Universidad Politécnica de Cartagena
E.T.S. de Ingeniería de Telecomunicación

Espacio-Tele□o n^{0}1 (2010)
Revista de la ETSIT-UPCT

El papel de la realimentación en el control de sistemas dinámicos

Juan Ignacio Mulero Martínez

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
Universidad Politécnica de Cartagena.

juan.mulero@upct.es

Resumen

Las mayores revoluciones científicas del siglo XX han puesto límites al conocimiento humano: la teoría de la relatividad de Einstein limita la velocidad de los cuerpos, el principio de incertidumbre de Heissenberg impide la observación simultánea de la posición y la velocidad de las partículas y el teorema de incompletitud de Gödel establece que hay proposiciones matemáticas indecidibles. A pesar de estas barreras a nuestra razón, el siglo XX también ha producido grandes avances constructivos, entre los cuales se encuentra la invención y desarrollo de los sistemas con realimentación negativa. A pesar de que como tal la realimentación ya había sido utilizada en la era de la revolución industrial a través del regulador de Watt, su definición formal hubo de esperar a la llegada del siglo XX con los amplificadores realimentados negativamente que fueron creados por Harold Stephen Black en 1927. Para algunos, entre los cuales cabe citar a Norbert Wiener, este avance es considerado como uno de los más importantes del siglo XX en el campo de la electrónica. Actualmente, la realimentación se estudia en teoría de sistemas donde se da por sentado que el lazo cerrado es siempre superior al lazo abierto. Sin embargo, ¿cuáles son las propiedades de la realimentación que la hacen tan atractiva? Esta pregunta, en muchas ocasiones es obviada e incluso olvidada, quizá por causa de una aceptación no crítica de un conocimiento legado inviolable e incuestionable. El olvidar las propiedades y el sentido de la realimentación significa perder de vista completamente el objetivo de la ingeniería de control. Motivado por este sentir, este pequeño

ensayo trata de adentrarse en el origen perdido de la realimentación y su conexión con el concepto de sensibilidad introducido por Hendrik Wade Bode (premio Bellman de 1979 por su contribución a la teoría de control[1]).

1. Ingeniería de control y realimentación

La ingeniería de control tiene por objeto gobernar la naturaleza de acuerdo a nuestros designios. Controlar la naturaleza no es tarea sencilla por lo que debemos ser metodológicos y establecer un camino formal libre de ambigüedades hacia este fin. Sin embargo, y ésta es una de las características esenciales de la ingeniería, el camino debe esbozarse previamente a través de unas trazas que constituyen el diseño. Con esto podríamos pensar que el trabajo de ingeniería está concluido pues hemos seguido un método a través de un diseño hacia una solución. Por suerte o por infortunio, la solución debe ajustarse a nuestros designios ó especificaciones de diseño; por tanto, un ingeniero debe hacer funcionar los sistemas de acuerdo a unos requerimientos previos. Esta doble acción funcionamiento-especificación le confiere un cierto grado de formalidad al proceso de creación, hasta el punto de ser equiparable a la confección de un teorema por un matemático: El matemático debe escribir no sólo cómo funciona el teorema sino también cuáles son las hipótesis de trabajo para poder aplicarlo.

Cuando nos referimos a la ingeniería de control siempre omitimos el término "por realimentación", ya que implícitamente se da por supuesto que todos los sistemas serán controlados mediante la modificación de la acción de control a través de la observación de la salida del sistema (también llamado planta). Desafortunadamente, esta hipótesis en numerosas ocasiones lleva a que olvidemos el por qué de la realimentación. Antes de nada, conviene señalar que todo sistema de control persigue el seguimiento de señales de referencia, $r\left(t\right)$, lo cual significa que para un tiempo suficientemente grande (régimen estacionario) las observaciones, $y\left(t\right)$, deben encontrarse suficientemente cerca de la referencia. En un sentido, formal dado un valor arbitrario debe existir un tiempo $T\left(\varepsilon\right)$ tal que para cualquier $t > T$ el error $e\left(t\right) = r\left(t\right) - y\left(t\right)$ sea inferior a ε de forma absoluta, es decir $\left|e\left(t\right)\right| < \varepsilon$. En el caso límite, es decir cuando el tiempo es infinitamente grande tendríamos una igualdad asintótica entre señales: $\lim_{t\to\infty} r\left(t\right) = \lim_{t\to\infty} y\left(t\right)$.

