Universidad Politécnica de Cartagena
E.T.S. de Ingeniería de Telecomunicación

Espacio-Tele□o n^{0}1 (2010)
Revista de la ETSIT-UPCT

Cosmología Fractal

Silvestre Paredes[1] y Vicent J. Martínez[2]

1. Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
Universidad Politécnica de Cartagena.
2. Departament d'Astronomia i Astrofísica. Observatori Astronòmic.
Universitat de València.

silvestre.paredes@upct.es; vicent.martinez@uv.es

Resumen

Los fractales han sido y son una herramienta muy útil para describir la distribución de galaxias en el Universo. En este artículo se hace un breve resumen de la teoría de fractales y su aplicación a la distribución de galaxias observada.

Proyecto/Grupo de investigación: Grupo de Investigación D017-02 Modelos para Procesado de Señales y Series Temporales, Astronomía y Fiabilidad de Sistemas (1.). Proyecto Alhambra. Estudio Sistemático de la Evolución Cósmica. (C-Consolider, AYA2006-14056)

Líneas de investigación: Fractales. Distribución de Galaxias. Cosmología.

1. Introducción histórica de los fractales

En los últimos años, la ciencia de la Geometría Fractal se ha transformado en un área muy amplia de conocimiento que ha influido notablemente en todas las ramas de la Ciencia y la Ingeniería. La Geometría Fractal está relacionada con las propiedades de los objetos fractales, simplemente conocidos como **fractales**. Estos fractales los podemos encontrar en la Naturaleza o generados utilizando una "receta" matemática.

Muchas de las ideas fundamentales de la geometría fractal son conocidas desde hace bastante tiempo. La aparición de los primeros conjuntos geométricos con propiedades aparentemente paradójicas como las curvas de Peano, las curvas de Koch o el conjunto de Cantor, se remonta a finales del siglo XIX. En dichos conjuntos parece existir una discordancia entre su tamaño real y su configuración espacial como conjunto de puntos, encontramos así curvas de longitud infinita que encierran áreas finitas, curvas que rellenan todo el espacio pasando por todos y cada uno de sus puntos o curvas en las que la distancia entre dos puntos cualesquiera de la misma siempre es infinita. Estos y otros conjuntos plantean la necesidad de establecer una medida adecuada de su tamaño por una parte y por otra el estudio de su forma y propiedades geométricas. Con este objetivo se puso en marcha la llamada *teoría geométrica de la medida*, cuyos inicios parten de la definición del concepto de *dimensión de Haussdorf* como una forma de distinguir el tamaño de estos conjuntos paradójicos y que sentó sus bases con los trabajos de Besicovitch entre 1920 y 1930; en los que se estudiaban las propiedades geométricas de los conjuntos planos que él llamó: *irregulares.*

En 1975 Benoit Mandelbrot, en su obra *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimensions*, además de emplear por primera vez el término *fractal,* defiende una idea que se convertiría con el tiempo en la razón del crecimiento exponencial de las aplicaciones de éstos y de la actual popularización del término: *las formas de la naturaleza son fractales y múltiples procesos de la misma se rigen por comportamientos fractales.* Estas ideas ya las expuso en 1967 en el artículo *How long is the British's Coast?*, publicado en la revista Science.

En 1981 Hutchinson desarrolla un concepto básico para la Geometría Fractal: el de conjunto autosemejante, el cual ha tenido una gran importancia en el desarrollo posterior de la misma. Con la llegada de los ordenadores y su capacidad de realizar de forma rápida y precisa complejos cálculos repetitivos se ha conseguido una exploración más profunda de estos temas.

