

Aproximación de Ecuaciones en
Derivadas Parciales Parabólicas en
fluidos

Alumno: Agustín Redó Caballer

Centro: E.T.S.I. Naval y Oceánica

Titulación: Ingeniero Naval y Oceánico

Directores: Sergio Amat Plata

Sonia Busquier Sáez

Departamento: Matemática Aplicada y Estadística

Agradecimientos:

Me gustaría agradecer especialmente con la entrega de este Proyecto de Final de Carrera todo el apoyo recibido durante estos años tanto de mis padres como de Conchita, mi novia, sin ellos no hubiera sido posible haber llegado hasta aquí. También destacar la ayuda de mi familia y amigos en esos momentos más duros.

No menos importante ha sido también la labor de algunos profesores, en especial de los directores de este PFC por la paciencia que han tenido.

Gracias a todos

Índice

1.-Motivación.....	4
2.- Introducción a la dinámica de fluidos	6
2.1.-Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos.....	7
3.-Leyes de Conservación.....	9
3.1.- La conservación de la masa.....	9
3.2.- La conservación de la cantidad de movimiento.....	10
3.3.- La conservación de Energía.....	10
3.4.- Las ecuaciones de Euler	11
3.5.- Las ecuaciones de Navier-Stokes.....	13
4.-Ecuaciones en derivadas parciales .EDP's.....	14
5.-Métodos de Multiresolución (MR).....	22
5.1.-Introducción a la MR	22
5.2.-El método	23
5.3.-Método a desarrollar.....	25
5.4.-Hermite	27
6.-El método de RUNGE-KUTTA.....	33
6.1.- Aplicación del método.....	34
6.2.-Shu-Osher	37
7.-El algoritmo	39
8.-Aproximación de la derivada temporal u_t	44
9.-Aplicaciones reales.....	47
10.-Conclusiones	55
11.-Referencias bibliográficas.....	56



1.-Motivación

La principal motivación que nos ha llevado a desarrollar este proyecto de final de carrera ha sido la importancia de los fluidos, más si cabe en un sector como el naval, en el cual el barco no deja de ser un artefacto flotante que se desplaza a través de un fluido como el agua. Por comentar algunos de los campos que afectan los fluidos en los buques podemos destacar entre muchos dos principales, la hidrodinámica y el comportamiento de los fluidos por el interior de tuberías.

La hidrodinámica nos permitirá realizar el estudio de resistencia al avance, propulsión y formas del casco. Este apartado es muy importante puesto que nos permitirá calcular mediante una serie de formulas, parámetros tan importantes como por ejemplo la potencia que necesita el buque para desplazarse por un fluido, generalmente los mares y océanos. Otros parámetros no menos importantes como la hélice o las formas del casco permitirán reducir costes de operación mediante una reducción de consumo de combustible mediante un buen estudio hidrodinámico.

El otro gran punto que destacaremos es el comportamiento de los fluidos por el interior de las tuberías. Este punto será el principal foco de estudio a lo largo de este proyecto.

Los fluidos cuando se desplazan a través de las tuberías sufren pérdidas de cargas, reducciones de velocidad, variaciones de presión, etc. Todo esto es debido principalmente a las trayectorias a las que están obligados a recorrer circulando por el interior de tuberías, puesto que estas deben describir recorridos de tal modo que permitan salvar todos los obstáculos como equipos, refuerzos



propios del buque, etc. Cuando un fluido circulando por el interior de una tubería se encuentra por ejemplo con un accesorio como un codo de 90° pueden aparecer fenómenos perjudiciales como turbulencias u ondas de choque.

En la mecánica de fluidos, una **onda de choque** es una onda de presión abrupta producida por un objeto que viaja más rápido que la velocidad del sonido en dicho medio, que a través de diversos fenómenos produce diferencias de presión extremas y aumento de la temperatura. También se aplica el término para designar a cualquier tipo de propagación ondulatoria, y que transporta, por tanto energía a través de un medio continuo o el vacío, de tal manera que su frente de onda comportamiento un cambio abrupto de las propiedades del medio.

Mediante una serie de modelos matemáticos que ya iremos introduciendo a lo largo del proyecto podremos predecir de un modo muy aproximado el comportamiento de estos fluidos. Pero claro, se trata de optimizar estos modelos matemáticos de modo que se pueda hacer un estudio optimizando costes. Es por eso que usaremos modelos matemáticos complejos en zonas donde sepamos que se esperan fenómenos extraños como ondas de choque, mientras en zonas donde el fluido se comporta de un modo lineal o estable no será rentable usar complejos modelos matemáticos. Ahí es donde radica la principal dificultad de este proyecto. Lo que pretendemos es saber cómo se comportará un fluido en un punto cualquiera de una instalación con el menor coste posible. Cuando hablamos de costes nos referimos a optimizar al máximo estos modelos matemáticos reduciendo tiempos de cálculo.



2.- Introducción a la dinámica de fluidos

La mecánica de fluidos es la rama de la mecánica de medios continuos (que a su vez es una rama de la física) que estudia el movimiento de los fluidos (gases y líquidos) así como las fuerzas que los provocan. La característica fundamental que define a los fluidos es su incapacidad para resistir esfuerzos cortantes (lo que provoca que carezcan de forma definida). También estudia las interacciones entre el fluido y el contorno que lo limita. La hipótesis fundamental en la que se basa toda la mecánica de fluidos es la hipótesis del medio continuo.

La hipótesis del medio continuo es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos y en general de toda la mecánica de medios continuos. En esta hipótesis se considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a esta. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas.

A la hora de describir el movimiento de un fluido existen dos puntos de vista. Una primera forma de hacerlo es seguir a cada partícula fluida en su movimiento, de manera que buscaremos unas funciones que nos den la posición, así como las propiedades de la partícula fluida en cada instante. Ésta es la descripción Lagrangiana. Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar la partícula fluida que en dicho instante ocupa ese punto. Ésta es la descripción Euleriana, que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio



ocupados por el fluido. En esta descripción el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante.

La descripción Euleriana es la usada comúnmente, puesto que en la mayoría de casos y aplicaciones es más útil. Usaremos dicha descripción para la obtención de las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos.

2.1.-Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos

Una vez identificado el tema de estudio, con sus aproximaciones admitidas y las variables que describen el sistema, el modelizador ha de proceder a escribir las leyes que relacionan a esas variables y nos permitirán predecir el funcionamiento del sistema. Al involucrar el espacio y el tiempo son ecuaciones en derivadas parciales, EDPs. Siendo las variables que describen el sistema varias, se tratará de un sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones que rigen toda la mecánica de fluidos se obtienen por la aplicación de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido.

Una ecuación diferencial es una expresión de la forma $F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0$ donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida sobre un subconjunto Ω de \mathbb{R}^{k+1} . El número k recibe el nombre de orden en la ecuación. Por ejemplo en las siguientes ecuaciones:

$$y_{n+2} - y_n = 0$$

$$ny_{n+3} - e^{y_n+3y_n} = y_{n+1}$$

Son de orden 2 y 3 respectivamente.



Las principales ecuaciones fundamentales [2] de la mecánica de fluidos son:

- La ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$

- La ecuación de la cantidad de movimiento: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = \rho f + \nabla \tau$

- La ecuación de la conservación de la energía:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot (\rho v) + \nabla \cdot (\tau' \cdot v) + \rho f \cdot v + \nabla \cdot (K \nabla T)$$

Estas ecuaciones pueden darse en su formulación integral o en su forma diferencial, dependiendo del problema. A este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial también se le denomina ecuaciones de Navier-Stokes (las ecuaciones de Euler son un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos sin viscosidad).

No existe una solución general a dicho conjunto de ecuaciones debido a su complejidad, por lo que para cada problema concreto de la mecánica de fluidos se estudian estas ecuaciones buscando simplificaciones que faciliten la resolución del problema. En algunos casos no es posible obtener una solución analítica, por lo que hemos de recurrir a soluciones numéricas generadas por ordenador. A esta rama de la mecánica de fluidos se la denomina mecánica de fluidos computacional.