En principio, un sistema se puede controlar directamente observando sólo la planta, sin necesidad de modificar la acción de control a través de la observación de las salidas. Cuando, estamos en esta situación decimos que la configuración del sistema es en lazo abierto. En cambio, los sistemas que requieren de una realimentación para ejercer acciones de control se encuentran en configuración de lazo cerrado.

[1]Sorprendentemente Richard Bellman creador de la programación dinámica recibió su propio premio Bellman en el año 1984, siendo el sexto premiado desde su creación.

En este punto, hay varias preguntas que surgen de forma natural: ¿Es el lazo cerrado mejor que el lazo abierto?, ¿bajo qué condiciones? ¿por qué la ingeniería de control siempre se refiere a lazos cerrados? Para poder dar respuesta a estas simples preguntas es conveniente que hagamos una comparación lo más sencilla posible entre el lazo abierto y el lazo cerrado. Para ello haremos las siguientes hipótesis:

- La planta estará modelada por una simple ganancia $K_p > 0$, que es el bloque más elemental de la teoría de sistemas.
- Las entradas al sistema serán constantes positivas. Esto significa que restringiremos el análisis a problemas de establecimiento de referencias en vez de a problemas de seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo.

La comparación de los esquemas en lazo abierto y en lazo cerrado será efectuada a través de los errores que se generan entre la observación y la referencia. Tal y como veremos a continuación tales errores son proporcionales a la referencia, por lo que para tener una medida independiente de la señal de entrada utilizada es necesario relativizarla a la magnitud de la referencia. Esto significa utilizar errores relativos o porcentuales del tipo $e_{rel}(t) = \left|\frac{r(t)-y(t)}{r(t)}\right|$, en vez de errores absolutos del tipo $e_{abs}(t) = |r(t) - y(t)|$. Este problema se puede salvar fácilmente utilizando referencias unitarias ya que los errores absolutos y relativos coinciden y son independientes de las entradas.

Por último distinguiremos dos casos en nuestro análisis: a) el caso ideal, donde no existen incertidumbres ni perturbaciones, y b) el caso real donde realmente se manifiestan estos fenómenos. En este punto conviene señalar que las perturbaciones son señales de entrada deseadas al sistema a modo de carga y no deben confundirse con el ruido que es una señal no deseada que suele aparecer como consecuencia de la utilización de elementos de medida (sensores). Un ejemplo sencillo de perturbación lo encontramos en el control de una grúa mecánica que debe transportar una viga de hormigón. En este caso, la fuerza gravitatoria que ejerce la viga sobre el mecanismo sería una perturbación en el sistema. Las incertidumbres surgen por errores en la modelización, tanto en los parámetros como en las funciones no lineales que aparecen en las ecuaciones diferenciales. Un ejemplo de incertidumbre paramétrica lo encontramos en las resistencias eléctricas. Cuando diseñamos un circuito eléctrico o electrónico lo hacemos según un valor nominal de resistencia. Ahora bien, éstas presentan un valor real que oscila dentro de unas tolerancias que marcan la incertidumbre en el componente lineal.