2. Irregularidad, Auto-similitud y Dimensión Fractal

Mandelbrot observó que algunas veces es imposible describir la Naturaleza utilizando solamente geometría Euclidea, es decir, en términos de líneas rectas, círculos, cubos y objetos regulares similares. Por ejemplo, una nube puede parecer una esfera, pero ésta es una mala aproximación. Incluso considerando que dicha nube está formada por superposición de varías esferas seguiría siendo una aproximación muy alejada de la realidad. Mandelbrot propuso que los fractales y la Geometría fractal podrían utilizarse para describir objetos reales, tales como árboles, rayos, los meandros de los ríos y las líneas de costa por nombrar unos pocos.

La característica más peculiar de la Geometría Fractal consiste en abordar el estudio de formas geométricas no diferenciables o quebradas a cualquier escala que se miren, a diferencia de la Geometría Euclídea en la que se plantea el estudio de curvas que localmente se comportan como rectas. La Geometría Euclídea proporciona modelos que son adecuados para ciertas formas de regularidad en su comportamiento que permite aproximar forma geométricas complejas mediante otras más simples como rectas o planos. Sin embargo con esta aproximación se efectúa un análisis local, perdiendo la perspectiva global del objeto geométrico. Este tipo de aproximación tan regular es demasiado estricta para poder adaptarse a la mayoría de los procesos reales naturales.

Un observador situado en la superficie de la Tierra creerá que un modelo esférico es más que adecuado para representar la Luna, sin apreciar las rugosidades de su superficie, mientras que un astronauta en el interior de un cráter lunar no tendría esa misma percepción, este hecho pone de relieve que la utilidad de cualquier modelo está en relación directa con la oscilación entre los valores mínimos y máximos considerados en las magnitudes estudiadas. La Geometría Fractal ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas: la geometría fractal busca aquellos aspectos geométricos que no cambian con la escala de observación.

A continuación examinaremos una de las propiedades más interesantes de los conjuntos fractales: la auto-similitud. Para ilustrar este concepto utilizaremos la curva de Koch, cuya construcción geométrica es muy sencilla. Utilizando como conjunto inicial un segmento de longitud 1 (Figura 1**a**), se divide dicho segmento en tres partes de la misma longitud y el segmento central, de longitud $\frac{1}{3}$, se reemplaza por dos segmentos, ambos de longitud $\frac{1}{3}$ tal y como se puede apreciar en la Figura 1**b**. El proceso se repite en cada uno de los segmentos del nuevo conjunto. En la segunda iteración (Figura 1**c**) tendríamos un conjunto de $4^2 = 16$ segmentos de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$.

Para contruir la curva de Koch se repite el proceso de forma indefinida. En la Figura 1**d** se representa la curva de Koch después de las primera iteraciones del proceso. Con esta construcción es fácil comprobar con facilidad que la curva de Koch posee la propiedad de que se parece a sí misma en todas las escalas de observación: posee la propiedad de auto-similitud; donde una parte es similar al conjunto completo. La curva es un ejemplo claro de lo que se ha denominado fractal regular. Para objetos naturales como en el caso de una nube o del humo de un cigarro esta auto-similitud no sucede de la misma forma, no existe auto-similitud en el sentido estricto, pero sí sucede de forma estadística.

Al observar una nube (Figura 2) a través de diferentes ampliaciones encontramos formas que presentan un aspecto similar a la del objeto en toda su extensión, no es posible asegurar si estamos contemplando la nube en su totalidad o solamente una parte de ella. Para una forma regular, la complejidad decrece cuando observamos una parte ampliada de la misma, mientras que para

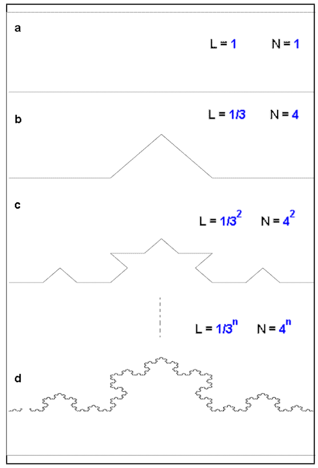

Figura 1: Curva de Koch.