3.-Leyes de Conservación

Se sabe que existen leyes fundamentales que parecen exactas. Si llevamos a cabo experimentos con sumo y cuidado y precisión, las desviaciones de estas leyes son mínimas y de hecho, incluso serían todavía menores si se emplearan técnicas experimentales mejoradas.

Tres leyes fundamentales componen la base del estudio en la mecánica de fluidos [2]:

- La conservación de la masa
- La conservación de la cantidad de movimiento
- La conservación de la energía.

3.1.- La conservación de la masa

La primera de ellas es la **conservación de la masa**, la cual establece que la materia es indestructible. A pesar de lo que establece la teoría de la relatividad de Einstein, la destructibilidad de la materia en condiciones de ingeniería típicas no es medible y no viola para nada el principio de la conservación de la masa.

Esta ley enuncia matemáticamente el principio según el cual estamos describiendo un fenómeno de transporte de partículas que no se crean ni se destruyen.

La variable fundamental es la densidad $\rho(x, t)$. Según la formulación *Lagrangiana*, donde J es el jacobiano de la deformación que sucede entre el momento $t = 0$ y el momento t y d/dt indica la derivada respecto del tiempo.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_1^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$



3.2.- La conservación de la cantidad de movimiento

Por lo que respecta a la segunda y tercera leyes es necesario introducir el concepto de “sistema”. *Un sistema se define como una cantidad fija de materia en la que se concentra la atención.* Cualquier cosa externa al sistema queda separada de los límites del sistema. Estos límites pueden ser fijos o móviles, reales o imaginarios. Con esta definición podemos representar la segunda ley fundamental, la **conservación de la cantidad de movimiento**. La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas externas que actúe sobre él.

3.3.- La conservación de Energía

La tercera ley fundamental es la **conservación de la energía**, la cual también se conoce como la *primera ley de la termodinámica*. La energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con sus alrededores su energía sólo se incrementará si la energía de sus alrededores experimenta una disminución correspondiente.



3.4.- Las ecuaciones de Euler

De las dificultades de resolución del modelo matemático de los fluidos era consciente Euler, así que se propuso hallar unas condiciones razonables que favorecieran la simplificación del problema y redujera la complejidad matemática que hasta la fecha conllevaba. Para ello se realizaron dos grandes consideraciones, la primera de ellas considerar el fluido incompresible [2] y la segunda que los fluidos no sufren efectos viscosos [2], lo que a partir de ahora conoceremos como fluidos perfectos.

La incompresibilidad de los fluidos

La condición de fluido incompresible dice que el factor de expansión J debe ser 1 por lo que la LCM en su versión Lagrangiana dice que $d\rho/dt = 0$, mientras que Euler dice que $\text{div}u=0$. En total la hipótesis de incompresibilidad nos lleva a mejorar la ley de conservación de masa en forma de dos condiciones.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \nabla u = 0$$

Podemos simplificar aún más la situación considerando la hipótesis de la homogeneidad de la densidad. Considerando $\rho = \rho(t)$ para obtener $d\rho/dt = 0$ que $\partial\rho/dt = 0$. O sea que ρ debe ser constante tanto en espacio como en tiempo. Ello es muy importante puesto que mediante esta consideración conseguimos hacer desaparecer el término ρ como variable del sistema, el cual pasa a tener tantas ecuaciones como incógnitas.



Fluidos ideales

Podemos definir un fluido ideal como aquel que es incompresible y homogéneo.

Ahora vamos a intentar de simplificar las fuerzas de contacto. Euler supuso que podíamos partir del estudio de que los fluidos son sensibles a la presión, pero no a los llamados esfuerzos cortantes. En ese caso ponemos simplemente $f_c = f_p = -\nabla p$ y de este modo la ecuación nos queda:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) + \nabla p = f_e(x, t)$$

Si a esto le sumamos que los fluidos son no compresibles, obtenemos:

$$\nabla \cdot u = 0$$

Estas son las ecuaciones que gobiernan la evolución de las incógnitas “u” y “p”. Tenemos todavía que ligarlas con la evolución de ρ que viene regida por $d\rho/dt = 0$. Pero es cómodo y usual suponer la homogeneidad con lo que ρ es una constante. Solemos usar $\rho = 1$ para simplificar.

Los sistemas de Euler son sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no línea. Es usual que esta clase de sistemas puedan generar discontinuidades en tiempo finito, en todo caso, como sucede en todas las EDP's la resolución de sistemas de Euler exige condiciones iniciales y unas condiciones de contorno adecuadas para que podamos obtener una solución única.



3.5.- Las ecuaciones de Navier-Stokes

Una vez expuesta la extremada simplificación de los *fluidos perfectos*, los cuales consideran los fluidos sin efectos viscosos ni compresibles, se intentó desarrollar un modelo de “nivel superior” desarrollado por Cauchy y Navier Stokes en los cuales se consideran condiciones más realistas, no como el caso de Euler.

Las ecuaciones de Navier Stokes [2] constituyen una modelización correcta del flujo de un fluido Newtoniano, con esto queremos decir que no se desprecian posibles efectos viscosos.

Cuando se impone la incompresibilidad y se supone $\rho=1$ el sistema de Navier Stokes toma la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f_e(x, t) \quad \text{y} \quad \nabla \cdot u = 0.$$

Siempre, usamos $\nu = \mu / \rho$ como parámetro que caracteriza la propiedad de la viscosidad del fluido real. El operador $u \cdot \nabla u$ viene

dado en coordenadas por la expresión $(u \cdot \nabla u)_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ con

suma de $j=1$ a n ($n=3$ en el problema físico). Este es el sistema de EDPs al que pretendíamos llegar. Para su resolución necesitaremos datos iniciales y/o de contorno, dependiendo del dominio donde se plantee el problema y del tipo de datos, dependiendo de la aplicación que busquemos.



4.-Ecuaciones en derivadas parciales .EDP's.

En matemáticas una ecuación en derivadas parciales, a veces abreviado como EDP, es una relación entre una función u de varias variables independientes x , y , z , t, \dots y las derivadas parciales de u respecto de esas variables. Las ecuaciones en derivadas parciales se emplean en la formulación matemática de procesos de la física y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo. Problemas típicos son la propagación de ondas, la electrostática, la electrodinámica, la dinámica de fluidos, la elasticidad, la mecánica cuántica y muchos otros.

Las diferentes categorías de EDP's pueden ser asociadas, en términos generales, con diferentes problemas de flujos.

Las **EDP's parabólicas** son ecuaciones que rigen flujos con mecanismos disipados, es decir, fricciones significantes por efectos de la viscosidad y/o conducción térmica. En este caso la solución será suave y los gradientes se reducen a medida que pasa el tiempo

Son ejemplos de este tipo de ecuación los fenómenos transitorios de transmisión de calor en sólidos, o de difusión molecular.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles son un ejemplo de EDP's parabólicas.



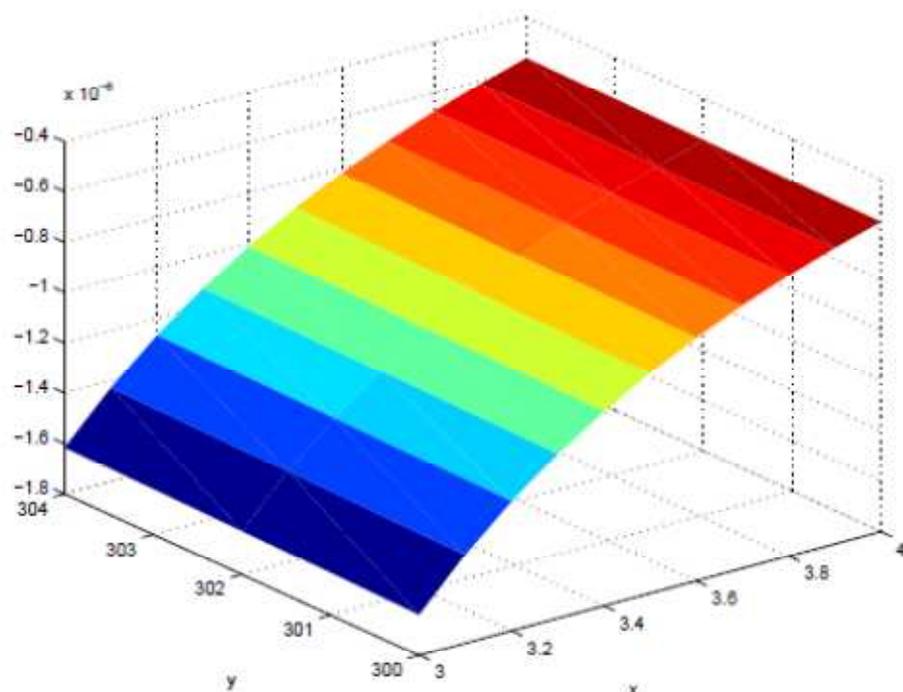
En las **EDP's hiperbólicas** no existe presencia de mecanismos disipados. Si la EDP es lineal, la solución permanecerá de amplitud constante, y puede incluso crecer si la EDP no es lineal.