1.1. Caso ideal: No existencia ni de incertidumbres ni de perturbaciones en el sistema

En la Figura 1 se ha representado el esquema básico correspondiente al lazo de control en la configuración de lazo abierto. La acción de control es

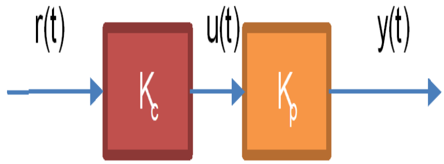

Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto en el caso ideal.

desarrollada por un controlador proporcional con ganancia K_c de manera tal que existirá una dependencia del tipo $u\,(r; K_c)$ donde el signo de puntuación ";" indica que esta dependencia siempre tendrá como parámetro la ganancia K_c del controlador. Aplicando un poco de álgebra de diagramas de bloques podemos concluir que la salida y el error dependen proporcionalmente de la señal de referencia:

$$y\,(t) = K_c K_p\, r(t),$$
$$e\,(t) = (1 - K_c K_p)\; r(t).$$

¿Cómo deberíamos elegir la ganancia K_p para conseguir un buen seguimiento de trayectorias de referencia? Simplemente seleccionando la ganancia del controlador como $K_c = \frac{1}{K_p}$. En este caso, el seguimiento es perfecto ya que $e\,(t) = 0$.

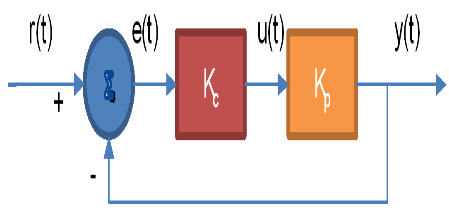

Figura 2: Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado

Analicemos ahora el error en el caso de tener una configuración en lazo cerrado como aparece en la Figura 2. En este caso la acción de control depende también de las observaciones, $u\,(r, y; K_c)$. De nuevo, aplicando álgebra de diagrama de bloques se observa que la salida y el error dependen de la referencia en la forma siguiente:

$$y\,(t) = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p}\, r(t),$$
$$e\,(t) = \frac{1}{1 + K_c K_p}\, r(t).$$

El error no se anula para ningún valor finito de la ganancia K_c y únicamente conseguimos un seguimiento perfecto de trayectorias asintóticamente cuando $K_c \to \infty$.

Conclusión 1: La realimentación no sirve absolutamente para nada cuando no existen perturbaciones ni incertidumbres ya que produce errores que son no nulos (aunque arbitrariamente pequeños según la ganancia). En la situación ideal es donde el lazo abierto es superior al lazo cerrado.

1.2. Caso real: Sistema con perturbaciones e incertidumbre

En el caso real consideraremos solamente incertidumbres paramétricas y perturbaciones aditivas, es decir superpuestas a otra señal. Analizaremos cada caso por separado para ver la influencia de estos fenómenos en los errores del sistema.

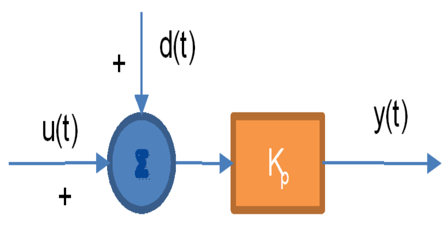

Figura 3: Perturbación aditiva en el canal de entrada a la planta

1.2.1. Presencia de perturbaciones

Introduzcamos una perturbación $d\,(t)$ como entrada que se superpone a la acción de control antes de ser introducida en la planta (véase la Figura 3). Para la configuración de lazo abierto, tanto la salida como el error serán la superposición de la respuesta a la referencia y a la perturbación:

$$
\begin{aligned}
y\,(t) &= K_c K_p\, r(t) + K_p d(t), \\
e\,(t) &= (1 - K_c K_p)\; r(t) - K_p d\,(t)\,.
\end{aligned}
$$

Seleccionando de nuevo la ganancia del controlador como $K_c = \frac{1}{K_p}$ llegamos a que el error permanece constante a un valor fijo dado por $e = -K_p d$. Esto significa que el error que se comete está determinado por la ganancia de la planta y por el tamaño de la perturbación.