Figura 2: Auto-similitud estadística (nube).

la nube o la curva de Koch, la complejidad no decrece puesto que cualquier parte es similar al todo. La autosimilitud también se conoce como *invarianza de escala,* puesto que las formas auto-similiares no cambian su forma cuando cambia la escala en la que las observamos.

Además de la invarianza de escala, otra de las característica esenciales de los fractales está relacionada con su dimensión. De forma intuitiva la dimensión de un objeto o un conjunto nos da una idea de su forma y tamaño. Por ejemplo en el caso de la dimensión topológica, ésta es 0 para un punto, 1 para una recta y 2 para una superficie. Sin embargo, esta clase de dimensión topológica no es adecuada para los conjuntos fractales. La curva de Koch y cualquier curva suave en el plano tienen una dimensión topológica igual a 1, sin embargo la complejidad de la primera es manifiestamente superior a la de la segunda.

A principio del siglo XX, el matemático alemán Felix Haussdorff mostró que es posible estimar el tamaño de un conjunto, introduciendo un nuevo concepto de dimensión asociado al proceso de medida. Para medir un conjunto, se recurre a recubrimientos del mismo utilizando objetos de medida conocida, como segmentos, cuadrados o cubos. Si los objetos del cubrimiento pueden tener cualquier forma entonces se obtiene la *dimensión de Haussdorf*, si las unidades de medida empleada son objetos de forma regular entonces obtendremos la llamada *dimensión de semejanza.*

Para entender la definición de dimensión de semejanza, supongamos que tenemos una superficie y que tratamos de medir el "tamaño" de esa superficie. Si es posible cubrir dicha superficie con un número de piezas cuadradas de lado r igual a $N(r)$, el área total A_0 será

$$A_0 = N(r) \times r^2,$$

de donde el número de cuadrados será:

$$N(r) = A_0 \times r^{-2}.$$

Si ahora se quiere asociar a esa superficie un volumen, utilizando un recubrimiento por cubos de lado r, entonces está claro que

$$V = N(r) \times r^3 \Rightarrow V = A_0 \times r^{-2} \times r^3 = A_0 \times r.$$

Pero si $r \to 0$ (se utilizan recubrimientos con cubos de lado cada vez menor), entonces el volumen se hace 0, como es de esperar para el cualquier superficie plana. Si queremos hallar su longitud

$$L = N(r) \times r^1 = A_0 \times r^{-1},$$

entonces, en este caso, cuando $r \to 0$ la longitud tiende a ∞. Se observa que el exponente 2, es el que conduce a un resultado no trivial (ni 0, ni ∞). Esta es una de las propiedades que debe tener una dimensión. La dimensión vendrá caracterizada por el hecho de que si queremos que el proceso de medida nos lleve a una evaluación razonable del tamaño de un conjunto hay que hacerlo en la dimensión adecuada. La evaluación utilizando otra potencia distinta de 2 nos da infinito si la misma fuese 1 o 0 si fuese 3, en ambos casos no se aporta ninguna información sobre el tamaño del conjunto.

En este sentido, podríamos decir que una curva (de longitud finita) tiene dimensión 1 porque, para que el proceso de medición anterior que se le aplica nos proporcione información útil acerca de su tamaño, tenemos que evaluar el lado de los rectángulos del recubrimiento. Se puede comprobar que para una figura de dimensión entera d que puede ser descompuesta en n copias a escala r de si misma, y suponiendo normalización, obtenemos la siguiente relación para el número de objetos del recubrimiento

$$N(r) = (1/r)^d,$$

y $1/r$ sería en el caso del cuadrado, el número de veces que el cuadrado de lado unitario contiene el lado del cuadrado a escala r o equivalentemente

$$d = D_S = \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}. \tag{1}$$

Esta fórmula conduce a la definición del valor de la dimensión de semejanza de cualquier figura que pueda ser descompuesta en copias a escala de sí misma. Por ejemplo, podemos descomponer la curva de Koch en cuatro copias a escala $\frac{1}{3}$ de sí misma, utilizando la ecuación 1, obtenemos el valor

$$D_S\,(\text{Curva de Koch}) = \frac{\log 4}{\log\left(1/\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\,951.$$

¿Qué significa el valor fraccional de esta dimensión? El valor de la dimensión de similitud de la curva de Koch está entre 1 y 2, donde 1 es la dimensión de una línea y 2 la dimensión de plano. Por tanto podemos entender la dimensión de semejanza de un conjunto como un índice de su complejidad.