Un sistema de EDP de primer orden se dice hiperbólico si su parte homogénea admite solución del tipo ondulatoria.

Este tipo de ecuaciones en fluidos son las ecuaciones de Euler, y son por ejemplo, ecuaciones de propagación onda para acústica de un fluido, convección, etc.

En **EDP's elípticas** usualmente rigen problemas de estado estable o en equilibrio, sin embargo algunos flujos en estado estable conducen a EDP's parabólicas (flujo estable de capas limitadas) y EDP's hiperbólicas (flujo estable supersónico).

Estas ecuaciones aparecen en mecánica de fluidos como ecuaciones de Stokes, que describen un flujo incompresible potencial.



Las ecuaciones del tipo elípticas describen una grafica del este tipo



Por otra parte podemos hacer otra clasificación de EDPs, distinguiendo entre las ecuaciones lineales y las no lineales.

Ecuaciones lineales

Un buen ejemplo de EDP lineal, es una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} u_t + a.u_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad , u(t, x)$$

Este tipo de ecuaciones tiene una solución del tipo:

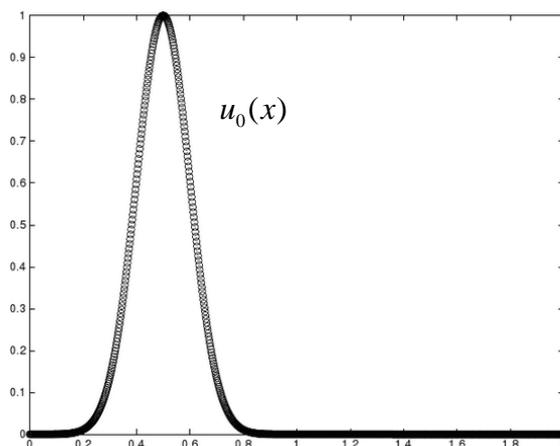
$$u(x,t) = u_0(x-at) \quad , \text{ cuando } t=0, \text{ entonces } u(x,0) = u_0(x)$$

En este paso podemos ver la demostración:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} (-a) \\ u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} u_t + a.u_x = 0$$

Las ecuaciones lineales pueden describir gráficas como las que

vemos a continuación:





Ecuaciones no lineales

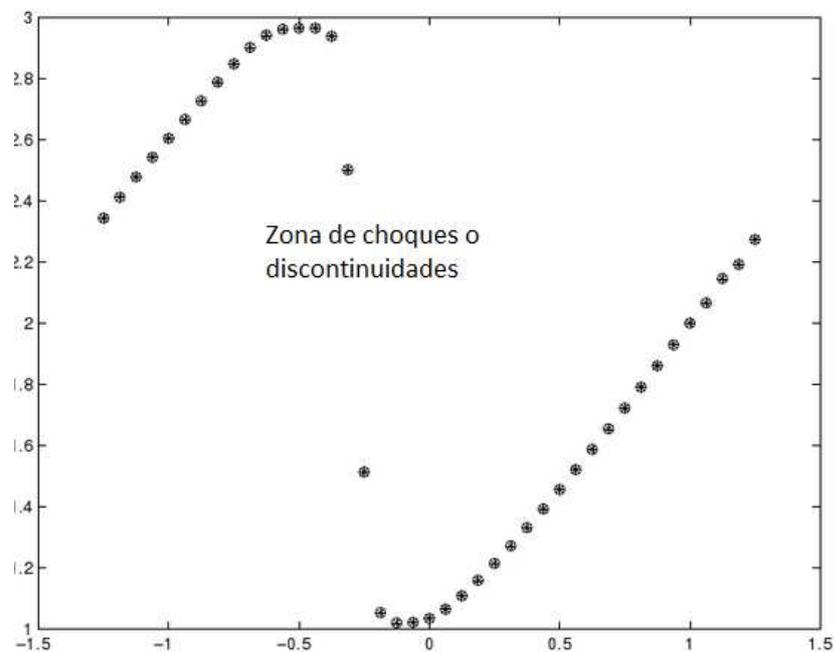
Son las ecuaciones que describiremos justo ahora y son del tipo:

$$u_t + uu_x = 0 \text{ o } u(x_0) = u_0(x)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se deduce que

$$u(x, t) = u(x - u(x, t)t)$$

A continuación podemos ver el tipo de gráficas que describen los sistemas no lineales.



Observando las gráficas anteriores podemos ver que dependiendo del tipo de función, pueden aparecer discontinuidades o choques.

Este proyecto tiene un doble propósito:

1. Intentar diseñar un mecanismo que detecte la aparición de choques y hagan los mallados adaptativos de una forma dinámica y automática. Parece razonable que el método numérico se mueva de igual modo que la onda.



2. Aproximar las derivadas parciales del modelo correctamente usando los puntos de ese mallado adaptativo.

A la hora de crear un mallado adaptativo que nos permita aproximar la solución de una función deberemos de tener en cuenta:

La estabilidad

El esquema se dice estable si la diferencia entre la solución exacta y la numérica permanece acotada, esta condición garantizará que los errores (por ejemplo, los iniciales) no se amplifican con el tiempo.

El método numérico deberá ser más lento que la propia onda física para poder captar los choques o discontinuidades

$\Delta t \leq c \Delta x$, $0 < c \leq 1$. Cuando más se acerque el valor de c a 1 aumenta la difusión.

Los pasos temporales están mayorados por los espaciales, cuanto más precisión tengamos tendremos más pasos para llegar a T y esto implica un mayor coste al tener que realizar un mayor número de operaciones.

Para obtener una buena solución y poder capturar todas las discontinuidades o choques el método deberá de "viajar" más lento que la propia onda física. Si el método "viajara" más rápido no podría apreciar todos los choques y discontinuidades.



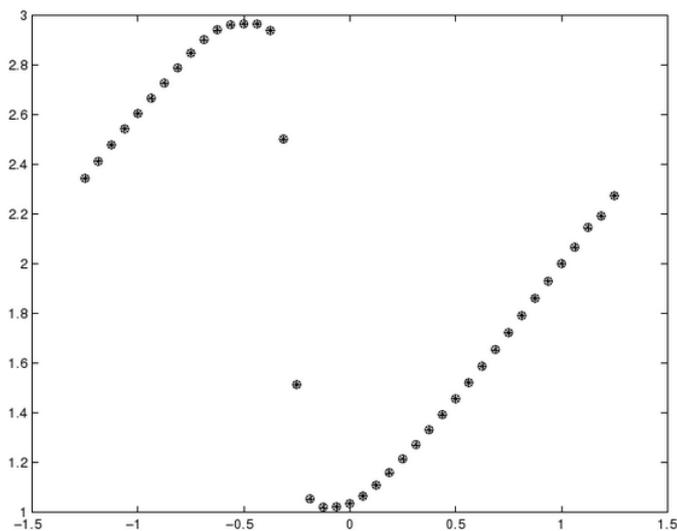
La difusión

El propósito de la difusión es suavizar, con ello lo que conseguimos es obtener una función más fácil de estudiar, aunque con ello se cometa un pequeño error de aproximación.