En el esquema con realimentación también tenemos una superposición de las respuestas a las entradas al sistema (como no puede ser de otra manera por ser el sistema lineal):

$$
\begin{aligned}
y\left(t\right) &= \frac{K_c K_p}{1+K_c K_p} r(t) + \frac{K_p}{1+K_c K_p} d(t), \\
e\left(t\right) &= \frac{1}{1+K_c K_p} r(t) - \frac{K_p}{1+K_c K_p} d(t).
\end{aligned}
$$

En este caso los errores siguen siendo no nulos. Sin embargo, los podemos hacer arbitrariamente pequeños aumentando el parámetro libre K_c- esto es lo que realmente caracteriza al control por realimentación. Fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, podemos conseguir que $|e\left(t\right)| < \varepsilon$ mediante una selección adecuada de la K_c. Observemos que $-\varepsilon < e < \varepsilon$ y según la relación entre la referencia y la perturbación podríamos tener dos casos para seleccionar K_c.En primer lugar, podría darse la circunstancia de tener $r > K_p d$ lo cual produciría $e > 0$. Para esta situación simplemente debemos seleccionar $K_c > \frac{r-K_p-\varepsilon}{K_p \varepsilon}$. Si $r \leq K_p$, la selección de ganancia es trivial, i.e. $K_c > 0$. Esta situación sólo se sostiene cuando $d < 1$ ya que de otro modo $r > K_p d > K_p$. Cuando $r < K_p d$ tendríamos un error negativo, $e < 0$, y la ganancia se seleccionaría tal que $K_c > \frac{K_p-r-\varepsilon}{K_p \varepsilon}$. De nuevo si $K_p \leq r$ elegiríamos trivialmente $K_c > 0$ y esto sólo se produce cuando $d > 1$ ya que por reductio ad absurdum podríamos llegar a la contradicción $r < K_p d < K_p$.

La situación es mejor que en el lazo abierto justamente por la libertad para elegir K_c. Incluso podemos seleccionar un valor de K_c tal que $|e| < K_p d$, mejorando por tanto el error cometido en comparación con el obtenido en lazo abierto. La selección de $K_c$se puede realizar comparando la referencia y la perturbación lo que origina dos casos: a) $r > K_p d$ implica $e > 0$ por lo que debemos seleccionar $K_c > \frac{r}{K_p^2 d} - \frac{2}{K_p}$, b) $r < K_p d$ lleva consigo un error $e < 0$. Aquí la selección de ganancia debería ser $K_c > -\frac{r}{K_p^2 d}$. Evidentemente, si la referencia y la perturbación son del mismo signo esta condición simplemente se reduce a la trivial $K_c > 0$.

En la situación asintótica $K_c \to \infty$ vemos que $\frac{K_c K_p}{1+K_c K_p} \to 1$, $\frac{K_p}{1+K_c K_p} \to 0$ por lo que conseguimos rechazar la perturbación y seguir la trayectoria de referencia, $y\left(\infty\right) = r\left(\infty\right)$.En términos de errores $\frac{!}{1+K_c K_p} \to 0$ por lo que el error en régimen estacionario se anulará $e\left(\infty\right) = 0$.

Conclusión 2: El sistema realimentado es capaz de rechazar perturbaciones y conseguir errores tan pequeños como se deseen mediante la modificación de la ganancia del controlador.

1.2.2. Presencia de incertidumbres

Vamos ahora a analizar el caso de tener una planta con una ganancia real $K_p' = K_p + \Delta K_p$, donde $|\Delta K_p| < \delta$ siendo $\delta > 0$ una tolerancia máxima. Es evidente que la ganancia K_p' estará en el intervalo de incertidumbre $(-\delta, \delta)$.

En la configuración de lazo abierto, seguimos haciendo el ajuste $K_c = \frac{1}{K_p}$ bajo la creencia de que $K_p' = K_p$, es decir manejamos el valor nominal de la ganancia de la planta. Para esta situación obtenemos las siguientes observaciones y errores:

$$y\left(t\right) = \left(1 + \frac{\Delta K_p}{K_p}\right) r(t),$$
$$e\left(t\right) = -\frac{\Delta K_p}{K_p}\, r(t).$$

Donde inevitablemente la salida deja de seguir la referencia y el error proporcional a la referencia según la cantidad porcentual de incertidumbre del sistema . A menor porcentaje de incertidumbre menor error.

