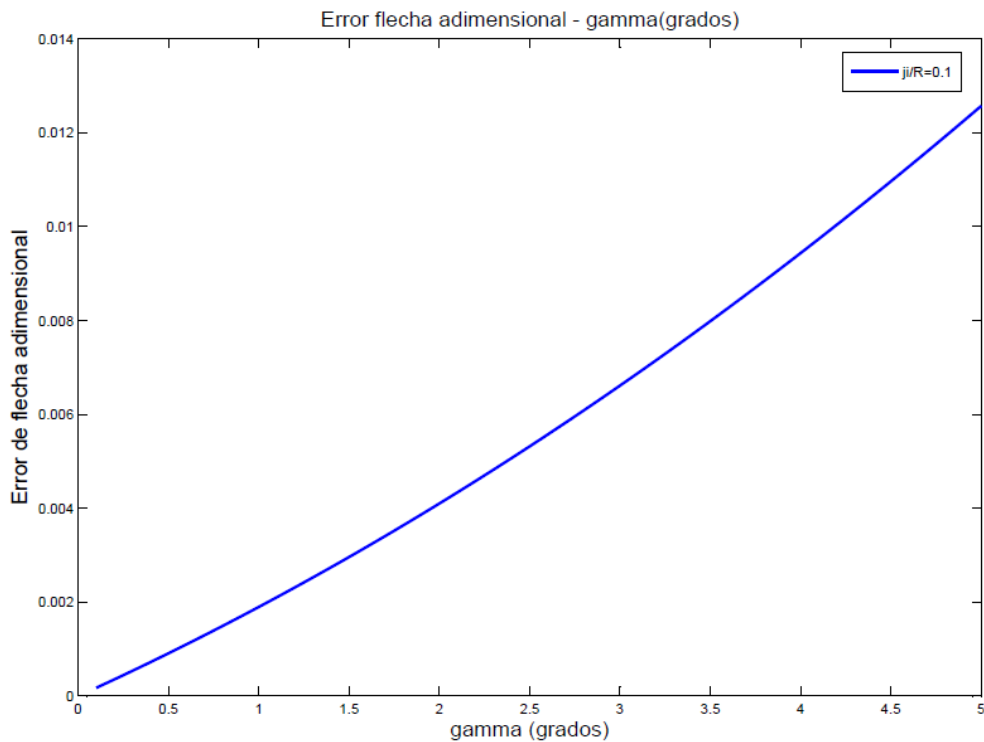
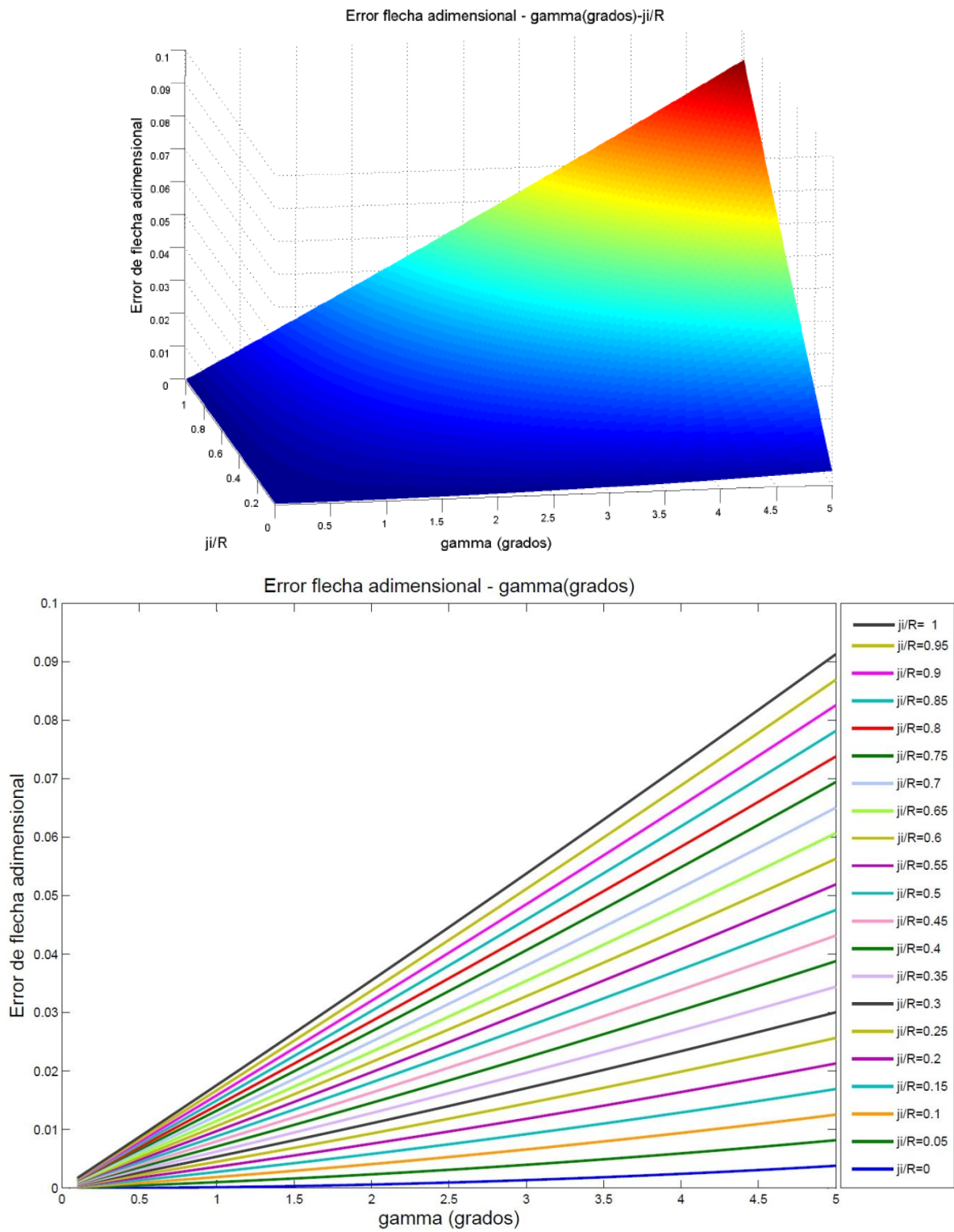


Figura 3.22: Error adimensional de la flecha para $\frac{\xi_i}{R} = 0.1$

Por lo tanto, la tendencia que tiene el error adimensional no presenta siempre la misma forma.

Es fácil darse cuenta que cuando tenemos una desviación γ no interesa alejarse demasiado de la zona central de la circunferencia donde se encuentre presumiblemente cerca x_e^* .

Representamos ahora, el error adimensional de la flecha en función del ángulo de desviación γ y de la posición relativa $\frac{\xi_i}{R}$. Las siguientes gráficas muestran que el error se acentúa conforme crece la desviación y me alejo de x_e^* .



Figuras 3.23: Error adimensional de la flecha en función de γ y $\frac{\xi_i}{R}$

La representación gráfica del error adimensional en valor absoluto para valores tanto positivos como negativos de ξ_j nos muestra una simetría respecto a $\xi_j = x_e^*$:

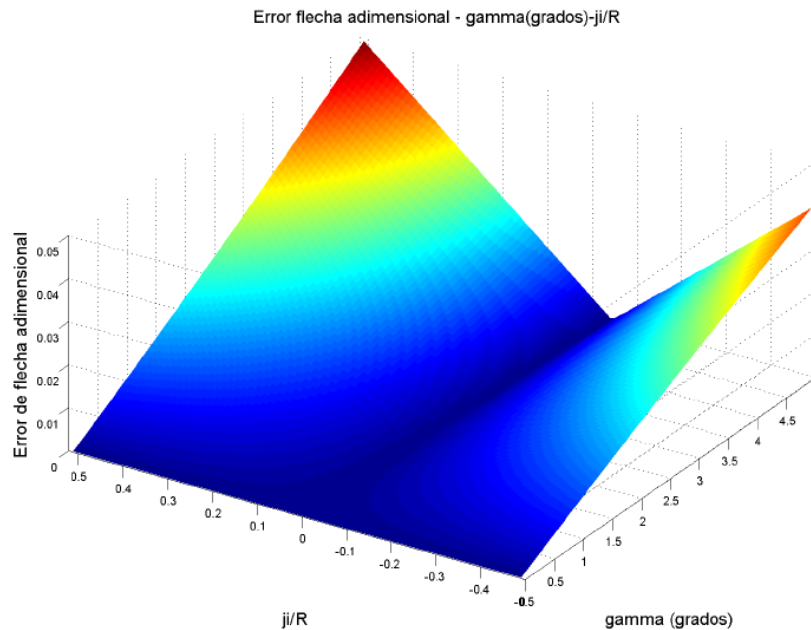


Figura 3.24: Error absoluto adimensional de la flecha en función de γ y $\frac{\xi_j}{R}$

- Conclusiones

A la vista de las expresiones y gráficas anteriores podemos concluir:

- Un ángulo de desviación γ me proporciona un error en la medición de la flecha tal que depende del mismo ángulo y de la zona o posición determinada por ξ_j .
- A la distancia $\xi_j = x_e^*$ el error de la flecha se anula
- Si tengo un error ocasionado por el ángulo de desviación, éste será mayor cuanto más alejado estemos de x_e^*

Es entonces deseable, eliminar la influencia del ángulo de desviación γ , pudiendo realizarse de dos maneras:

- Corrigiendo el error de coseno ($\gamma = 0$)
- Buscar la posición de tangencia ideal determinada por x_e^* en la que la flecha es exacta.

En la gran mayoría de ocasiones el proyector de perfiles presenta un pequeño error de coseno ($\gamma \neq 0$), imposible de determinar de manera exacta pero que influye en el resultado de la flecha, por lo que se hace necesario un procedimiento operatorio para anular dicho error.

3.3.4 INFLUENCIA CONJUNTA DE θ Y γ

En los apartados previos, hemos analizado la influencia de los dos parámetros (θ y γ) por separado. Pero es necesario realizar un estudio de la influencia de ambos parámetros sobre el resultado final, el error de medición o la incertidumbre.

Se ha realizado el análisis del error relativo del radio mediante una simulación⁷ con Matlab®.

Siendo R el radio real de la pieza y R^* el radio medido con un error de medición de flecha a consecuencia de γ .

Se representa el error relativo del radio en función de esos dos parámetros para ($\xi_i = 0$).

$$E_r = \frac{|R - R^*|}{R} = \frac{\text{Error del radio}}{\text{Radio}}$$

⁷ Consultar anexo 2. Códigos Matlab®. Código 7: gammatetah.

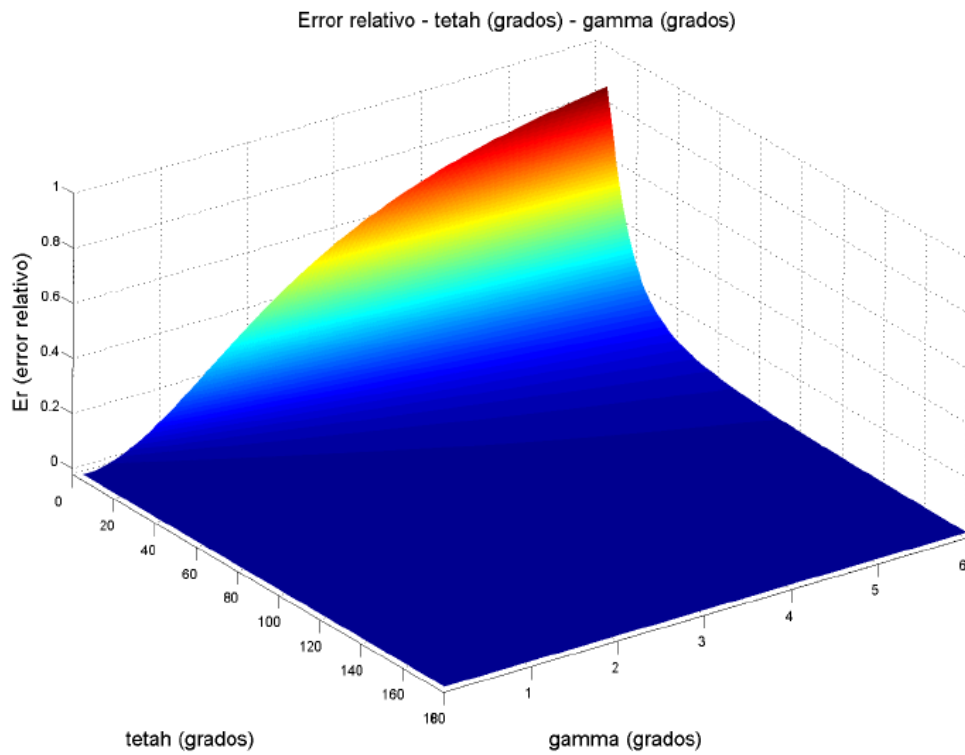


Figura 3.25: Error relativo del radio en función de θ y γ

Acercándonos más ($\theta > 60^\circ$ y $\gamma < 3$):

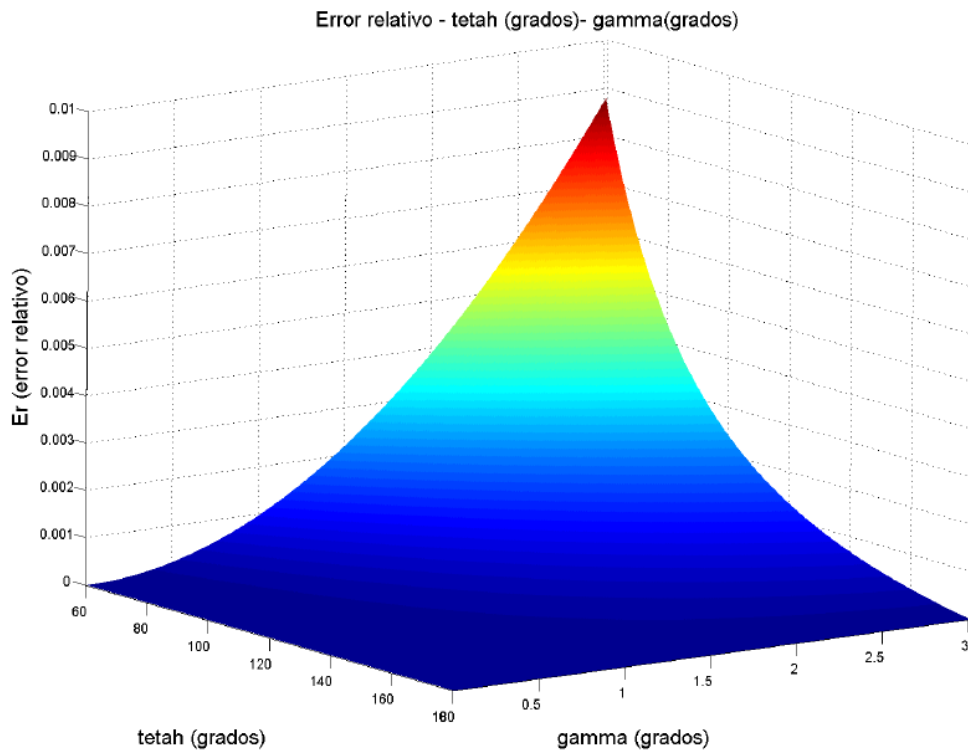


Figura 3.26: Error relativo del radio en función de θ y γ (ampliado)



- **Conclusiones**

Observamos como las gráficas anteriores están en relación con el estudio de la incertidumbre que se hizo para el caso de θ .