Podemos apreciar dos tipos de difusión:

- Aportando difusión al modelo : $u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}$
- La propia difusión que genera el modelo: La difusión aumenta a medida que aumenta el orden de la ecuación de estudio.

Por ejemplo, para una ecuación del tipo $u_t + u_x = \epsilon u_{xx}$ que describe una gráfica como la que vemos a continuación, obtenemos una difusión de orden 2.



En la práctica para la resolución de estos métodos asumimos que no hay discontinuidades puras, sino gradientes muy altos.

Puede suceder en algunas ocasiones que si se juntan la difusión del modelo y la del método, obtengamos demasiada difusión. En este



caso deberemos de buscar alternativas en que no se aporte difusión al modelo, como el caso de Navier-Stokes.

Entonces pues tenemos dos posibles problemas, uno en el cual el modelo no tiene difusión y otro en el que sí tiene.

Métodos con difusión:

$$u_t + u_x = \varepsilon u_{xx} \longrightarrow u^\varepsilon$$

El aportar difusión al modelo es una solución muy práctica a la hora aproximar ecuaciones, pero tiene un problema: Con una ε podemos aproximar bien unos puntos mientras que otros puntos se aproximan mejor con otra ε .

Podemos aproximar $u^\varepsilon \rightarrow u$? La convergencia puede no ser uniforme, es decir no todas las soluciones van a la misma velocidad, estas dependerán de “x”. Puede ser que en unos puntos converjan más rápidamente que en otros, es lo que llamamos convergencia puntual.

También habrá que aproximar u_x puesto que las soluciones también pueden tener derivadas.

Métodos sin difusión:

Son aquellos donde tenemos una ecuación del tipo:

$$u_t + u_x = 0$$

Usaremos la anterior pero con $\varepsilon=0$. Para ello deberemos encontrar métodos adaptados a la presencia de choques. El problema que tienen estos métodos es que tienen un alto coste computacional y por tanto de operación. Por lo que los rechazaremos en la mayor medida posible.



Consideración a tener en cuenta

Los métodos capturados de choques de alto orden son caros, pero en la dinámica de fluidos los choques se producen aisladamente.

Lo que deberemos de hacer para obtener un método de resolución optimizado es poner todo el esfuerzo en las zonas cercanas a las zonas donde aparecen los choques o discontinuidades y usar métodos usuales en el resto de zonas puesto que al no haber discontinuidades podremos utilizar métodos de resolución más baratos.

Estos choques se mueven con velocidad finita y más o menos conocida. Es aquí donde aparece una pregunta que será básica a la hora de desarrollar métodos de resolución adaptados. *¿Es posible saber donde se van a ir generando los choques?*

Este es el objetivo de este proyecto, lo que se pretenderá es obtener un mallado adaptativo.

Para ello intentaremos diseñar un mecanismo que hagan estos mallados adaptativos de un modo automático y dinámico.

También aproximaremos las derivadas parciales del modelo correctamente usando los puntos de ese mallado adaptativo.

Para ello utilizaremos diferencias finitas en las zonas en las que tengamos mallados regulares mientras que usaremos métodos de multiresolución (MR) en las zonas donde puedan aparecer posibles discontinuidades o choques.



5.-Métodos de Multiresolución (MR)

5.1.-Introducción a la MR

Un aspecto importante a tener en cuenta de los métodos de alto orden de precisión, es su elevado costo computacional, el cual es aun mayor bajo las siguientes condiciones:

- Sistemas de ecuaciones.
- Más de una dimensión.
- Un gran número de puntos en la malla.
- Extensos periodos de simulación.

El método de Multiresolución [1] es una técnica destinada a rebajar el costo computacional asociado a los métodos de alta resolución. En titulaciones estándar, el comportamiento de la solución $f(x; t)$ como función de x es altamente no uniforme, con fuertes variaciones en regiones puntuales y un comportamiento suave en la mayor parte del intervalo computacional. La técnica de Multiresolución (al menos, en la forma en que será utilizada en este trabajo) fue diseñada originalmente por Harten para ecuaciones hiperbólicas y utilizada por Bihari y Roussel para ecuaciones parabólicas.

Dado un método en forma conservativa y una malla uniforme, el método de Multiresolución aproxima la solución a una tolerancia prescrita de una forma más eficiente, entendiendo por eficiencia una reducción en el número de veces que se calcula el flujo numérico con el método de alta resolución.



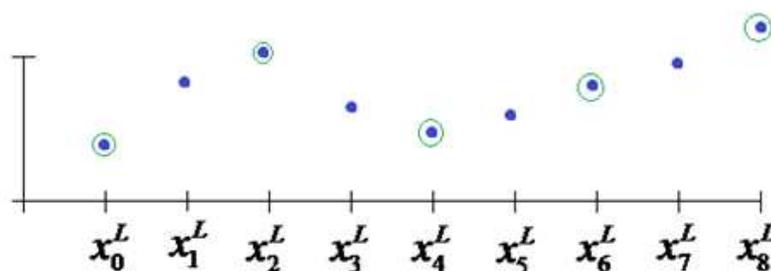
La representación de Multiresolución de la solución numérica está formada por sus valores puntuales en la malla más gruesa y el conjunto de errores por interpolar los valores puntuales de cada nivel de resolución a partir de los del nivel próximo más grueso. La compresión de datos es realizada haciendo cero las componentes de la representación que están por debajo de una tolerancia prescrita, e incluso eliminando de la malla a los puntos cuyos errores son menores a esta tolerancia prescrita.

La información contenida en el análisis de Multiresolución de la solución numérica es utilizada para identificar la localización de las discontinuidades en la solución numérica y diseñar métodos que mejoren el cálculo del flujo numérico.

5.2.-El método

A la hora de desarrollar nuestro método de MR partiremos de una función la cual contiene muchísima información. El analizar dicha función entera resultará muy laborioso y caro, debido al alto coste operacional que conlleva el analizar la función entera.

$$f_j^L \equiv f(x_j^L)$$





Para reducir costes operacionales lo que haremos será reducir dicha función, para ello nos quedaremos por ejemplo sólo con los puntos pares despreciando solamente los impares:

$$f_j^{L-1} = f_{2j}^L$$

Al reducir el número de puntos lo que pasará es que el número de cálculos será la mitad, con lo que reduciremos costes operacionales.

Mediante una interpolación obtendremos los puntos impares, esta interpolación conlleva un error aunque más adelante podremos calcularlo.

$$f^{L-1} + \text{Técnica de interpolación} \rightarrow \tilde{f}_{2j+1}^L \approx f_{2j+1}^L$$

El error que cometemos en esta aproximación, podemos representarlo mediante el detalle:

$$d_j^L = f_{2j+1}^L - \tilde{f}_{2j+1}^L$$

Por tanto la función original podemos representarla como $\{f^{L-1}, d^L\}$, o lo que sería lo mismo, la función con el mallado más grueso con los detalles hasta d^L :

$$f^L \leftrightarrow \{f^0, d^1, d^2, \dots, d^L\}$$

A la hora de detectar posibles choques o discontinuidades, nos va a ser muy útil analizar los detalles de las MR.



Si el detalle obtenido en la MR es menor que el de la tolerancia que hemos establecido, $|d_j^L| \leq T_0$ quiere decir que al interpolar el error ha sido muy pequeño, y podemos no considerarlo en la malla.

Por el contrario, si $|d_j^L| > T_0$, es un indicador de que en ese punto puede haber discontinuidades. A partir de ahí, podemos ampliar alrededor de la malla y estudiar la zona para detectar dichas discontinuidades.

El propósito de este estudio tiene como fin construir un método de MR que además de darnos los puntos con posibles singularidades (discontinuidades o choques) y nos permitan a su vez aproximar la ecuación.

Además así las discontinuidades en u_{xx} también deberán de ser detectadas, para ello necesitaremos un método de MR que nos permita usar derivadas.