Por el contrario, el lazo cerrado consigue reducir el efecto de la incertidumbre en la salida y el error:

$$y\left(t\right) = \frac{K_c K_p'}{1 + K_c K_p'}\, r(t),$$
$$e\left(t\right) = \frac{1}{1 + K_c K_p'}\, r(t).$$

Aumentando el valor de K_c conseguimos que $y\left(t\right)$ esté arbitrariamente cerca de $r\left(t\right)$ y que el error se reduzca también arbitrariamente. El análisis es exactamente el mismo que se realizó más arriba con la salvedad de que manejamos una ganancia real K_p' en vez de la ideal (o nominal) K_p.Podemos hacer que los errores que se consiguen sean inferiores a los del lazo abierto, i.e. $|e| < \frac{\Delta K_p}{K_p} r$. Simplemente tomaríamos $K_c > \frac{1-K_p' r}{K_p'^2 r}$ cuando $r < 1$ ya que para $r > 1$ tenemos la elección trivial $K_c > 0$.

El análisis asintótico es idéntico al del caso ideal con K_p'. Cuando $K_c \to \infty$ se tiene que $\frac{K_c K_p'}{1+K_c K_p'} \to 1$ por lo que $y\left(\infty\right) = r\left(\infty\right)$, y $\frac{1}{1+K_c K_p'} \to 0$ por lo que $e\left(\infty\right) = 0$.

Conclusión 3: El lazo cerrado permite rechazar incertidumbres haciendo que su influencia sea arbitrariamente pequeña mediante el incremento de la ganancia K_c.

2. Un poco de historia sobre la realimentación. La sensibilidad

El rechazo de perturbaciones y de incertidumbres tal y como se ha mostrado anteriormente se encuentra estrechamente ligado al concepto de sensibilidad. En los años veinte, H. S. Black trabajaba para los laboratorios Bell (pertenecientes actualmente a la compañía Alcatel-Lucent) con el objeto de encontrar un amplificador electrónico que sirviera como repetidor para las líneas de telefonía. El gran problema que se planteaba era que los componentes electrónicos no eran estables en el sentido de no mantener la ganancia fija. En consecuencia, se necesitaba un diseño que mantuviera una ganancia con gran precisión frente a estas variaciones, lo cual originó la aparición del amplificador realimentado.

Las ventajas que se han presentado anteriormente de una forma intuitiva quizá se pueden entender desde el punto de vista del concepto de sensibilidad frente a cambios de parámetros. Estos cambios podrían estar producidos por factores externos, por el tiempo, o sencillamente por un error en el valor del parámetro utilizado como punto de partida.

Desde un punto de vista variacional la función de transferencia en lazo abierto (relación entre salida y entrada), T_{la}, , se puede escribir como $T_{la} + \Delta T_{la} = K_c K_p + K_c \Delta K_p$. De esta forma $\Delta T_{la} = K_c \Delta K_p$. El ratio $\frac{\Delta T_{la}}{T_{la}}$ frente a $\frac{\Delta K_p}{K_p}$ fue introducido por H. W. Bode y se denominó sensibilidad de la ganancia con respecto al parámetro K_p, denotado por $S_{K_p}^{T_{la}}$. Para el caso del lazo abierto resulta que la sensibilidad es lineal, es decir $S_{K_p}^{T_{la}} = 1$, lo cual implica que un error de un 10 % en la ganancia de la planta se manifiesta en un error del 10 % en T_{la}. Un análisis cuidadoso del lazo cerrado produce una ganancia de realimentación de

$$T_{lc} + \Delta T_{lc} = \frac{(K_p + \Delta K_p) K_c}{1 + (K_p + \Delta K_p) K_c}$$

donde $T_{lc} = \frac{K_p K_c}{1+K_p K_c}$. Según el cálculo de variaciones $\Delta T_{lc} = \frac{dT_{lc}}{dK_p} \Delta K_p$, con lo cual $S_{K_p}^{T_{lc}} = \frac{1}{1+K_c K_p}$, es decir si seleccionamos la ganancia K_c para que $1 + K_c K_p = 100$, entonces frente a un error del 10 % en el parámetro obtenemos un cambio del 0,1 % en la ganancia del sistema en lazo cerrado, T_{lc}.