- Un valor alto del ángulo γ aumenta el error relativo cometido en el cálculo del radio.
- El error producido por el ángulo de desviación, afecta a la medida de la flecha, entonces, es más acentuado en valores pequeños del ángulo de posicionamiento.
- Un valor de θ próximo a los 180° reduce considerablemente el error producido por cualquier valor de γ , puesto que tiene mayor repercusión la medida de la cuerda.

Es entonces lógico pensar, junto con las conclusiones del apartado 3.3.2 (análisis de la influencia de θ en la incertidumbre), que lo ideal sería buscar un ángulo de posicionamiento $\theta \approx 180^\circ$ por dos razones:

- Atenúa bastante la influencia de γ reduciendo el error relativo.
- La incertidumbre en la medida es la mínima.

Capítulo 4

Procedimiento operatorio propuesto del método de la flecha

El presente capítulo tiene como objeto la definición de un nuevo procedimiento operatorio que aporte mayor precisión y certidumbre en el método de la flecha.

4.1 INTRODUCCIÓN

Un buen análisis del método de la flecha nos lleva a plantear un capítulo básico y fundamental de este proyecto: la definición de un procedimiento operatorio.

Este procedimiento está basado en el análisis efectuado en el capítulo anterior y en la comprobación práctica realizada en el laboratorio de Metrología del departamento de ingeniería de materiales y fabricación de la Universidad Politécnica de Cartagena.

4.2 CAUSAS DE INCERTIDUMBRE PARTICULARES ASOCIADAS AL PROCESO DE MEDICIÓN

Como casi en cualquier teoría, pueden surgir pequeñas diferencias con lo práctico. Esas diferencias tienen su origen en las causas de incertidumbre que analizamos de manera general en el capítulo 1 (apartado 1.2.2).

Fue objeto de análisis en el capítulo anterior las fuentes de incertidumbre asociadas al método de medida. Es ahora, tras las experiencias obtenidas en el laboratorio, cuando nos disponemos a explicar las causas que originan una desviación de lo que consideramos una medición ideal:

I. Debidas al operador:

Un proceso de medición no automatizado está sujeto a una mayor incertidumbre y a posibles errores de apreciación que un proceso automatizado no presenta. Esto es debido al factor humano.

En este caso la influencia del operador es determinante ya que durante la realización de las mediciones se pueden apreciar las siguientes causas:

- a. El enrase a ojo (apreciación humana subjetiva) puede originar grandes variaciones en las medidas.
- b. Mal enfoque de la pieza.
- c. El cansancio acumulado en la sesión práctica puede originar una distorsión en la apreciación, trasladándose al resultado final.
- d. En ciertos momentos pueden surgir dudas sobre si un enrase en una zona determinada es más sencillo que en otra zona (ver figura 4.1), pero tras un análisis⁸ de la desviación típica y tras las pruebas realizadas posteriormente, no existe una evidencia práctica que corrobore que existen zonas de la circunferencia en la que por la

⁸ Ver Anexo 1. Apartado 2: Comprobación de la desviación típica en el enrase según θ .

posición de la cuadrícula obtenga una mayor incertidumbre al realizar el ensayo.

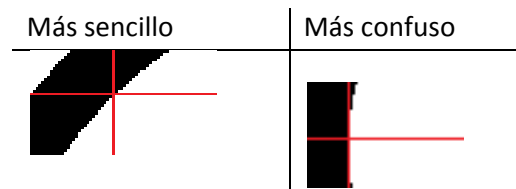


Figura 4.1: Apreciación personal en el ensayo

II. Debidas al instrumento de medida

Sobre el proyector de perfiles, hay que resaltar que presenta un correcto estado de mantenimiento y se encuentra bajo el control del plan de calibración del laboratorio.

El equipo puede proporcionarme una serie de incertidumbres o errores de apreciación determinados por:

- a. Distorsión de las lentes.
- b. La luz que ilumina la pieza es de una gran potencia, por lo que: tiempos prolongados de iluminación sobre la mesa soporte calientan la pieza patrón, pudiendo producirse una alteración de las medidas por dilatación.
- c. La pantalla de observación tiene una marca que tara la regla (ejes relativos x' e y') en perfecta coordinación con los husillos que mueven la mesa. Esa marca está desalineada y el goniómetro digital borra su tarado cuando se apaga el proyector de perfiles. Por consiguiente, siempre se dispone de un pequeño error de coseno.
- d. Los husillos tienen un campo de acción de 60 x 50 mm aproximadamente, lo que me limita en el uso de bloques patrón.

III. Debidas a la pieza

La comprobación práctica se realizó con un patrón⁹ de circunferencias interiores de $\varnothing 25$ mm ISO 2.

Las posibles causas de incertidumbre ofrecidas por el bloque patrón pueden ser:

- a. Falta de redondez.
- b. Falta de perfecta perpendicularidad entre el agujero circular y sus caras planas limitantes.
- c. Dilatación.
- d. Estado de su superficie debido a la corrosión, golpes, mal uso, etc.

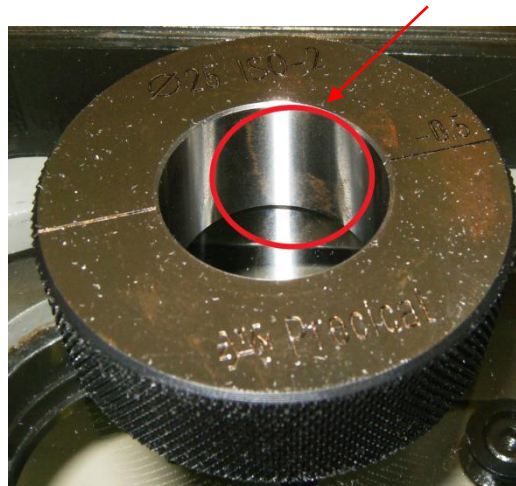


Figura 4.2: Corrosión en el patrón

IV. Debidas a las condiciones ambientales:

Los bloques patrón están calibrados para que sean utilizados en unos rangos de medida de $20 \pm 5^\circ\text{C}$, siendo la temperatura óptima de utilización de 20°C . El laboratorio cumple con las medidas necesarias en un laboratorio de Metrología, entre ellas :

⁹ Consultar anexo 4: Especificaciones técnicas sobre el patrón de referencia utilizado

- Adecuado control de la temperatura ambiental y la humedad con un regulador que actúa sobre un climatizador.



Figura 4.3: Regulador de temperatura

- Ligera sobrepresión con respecto al exterior del laboratorio.
- Doble puerta con estancia intermedia para adecuación de la presión, temperatura etc.
- Aislamiento térmico y lumínico.
- Limpieza regular del laboratorio y útiles de limpieza para tratamiento adecuado de los equipos.

Las condiciones ambientales que pudieran influir en la incertidumbre o desviación de la medida de su magnitud real pueden ser:

- a. Polvo y suciedad (aspecto muy cuidado)
- b. Temperatura distinta de 20 °C → habría que aplicar una corrección a las medidas.
- c. Humedad (aspecto muy cuidado)
- d. Vibraciones y movimientos indeseables que me originen un desplazamiento involuntario de la pieza sobre la mesa soporte.

4.3 CORRECCIÓN DE LA FLECHA

Se ha demostrado en el estudio teórico que un error de coseno influye en la medición de la flecha. Ese error posteriormente es evidente que afecta al resultado final del radio en función del grado de desviación.

Existen dos maneras de corregir o paliar ese error cometido en la medición de la flecha:

- Corrección práctica en el laboratorio en el mismo momento en el que se están realizando las mediciones.
- Tratamiento posterior con un método iterativo.

4.3.1 CORRECCIÓN PRÁCTICA

En ciertas ocasiones, la primera medición de la flecha puede no haber resultado todo lo satisfactoria que podríamos esperar debido al error de coseno.

Es entonces cuando en el proceso de medición se plantea modificar la posición de tangencia para un x_e^* aproximado ($\xi_i \approx x_e^*$).

Para ello, tras medir la cuerda y la primera flecha en $\xi_i = 0$, se calcula el radio, y posteriormente la estimación de la distancia en la que haciendo la tangente la flecha es más cercana a la real (posición de tangencia óptima ó ideal):

$$x_e^{*1} = \frac{R^0 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma} \quad (4.1)$$

Tras conocer esa distancia, colocamos el husillo horizontal en $\xi = x_e^{*1}$ y realizamos la tangente.

Hay que tener en cuenta que ciertos errores cometidos en la toma de medidas (causas de incertidumbre asociadas al proceso de medición) son más relevantes que una mejor apreciación en la flecha, por lo que generalmente, no tiene sentido realizar la repetición de la medida de la flecha más de una vez.

4.3.2 TRATAMIENTO DE DATOS POSTERIOR. MÉTODO ITERATIVO

El tratamiento de datos posterior al procedimiento de medida consigue corregir el error cometido en la flecha por el ángulo de desviación.

El procedimiento ideal calcula de manera iterativa la corrección de la flecha teniendo los datos de partida del radio, el ángulo de desviación, la cuerda y la primera flecha medida en una posición determinada.

Su correcta utilización mejora la solución con respecto a la primera medida siempre y cuando se realicen las mediciones de la mejor manera posible.

Una vez medido el ángulo γ , la cuerda, la flecha en el centro y el radio, el procedimiento iterativo es:

- Calcular x_e^* :

$$x_e^{*0} = \frac{R^0 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma} \quad (4.2)$$

- Calcular el error cometido en la flecha:

$$\varepsilon^0 = (\xi^0 - x_e^{*0}) \tan(\gamma) \quad (4.3)$$

- A continuación se vuelve a recalcular la flecha restándole a la anterior el error cometido aproximado, siendo ésta última una flecha más aproximada a la real:

$$f^1 = f^0 - \varepsilon^0 \quad (4.4)$$

- Volvemos a calcular el radio de nuevo.

Las ecuaciones generales del método iterativo vienen representadas en la siguiente tabla:

Iteración	ξ	f	R	x_e^*	ε
0	0	f^0	$R^0 = \frac{c^2}{8f^0} + \frac{f^0}{2}$	$x_e^{*0} = \frac{R^0 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$	$\varepsilon^0 = (\xi^0 - x_e^{*0}) \tan(\gamma)$
1	x_e^{*0}	$f^1 = f^0 - \varepsilon^0$	$R^1 = \frac{c^2}{8f^1} + \frac{f^1}{2}$	$x_e^{*1} = \frac{R^1 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$	$\varepsilon^1 = (\xi^1 - x_e^{*1}) \tan(\gamma)$
2	x_e^{*1}	$f^2 = f^1 - \varepsilon^1$	$R^2 = \frac{c^2}{8f^2} + \frac{f^2}{2}$	$x_e^{*2} = \frac{R^2 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$	$\varepsilon^2 = (\xi^2 - x_e^{*2}) \tan(\gamma)$
i	x_e^{*i-1}	$f^{i+1} = f^i - \varepsilon^i$	$R^i = \frac{c^2}{8f^i} + \frac{f^i}{2}$	$x_e^{*i} = \frac{R^i (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$	$\varepsilon^i = (\xi^i - x_e^{*i}) \tan(\gamma)$

Tabla 4.1: Ecuaciones del método iterativo

El proceso es convergente si los parámetros de la flecha medida (f^*), la cuerda y el ángulo de desviación γ , estuvieran perfectamente medidos. Por el mismo motivo que el comentado en la corrección práctica, el método de manera práctica no puede converger exactamente hacia la medida real ya que las causas de incertidumbre asociadas al método desvían ese punto de convergencia.

Esa convergencia (dependiendo de la calidad de las mediciones) en ocasiones no ocurre muy lejos del punto de convergencia ideal, mejorando, aun y todo, la apreciación del método.

Caso simulado:

Se realiza una simulación del método iterativo con una hoja de Excel® para un radio determinado y realizando un redondeo de 3 decimales para ajustarnos a un proceso de medición real en el que el micrómetro tiene una precisión de micras.

Radio ideal	γ	θ	c ideal	f ideal
200 mm	1 °	150°	386,370	148,236

Tras obtener una flecha de $f = 148,266$ (debería ser $f^0 = 148,2666565883$) comenzamos el cálculo iterativo:

iteración	ξ	f	R	xe^*	ε
0	0	148,266	199,989595833464	-,74528276	0,03046402
1	-,745282762	148,235536	200,000228728468	-,74537555	1,6197E-06
2	-,745375554	148,2355344	200,000229294072	-,74537556	8,6157E-11
3	-,745375559	148,2355344	200,000229294102	-,74537556	4,5812E-15

Tabla 4.2: Datos de método iterativo

Observamos que hay un desplazamiento de la convergencia de 0,229 micras en el resultado final debido al redondeo, pero a pesar de todo el método nos proporciona una medida más cercana a la real que si no lo hubiéramos empleado.

4.4 PROCEDIMIENTO OPERATORIO PROPUESTO

4.4.1 PROCEDIMIENTO DE MEDIDA¹⁰

El siguiente procedimiento operatorio pretende ofrecer unas pautas de toma de medidas para el método de la flecha de forma que obtengamos una mayor precisión en el proceso.

Dicho procedimiento puede considerarse válido tanto para circunferencias como para sectores circulares que presenten un error de coseno (γ) menor de 1° .

NOTA: En caso de detectarse un error de coseno superior a 1° deberá procederse a la corrección del error de paralelismo

1. MEDICIÓN DE LA CUERDA

- a) Elegir una zona de θ para la medición de la cuerda y anotar $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_{A,B}$. Se recomienda una zona lo más cercana posible al centro de la circunferencia. ($\theta \approx 180^\circ$). En caso de ser un sector circular, calcular la cuerda con el mayor ángulo posible.
 - i. **NOTA 1:** Tener la precaución de no sobrepasar el límite horizontal del centro (un ángulo no mayor de 180), sino, la medida de la flecha será mayor y nos dará un radio más pequeño. Para ello puede ayudarse haciendo tangente con la retícula vertical y tomando un punto A un poquito superior.
 - ii. **NOTA 2:** Al tomar una medición cercana al borde de un sector circular podemos obtener una medida distorsionada debida a la posible deformación que pueda haber sufrido ese borde (rebabas, defectos de corte, etc.).
 - iii. **NOTA 3:** Las cuerdas que estén determinadas por un ángulo menor a 20° no serán tenidas en cuenta ya que se ha demostrado que la incertidumbre de la medición es muy grande y afecta de gran manera a la calidad del procedimiento.
- b) Efectuar diez mediciones del punto A enrasando de manera alternativa aproximando desde la izquierda y la derecha (para compensar la posible holgura que tuvieran los husillos).
- c) Efectuar diez mediciones del punto B de la misma forma.