5.3.-Método a desarrollar

Nuestro primer objetivo será desarrollar un mallado adaptativo que contenga un mallado grueso y otro más fino. El mallado grueso tendremos un espaciado mayor mientras que en el fino tendremos un espaciado menor. Con esto lo que pretendemos es obtener la mayor información posible en las zonas de posibles discontinuidades, mientras que en las zonas donde no sea propicia la aparición de estas tendremos un espaciado mayor.

A partir de ahora identificaremos como mallado grueso (espaciado mayor) como **H**, mientras que el espaciado fino (espaciado menor) lo identificaremos como **h**.



Si tuviéramos un mallado como el siguiente, el número de cálculos sería muy elevado:



Lo que buscamos nosotros es un mallado del siguiente estilo:



En donde haya las posibles discontinuidades o choques tener un mallado más fino.

Para poder obtener un mallado en donde se aprecien las discontinuidades o choques usaremos como herramienta la MR. Fijándonos en los detalles obtenidos y en su valor, podremos encontrar los puntos donde haya posibles discontinuidades. Es en esas zonas donde realizaremos un mallado fino.

¿Qué MR podemos utilizar para crear un buen mallado adaptativo?

Un buen candidato sería una Multiresolución que interpole bien tanto la función “u”, como su derivada u_x .

Con “u” no tendremos problemas puesto que podremos interpolarla ya la conocemos en $t=0$.

El problema lo encontraremos en u_x . Para ello en la zona de suavidad (H) usaremos el polinomio de Lagrange con 5 datos y su derivada nos dará u_x . Con respecto la zona de discontinuidades haremos algo que se adapte a dichas discontinuidades.



5.4.-Hermite

Multiresolución de Hermite para valores puntuales en señales no suavizadas.

Como hemos visto antes, la representación de datos mediante MR desarrollada por Harten, es una herramienta muy útil para la compresión de señales.

Dada una señal finita f^L , que representa la señal de una función $f(x)$ en el nivel más fino de resolución, los algoritmos de MR la representan con los siguientes elementos

$$\{f^0, d^1, d^2, \dots, d^L\}$$

Donde f^0 corresponde a función en su nivel más bajo de resolución, y cada elemento secuencial d^k representa los detalles intermedios necesarios para llegar a f^k desde f^{k-1} .

El proceso de MR

Vamos a considerar un conjunto de mallas anidadas:

$$X^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{J_k} \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = 2^{-k} / J_0, \quad J_k = 2^k J_0$$



Donde J_0 es una constante de integración. Considerando la discretización puntual:

$$D_k : \begin{cases} C([0,1]) \rightarrow V^k \\ f \rightarrow f^k = (f_j^k)_{j=0}^{J_k} = (f(x_j^k))_{j=0}^{J_k} \end{cases}$$

Donde V^k es el espacio de las secuencias reales de longitud $J_k + 1$.

Un procedimiento de reconstrucción para este operador de discretización, es cualquier operador R_k tal que

$$R_k : V^k \rightarrow C([0,1]) \quad ; \quad D_k R_k f^k = f^k$$

Lo cual significa que:

$$(R_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k).$$

Dicho de otra forma, $(R_k f^k)(x)$ es una función continua que interpola los datos de f^k en X^k .

Por tanto, si definimos $(R_k f^k)(x) = I_k(x; f^k)$, entonces podemos definir la transformada de MR directa así:

$$f^L \rightarrow Mf^L \begin{cases} k = L, \dots, 1 & 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ f_j^{k-1} = f_{2j}^k & 1 \leq j \leq J_{k-1} \\ d_j^k = f_{2j-1}^k - I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) \end{cases}$$



Mientras que la Inversa quedaría del siguiente modo:

$$Mf^L \rightarrow M^{-1}Mf^L \begin{cases} k = 1, \dots, L & 1 \leq j \leq J_{k-1} \\ f_{2j-1}^k = I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) + d_j^k & 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ f_{2j}^k = f_j^{k-1} \end{cases}$$

MR basada en la interpolación de hermite

A continuación, veremos un ejemplo de MR con interpolación de Hermite [5] de orden 4. Este caso utiliza los valores de los puntos y lo valores de la primera derivada de la función.

Definimos el nivel de resolución más fino $x^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{j_k}$ donde

$K=1, \dots, L$ por un mallado diádico:

$$x_j^{k-1} = x_{2j}^k \quad j=0, \dots, J_{k-1} = \frac{J_k}{2}$$

Suponemos que la función $f \in F$ y sus derivas están dadas en la malla X^m , por tanto definimos:

$$f_j^k = f(x_j^k)$$

$$g_j^k = hf'(x_j^k)$$

Otro propósito será reducir y predecir los 2 conjuntos de datos f y g . El algoritmo de MR, en el cuarto orden:



$$k = 1, \dots, L$$

$$f_j^{k-1} = f_{2j}^k \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_j^{k-1} = 2g_{2j}^k \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$(d_f)_j^k = f_{2j-1}^k - \frac{1}{2}(f_{2j}^k + f_{2j-2}^k) + \frac{1}{4}(g_{2j}^k - g_{2j-2}^k) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$(d_g)_j^k = g_{2j-1}^k - \frac{3}{4}(f_{2j}^k - f_{2j-2}^k) + \frac{1}{4}(g_{2j}^k + g_{2j-2}^k) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1}.$$

Y

$$k = 1, \dots, L$$

$$f_{2j}^k = f_j^{k-1} \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_{2j}^k = \frac{g_j^{k-1}}{2} \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$f_{2j-1}^k = (d_f)_j^k + \frac{1}{2}(f_j^{k-1} + f_{j-1}^{k-1}) - \frac{1}{8}(g_j^{k-1} - g_{j-1}^{k-1}) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_{2j-1}^k = (d_g)_j^k + \frac{3}{4}(f_j^{k-1} - f_{j-1}^{k-1}) - \frac{1}{8}(g_j^{k-1} + g_{j-1}^{k-1}) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1}.$$

Ejemplo de una técnica de reconstrucción lineal:
interpolación de datos independientes de Lagrange

Si, como en la mayoría de situaciones prácticas, sólo disponemos de valores puntuales de la función, debemos calcular los valores aproximados de la primera derivada en los nodos del mallado más fino X^m con la precisión apropiada, y luego aplicar los dos algoritmos de multiresolución.

Necesitamos alcanzar una precisión de orden 5 en el cálculo del polinomio $I(x)$, lo que nos da $I'(x)$, y por tanto, una aproximación a las derivadas.

De este modo, mantendremos el cuarto orden del esquema de multiresolución considerado.



Debemos observar que, el modo en el que son calculadas estas aproximaciones, resultan ser cruciales en términos de precisión y compresión de datos.

Consideraremos una serie de puntos $f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$. Ahora vamos a hacer una predicción del punto f_j .

La ecuación polinomial para $[x_{j-2}, \dots, x_{j+2}]$ será la siguiente:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_j) + a_2(x - x_j)^2 + a_3(x - x_j)^3 + a_4(x - x_j)^4$$

Y, por tanto:

$$P'(x_j) = a_1 \approx f'_j \quad (\text{Orden } h^4)$$

Así pues, para calcular cada a_i , tendremos el siguiente sistema lineal:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)^2 + a_3(-2h)^3 + a_4(-2h)^4 &= f_{j-2} \\ a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2 + a_3(-h)^3 + a_4(-h)^4 &= f_{j-1} \\ a_0 &= f_j \\ a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2 + a_3(h)^3 + a_4(h)^4 &= f_{j+1} \\ a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 + a_3(2h)^3 + a_4(2h)^4 &= f_{j+2} \end{aligned} \right\}$$

De donde deducimos que

$$a_1 = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12h}$$



Para los puntos de los límites, tenemos:

1.- En el punto f_1 , consideramos el polinomio para el intervalo

$$[x_1, \dots, x_5],$$

$$I(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)^2 + a_3(x - x_1)^3 + a_4(x - x_1)^4$$

Las condiciones de interpolación son:

$$a_0 = f_1$$

$$a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2 + a_3(h)^3 + a_4(h)^4 = f_2$$

$$a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 + a_3(2h)^3 + a_4(2h)^4 = f_3$$

$$a_0 + a_1(3h) + a_2(3h)^2 + a_3(3h)^3 + a_4(3h)^4 = f_4$$

$$a_0 + a_1(4h) + a_2(4h)^2 + a_3(4h)^3 + a_4(4h)^4 = f_5$$

De donde obtenemos que

$$a_1 = \frac{-75f_1 + 144f_2 - 108f_3 + 48f_4 - 9f_5}{36h}$$

2.- En el punto f_2 , consideramos un polinomio en el intervalo

$$[x_1, \dots, x_5],$$

$$I(x) = a_0 + a_1(x - x_2) + a_2(x - x_2)^2 + a_3(x - x_2)^3 + a_4(x - x_2)^4$$

Y con las condiciones de interpolación adecuadas, obtenemos el valor:

$$a_1 = \frac{-3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5}{12h}$$



6.-El método de RUNGE-KUTTA

Los sistemas de EDOs se utilizan con frecuencia en procesos cuyo proceso natural evoluciona según el tiempo. Un sistema de EDO, por ejemplo, puede modelizar la evolución en el tiempo de una función.