Conclusión 4: El error relativo en la ganancia de la función de transferencia en lazo cerrado es menos sensible a variaciones en la ganancia de la planta (incertidumbre paramétrica) en un factor $S_{K_p}^{T_{lc}} = \frac{1}{1+K_c K_p}$ mientras que el lazo abierto produce una sensibilidad constante $S_{K_p}^{T_{la}} = 1$.

3. Régimen transitorio, cuando el tiempo se encoge.

Todo nuestro análisis ha sido efectuado en estado estacionario (es decir para un tiempo suficientemente grande, idealmente ad infinitum), y con referencias constantes. No obstante podemos conseguir resultados semejantes utilizando señales senoidales que sabemos que son generadoras de señales arbitrarias bajo ciertas condiciones. ¿Qué podemos afirmar del régimen transitorio (respuesta en tiempo finito)? El sistema en lazo abierto no tiene ningún efecto sobre la respuesta dinámica del sistema, a menos que introduzcamos algún tipo de filtro previo para cambiar la respuesta a la señal de entrada. La dinámica de la planta determina la respuesta del sistema frente a perturbaciones, con lo cual esta respuesta no se ve alterada por la ganancia seleccionada para el controlador. La situación cambia radicalmente cuando utilizamos un esquema en lazo cerrado. Supongamos, que la planta en lazo abierto presenta un tiempo de respuesta caracterizado por una constante de tiempo (a menor mayor velocidad de respuesta). Aproximadamente, el sistema alcanza un 63 % de su valor de régimen tras una constante de tiempo, el 86 % tras dos constantes, y más del 99 % tras cinco constantes de tiempo. Se comprueba que la constante de tiempo en lazo cerrado es una función de la ganancia K_c, en la forma $\tau_{lc} = \frac{\tau}{1+K_pK_c}$. Esto significa que podemos reducir arbitrariamente la constante de tiempo simplemente aumentando la ganancia K_c. La situación en régimen transitorio no es tan sencilla para sistemas de órdenes superiores a uno, ya que los incrementos en la ganancia pueden hacer que los sistemas se vuelvan menos amortiguados (los sistemas oscilan más de lo debido) e incluso inestables. Por tanto, existe un límite en la selección de ganancias para rechazar perturbaciones y disminuir la sensibilidad a los cambios en los parámetros. En resumen, la ingeniería de control trata de llegar a un compromiso entre el régimen estacionario y el régimen transitorio mediante una cuidadosa selección de ganancias. Desde un punto de vista frecuencial, la constante de tiempo está directamente relacionada con el ancho de banda del sistema BW de tal forma que incrementando la ganancia del controlador conseguimos un mayor ancho de banda.

Conclusión 5: La realimentación permite cambiar la respuesta dinámica y normalmente hace que los sistemas sean más rápidos (aunque menos estables). Esto implica un compromiso entre respuesta en régimen estacionario y en régimen transitorio.

4. Discusión

La realimentación sirve para estabilizar los sistemas ya que constituye la propiedad esencial de los sistemas dinámicos. Sin embargo, en muchas ocasiones se olvida el papel real de la realimentación. Los sistemas ideales o con un conocimiento cierto de la planta pueden ser estabilizados de forma natural sin necesidad de realimentación. Por tanto, es importante plantearse cuándo es necesaria la realimentación. Tal y como se ha analizado en este pequeño ensayo, la introducción de las observaciones al controlador se hace necesaria cuando el sistema está sujeto a la presencia de perturbaciones e incertidumbre. Es justamente en estos casos cuando se justifica el uso de la realimentación y cuando el lazo cerrado es superior al lazo abierto.