¹⁰ Ver Anexo 3. Hoja de registro del procedimiento operatorio propuesto para el método de la flecha.

d) Calcular la cuerda como la diferencia de la media de B y de A.

$$c = x_B - x_A$$

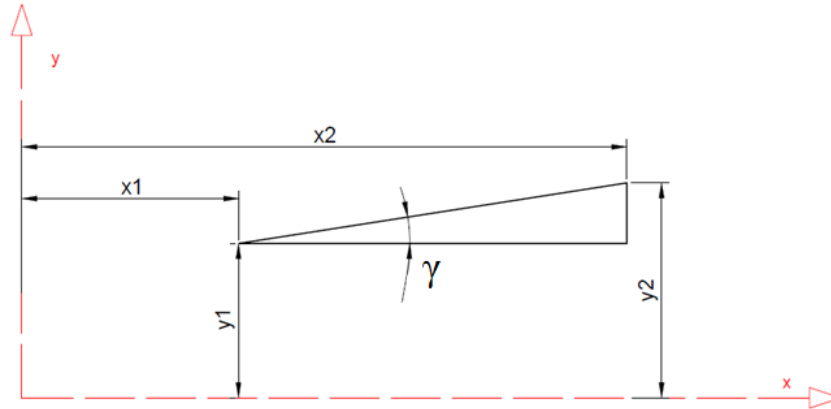
e) Calcular de manera aproximada el eje vertical que pasa por el centro de la circunferencia como:

$$\xi_0 = \frac{x_B + x_A}{2}$$

2. MEDICIÓN DE LA FLECHA

a) Calcular aproximadamente el ángulo γ de error de paralelismo.

- i. Para calcular el ángulo gamma de manera aproximada, tendré que irme hacia dos extremos aleatorios suficientemente grandes (tanto como me permita la amplificación sobre la pantalla) y hacer tangente. Si existe error de coseno, éste será apreciable y no deberá atribuirse a la variabilidad de las medidas. Posteriormente calcular el ángulo gamma como sigue:



$$\gamma \approx \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) Calculo operatorio de la flecha:

Nota: La flecha será la diferencia entre la altura y_t e $y_{A,B}$ (altura que tienen los puntos donde hemos tomado la cuerda tras colocar un sistema de referencia local aleatorio).



i. Para circunferencias completas:

- ii.i. Posicionar el centro de la retícula en $\xi_i = 0$ y enrasar para hacer tangente. Realizar 10 repeticiones y calcular la flecha como:

$$f = y_T - y_{A,B}$$

ii. Para sectores circulares con $\theta < 160^\circ$:

- ii.i. Posicionar el centro de la retícula en $\xi_i = 0$ y enrasar para hacer tangente. Realizar 10 repeticiones y calcular la flecha como:

$$f^1 = y_T^1 - y_{A,B}$$

- ii.ii. Calcular el radio de manera aproximada mediante la ecuación básica del método de la flecha:

$$R^1 = \frac{c^2}{8 f^1} + \frac{f^1}{2}$$

- ii.iii. Calcular la primera aproximación de la zona de x_e^{*1} como:

$$x_e^1 = \frac{R^1 (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$$

- ii.iv. Posicionar de nuevo la retícula en $\xi = x_e^{*1}$ y enrasar para hacer de nuevo la tangente. Realizar 10 repeticiones y calcular la flecha como:

$$f^2 = y_T^2 - y_{A,B}$$

3. CÁLCULO DEL RADIO

- a) Una vez medidas y calculadas la cuerda y la flecha utilizar la ecuación básica del método de la flecha para hallar el valor del radio:

$$R = \frac{c^2}{8 f} + \frac{f}{2}$$

4.4.2 PROCEDIMIENTO ITERATIVO

Tratamiento de los resultados de manera posterior para la mejora de la precisión una vez finalizadas las mediciones.

Ejecución:

- Tenemos un radio inicial (R^0), una flecha inicial (f^0) y una posición inicial (ξ_i)
- Realizamos sucesivas iteraciones con las siguientes ecuaciones:

$$R_{i+1} = \frac{c^2}{8 \left[f_i - \left(\frac{R_i (1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi_i \right) \tan \gamma \right]} + \frac{\left[f_i - \left(\frac{R_i (1 - \cos \gamma)}{\text{sen } \gamma} + \xi_i \right) \tan \gamma \right]}{2}$$

Siendo la flecha iterada:

$$f_{i+1} = f_i - \tan \gamma \left(\xi_i + R_i \frac{(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} \right)$$

Quedando entonces:

$$R_{i+1} = \frac{c^2}{8 f_{i+1}} + \frac{f_{i+1}}{2}$$

4.5 RESULTADOS PRÁCTICOS

Un estudio técnico debe de ir acompañado de unos datos prácticos que avalen cualquier conclusión obtenida de manera teórica. En este apartado se exponen los datos obtenidos en el laboratorio y las diferencias acaecidas entre lo práctico y lo teórico.

Las mediciones realizadas en el laboratorio tienen la intención de corroborar las conclusiones sacadas en el capítulo anterior. Todas las comprobaciones de este apartado se han realizado sobre el patrón de $\varnothing 25$ mm.

Se preparó una hoja de cálculo con todas las ecuaciones necesarias para calcular los parámetros adicionales al método de la flecha en el mismo instante en el que se introducían y guardaban los datos de las mediciones.

- Preparación previa al procedimiento operatorio

Comprobamos el estado del proyector de perfiles, encendemos el equipo, se inspecciona la intensidad de la luz y el tipo de iluminación deseada (episcópica).

Limpiamos el bloque patrón, guardado y protegido por un papel y una capa de vaselina para prevenir la oxidación, y lo colocamos sobre la mesa soporte para que se vaya adaptando a su temperatura.

A continuación se enfoca la imagen proyectada mediante el accionamiento que controla la altura de la mesa soporte (eje z de la mesa).

- Posicionamiento de ejes absolutos

Es muy importante posicionar los ejes absolutos sobre los que irán referidos todas las medidas que tomemos de ahora en adelante.

Para ello escogemos una zona arbitraria dentro de los márgenes permitidos por la mesa soporte. Se recomienda una zona cercana a la esquina inferior izquierda



(según el proyector de perfiles) para así referir todas las cotas con dimensiones positivas y hacer *zero* en el micrómetro digital.

- Cálculo aproximado de γ

A continuación se calcula de manera aproximada el error de coseno del proyector de perfiles.

Nota: Se recomienda no mover en ningún momento el anillo soporte de la pantalla de observación ya que nos puede variar el ángulo γ . Sólo mover en caso de que sea necesaria una corrección.

- Toma de datos¹¹

Se realiza el método de la flecha tradicional y posteriormente se ejecuta el procedimiento operatorio propuesto para el método de la flecha para así posteriormente evidenciar las mejoras de este último.

Elegimos una zona de la circunferencia determinada por el ángulo de posicionamiento θ (en un principio desconocido).

Se realizan 10 repeticiones de cada coordenada x_A y x_B para calcular la cuerda.

Posteriormente se toma la flecha en una zona cercana a x_B , ya que el campo de visión de la pantalla de proyección no permite hacer tangente desde x_B . Esas medidas se pueden considerar como las relativas al método de la flecha sin el procedimiento propuesto.

A continuación se calcula la posición aproximada del eje η que determina $\xi = 0$ y se enrasa haciendo tangente 10 veces en $\xi_i = 0$ (y_T) para obtener la flecha (f^0).

¹¹ Consultar Anexo 1. Apartado 3, Datos prácticos del laboratorio y cálculos

Se calcula el radio, la posición de tangencia ideal aproximada y se posiciona la cruceta en $\xi_i = x_e^*$ para hacer tangente¹².

Para comprobar los resultados del análisis teórico posteriormente se movió el tornillo de giro de la pantalla de observación para tener un ángulo de desviación más acentuado y se repitió el mismo proceso.

En la siguiente tabla se muestran los resultados resumidos de las mediciones obtenidas en función de un ángulo de posicionamiento y dos ángulos de desviación.

El primer ángulo de desviación podríamos considerarlo muy pequeño y poco influyente, sin embargo, el segundo se puede apreciar que tiene mayor influencia.

		$\gamma = -0,165^\circ$					$\gamma = 2,6^\circ$					
		$\theta = 180^\circ$	$\theta = 126^\circ$	$\theta = 109^\circ$	$\theta = 65^\circ$	$\theta = 33^\circ$	$\theta = 180^\circ$	$\theta = 126^\circ$	$\theta = 109^\circ$	$\theta = 65^\circ$	$\theta = 33^\circ$	
ξ_i	c	24,994	22,221	20,398	13,446	7,163	24,994	22,221	20,398	13,446	7,163	
$\approx c/2$	f	12,486	6,76	5,261	1,945	0,507	f	12,803	7,074	5,573	2,258	0,822
	R	12,485	12,51	12,516	12,591	12,893	R	12,501	12,262	12,119	11,137	8,218
0	f	12,504	6,778	5,279	1,963	0,525	f	12,52	6,791	5,29	1,975	0,539
	R	12,497	12,495	12,492	12,494	12,469	R	12,4969	12,484	12,476	12,429	12,178
x_e^*	f ¹	*	6,777	5,277	1,96	0,526	f ¹	12,508	6,779	5,277	1,963	0,527
	R ¹	*	12,496	12,494	12,496	12,465	R ¹	12,4969	12,494	12,494	12,493	12,442
Iteración 1	f ¹	12,5038	6,7783	5,2788	1,9631	0,5254	f ¹	12,5076	6,77845	5,27756	1,9627	0,52617
	R ¹	12,4969	12,4946	12,4919	12,4941	12,469	R ¹	12,4969	12,4945	12,4936	12,4964	12,4536
Iteración 2	f ²	12,5038	6,7783	5,2788	1,9631	0,5254	f ²	12,5076	6,77844	5,27754	1,9626	0,52588
	R ²	12,4969	12,4946	12,4919	12,4941	12,469	R ²	12,4969	12,4945	12,4936	12,4967	12,46

Tabla 4.3: Resumen de resultados prácticos (medidas en mm)

El posicionamiento $\xi_i \approx c/2$ (cercano a x_B) representa la situación en la que no se aplica ningún procedimiento.

Los posicionamientos $\xi_i = 0$ y x_e^* se corresponden con el procedimiento propuesto.

¹² Ver apartado 4.3.1. donde se expone la corrección práctica de la posición de tangencia

Las dos últimas filas muestran los resultados del procedimiento iterativo de mejora de la solución.

Se han representado gráficamente los resultados obtenidos.

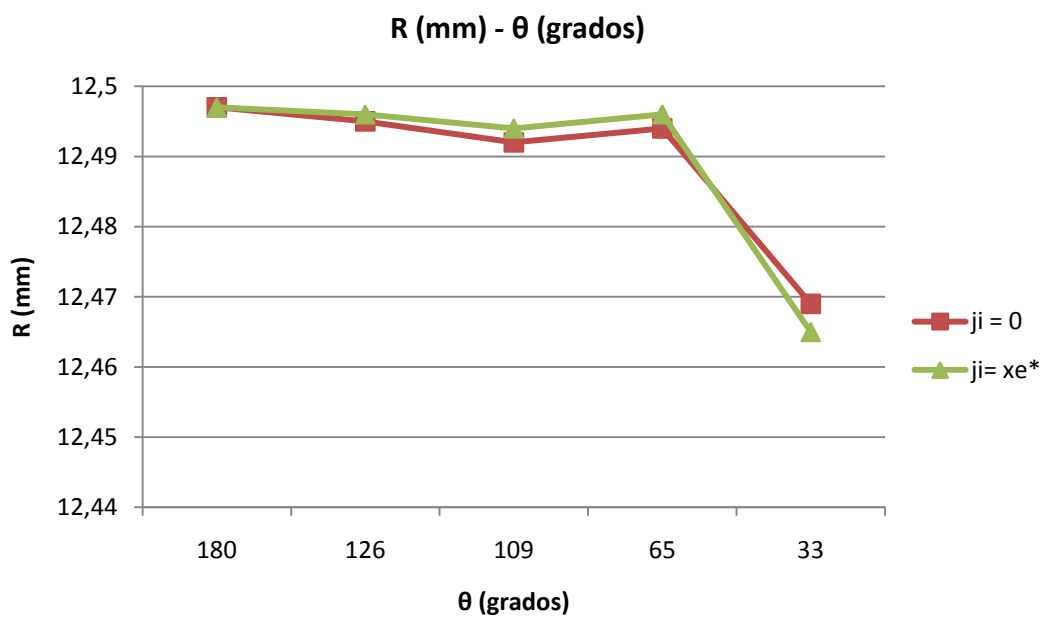
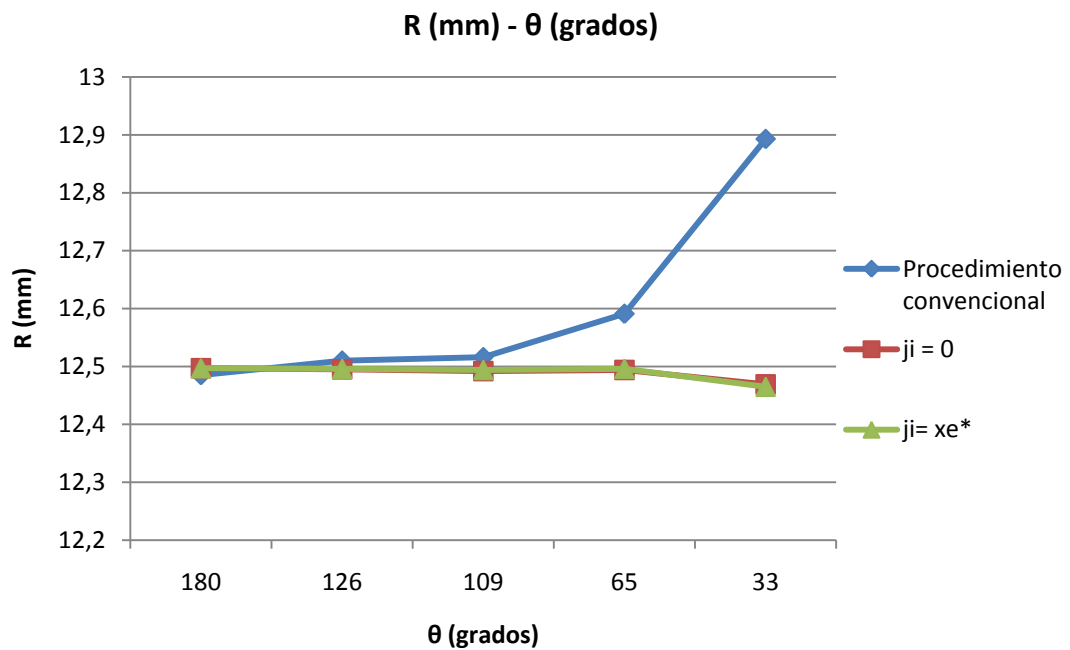


Figura 4.4: Radio en función de θ cuando se realiza y no se realiza procedimiento ($\gamma=-0,165^\circ$)