Normalmente el estado de un proceso es conocido en un momento determinado (inicial), mientras que su evolución es objeto de estudio. Esto nos lleva al Problema de Valor Inicial (PVI) para un sistema de EDOs.

El PVI se puede escribir como $\frac{d}{dt}U(t) = F(U(t))$ dónde $(t \geq 0)$, $U(0) = u_0$ y u_0 es un vector dado en un espacio vectorial real V , y F permite obtener una función desde V a sí misma. El problema es encontrar $U(t) \in V$ para $t > 0$. Lo más común es aproximar las soluciones mediante métodos numéricos, en este apartado detallaremos el método de Runge-Kutta.

Estos métodos constituyen una clase conocida como métodos paso a paso, en los que cada paso comienza desde una aproximación u_{n-1} de $U(t)$ en el punto $t = t_{n-1} \geq 0$.

El tamaño de paso $\Delta t > 0$ se selecciona y t_n es un conjunto igual a $t_{n-1} + \Delta t$.

Una aproximación u_n de $U(t_n)$ puede ser programada desde u_{n-1} .

En particular, cuando aplicamos un método de Runge-Kutta, la aproximación u_n de $U(t_n)$ puede ser definida en términos de u_{n-1} por las relaciones:



$$y_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s k_{ij} F(y_j) \quad (1 \leq i \leq s+1),$$

$$u_n = y_{s+1},$$

Aquí k_{ij} son parámetros reales, especificados por los métodos de Runge-Kutta, e y_i ($1 \leq i \leq s$) son aproximaciones intermedias necesarias para programar $u_n = y_{s+1}$ a partir de u_{n-1} .

Si $k_{ij} = 0$ (siendo $1 \leq i \leq j \leq s$) las aproximaciones intermedias se pueden programar directamente partiendo de u_{n-1} y el valor conocido y_i ($j < i$); de lo contrario tendríamos que resolver un sistema de ecuaciones (no lineales) para obtener y_i .

6.1.- Aplicación del método

La aplicación del método de líneas a un problema de Cauchy para la ecuación consiste en dos pasos:

- Primero se hace una discretización del espacio (basado en la diferencia finita, elementos finitos o el método de volumen finito por ejemplo)). Esto se aplicará a un PVI con t como variable continua – esto es conocido como sistema semidiscreto. En esta situación, la función F depende del valor dado ϕ así como del proceso de semidiscretización que se esté usando, y u_0 depende del dato inicial del problema de Cauchy.
- Segundo, se hace la integración en el tiempo (siguiendo un método de Runge-Kutta o un método multipaso por ejemplo) y se aplica al PVI ya obtenido, para convertirlo en un proceso numérico totalmente discreto.



Para clarificar la aproximación descrita arriba, consideraremos el problema de Cauchy (Riemann) para el test escalar de la ecuación de Burgers (de la forma (1.4)).

$$\frac{d}{dt}u(x,t) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2(x,t)\right) = 0 \quad t \geq 0, -\infty < x < \infty,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t/2 \\ 0 & \text{si } x > t/2 \end{cases}$$

Es la solución exacta (aunque poco precisa) del problema.

Queda claro que no es necesario buscar una solución aproximada al problema, salvo para propósitos exclusivamente demostrativos, aplicaremos MDL. La solución será aproximada combinando un espacio de discretización, basado en el método de diferencias finitas, y un método Runge-Kutta integrado según el tiempo. Ya que conocemos la solución exacta (aunque poco precisa) podemos compararla con la aproximación numérica y será fácil comprobar si la solución numérica da una aproximación fiable o no.

Dado el ancho de malla $\Delta x = 1$, considerando un punto de la malla en el espacio $G = \{x_j \mid x_j = j\Delta x, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Los puntos (x_j, t) se aproximan a la solución de la ecuación (2.1), y designamos por $U_j(t)$ esta aproximación. Al final, la cantidad $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2(x,t)\right)$ es reemplazada por una diferencia de cocientes (conservativa)



$$\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} (U_j(t))^2 - \frac{1}{2} (U_{j-1}(t))^2 \right]. \text{ Así obtenemos el siguiente sistema}$$

semi-discreto.

$$\frac{d}{dt} U_j(t) = - \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} (U_j(t))^2 - \frac{1}{2} (U_{j-1}(t))^2 \right]$$

Usando el vector notación $U(t) = (\dots, U_{-1}(t), U_0(t), U_1(t), \dots) \in$

\mathbb{R}^∞ , llegamos al PVI, donde

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^\infty.$$

Como (1.1) ahora está puesto de forma semi-discreta de la ley de conservación (1.4), es importante que el proceso *totalmente discreto* (consistente en la aplicación de (1.2) en (1.1)) sea monótono en el sentido de donde $\|\cdot\|$ denota la *variación-total* de la seminorma.

$$\|y\|_{TV} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\eta_j - \eta_{j-1}| \quad (\text{Para } y \in \mathbb{R}^\infty \text{ con componentes } \eta_j)$$

)

Con esta seminorma, la propiedad de monotonía se reduce hasta la conocida como propiedad *Variación Total Decreciente* (TVD).

De aquí vemos porqué la garantía de monotonía (propiedad TVD) en la aproximación numérica es importante. Al final resolvemos (1.1) aplicando dos métodos de Runge-Kutta diferentes. El primer método se define por la relación

$$\begin{cases} y_1 = u_{n-1}, \\ y_2 = u_{n-1} + \Delta t F(y_1), \\ y_3 = u_{n-1} + \Delta t \left(\frac{1}{2} F(y_1) + \frac{1}{2} F(y_2) \right), \\ u_n = y_3 \end{cases}$$



Y el segundo por

$$\begin{cases} y_1 = u_{n-1}, \\ y_2 = u_{n-1} - 20\Delta t F(y_1), \\ y_3 = u_{n-1} + \Delta t \left(\frac{41}{40} F(y_1) - \frac{1}{40} F(y_2) \right), \\ u_n = y_3 \end{cases}$$

Estos métodos se toman de Gottlieb & Shu (1998).

Es muy sencillo verificar que los dos métodos coinciden si F es lineal. No obstante, ya que la función F bajo consideración es no lineal, podemos observar diferentes resultados cuando se aplican ambos métodos. Utilizamos el mismo tamaño de paso $\Delta t = 0,75$ en ambos métodos. En la figura 1, superior e inferior, mostramos los resultados del primer y el segundo método respectivamente, después de 53 pasos – el perfil de la solución verdadera ha sido superpuesta sobre una malla de 20 puntos aproximadamente. Vemos claramente que el segundo resultado es oscilatorio, mientras que el primero no.

6.2.-Shu-Osher

En general, una representación Shu-Osher de un método Runge-Kutta dado [6], no es única. Además, son de especial relevancia aquellas representaciones de un método dado el cual ha sido optimizado de acuerdo a la condición de tamaño de paso que puede derivarse de ellos.