3. Universo fractal

La caracterización de los conjuntos fractales mediante el cálculo de su dimensión se ha aplicado con éxito al estudio de muchos procesos físicos que implican un agrupamiento de materia (Figura 3). En estos conjuntos la densidad de partículas decrece con el tamaño siguiendo una ley de potencias de la forma

$$n(R) \propto R^{D-2},$$

donde D es su dimensión fractal. Como podemos apreciar en la figura estos conjuntos están dotados de autosimilitud estadística. Existen fenómenos de crecimiento aún más complejos en los que esta ley potencias depende localmente y aunque no se comportan como un fractal globalmente, sí lo hacen de forma local, variando la distribución de partículas de un sitio a otro dentro del conjunto;

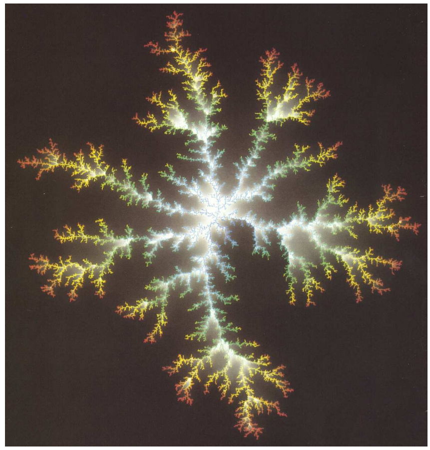

Figura 3: Crecimiento fractal.

a estos conjuntos se les conoce como multifractales. Un multifractal vendría a ser una mezcla de fractales cada uno con una dimensión distinta. También se ha demostrado que la disposición de la materia visible en el Universo sigue ese tipo de distribución multifractal a pequeñas escalas. Si bien a gran escala el Universo es homogéneo e isótropo, a pequeña escala tiene tendencia al agrupamiento. Las estrellas se unen en galaxias, éstas se agrupan en sistemas o cúmulos de galaxias, y estos a su vez se agruparían en un nivel superior de la jerarquía, los supercumulos y estos en estructuras mayores, como filamenteos y paredes, a un escala superior y así sucesivamente. A pequeñas escalas, el Universo tiene esta propiedad de autosimilitud local estadística. No obstante, este tipo de universo jerárquico no es el aceptado en la actualidad. La descripción del universo que actualmente tiene más fuerza está basada en el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía por el cual no hay ni posiciones, ni direcciones privilegiadas. Existen bastantes evidencias del cumplimiento del principio cosmológico, una de las más importantes es la radiación de fondo de microondas (CMBR), descubierta en 1965 por Arno Penzias y Robert Wilson. Este tipo de radiación es un residuo del Big Bang y es una radiación muy isótropa, se detecta en todas las direcciones y con la misma intensidad.

Sin embargo, a pesar de su homogeneidad en todas las direcciones, es necesario que existan pequeñas variaciones iniciales en la densidad de materia, que después y gracias a la gravedad irían aumentando hasta llegar a las estructuras que se observan actualmente. En este proceso, las regiones del universo un poco más densas atrajeron a la materia cercana, incrementando de esta forma su densidad. Estas variaciones de la densidad producían anisotropías, variaciones en los valores de la radiación cósmica de fondo al observarla en diferentes direcciones. Las mediciones realizadas sobre esta radiación nos