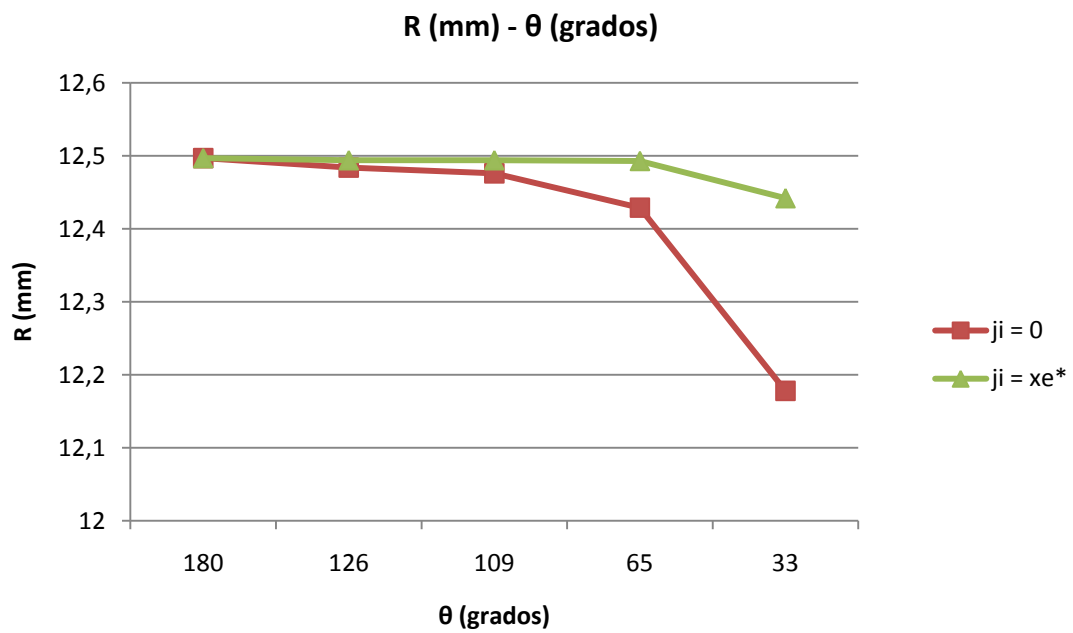
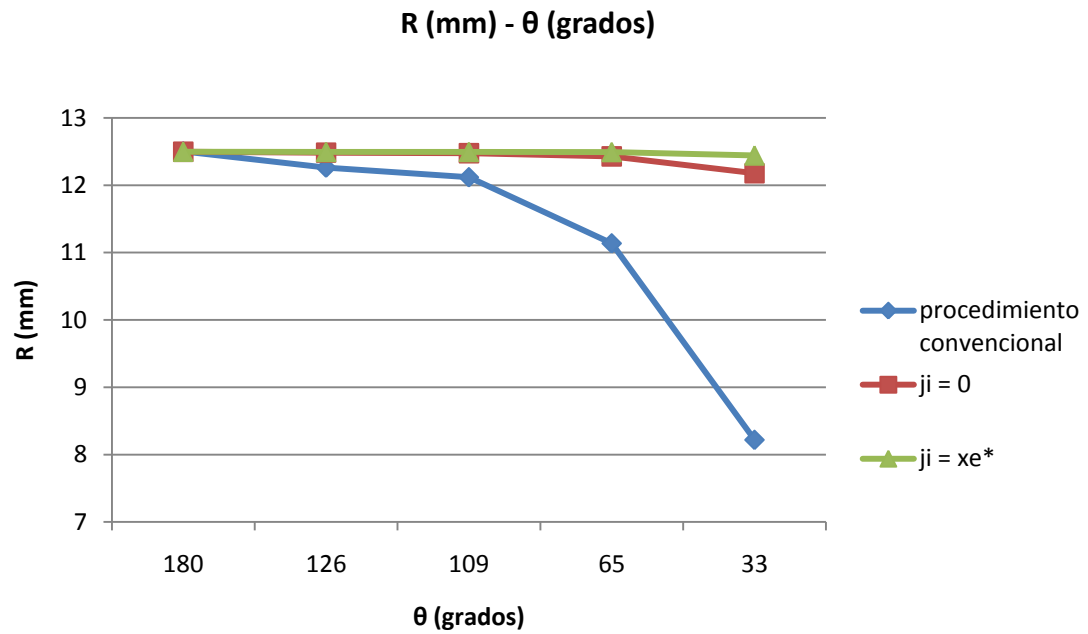


Figura 4.5: Radio en función de θ cuando se realiza y no se realiza procedimiento ($\gamma=2,6^\circ$)

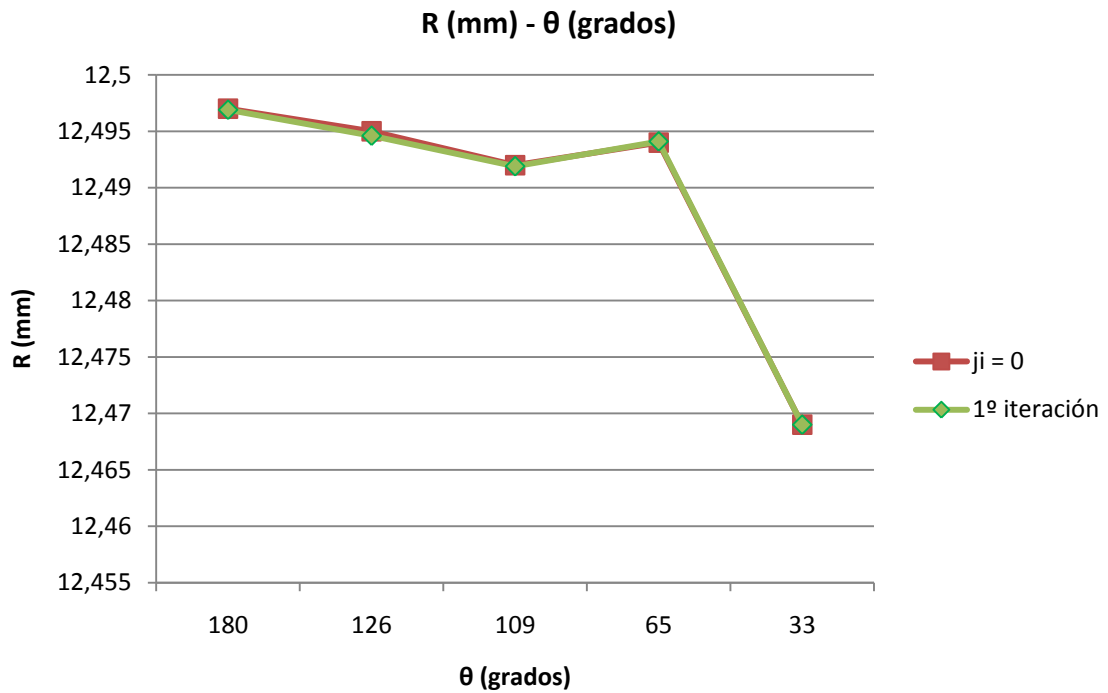


Figura 4.6: Comparación R en función de θ con y sin iteración ($\gamma=-0,165^\circ$)

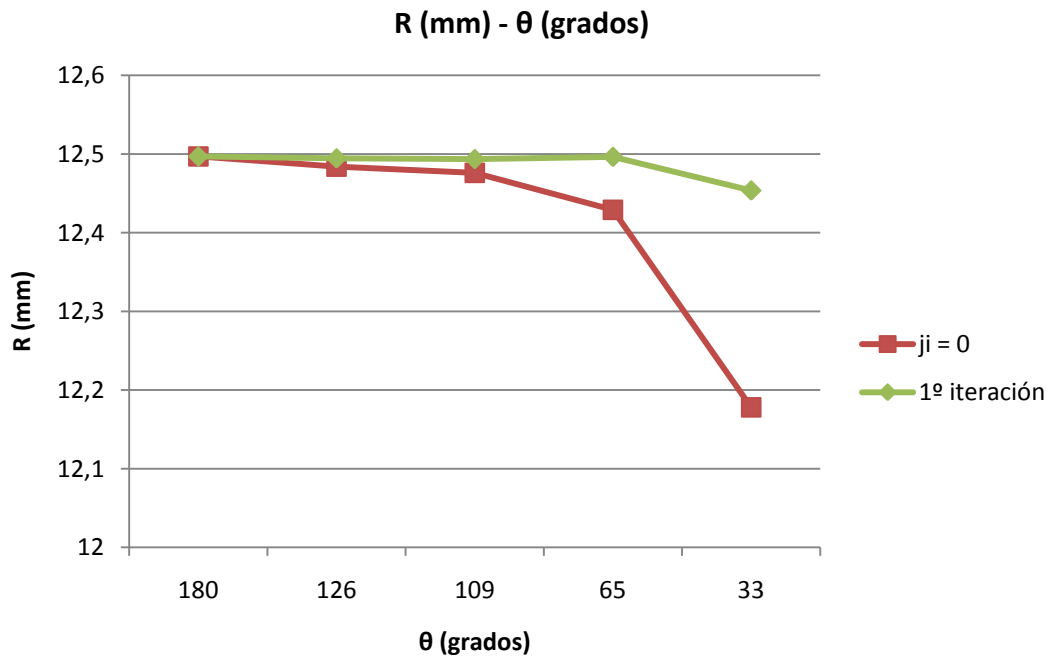


Figura 4.7: Comparación R en función de θ con y sin iteración ($\gamma=2,6^\circ$)



4. Procedimiento operatorio del método de la flecha





- Conclusiones

Se puede comprobar que es muy determinante el ángulo θ para el proceso de medición, ya que cuando pretendemos corregir el error de coseno orientando el husillo horizontal desplazándolo a una distancia $\xi_i \approx xe^*$, no se obtiene gran mejora para ángulos θ cercanos a 180° .

Entonces, realizar un reposicionamiento de la cruceta en la posición de tangencia ideal aproximada, no aporta una mejora notable para ángulos γ pequeños ($\gamma < 0,5^\circ$) y ángulos de posicionamiento amplios. Esto es debido a las causas de incertidumbre comentadas en el apartado 4.2, y a la imposibilidad de conocer exactamente el eje vertical que pasa por el centro de la circunferencia.

Resulta imposible determinar exactamente la posición del eje vertical relativo η , ya que se calcula en la posición de la mitad de la cuerda, y en algunos casos, sale diferente. Con lo cual al obtener variaciones para hacer $\xi_i = 0$, muchas veces una corrección de ξ_i muy cercana al origen no puede asegurarme que sea la posición de tangencia donde la flecha es exacta.

Por lo tanto podemos decir que las causas de incertidumbre comentadas anteriormente son más influyentes que el error trasladado al cálculo del radio al medir una flecha en el centro de la circunferencia para ángulos de γ pequeños. ($\gamma < 0,5^\circ$).



En resumen:

- Los resultados prácticos corroboran el estudio realizado pero hay que matizar que están sujetos a las fuentes de incertidumbre asociadas al proceso de medición.
- Cuando se trata de una circunferencia completa (o un sector circular de más de 180°) se pueden realizar mediciones en un ángulo de posicionamiento θ cercano a los 180° . En ese caso tomar la flecha en el centro de la circunferencia ($\xi_i = 0$) asegura una buena medición.
- En caso de disponerse de un sector circular (menor que 180°) y ángulos de desviación pequeños, se puede realizar el reajuste de la posición de tangencia (determinada por ξ_i) después de haber realizado el primer cálculo del radio con la ecuación básica del método de la flecha tomando la misma en $\xi = 0$.

Anexo 1: Toma y tratamiento de datos

Anexo 2: Códigos de Matlab®

Anexo 3: Hoja de registro del procedimiento operatorio propuesto del método de la flecha

Anexo 4: Especificaciones técnicas sobre el anillo patrón utilizado

ANEXO 1. Toma y tratamiento de datos

APARTADO 1. Determinación de u_c y u_f

Toma de datos en el laboratorio de Metrología del departamento de ingeniería de materiales y fabricación de la Universidad politécnica de Cartagena.

Con esta primera toma de datos tendremos una ligera impresión de los órdenes de magnitud de las incertidumbres asociadas a las mediciones de la cuerda y de la flecha.

- **Condiciones del laboratorio**
 - Temperatura: 20.5 ° C
 - Humedad: 56.9 %
 - Ligera sobrepresión con respecto al exterior del laboratorio, y pequeña ventilación.
- **Patrón utilizado**
 - **Tipo:** Circular, \varnothing 25 mm
 - **Uso:** Mediciones de circunferencias interiores.
 - **Calidad:** ISO 2

- **Resultados obtenidos**

Toma de datos de x_A y x_B :

- Colocamos el sistema de referencia absoluto en una zona arbitraria.
- Elegimos una zona de la circunferencia interior para realizar las mediciones, anotamos $y_A = y_B = -3,012 \text{ mm}$, y sobre esta cota del eje vertical se realizarán todas las mediciones siguientes.
- Procedemos a tomar 60 mediciones de x_A y x_B .

Toma de datos de y_T :

- Buscamos en primer lugar una zona donde tomar las mediciones de y_T .
- Elegimos $x_{T2} = 12,232 \text{ mm}$ como lugar aproximado del centro de la circunferencia.

-
- Se procede a tomar 60 mediciones de y_T .
 - Consciente de que podría haber un error de coseno, se toman más mediciones de la tangente a otras distancias (x_{t3} a la izquierda y x_{t1} a la derecha del centro) para observar cómo afecta la dispersión.

• **Resultados obtenidos**

Medidas cuerda			Medida de la tangente			
Y _A , Y _B			Para medir la flecha hay que restarle -3,012 mm			
-3,012			X _{t1}	X _{t2}	X _{t3}	mm
	X _A	X _B	Y _{t1}	Y _{t2}	Y _{t3}	
1	0,945	23,511	1	4,099	4,108	4,126
2	0,952	23,513	2	4,103	4,110	4,123
3	0,952	23,511	3	4,098	4,109	4,125
4	0,954	23,505	4	4,098	4,106	4,125
5	0,953	23,513	5	4,100	4,106	4,125
6	0,956	23,508	6	4,097	4,104	4,124
7	0,952	23,512	7	4,098	4,107	4,124
8	0,954	23,513	8	4,099	4,105	4,126
9	0,949	23,512	9	4,098	4,107	4,127
10	0,955	23,514	10	4,101	4,105	4,124
11	0,950	23,513	11	4,099	4,109	4,124
12	0,952	23,508	12	4,099	4,110	4,124
13	0,958	23,512	13	4,101	4,105	4,123
14	0,951	23,511	14	4,099	4,111	4,127
15	0,955	23,514	15	4,102	4,107	4,124
16	0,954	23,514	16	4,100	4,106	4,125
17	0,955	23,513	17	4,100	4,106	4,125
18	0,953	23,511	18	4,101	4,107	4,124
19	0,956	23,507	19	4,099	4,108	4,127
20	0,956	23,511	20	4,097	4,106	4,124
21	0,950	23,510	21	4,098	4,109	4,123
22	0,955	23,511	22	4,101	4,108	4,124
23	0,952	23,516	23	4,100	4,111	4,124
24	0,954	23,514	24	4,103	4,108	4,128
25	0,952	23,515	25	4,098	4,106	4,125
26	0,957	23,517	26	4,099	4,107	4,125
27	0,955	23,516	27	4,100	4,105	4,124
28	0,952	23,513	28	4,100	4,109	4,124
29	0,952	23,511	29	4,098	4,107	4,122
30	0,953	23,516	30	4,100	4,106	4,123

Medidas cuerda			Medida de la tangente			
	Y_A, Y_B		Para medir la flecha hay que restarle -3,012 mm			
	-3,012		X_{t1}	X_{t2}	X_{t3}	
	X_A	X_B	14,387	12,232	7,357	mm
			Y_{t1}	Y_{t2}	Y_{t3}	
31	0,957	23,518	31	4,099	4,108	4,123
32	0,953	23,514	32	4,098	4,109	4,125
33	0,952	23,510	33	4,103	4,107	4,124
34	0,958	23,513	34	4,097	4,109	4,124
35	0,957	23,514	35	4,098	4,108	4,128
36	0,955	23,518	36	4,102	4,108	4,125
37	0,956	23,511	37	4,099	4,106	4,125
38	0,953	23,513	38	4,101	4,107	4,124
39	0,951	23,511	39	4,100	4,107	4,124
40	0,953	23,513	40	4,098	4,106	4,127
41	0,951	23,516	41	4,099	4,107	4,124
42	0,955	23,507	42	4,098	4,107	4,127
43	0,952	23,514	43	4,101	4,103	4,124
44	0,956	23,512	44	4,098	4,104	4,125
45	0,956	23,511	45	4,098	4,106	4,127
46	0,953	23,511	46	4,102	4,109	4,125
47	0,957	23,512	47	4,100	4,107	4,125
48	0,951	23,510	48	4,098	4,108	4,124
49	0,955	23,514	49	4,099	4,105	4,126
50	0,957	23,513	50	4,100	4,105	4,124
51	0,953	23,511	51	4,100	4,107	4,125
52	0,951	23,515	52	4,099	4,106	4,126
53	0,954	23,514	53	4,098	4,106	4,125
54	0,954	23,512	54	4,101	4,110	4,121
55	0,956	23,511	55	4,100	4,107	4,123
56	0,954	23,512	56	4,098	4,104	4,124
57	0,951	23,514	57	4,100	4,107	4,123
58	0,953	23,513	58	4,100	4,105	4,122
59	0,954	23,510	59	4,099	4,104	4,123
60	0,950	23,514	60	4,098	4,105	4,124

- **Filtrado de datos**

El análisis estadístico de datos se realiza con el programa Statistix®.