En el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, Shu & Osher (1988) introdujeron representaciones, para los métodos Runge-Kutta, dirigidos a una condición TVD.

Shu & Osher introdujo una representación inteligente de los métodos Runge-Kutta explícitos que facilita la demostración de $\|u_n\|_{TV} \leq \|u_{n-1}\|_{TV}$ para cualquier $\tau_0 > 0$. Donde la función $\|\cdot\|_{TV}$ está

definida por $\|y\|_{TV} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\eta_j - \eta_{j-1}|$ (para $y \in R^\infty$ con

componentes η_j).

Esto implica asumir que la semidiscretización de la ecuación ha sido desarrollada de tal manera que el consecuente método de Euler simple, aplicado al problema es TVD cuando el tamaño de paso τ es debidamente restrictivo.



7.-El algoritmo

En este apartado del proyecto pasaremos a describir el algoritmo. Para ello se ha realizado en varias etapas, en cada una de ellas explicaremos los principales puntos que componen este algoritmo y mediante las cuales conseguiremos definir un mallado adaptativo que vaya modificándose con el tiempo.

Para ir familiarizándonos con el algoritmo definiremos en primer lugar las notaciones empleadas: Sea $u_j^m \approx u(x_j, t_m)$, la solución a la aproximación $u_t + f(u)x = 0$. Donde subíndice m representa el tiempo mientras que j representa el espacio.

Paso 1

Como punto de partida dispondremos de valores puntuales de la solución a aproximar. Empezaremos calculando los valores aproximados de la primera derivada en los nodos del mallado más fino X^k con la precisión apropiada, y luego aplicar los dos algoritmos de Multiresolución para obtener el mallado adaptativo.

Para ello, usaremos como herramienta la interpolación de datos independientes de Lagrange

Al resultado de la interpolación para calcular los valores en los nodos del mallado más fino, le llamaremos $I(x, 0)$.

En este primer paso aproximaremos la ecuación $u_x(x, 0)$ con un método que se adapte a nuestras discontinuidades



Paso 2

Una vez finalizado el primer punto pasaremos a realizar la Multiresolución.

Ahora ya tenemos un mallado más fino y podremos comprimir la función y su derivada. Para ello haremos MR basada en Hermite, a la función y su derivada a las siguientes funciones:

$$\begin{cases} f_j^L = u(x_j^L, 0) \\ g_j^L = h_L I'(x_j^L, 0) \\ h_j^L = h_L I''(x_j^L, 0) \end{cases}$$

Esta herramienta de MR ha sido comentada anteriormente en <5.4>.

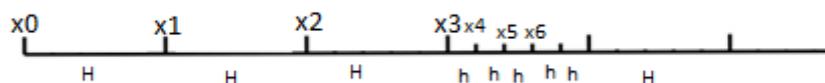
Paso 3

Una vez realizada la MR de las funciones anteriores, estudiaremos los detalles grandes obtenidos en la MR, estos nos indicarán zonas con posibles choques o discontinuidades.

Pasaremos a estudiar estas zonas con posibles discontinuidades, es decir aquellas con un detalle grande, y construimos la malla adaptativa.

Paso 4

Una vez tenemos nuestra mallado adaptativo, calcularemos u_j^1 en dicha malla.





El valor correspondiente a la solución de la función en el punto $x=j$ y en el instante $t=0$. punto de partida es u_j^0 , valor que ya conocemos .

Sabemos que $u_t + u_x = \varepsilon \cdot u_{xx}$, donde u_x y u_{xx} lo hemos resuelto en el primer paso del algoritmo dejándolo en función de u_0 .

La parte de la derivada temporal la calcularemos mediante las

ecuaciones de Euler $\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t}$ mientras que la parte de la derivada

espacial u_x tal como hemos comentado anteriormente la tenemos

calculado en el primer paso y sabemos que sólo depende de u_j^0 .

Por tanto es igual a $I'(x_j, 0)$. De igual modo, igual que en el caso

anterior $\varepsilon \cdot u_{xx}$ depende solamente de u_j^0 , en donde u_{xx} se trata

de la segunda derivada de una interpolación de las u 's y sus

derivadas, de forma que junto a la épsilon el error sea el de los

otros términos.

Obteniendo la siguiente ecuación: $\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} + I'(x_j, 0) = \varepsilon \cdot u_{xx} =$

$f(u^0)$, con ella ya podremos despejar $\{u_j^1\}$ en la malla adaptativa.

Paso 5

Hasta ahora hemos estado trabajando con mallados regulares, pero

este tipo de mallados no se adaptan bien debido a la falta de

flexibilidad. Por tanto lo que buscaremos será un mallado que se

adapte de forma adecuada a nuestra función.



Lo que haremos ahora será aproximar la solución u_j^1 en el mallado no uniforme, que será la aproximación buscada en el momento $t=1$.

Este paso consiste en repetir los 4 pasos anteriores pero teniendo en cuenta que ahora la malla no es uniforme, es decir, trabajamos ya con un mallado adaptativo.

Paso 5.1.

Este paso será equivalente al *Paso 1* m con la diferencia que ahora aproximaremos la función para $u_x(x,1)$. Ahora interpolamos la función para obtener $I'(x,1)$ teniendo en cuenta que ahora el espaciado del mallado es irregular

En las regiones donde los puntos estén equiespaciados no cambiará nada, mientras en regiones donde haya varios tipos de espaciado usaremos información no centrada.

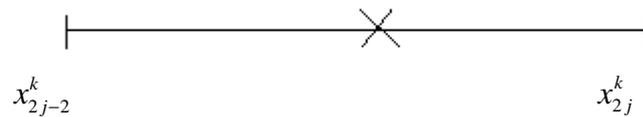
Además en regiones con H usaremos métodos de interpolación más sencillos y por tanto más económicos, como por ejemplo polinomios de Lagrange.

Paso 5.2

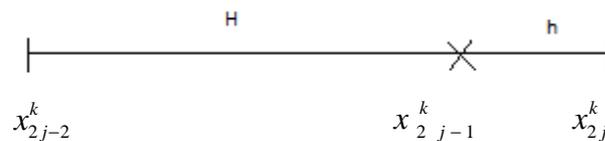
Continuaremos con los métodos de MR de igual modo que en el Paso 2, aplicando MR a u_j^1 pero teniendo en cuenta que las fórmulas tendrán ahora espaciados no regulares.



Inicialmente teníamos mallados en los que H estaba compuesto por varias h , Pero ahora tendremos un mallado con información no centrada.



Actualmente tenemos el siguiente caso en donde aparecen las h'



Ahora la fórmula tendrá $(x_{2j}^k - x_{2j-1}^k)$ para el espaciado h , mientras que para el espaciado H tendremos $(x_{2j-1}^k - x_{2j-2}^k)$.

Paso 5.3.

Una vez tenemos la MR hecha para u_j^1 y su derivada Ahora deberemos de repetir el paso 3, y obtener aquellas regiones cuyos detalles superan la tolerancia establecida inicialmente

Paso 5.4.

Con el mallado adaptativo ya hecho y de igual modo que en el paso 4 aproximaremos u^1 para el mallado no regular

Paso 6

Finalmente en este paso realizaremos lo mismo que en el paso 5 para obtener u^2, u^3, u^4, \dots



8.-Aproximación de la derivada temporal u_t

Deberemos de tener en cuenta que estamos frente a un proceso de discretización en dos etapas, primero se discretizará sólo tiempo y posteriormente pasaremos a la parte espacial.

La discretización puede hacerse mediante un método estándar para sistemas de ecuaciones ordinarias. Este mecanismo es particularmente ventajoso en el desarrollo de métodos con orden mayor a 2, ya que permitirá alcanzar de forma relativamente sencilla la misma precisión espacial y temporal. A Pesar de ello también analizaremos para los métodos de orden 1.

Métodos de orden 1

Para la aproximación de la derivada temporal de las ecuaciones de orden 1 utilizaremos la ecuación de Euler, la cual pasaremos a describir ahora.

$$y' = f(t, y)$$

$$y'(t_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_{n+h}) - y(t_n)}{h} \simeq \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n)$$

Con esto, ya podremos obtener y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

Así pues, con este método hemos aproximado la parte temporal con una única evaluación de f .