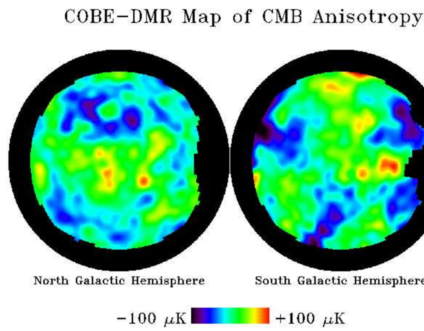

Figura 4: Medida de las anisotropías por el COBE.

muestran que la intensidad de la radiación cósmica de fondo varía muy poco en todas las direcciones. El satélite COBE, enviado para estudiar con detalle estas variaciones, mostró (Figura 4) que estas variaciones son realmente pequeñas (del orden de microkelvins), lo que implica que la distribución de materia en el principio del Universo fue muy uniforme.

La distribución de galaxias proyectada sobre la bóveda celeste no es tán isótropa como la radiación de fondo. En estas proyecciones se aprecian mayores concentraciones de galaxias en determinadas direcciones (que corresponden con los supercúmulos). Sin embargo, si el volumen proyectado es suficientemente grande, la distribución si que que resulta cuasi-isótropa. Los modelos fractales propuestos hasta ahora no reproducen esta isotropía. Las mediciones de las anisotropías de la radiación de fondo de microondas (CMBR) nos proporcionan información importantísima sobre las inhomogeneidades iniciales que posteriormente dieron lugar a las actuales estructuras que forman el Universo.

Desde su descubrimiento, se han propuesto diversos métodos para realizar el análisis estadístico de estas anisotropías. De entre estos métodos destacan la función de correlación a dos puntos y el espectro de potencias angular. Estos dos métodos son adecuados para comprobar modelos cosmológicos que contengan variaciones de tipo Gaussiano, sin embargo hay algunos mecanismo físicos que producen una distribución de tipo no Gaussiano, por lo que también se ha propuesto algunos métodos alternativos para analizar los mapas de anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de microondas (CMBR) del Universo, que está basado en el estudio de las rugosidades de superficies naturales. En este caso el mapa de anisotropías del COBE-DMR se ha interpretado en términos de una superficie que tiene alturas y valles proporcionales a la temperatura de las anisotropías (Figura 5) . Proponemos en este trabajo una aproximación

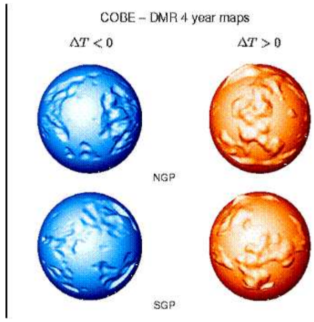

Figura 5: Representación de las anisotropías de la radiación de fondo captadas por el satélite COBE.

alternativa al análisis de anisotropías que está inspirado en el estudio de la rugosidad de superficies naturales en campos como la Geología, Biología o Metalurgia. Estudiamos cómo obtener información de las inhomogeneidades primordiales a partir de la rugosidad de estas superficies utilizando técnicas fractales.

Referencias

[1] *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión.* B. Mandelbrot. Tusquets Editores, S.A., 1993.

[2] *Wavelet Analysis of the Multifractal Character of the Galaxy Distribution.* Vicent J. Martínez; Silvestre Paredes, and Enn Saar. Monthly Notices Of the Royal Astronomical Society. 260, 365-375, (1993).

[3] *The Roughness of the last scattering surface.* S. Mollerach, V.J. Martínez, J.M. Diego, E. Martínez-González, J.L. Sanz, and S. Paredes. The Astrophysical Journal, 525: 17-24, 1999.

[4] *Statistics of the Galaxy Distribution.* Vicent J. Martínez and Enn Saar. Chapman and Hall. CRC Press. 2002.

[5] *Multifractal Fits to the Observed Main Belt Asteroid Distribution.* Campo-Bagatin, A.; Martínez, V.J. and Paredes, S. Icarus. 157, Issue 2, 549-553 (2002).