El primer paso en el análisis estadístico debe ser el realizar un filtrado de datos, para eliminar los datos atípicos. Haremos uso del criterio de rechazo de *Chauvenet*.

- \bar{x}_A

En una primera comprobación, la medida nº 1, (0,945 mm) queda fuera de los límites. Por lo que se rechaza dicha medida y se vuelve a proceder a una segunda ronda de comprobación donde todas las medidas quedan dentro de los límites aceptables según el criterio de rechazo de Chauvenet

\bar{x}_A					
Comprobación	Tamaño muestra	Media (mm)	Desviación típica (mm)	Límite inferior (mm)	Límite superior (mm)
1	60	0,9535	0,002460	0,94704	0,96003
2	59	0,9537	0,002208	0,9479	0,9597

- \bar{x}_B

Al igual que ocurre con las medidas de \bar{x}_A , se rechaza la medida nº 4 (23,505 mm) ya que queda debajo por debajo del límite inferior en una primera comprobación.

Al realizar una segunda comprobación con 59 medidas, no encontramos ninguna que se encuentre fuera del rango de rechazo.

\bar{x}_A					
Comprobación	Tamaño muestra	Media (mm)	Desviación típica (mm)	Límite inferior (mm)	Límite superior (mm)
1	60	23,5124	0,002547	23,5058	23,5192
2	59	23,5126	0,002373	23,5067	23,5190

- \bar{y}_{T1}

No se rechaza ninguna medida

\bar{x}_A					
Comprobación	Tamaño muestra	Media (mm)	Desviación típica (mm)	Límite inferior (mm)	Límite superior (mm)
1	60	4,0994	0,001511	4,0954	4,1034

- $\underline{y_{T2}}$

No se rechaza ninguna medida

Comprobación	Tamaño muestra	X_A			
		Media (mm)	Desviación típica (mm)	Límite inferior (mm)	Límite superior (mm)
1	60	4,1069	0,001797	4,1022	4,1117

- $\underline{y_{T3}}$

No se rechaza ninguna medida

Comprobación	Tamaño muestra	X_A			
		Media (mm)	Desviación típica (mm)	Límite inferior (mm)	Límite superior (mm)
1	60	4,1246	0,001442	4,1208	4,1284

- **Análisis de datos**

Se realiza un tratamiento superficial de los datos con un programa estadístico (*Statistix*® 8.0) para determinar los valores más representativos, y las frecuencias de las mediciones:

- Datos estadísticos descriptivos:

Descriptive Statistics					
Variable	N	Mean	SD	Minimum	Maximum
xA	59	0.9537	2.208E-03	0.9490	0.9580
xB	59	23.5126	2.373E-03	23.507	23.518
yT1	60	4.0994	1.511E-03	4.0970	4.1030
yT2	60	4.1069	1.797E-03	4.1030	4.1110
yT3	60	4.1246	1.442E-03	4.1210	4.1280

▪ Frecuencias de las mediciones:

Frequency Distribution of xA

Value	Freq	Percent	Cumulative	
			Freq	Percent
0.94900	1	1.7	1	1.7
0.95000	3	5.1	4	6.8
0.95100	6	10.2	10	16.9
0.95200	10	16.9	20	33.9
0.95300	9	15.3	29	49.2
0.95400	8	13.6	37	62.7
0.95500	8	13.6	45	76.3
0.95600	7	11.9	52	88.1
0.95700	5	8.5	57	96.6
0.95800	2	3.4	59	100.0
Total	59	100.0		

Frequency Distribution of xB

Value	Freq	Percent	Cumulative	
			Freq	Percent
23.5070	2	3.4	2	3.4
23.5080	2	3.4	4	6.8
23.5100	4	6.8	8	13.6
23.5110	13	22.0	21	35.6
23.5120	7	11.9	28	47.5
23.5130	11	18.6	39	66.1
23.5140	11	18.6	50	84.7
23.5150	2	3.4	52	88.1
23.5160	4	6.8	56	94.9
23.5170	1	1.7	57	96.6
23.5180	2	3.4	59	100.0
Total	59	100.0		

Frequency Distribution of yT1

Value	Freq	Percent	Cumulative	
			Freq	Percent
4.09700	3	5.0	3	5.0
4.09800	17	28.3	20	33.3
4.09900	13	21.7	33	55.0
4.10000	14	23.3	47	78.3
4.10100	7	11.7	54	90.0
4.10200	3	5.0	57	95.0
4.10300	3	5.0	60	100.0
Total	60	100.0		

Frequency Distribution of yT2

Value	Freq	Percent	Cumulative	
			Freq	Percent
4.10300	1	1.7	1	1.7
4.10400	4	6.7	5	8.3
4.10500	8	13.3	13	21.7
4.10600	12	20.0	25	41.7

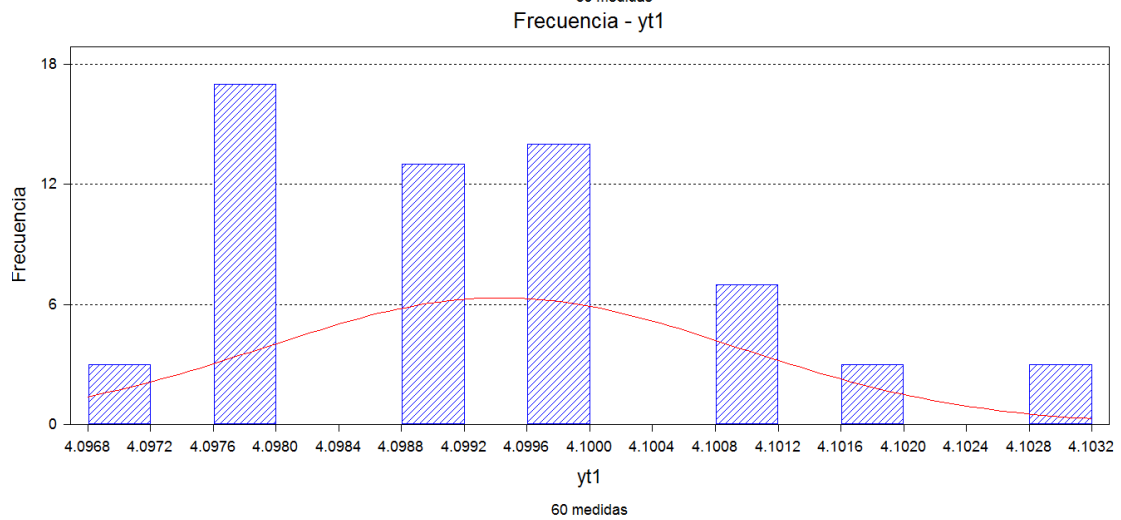
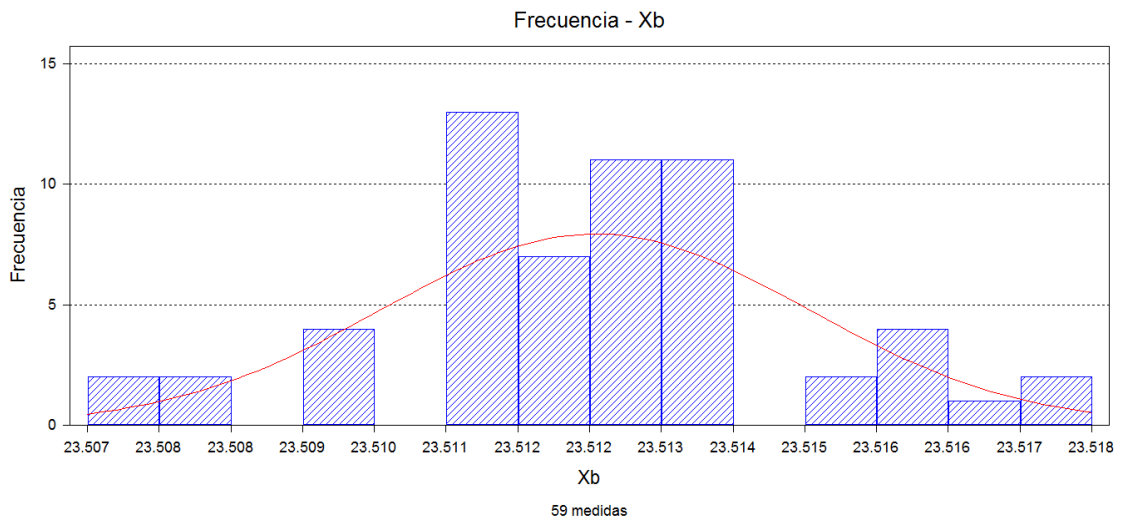
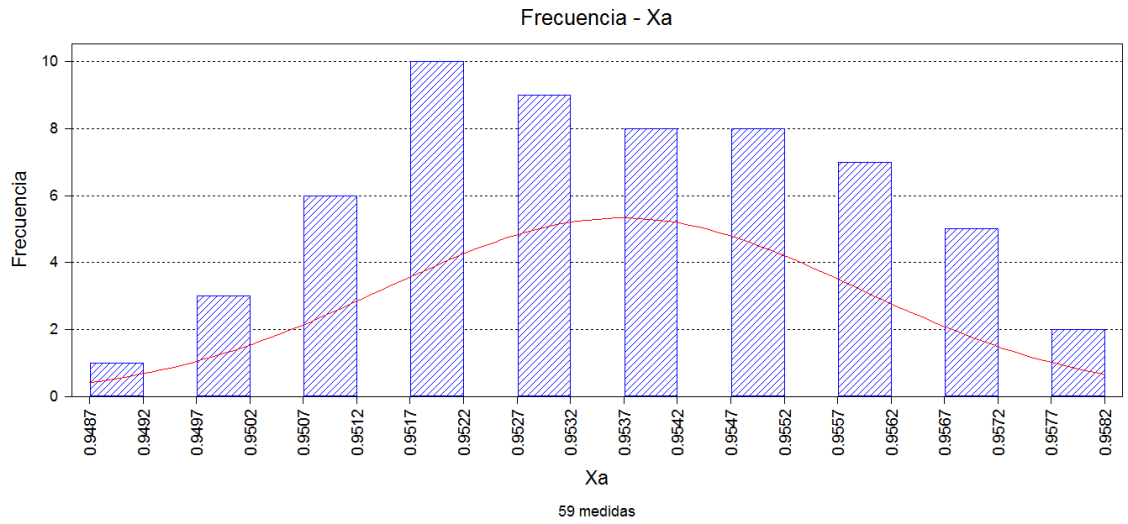


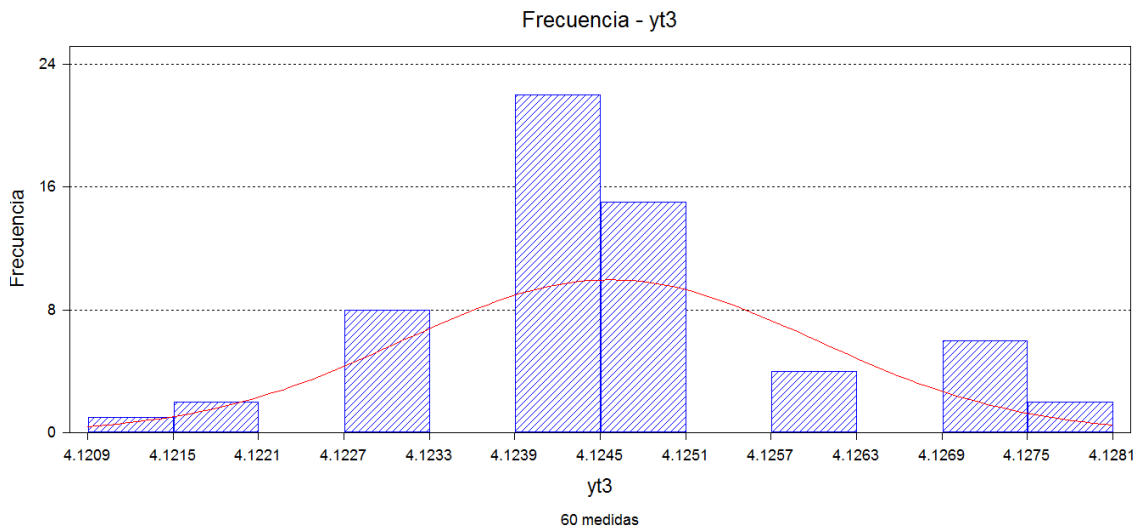
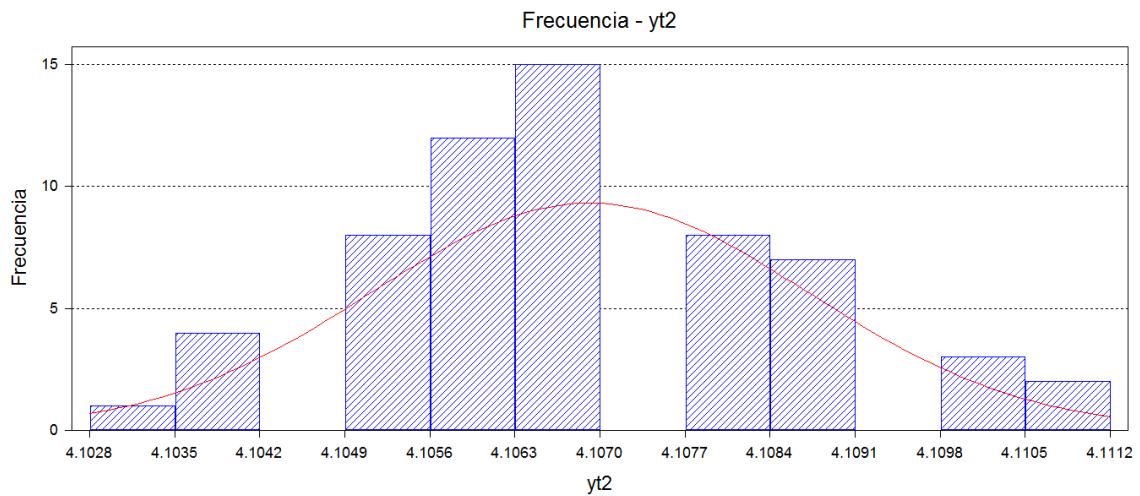
4.10700	15	25.0	40	66.7
4.10800	8	13.3	48	80.0
4.10900	7	11.7	55	91.7
4.11000	3	5.0	58	96.7
4.11100	2	3.3	60	100.0
Total	60	100.0		

Frequency Distribution of yT3

Value	Freq	Percent	Cumulative	
			Freq	Percent
4.12100	1	1.7	1	1.7
4.12200	2	3.3	3	5.0
4.12300	8	13.3	11	18.3
4.12400	22	36.7	33	55.0
4.12500	15	25.0	48	80.0
4.12600	4	6.7	52	86.7
4.12700	6	10.0	58	96.7
4.12800	2	3.3	60	100.0
Total	60	100.0		

■ Histograma de frecuencias





• Comentarios

- Menor dispersión en las medidas relacionadas con la tangente.
- A priori, el proceso de medición de la tangente parece más fiable que el de las coordenadas correspondientes a la cuerda.
- Existe un gran error de coseno debido a la falta de paralelismo entre la cuadrícula y los husillos de la mesa, a pesar de que el indicador de orientación de la retícula de la pantalla marca cero (No es objeto de este anexo el error de coseno, así que se obvia).
- La primera impresión en la que suponía que una toma de mediciones de la tangente en el centro aproximado de la circunferencia supondría una mayor dispersión se ve reflejado en el hecho de que la dispersión es un poquito mayor que en las mediciones tomadas lateralmente.

- **Estimación de las incertidumbres u_c y u_f**

Hipótesis inicial:

- No existe un desplazamiento de escala del instrumento de medida.
- Al no existir un desplazamiento de escala, las medidas no están correlacionadas, es decir, son independientes.

Con lo cual la expresión de la incertidumbre según la ley de propagación de varianzas es:

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^q \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{x}_i}^2 u_i^2$$

Cálculo de u_f :

$$u_f = \sqrt{\frac{s_T^2}{n}} = \frac{s_T}{\sqrt{n}}$$

Tomaremos como incertidumbre, la mayor obtenida en el proceso de medición de la tangente, es decir, y_{T2} ,

$$u_f = \frac{s_{y_{T2}}}{\sqrt{n}} = \frac{1,797 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{60}} = 2,32 \cdot 10^{-4}$$

Cálculo de u_c :

El cálculo de la cuerda se realiza mediante la siguiente expresión:

$$c = x_B - x_A$$

Aplicando la ley de propagación de varianzas:

$$u_c^2 = u_{x_A}^2 + u_{x_B}^2 = \frac{s_{x_A}^2}{n} + \frac{s_{x_B}^2}{n}$$

Así entonces la incertidumbre será:

$$u_c = \sqrt{\frac{s_{x_A}^2}{n} + \frac{s_{x_B}^2}{n}} \rightarrow$$

$$u_c = \sqrt{\frac{(2,208 \cdot 10^{-3})^2}{59} + \frac{(2,373 \cdot 10^{-3})^2}{59}} = 4,22 \cdot 10^{-4} mm$$

Estudiando la relación entre la incertidumbre asociada a la cuerda y la flecha podemos decir:

$$\frac{u_c}{u_f} \approx 1,8$$

Por lo tanto vemos que el proceso de medida me da una incertidumbre mayor en el proceso de medida de la cuerda que en el de la flecha.

Pero no debemos olvidar el proceso de medida de la flecha no es muy preciso si disponemos de un error de paralelismo.

APARTADO 2. Comprobación de la desviación típica en el enrase según θ .

El objetivo principal era determinar si había una mucha dispersión en los datos al enrasar sobre puntos cercanos a 180 grados y puntos que estuvieran más alejados (60 grados por ejemplo), ya que la sombra tiene diferente inclinación y el enrase a priori es más cómodo para 60°.

n	Aprox 60 °	Aprox 180°	n	Aprox 60 °	Aprox 180°
1	4,392	2,25	13	4,392	2,251
2	4,393	2,248	14	4,395	2,249
3	4,396	2,25	15	4,393	2,249
4	4,392	2,25	16	4,393	2,252
5	4,393	2,251	17	4,391	2,25
6	4,393	2,254	18	4,389	2,252
7	4,395	2,251	19	4,391	2,252
8	4,394	2,25	20	4,392	2,247
9	4,391	2,252	21	4,394	2,249
10	4,389	2,249	22	4,391	2,253
11	4,392	2,247	23	4,393	2,252
12	4,392	2,249	24	4,393	2,25
13	4,392	2,251	25	4,395	2,251

Todas las medidas en mm

Las desviaciones típicas son:

$$s_{60^\circ} = 1,73 \mu m$$

$$s_{180^\circ} = 1,75 \mu m$$

No se aprecian apenas diferencias. No hay una gran variabilidad entre la zona determinada por 60° y 180°.

Podemos decir que no existe evidencia práctica que corrobore una duda sobre la fiabilidad del enrase para $\theta = 180^\circ$.

APARTADO 3. Datos prácticos del laboratorio

Las mediciones han sido realizadas con un patrón \varnothing 25 mm.

Las celdas color salmón se corresponden a los datos tomados en el laboratorio, las demás casillas en blanco son valores calculados automáticamente en la hoja de cálculo.

Se ha querido representar, en ciertas ocasiones, un gran número de decimales con la intención de mostrar si una segunda corrección de la posición de tangencia o unas iteraciones mejoran, o no mejoran, la medida.

Medición de gamma:

Se han tomado medidas para dos valores de γ que pueden ser representativos: uno muy pequeño y negativo, y otro mucho mayor y positivo:

γ aprox $-0,165^\circ$

medición de gamma nº	1	2	3	4	media
y2	15,384	15,385	15,384	15,386	15,385
y1	15,421	15,423	15,424	15,422	15,423
x2	19,806	-	-	-	19,806
x1	6,701	-	-	-	6,701

Ángulo γ aprox	
-0,165	°

γ aprox $2,6^\circ$

medición de gamma	1	2	3	4	media
y2	15,71	15,709	15,709	15,71	15,710
y1	15,073	15,073	15,072	15,073	15,073
x2	19,29	-	-	-	19,290
x1	5,202	-	-	-	5,202

Ángulo γ aprox	
2,6	°

Medición de la cuerda y de la flecha para los valores de gamma:

$\theta \text{ aprox} = 180^\circ$			$\gamma = -0,165^\circ$				$\gamma = 2,6^\circ$							
Cuerda			Flecha				Flecha							
ya ó yb	2,901	mm	sin reiterar		$\xi = 0$		$\xi = xe^*$		$\xi = 0$		$\xi = xe^*$			
	xa [mm]	xb [mm]	yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]			
	1	0,384	25,379	1	15,405	1	*	1	15,423	1	15,41			
	2	0,383	25,378	2	15,404	2	*	2	15,421	2	15,409			
	3	0,382	25,38	3	15,403	3	*	3	15,421	3	15,407			
	4	0,384	25,377	4	15,406	4	*	4	15,422	4	15,41			
	5	0,385	25,378	5	15,406	5	*	5	15,422	5	15,409			
	6	0,386	25,38	6	15,405	6	*	6	15,42	6	15,409			
	7	0,387	25,38	7	*	7	*	7	15,422	7	15,408			
	8	0,385	25,376	8	*	8	*	8	15,42	8	15,41			
	9	0,385	25,379	9	*	9	*	9	15,421	9	15,408			
	10	0,387	25,379	10	*	10	*	10	15,422	10	15,408			
	media	0,385	25,379	media	15,405	media		media	15,4214	media	15,4088			
Cuerda	24,994	mm	Flecha	12,504	mm	Flecha		mm	Flecha	12,520	mm	Flecha	12,508	mm
ξ está a	12,882	mm	Radio	12,497	mm	Radio		mm	Radio	12,4969	mm	Radio	12,4969	mm
	Sin procedimiento $\xi_i = 19,130$		θ aprox	180	°	θ aprox		°	θ aprox	180	°	θ aprox	180	°
			xe aprox	0,0180	mm	xe aprox			xe aprox	-0,28227		xe aprox	-0,28227	
$\gamma = -0,165^\circ$	f	12,486	mm	Tomar xe:	12,900	mm			Tomar xe:	12,599	mm			
	R	12,485	mm											
$\gamma = 2,6^\circ$	f	12,803	mm	ξ_0	0				ξ_0	0				
	R	12,501	mm	ε_0	5,18479E-05				ε_0	0,012758237				
			ξ_1	0,018	1º iteración	f_1	12,504		ξ_1	-0,2823	1º iteración	f_1	12,5076418	
			R1	12,497		Xe1	0,018		R1	12,496905		Xe1	-0,282274	
			ε_1	-1,188E-13		ε_1	-1,188E-13		Xe1	-0,282274		ε_1	-1,78E-08	
			ξ_2	0,018	2º iteración	f_2	12,504		ξ_2	-0,2823	2º iteración	f_2	12,5076418	
			R2	12,497		R2	12,497		R2	12,496905		R2	12,496905	
			Xe2	0,018		Xe2	0,018		Xe2	-0,282274		Xe2	-0,282274	
			ε_2	0		ε_2	0		ε_2	1,5606E-14		ε_2	1,5606E-14	

$\theta \text{ aprox } = 126^\circ$			$\gamma = -0,165^\circ$				$\gamma = 2,6^\circ$			
Cuerda			Flеча				Flеча			
ya ó yb	8,629	mm	sin reiterar							
	xa [mm]	xb [mm]	$\xi = 0$		$\xi = xe^*$		$\xi = 0$		$\xi = xe^*$	
	1	1,764	23,984	yti [mm]	yti [mm]	yti [mm]	yti [mm]	yti [mm]	yti [mm]	
	2	1,764	23,981	1	15,411	1	15,405	1	15,419	
	3	1,765	23,985	2	15,407	2	15,406	2	15,421	
	4	1,765	23,983	3	15,409	3	15,406	3	15,42	
	5	1,765	23,986	4	15,408	4	15,407	4	15,419	
	6	1,763	23,987	5	15,409	5	15,405	5	15,421	
	7	1,765	23,984	6	15,406	6	*	6	15,421	
	8	1,763	23,988	7	15,406	7	*	7	15,42	
	9	1,765	23,987	8	15,407	8	*	8	15,42	
	10	1,766	23,987	9	15,406	9	*	9	15,421	
	media	1,765	23,985	10	15,405	10	*	10	15,42	
	media			media	15,407	media	15,4058	media	15,4202	
Cuerda	22,221	mm	Flеча	6,778	mm	Flеча	6,777	mm	Flеча	6,791
ξ está a	12,875	mm	Radio	12,495	mm	Radio	12,496	mm	Radio	12,4838
Sin procedimiento $\xi_i = 19,130$			θ aprox	126	°	θ aprox	125,525	°	θ aprox	126
$\gamma = -0,165^\circ$	f	6,76	mm	xe aprox	0,0180	xe aprox	0,0180	xe aprox	-0,2820	mm
	R	12,51	mm	Tomar xe:	12,893	mm	Tomar xe:	12,593	mm	Tomar xe:
$\gamma = 2,6^\circ$	f	7,074	mm	ξ_0	0	ξ_0	0	ξ_0	0	mm
	R	12,262	mm	ϵ_0	5,1838E-05	ϵ_0	0,01274486	ϵ_0	0,01274486	mm
				ξ_1	0,018	1º iteración	ξ_1	-0,2820	1º iteración	ξ_1
				f1	6,778		f1	6,77846		f1
				R1	12,495		R1	12,49454		R1
				Xe1	0,018		Xe1	-0,28222		Xe1
				ϵ_1	1,8137E-10		ϵ_1	1,09E-05		ϵ_1
				ξ_2	0,018	2º iteración	ξ_2	-0,2822	2º iteración	ξ_2
				f2	6,778		f2	6,77844		f2
				R2	12,495		R2	12,49455		R2
				Xe2	0,018		Xe2	-0,28222		Xe2
				ϵ_2	6,3458E-16		ϵ_2	9,4177E-09		ϵ_2

Anexo 1. Toma y tratamiento de datos

$\theta \text{ aprox} = 109^\circ$		Cuerda	
ya ó yb	10,13	mm	
	xa [mm]	xb [mm]	
1	2,674	23,067	
2	2,672	23,07	
3	2,673	23,069	
4	2,67	23,071	
5	2,674	23,07	
6	2,672	23,072	
7	2,673	23,072	
8	2,671	23,071	
9	2,672	23,069	
10	2,672	23,072	
media	2,672	23,070	
Cuerda	20,398	mm	
ξ está a	12,871	mm	
Sin procedimiento		$\xi_i = 19,130$	
$\gamma = -0,165^\circ$	f	5,261	mm
	R	12,516	mm
$\gamma = 2,6^\circ$	f	5,573	mm
	R	12,119	mm

$\gamma = -0,165^\circ$			
Flecha			
sin reiterar			
$\xi = 0$		$\xi = xe^*$	
	yti [mm]		yti [mm]
1	15,409	1	15,407
2	15,408	2	15,406
3	15,41	3	15,406
4	15,41	4	15,407
5	15,409	5	15,407
6	15,409	6	15,408
7	15,408	7	15,407
8	15,409	8	15,408
9	15,409	9	*
10	15,408	10	*
media	15,409	media	15,4070
Flecha	5,279	Flecha	5,277
Radio	12,492	Radio	12,494
θ aprox	109	θ aprox	109
xe aprox	0,0180	xe aprox	0,018
Tomar xe:	12,889	Tomar xe:	12,589
ξ_0	0	ξ_0	0
ε_0	5,1827E-05	ε_0	0,0127372
ξ_1	0,018	ξ_1	-0,2818
f1	5,279	f1	5,277563
R1	12,492	R1	12,493671
Xe1	0,018	Xe1	-0,282201
ε_1	2,9381E-10	ε_1	1,77E-05
1º iteración		1º iteración	
ξ_2	0,018	ξ_2	-0,2822
f2	5,279	f2	5,277545
R2	12,492	R2	12,493696
Xe2	0,018	Xe2	-0,282201
ε_2	1,6656E-15	ε_2	2,4738E-08
2º iteración		2º iteración	

$\gamma = 2,6^\circ$			
Flecha			
$\xi = 0$		$\xi = xe^*$	
	yti [mm]		yti [mm]
1	15,421	1	15,406
2	15,421	2	15,408
3	15,42	3	15,407
4	15,419	4	15,409
5	15,42	5	15,408
6	15,421	6	15,407
7	15,418	7	15,409
8	15,422	8	15,407
9	15,421	9	15,406
10	15,42	10	15,406
media	15,4203	media	15,4073
Flecha	5,290	Flecha	5,277
Radio	12,47631	Radio	12,4940
θ aprox	110	θ aprox	109
xe aprox	-0,2818	xe aprox	-0,282209
Tomar xe:	12,589	Tomar xe:	12,589
ξ_0	0	ξ_0	0
ε_0	0,0127372	ε_0	0,0127372
ξ_1	-0,2818	ξ_1	-0,2818
f1	5,277563	f1	5,277563
R1	12,493671	R1	12,493671
Xe1	-0,282201	Xe1	-0,282201
ε_1	1,77E-05	ε_1	1,77E-05
1º iteración		1º iteración	
ξ_2	-0,2822	ξ_2	-0,2822
f2	5,277545	f2	5,277545
R2	12,493696	R2	12,493696
Xe2	-0,282201	Xe2	-0,282201
ε_2	2,4738E-08	ε_2	2,4738E-08
2º iteración		2º iteración	

$\theta \text{ aprox } = 65^\circ$			$\gamma = -0,165^\circ$				$\gamma = 2,6^\circ$							
Cuerda			Flecha				Flecha							
ya ó yb	13,444	mm	sin reiterar		$\xi = 0$		$\xi = xe^*$		$\xi = 0$		$\xi = xe^*$			
	xa [mm]	xb [mm]	yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]		yti [mm]			
1	6,144	19,585	1	15,407	1	15,408	1	15,42	1	15,409	1	15,409		
2	6,143	19,585	2	15,408	2	15,407	2	15,418	2	15,403	2	15,403		
3	6,143	19,585	3	15,407	3	15,407	3	15,419	3	15,407	3	15,407		
4	6,143	19,59	4	15,407	4	15,406	4	15,42	4	15,408	4	15,408		
5	6,142	19,591	5	15,405	5	15,406	5	15,419	5	15,409	5	15,409		
6	6,139	19,594	6	15,408	6	15,407	6	15,419	6	15,407	6	15,407		
7	6,145	19,589	7	15,407	7	*	7	15,421	7	15,408	7	15,408		
8	6,143	19,591	8	15,407	8	*	8	15,419	8	15,407	8	15,407		
9	6,138	19,59	9	15,407	9	*	9	15,418	9	15,407	9	15,407		
10	6,146	19,59	10	15,409	10	*	10	15,421	10	15,409	10	15,409		
media	6,143	19,589	media	15,407	media	15,4068	media	15,4194	media	15,4074	media	15,4074		
Cuerda	13,446	mm	Flecha	1,963	mm	Flecha	1,96	mm	Flecha	1,975	mm	Flecha	1,963	mm
ξ está a	12,866	mm	Radio	12,494	mm	Radio	12,496	mm	Radio	12,42878	mm	Radio	12,4927	mm
Sin procedimiento $\xi_i = 19,130$			Tetah aprox	65	°	Tetah aprox	65	°	Tetah aprox	65	°	Tetah aprox	65	°
$\gamma = -0,165^\circ$	f	1,945	mm	xe aprox	0,0180	xe aprox	0,0180		xe aprox	-0,2807		xe aprox	-0,282179	
	R	12,591	mm	Tomar xe:	12,884	mm			Tomar xe:	12,585	mm			
$\gamma = 2,6^\circ$	f	2,258	mm	ξ_0	0	ξ_0	0		ξ_0	0		ξ_0	0	
	R	11,137	mm	ε_0	5,1835E-05	ε_0	0,01268867		ε_0	0,01268867		ε_0	0,01268867	
			ξ_1	0,018	1ª iteración	ξ_1	-0,2807	1ª iteración	ξ_1	-0,2807	1ª iteración	ξ_1	-0,2807	1ª iteración
			f1	1,963		f1	1,9627113		f1	1,9627113		f1	1,9627113	
			R1	12,494		R1	12,496401		R1	12,496401		R1	12,496401	
			Xe1	0,018		Xe1	-0,282262		Xe1	-0,282262		Xe1	-0,282262	
			ε_1	1,1536E-09		ε_1	6,90E-05		ε_1	6,90E-05		ε_1	6,90E-05	
			ξ_2	0,018	2ª iteración	ξ_2	-0,2823	2ª iteración	ξ_2	-0,2823	2ª iteración	ξ_2	-0,2823	2ª iteración
			f2	1,963		f2	1,9626423		f2	1,9626423		f2	1,9626423	
			R2	12,494		R2	12,496771		R2	12,496771		R2	12,496771	
			Xe2	0,018		Xe2	-0,282271		Xe2	-0,282271		Xe2	-0,282271	
			ε_2	2,5674E-14		ε_2	3,7826E-07		ε_2	3,7826E-07		ε_2	3,7826E-07	

$\theta \text{ aprox } = 33^\circ$		$\gamma = -0,165^\circ$		$\gamma = 2,6^\circ$	
Cuerda		Flecha		Flecha	
ya ó yb	14,881 mm	sin reiterar			
		$\xi = 0$	$\xi = xe^*$	$\xi = 0$	$\xi = xe^*$
		yt _i [mm]	yt _{ii} [mm]	yt _i [mm]	yt _{ii} [mm]
1	9,279 16,433	1	15,407	1	15,418
2	9,278 16,432	2	15,407	2	15,421
3	9,278 16,441	3	15,405	3	15,42
4	9,274 16,445	4	15,409	4	15,421
5	9,277 16,445	5	15,406	5	15,42
6	9,277 16,441	6	15,405	6	15,42
7	9,273 16,443	7	15,406	7	15,419
8	9,279 16,439	8	15,407	8	15,42
9	9,274 16,44	9	15,407	9	15,419
10	9,275 16,439	10	15,406	10	15,418
media	9,276 16,440	media	15,407	media	15,4196
Cuerda	7,163 mm	Flecha	0,526 mm	Flecha	0,539 mm
ξ está a	12,858 mm	Radio	12,469 mm	Radio	12,4416 mm
Sin procedimiento $\xi_i = 19,130$		Tetah aprox	33 °	Tetah aprox	34 °
$\gamma = -0,165^\circ$	f 0,507 mm R 12,893 mm	xe aprox	0,0180	xe aprox	-0,27508
		Tomar xe:	12,876 mm	Tomar xe:	12,583 mm
$\gamma = 2,6^\circ$	f 0,822 mm R 8,218 mm	ξ_0	0	ξ_0	0
		ε_0	5,1731E-05	ε_0	0,01243314
		ξ_1	0,018	ξ_1	-0,2751
		f ₁	0,525	f ₁	0,5261669
		R ₁	12,470	R ₁	12,453679
		Xe ₁	0,018	Xe ₁	-0,281297
		ε_1	4,8784E-09	ε_1	2,81E-04
		ξ_2	0,018	ξ_2	-0,2813
		f ₂	0,525	f ₂	0,5258859
		R ₂	12,470	R ₂	12,460051
		Xe ₂	0,018	Xe ₂	-0,281441
		ε_2	4,601E-13	ε_2	6,5054E-06

ANEXO 2. Códigos de Matlab®

Código 1. Incertidumbretetah1

%Para calcular la incertidumbre en función de tetah.

```
clear
t=input('Introducir ángulo de tetah de inicio del estudio: ');

for j=1:1:180

    if j<t
        tetah(1,j)=NaN;
        tetahr(1,j)=NaN;
        o2(1,j)=NaN;
        Q(1,j)=NaN;
        P(1,j)=NaN;
        uruf(1,j)=NaN;
        uruf2(1,j)=NaN;
        PQ(1,j)=NaN;

    else
        tetah(1,j)=j;
        tetahr(1,j)=j*pi/180;
        o2(1,j)=tetahr(1,j)/2;

        Q(1,j)=3.25*(sin(o2(1,j))/(2*(1-cos(o2(1,j))))^2;

        P(1,j)=(cos(o2(1,j))*(cos(o2(1,j))-1)/((1-cos(o2(1,j)))^2))^2;

        uruf2(1,j)=Q(1,j)+P(1,j);
        uruf(1,j)=sqrt(uruf2(1,j));

        PQ(1,j)=P(1,j)/Q(1,j);

    end

end %

plot(uruf,'linewidth',2)
xlabel('tetah (grados)','fontsize',14);
ylabel('Ur/Uf','fontsize',14);
title('Ur/Uf - tetah (grados)','fontsize',14);
```



Código 2. Incertidumbretetah2

%Para el estudio de la influencia de la P (flecha) y Q (cuerda)

clear

t=input('Introducir ángulo de tetah de inicio del estudio: ');

for j=1:1:180

if j<t

tetah(1,j)=NaN;
tetahr(1,j)=NaN;
o2(1,j)=NaN;
Q(1,j)=NaN;
P(1,j)=NaN;
uruf(1,j)=NaN;
uruf2(1,j)=NaN;
PQ(1,j)=NaN;

else

tetah(1,j)=j;
tetahr(1,j)=j*pi/180;
o2(1,j)=tetahr(1,j)/2;

$Q(1,j) = 3.25 * (\sin(o2(1,j)) / (2 * (1 - \cos(o2(1,j))))^2$;

$P(1,j) = (\cos(o2(1,j)) * (\cos(o2(1,j)) - 1) / ((1 - \cos(o2(1,j)))^2))^2$;

uruf2(1,j)=Q(1,j)+P(1,j);
uruf(1,j)=sqrt(uruf2(1,j));

PQ(1,j)=P(1,j)/Q(1,j);

end

end %

plot(Q,'blue','linewidth',2)

hold;

plot(P,'red','linewidth',2)

xlabel('tetah (grados)','fontsize',14);

ylabel('Q (azul), P (rojo)','fontsize',14);

title('Q (azul), P (rojo) - tetah (grados)','fontsize',14);

Código 3. Incrementos

% Análisis para observar cómo influye un determinado incremento en la medición de la cuerda y la flecha por separado y una gráfica del efecto conjunto.

```
clear
disp(' ')
R=input('Introducir radio: ');
tet=input('Introducir ángulo desde el que comenzamos a contar tetah: ');
micras=input('introducir cuantas micras quieres de error: ');
disp(' ')
m=micras/1000;

for j=1:1:2
    for p=1:1:tet
        if j < 2
            c(j,p)=NaN;
            c2(j,p)=NaN;
            f(j,p)=NaN;
            Re(j,p)=NaN;
            Er(j,p)=NaN;
        else
            c(j,p)=NaN;
            c2(j,p)=NaN;
            f(j,p)=NaN;
            Re(j,p)=NaN;
            Er(j,p)=NaN;
        end
    end
    for i=tet:1:180
        tetah(1,i)=i;
        tetahr(1,i)=i*pi/180;
        if j < 2

            c(j,i)=2*R*sin(tetahr(1,i)/2);
            c2(j,i)=c(j,i)^2;
            f(j,i)=R*(1-cos(tetahr(1,i)/2))+m;

            Re(j,i)=(c2(j,i)/(8*f(j,i)))+0.5*f(j,i);
            Er(j,i)=abs((R-Re(j,i))/R);
        else
            c(j,i)=2*R*sin(tetahr(1,i)/2)+m;
            c2(j,i)=c(j,i)^2;
            f(j,i)=R*(1-cos(tetahr(1,i)/2));

            Re(j,i)=(c2(j,i)/(8*f(j,i)))+0.5*f(j,i);
            Er(j,i)=abs((R-Re(j,i))/R);
        end
    end
end

end

plot(Er(1,1:180),'red','linewidth',2)
```



```
hold;  
plot(Er(2,1:180),'blue','linewidth',2)  
xlabel('tetah (grados)','fontsize',14);  
ylabel('Error relativo','fontsize',14);  
title('Error relativo (azul cuerda, rojo flecha) - tetah (grados)','fontsize',14);
```



Código 4. Errorgamma1

%código para estudiar el error relativo cometido por la influencia de gamma eligiendo lo que queremos que nos muestre

```
clear
format long
disp('Introducir: ji=0 para abanico de jis, ji>0 para elegir gráfico en función de ji ')
disp(' ')
disp(' En caso de querer un gráfico ji, Introducir ji de 1 a 50 (será restado 1 y dividido por 10) ')
disp(' ')
jiu=input('Introducir ji: '); %ji es donde colocamos la retícula para hacer la flecha
for i=1:1:50 %barrido de gamma
    gamma(1,i)=i/10;
    gammar(1,i)=gamma(1,i)*pi/180;

    for j=1:1:21 %representamos los valores de ji/R es decir, desde 0 hasta 1
        ji(j,1)=(j-1)/20;

        Ea(j,i)=((1-cos(gammar(1,i)))/sin(gammar(1,i))+ji(j,1))*tan(gammar(1,i));
    end

end

end
if jiu>0
    plot(gamma,Ea(jiu,1:50),'linewidth',2)
    xlabel('gamma (grados)','fontsize',15);
    ylabel('Error de flecha adimensional','fontsize',15);
    title('Error flecha adimensional - gamma(grados)','fontsize',15);

else

    plot(gamma,Ea,'linewidth',2)
    xlabel('gamma (grados)','fontsize',15);
    ylabel('Error de flecha adimensional','fontsize',15);
    title('Error flecha adimensional - gamma(grados)','fontsize',15);
end
```

Código 5. Errorgamma2

%código para estudiar el gamma el error relativo cometido por la influencia de gamma y por j_i/R en 3D

```
clear
format long

disp(' ')
for i=1:1:500 %barrido de gamma desde 1 grado hasta 5
    gamma(1,i)=i/100;
    gammar(1,i)=gamma(1,i)*pi/180;

    for j=1:1:101 %representamos los valores de  $j_i/R$  es decir, desde 0 hasta 1
        ji(j,1)=(j-1)/100;

        Ea(j,i)=((1-cos(gammar(1,i)))/sin(gammar(1,i))+ji(j,1))*tan(gammar(1,i));
    end
end

surf(Ea,'LineStyle','none')
xlabel('gamma (grados)','fontsize',15);
ylabel('ji/R','fontsize',15);
Zlabel('Error de flecha adimensional','fontsize',15);
title('Error flecha adimensional - gamma(grados)-ji/R','fontsize',15);
```




Código 6. Errorgamma3

%código para estudiar el gamma el error relativo cometido por la influencia de gamma y por j_i/R (también en valores negativos) en 3D

```
clear
format long

disp(' ')
for i=1:1:500 %barrido de gamma desde 1 grado hasta 5
    gamma(1,i)=i/100;
    gammar(1,i)=gamma(1,i)*pi/180;

    for j=1:1:101 %representamos los valores de  $j_i/R$  es decir, desde 0 hasta 1
        ji(j,1)=(j-50)/100;

        Ea(j,i)=abs((1-cos(gammar(1,i)))/sin(gammar(1,i))+ji(j,1))*tan(gammar(1,i));
    end
end

surf(Ea,'LineStyle','none')
xlabel('gamma (grados)','fontsize',15);
ylabel('ji/R','fontsize',15);
Zlabel('Error de flecha adimensional','fontsize',15);
title('Error flecha adimensional - gamma(grados)-ji/R','fontsize',15);
```

Código 7. Gammatetah

```
%código para analizar de manera conjunta la influencia de gamma y de tetah

clear
format long

R=input('Introducir radio: ');
ji=input('Introducir ji: '); %ji es donde colocamos la retícula para hacer la flecha
gi=input('¿gamma inicial?: ');
gi=gi*10+1;
gf=input('¿gamma final? (recuerde: no más de 10 grados): ');
ti=input('¿valor inicial de tetah hasta 180? (se recomienda mayor de 30º):');
contagamma=gf*10+1;

for j=1:1:contagamma %j es para ángulos de gamma (puntos espaciados 0,1 grados, hasta 10 grados de
desviación)
    if j>=gi
        gamma(j,1)=(j-1)/10;
        gammar(j,1)=((j-1)/10)*pi/180;

        if j<=1
            xe(j,1)=0; %xe sólo depende del ángulo gamma
            E(j,1)=0; %el error de la flecha cometido al tener un ángulo gamma
        else
            xe(j,1)=R*(cos(gammar(j,1))-1)/sin(gammar(j,1));
            E(j,1)=(ji-xe(j,1))*tan(gammar(j,1));
        end %fin if j=1
        for i=1:1:180 %i es para ángulos de tetah

            if i<ti %Cuando i sea menor que ángulo gamma que hemos dicho, lo tomará nulo
                Rr(j,i)=NaN;
                Er(j,i)=NaN;
            else
                tetah(1,i)=i;% es para no repetir lo mismo en todas las filas
                tetahr(1,i)=i*pi/180;

                c(1,i)=2*R*sin(tetahr(1,i)/2);
                c2(1,i)=c(1,i)^2;
                f(1,i)=R*(1-cos(tetahr(1,i)/2));

                fr(j,i)=f(1,i)+E(j,1); %flecha real tomada teniendo un error de gamma determinado
                Ef(j,1)=E(j,1)/f(1,i);

                Rr(j,i)=(c2(1,i)/(8*fr(j,i)))+fr(j,i)/2; %es el radio real con el error incluido
                Er(j,i)=(R-Rr(j,i))/R; %error relativo
            end

        end %fin bucle for i
    else % Tomará como nulo si gamma es menor que lo que hemos pedido
```



```

gamma(j,1)=NaN;
gammar(j,1)=NaN;

xe(j,1)=NaN;
E(j,1)=NaN;

for i=1:1:180

    Rr(j,i)=NaN;
    Er(j,i)=NaN;
    Ef(j,1)=NaN;
end %fin bucle for
end %fin if gi

end %fin bucle for j

disp(' gamma irá desde el valor inicial hasta el final que se ha introducido ')
disp(' tetah irá desde el valor establecido hasta 180º ')
disp(' El ángulo gamma que aparecerá será 10+1 ')
disp(' eje x: ángulo tetah ; eje y: ángulo gamma; eje z: Error del radio ')

surf(Er,'LineStyle','none')
xlabel('tetah (grados)','fontsize',15);
ylabel('gamma (grados)','fontsize',15);
zlabel('Er (error relativo)','fontsize',15);
title('Error relativo - tetah (grados) - gamma (grados)','fontsize',15);

```

- **nota** En caso de querer tener una mejor apreciación se puede cambiar el código modificando los bucles for para realizar más puntos.

%código para analizar de manera conjunta la influencia de gamma y de tetah pero con más puntos intermedios

```

clear
format long

R=input('Introducir radio: ');
ji=input('Introducir ji: '); %ji es donde colocamos la retícula para hacer la flecha
gi=input('¿gamma inicial?: ');
gi=gi*10+1;
gf=input('¿gamma final? (recuerde: no más de 10 grados): ');
ti=input('¿valor inicial de tetah hasta 180? (se recomienda mayor de 30º):');
ti=ti*10;
contagamma=gf*100+1;
for j=1:1:contagamma %j es para ángulos de gamma (puntos espaciados 0,1 grados, hasta 10 grados de desviación)
    if j>=gi
        gamma(j,1)=(j-1)/100;
        gammar(j,1)=((j-1)/100)*pi/180;

    if j<=1

```



```

xe(j,1)=0; %xe sólo depende del ángulo gamma
E(j,1)=0; %el error de la flecha cometido al tener un ángulo gamma
else
xe(j,1)=R*(cos(gammar(j,1))-1)/sin(gammar(j,1));
E(j,1)=(ji-xe(j,1))*tan(gammar(j,1));
end %fin if j=1
for i=1:1:1800 %i es para ángulos de tetah (mil puntos espaciados 0,18 grados)

    if i<ti %Cuando i sea menor que ángulo gamma que hemos dicho, lo tomará nulo
        Rr(j,i)=NaN;
        Er(j,i)=NaN;
    else
        tetah(1,i)=i/10;% es para no repetir lo mismo en todas las filas
        tetahr(1,i)=i*pi/1800;

        c(1,i)=2*R*sin(tetahr(1,i)/2);
        c2(1,i)=c(1,i)^2;
        f(1,i)=R*(1-cos(tetahr(1,i)/2));

        fr(j,i)=f(1,i)+E(j,1); %flecha real tomada teniendo un error de gamma determinado
        Ef(j,1)=E(j,1)/f(1,i);

        Rr(j,i)=(c2(1,i)/(8*fr(j,i)))+fr(j,i)/2; %es el radio real con el error incluido
        Er(j,i)=(R-Rr(j,i))/R;
    end %fin if ti
end %fin bucle for i
else % Tomará como nulo si gamma es menor que lo que hemos pedido

    gamma(j,1)=NaN;
    gammar(j,1)=NaN;

    xe(j,1)=NaN;
    E(j,1)=NaN;

    for i=1:1:1800 %i es para ángulos de tetah (mil puntos espaciados 0,18 grados)
        Rr(j,i)=NaN;
        Er(j,i)=NaN;
        Ef(j,1)=NaN;
    end %fin bucle for
end %fin if gi

end %fin bucle for j

disp(' gamma irá desde el valor incial hasta el final que se ha introducido ')
disp(' tetah irá desde el valor establecido hasta 180º ')
disp(' El ángulo gamma que aparecerá será 10+1 ')
disp(' eje x: ángulo tetah ; eje y: ángulo gamma; eje z: Error del radio ')

surf(Er,'LineStyle','none')
xlabel('tetah (grados)','fontsize',15);
ylabel('gamma (grados)','fontsize',15);
zlabel('Er (error relativo)','fontsize',15);
title('Error relativo - tetah (grados) - gamma (grados)','fontsize',15);

```

ANEXO 3. Hoja de registro del procedimiento operatorio propuesto del método de la flecha

La siguiente página correspondiente a este tercer anexo propone una hoja de registro de los datos tomados en el laboratorio así como también de las ecuaciones necesarias para dicho procedimiento.

y_{A,B} (mm)		ξ_i = 0	ξ_i = x_e*					
n	x_A (mm)	x_B (mm)	n	y_t¹ (mm)	n	y_t² (mm)		
	1					1		
	2					2		
	3					3		
	4					4		
	5					5		
	6					6		
	7					7		
	8					8		
	9					9		
10			10					
media				media				
cuerdas			mm	flechas				
			mm	Radio				
			mm	Radio				
gamma				x_e*				
		x₁	x₂					
		y₁	y₂					
1								
2								
3								
4								
media								

$$\gamma \approx \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$c = x_B - x_A$$

$$f = y_T - y_{A,B}$$

$$R = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

$$x_e^* = \frac{R (\cos \gamma - 1)}{\sin \gamma}$$

ANEXO 4. Especificaciones técnicas sobre el anillo patrón utilizado



Tipo de patrón	Anillo interior
Diámetro nominal del patrón (mm)	25
Calidad ISO	2
Referencia	667720101
Valor medio de las medidas (mm)	24,9984
Diferencia máxima entre las medidas (mm)	0,0004
Redondez máxima (μm)	0,57
Incertidumbre de calibración del diámetro	$U = \pm 0,4125 \mu\text{m}$
Incertidumbre de calibración de la redondez	$U = \pm 0,1 \mu\text{m}$
Factor de recubrimiento	$K = 2$

A continuación se adjunta la hoja que recoge los datos de la calibración del patrón.



RESULTADOS

REFER.	MEDIDA NOMINAL (mm)	VALOR MEDIDO (mm)						VALOR MEDIO (mm)	DIF. MÁXIMA (mm)	REDONDEZ (µm)	
		D1	D2	D3	D4	D5	D6				
667720101	25	24,9985	24,9985	24,9983	24,9985	24,9986	24,9982	24,9984	0,0004	1	0,44
										2	0,35
										3	0,57
667720201	55	54,9991	54,9984	54,9990	54,9987	54,9988	54,9991	54,9984	0,0007	1	0,84
										2	0,72
										3	0,81

INCERTIDUMBRE DE CALIBRACIÓN DEL DIÁMETRO: $U = \pm (0,4 + 0,0005 \cdot D) \mu\text{m}$; D= mm

INCERTIDUMBRE DE CALIBRACIÓN DE LA REDONDEZ: $U = \pm 0,1 \mu\text{m}$

FACTOR DE COBERTURA K=2



GLOSARIO DE TÉRMINOS

- **Ángulo de desviación (γ):** Es el ángulo que determina la falta de paralelismo entre los ejes de movimiento de la mesa soporte y la retícula de la pantalla de observación.
- **Ángulo de posicionamiento (θ):** Ángulo que nos determina la zona de la mitad superior de la circunferencia en la que se realiza la medición de la cuerda y la flecha. ($0^\circ < \theta < 180^\circ$).
- **Calibración:** Conjunto de operaciones que establecen, en condiciones especificadas, la relación entre los valores de una magnitud indicados por un instrumento de medida o sistema de medida, o los valores representados por una medida materializada o por un material de referencia, y los valores correspondientes de esa magnitud realizados por patrones.
- **Cuerda:** Uno de los dos parámetros básicos para el cálculo del radio mediante el método de la flecha. Se obtiene por diferencia de dos medidas desplazando el husillo horizontal en la misma coordenada vertical.
- **Enrasar:** Acción cuyo efecto es lograr la coincidencia perfecta entre la línea o superficie de la pieza a medir y la cruceta o líneas de la retícula de la pantalla de observación.
- **Error de coseno:** Falta de paralelismo entre los ejes de movimiento de la mesa soporte y la retícula de la pantalla de observación.
- **Error de medida:** Es el resultado de una medición menos el valor verdadero del mensurando.
- **Error de paralelismo:** defecto en la alineación entre los ejes de movimiento de la mesa soporte (husillos) y las líneas del retículo de la pantalla de observación.
- **Exactitud de medida:** Grado de concordancia entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando. (El término precisión no debe utilizarse por exactitud).
- **Exactitud de un instrumento de medida:** Aptitud de un instrumento de medida para dar respuestas próximas a un valor verdadero.



- **Factor de cobertura(k):** Factor numérico utilizado como multiplicador de la incertidumbre u .
- **Flecha:** Uno de los dos parámetros básicos para el cálculo del radio mediante el método de la flecha. Se obtiene realizando la tangente sobre la parte superior de la circunferencia.
- **Goniómetro:** Instrumento de medición de ángulos.
- **Iluminación diascópica:** El haz luminoso del proyector incide sobre la superficie de la pieza, reflejando su imagen iluminada en la pantalla.
- **Iluminación episcópica:** El haz luminoso del proyector de perfiles se transmite a través de la pieza, proyectando el contorno o silueta situada en el plano focal en la pantalla de observación.
- **Incertidumbre expandida (U):** Magnitud que define un intervalo en torno al resultado de una medición, y en el que se espera encontrar una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser atribuidos razonablemente al mensurando.
- **Incertidumbre de medida ó incertidumbre típica (u):** Parámetro asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando. Se expresa en forma de desviación típica.
- **Incertidumbre típica combinada:** Incertidumbre típica del resultado de una medición, cuando el resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes. Se obtiene a partir de la aplicación de la *ley de propagación de varianzas*.
- **Ley de propagación de varianzas:** También llamado propagación de errores o propagación de incertidumbres. Determina la incertidumbre de una magnitud medida de manera indirecta a partir de otras magnitudes de las que conocemos su incertidumbre.
- **Magnitud:** Es un atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente.
- **Matlab®** (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices"): es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M) capaz de manipular matrices, realizar



- cálculos complejos, representación de datos y funciones, implementación de algoritmos, creación de interfaces de usuario (GUI), etc.
- **Medición:** Conjunto de operaciones que tienen por finalidad determinar un valor de una magnitud.
 - **Mensurando:** Magnitud particular sometida a medición.
 - **Método de la flecha:** método de medida específico para la obtención de la magnitud del radio de una circunferencia interior o sector circular de un agujero.
 - **Método de medida:** Sucesión lógica de operaciones, descritas de una forma genérica, utilizadas en la ejecución de las mediciones.
 - **Metrología:** Ciencia que estudia todos los problemas relativos a las mediciones.
 - **Patrón de referencia:** Medida materializada, instrumento de medida de referencia o sistema de medida destinado a definir, realizar, conservar o reproducir una unidad o uno o varios valores de una magnitud para que sirvan de referencia.
 - **Posición de tangencia:** Zona determinada por la distancia ξ donde desplazamos el husillo vertical para hacer tangente.
 - **Procedimiento de medida:** Conjunto de operaciones descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares según un método dado.
 - **Proyector de perfiles:** Aparato que gracias a su juego de lentes amplifica las dimensiones de las piezas en una pantalla de observación para una mejor inspección y medición.
 - **Statistix®:** Software matemático capaz de realizar cálculos, análisis y representaciones estadísticas.
 - **Tolerancia:** Intervalo de valores entre los que debe encontrarse una magnitud.
 - **Unidad de medida:** Magnitud particular, definida y adoptada por convenio, con la que se comparan otras magnitudes de la misma naturaleza para expresarlas cuantitativamente con respecto a esta magnitud.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- [1] [López Rodríguez, Joaquín]: “Fundamentos básicos de Metrología dimensional”. Editor: Universidad Politécnica de Cartagena. 128 páginas. (2011)
- [2] [Centro español de Metrología]: “Procedimiento DI-001 para la calibración de proyectores de perfiles”. Primera edición. 36 páginas. (1999)
- [3] [Centro español de Metrología]: “Guía para la expresión de la incertidumbre de medida”. Segunda edición. 112 páginas. (2000)
- [4] [BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML]: “Vocabulario internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM)”. Traducción por el Centro español de Metrología. 89 páginas. (2008)
- [5] [EURAMET©]: “Metrology – in short© (Metrología abreviada)”. Tercera edición. Segunda edición en español. Traducción por el Centro español de Metrología. 86 páginas. (2008)
- [6] [Gómez García]: “Plan de calibración del laboratorio de Metrología de la Universidad Politécnica de Cartagena”. Proyecto fin de carrera dirigido por Juan José Hernández Ortega. (2003)
- [7] [Fargo, Francis T. y Curtis, Mark A.]: “Handbook of dimensional measurement”. Tercera edición. 580 páginas. Editorial: Industrial Press. (1994)
- [8] [Busch, Ted]: “Fundamentals of dimensional metrology”. Tercera edición. 642 páginas. Editorial: Delmar. (1998)
- [9] [CTI (Centres Techniques Industriels)]: “Metrología: práctica de la medida en la industria”. Traducción por AENOR. 416 páginas. Editor: Aenor. (1999)
- [10] [Hume, K.J.]: “Metrología Industrial”. Segunda edición. 379 páginas. Editorial: River. (1968)