A la hora de evaluar una EDP de grado 1 como por ejemplo una ecuación de Euler, emplearemos para la derivada temporal métodos de orden 1 como el que acabamos de ver.

Dada la EDP de la forma $u_t + u_x = 0$ acabamos de evaluar la parte temporal y ya hemos aproximado mediante el algoritmo que hemos desarrollado la parte espacial. Una vez tenemos la parte temporal y espacial aproximada obtendremos las siguientes ecuaciones:

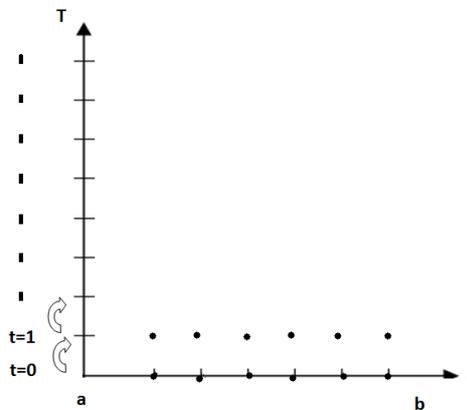
$$\begin{cases} u_t(x_j, t_m) \approx \frac{u(x_j, t_{m+1}) - u(x_j, t_m)}{\Delta t} \\ u_x(x_j, t_m) \approx I' \end{cases}$$

Por tanto la EDP obtenida nos quedará del siguiente modo:

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + P_x(u_j, x_j, t_m) = 0$$

Llegados a este punto ya podemos analizar la ecuación en todos los saltos temporales realizando de nuevo los pasos del algoritmo de un modo rápido mediante una única evaluación de f .

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \Delta t \cdot P_x(u_j, x_j, t_m)$$





Métodos de Orden 2

Como ejemplo de métodos de orden 2 tenemos Runge-Kutta (RK), este método no deja de ser una combinación de Euler.

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_m, y_m) + f(t_{m+1}, y_{m+1}^c) \right]$$

Donde

$$y_{m+1}^c = y_m + \frac{h}{2} \cdot f(t_m, y_m)$$

Puesto que se tratan de métodos de orden 2, el error cometido será del mismo orden. Todo esto será cierto siempre que no existan discontinuidades.

En caso que exista saltos o discontinuidades deberemos de usar RK-TVD para conseguir el suavizar dichos saltos o discontinuidades. Con el TVD (Total Variation Decreasing) lo que conseguiremos es que el número de saltos se mantengan o en el mejor de los casos vayan a menos $\sum |u_j - u_{j-1}|$.

Como ejemplos de TVD tenemos Euler y RK.

El método de Euler lo aplicaremos cuando tengamos orden 1.

Por lo que respecta a RK-TVD podremos aplicarlo en casos de orden 2 o 3, en los cuales necesitaremos 2 o 3 evaluaciones, dependiendo del grado. Estos métodos fueron desarrollados por Shu-Osher.

Para el caso de Orden > 3, duplican su coste tanto en tiempo como en espacio de memoria, es decir son más caros.



9.-Aplicaciones reales

En este apartado describiremos una aplicación real de los métodos estudiados durante este proyecto, con ello lo que intentaremos es dar un punto de vista práctico para la aplicación de estos métodos.

Daremos detalles de *“Esquemas numéricos avanzados para el cálculo del flujo por el interior de los motores de combustión interna alternativos”*. [4]

El flujo por el interior de los sistemas de admisión y escape de los motores de combustión interna alternativos (MCIA) es uno de los casos más complejos de la Dinámica de Gases.

Dicho flujo es completamente no estacionario, el fluido es compresible, jugando la compresibilidad un papel muy importante, y se caracteriza por una velocidad elevada con ondas de presión de amplitud considerable (picos de presión de 0.5 bar sobre presiones medias cercanas a la atmosférica son frecuentes) y la existencia de fuertes discontinuidades de temperatura, como por ejemplo la existente en la admisión, cuando al abrir la válvula, se produce un reflujo de gases quemados muy calientes hacia la admisión, produciendo de esta forma una discontinuidad térmica local de varios cientos de grados. Adicionalmente en motores de altas prestaciones, las velocidades instantáneas son muy elevadas, pudiéndose producir en ocasiones en el escape la formación de ondas de choque. La influencia del flujo por la admisión y el escape es por otra parte muy importante en las prestaciones del motor condicionando sobremanera la cantidad de aire entrante y por lo tanto, el par máximo y su variación con el régimen de giro (curva de par



motor). De aquí, que muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos al desarrollo de técnicas numéricas capaces de resolver las ecuaciones del flujo en tan adversas condiciones.

En su momento, un número de métodos estándar basados en técnicas de diferencias finitas, como por ejemplo el conocido método de Lax&Wendroff de dos pasos Takizawa, Azuma, Poloni o su versión de un paso (Niessner) u otros métodos similares (Chapman) fueron las técnicas numéricas escogidas para proveer de la robustez y precisión necesarias a los códigos de cálculo en su siguiente generación.

Sin embargo, estas técnicas no pueden emplearse con la precisión suficiente en problemas en los que el término fuente tiene un peso importante en el conjunto de las ecuaciones, como es típicamente el flujo alta velocidad por el interior de conductos de sección variable. En este caso, la influencia de la aceleración o desaceleración producida por el cambio de sección tiene un efecto muy importante en la ecuación de cantidad movimiento, y por lo tanto en la solución del flujo. De hecho, los mencionados métodos producen errores de conservación importantes e incluso presentan problemas fuertes de oscilación de la solución que pueden llegar a la interrupción de la ejecución del programa por aparición de propiedades físicas inconsistentes.

Para la resolución de esta problemática es necesario, en primer lugar un planteamiento adecuado del sistema ecuaciones que incluye el término fuente, y en segundo lugar la utilización de esquemas numéricos conservativos de carácter no oscilatorio. En el presente trabajo, se presenta la solución dada por los autores a esta problemática mediante la utilización de esquemas TVD.



Las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan el flujo no estacionario unidimensional a través de conductos de sección constante se ha descrito habitualmente de la siguiente forma:

$$W_t + F_x + C_2 = 0$$

$$W(x,t) = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ A\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$B'(x,W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Incluyendo el término C_2 los términos disipativos correspondientes a la fricción con las paredes en la ecuación de cantidad de movimiento, y al calor intercambiado con las paredes en la ecuación de la energía. Si ambos términos son nulos el sistema anterior deviene el conjunto de ecuaciones de Euler para el flujo compresible no estacionario unidimensional.



El método de las características transforma el anterior sistema ecuaciones en derivadas parciales en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias a integrar a lo largo de las líneas características¹. Aunque esta aproximación fue la inicialmente utilizada para el cálculo de este tipo de flujos, fue abandonada hace algunos años principalmente porque se trata de un tratamiento no conservativo y por lo tanto produce errores de conservación en masa y energía.

También, porque su implementación práctica en ordenador² requiere la utilización de la interpolación lineal, por lo que se trata de un método de primer orden.

No obstante, se debería resaltar que aunque fue abandonado para el cálculo del flujo por el interior de los conductos, permanece como el método de cálculo de preferencia para el cálculo de las condiciones de contorno en la mayoría de los códigos de cálculo actuales.

Así pues, el método de las características fue en su momento sustituido por métodos en diferencias finitas en la mayoría de los códigos de cálculo.

Los métodos en diferencias finitas o en volúmenes finitos aportan órdenes de precisión superiores, aunque al mismo tiempo pueden resultar oscilatorios si se trata de métodos de orden de precisión par. Si el flujo no presenta discontinuidades térmicas importantes o discontinuidad de presión elevadas, como las ondas de choque, entonces los métodos en diferencias finitas de segundo orden proporcionan una precisión y rapidez excelentes. Los esquemas de este tipo más utilizados han sido los de Lax & Wendroff de dos pasos y el método de McCormack.



Sin embargo, en los sistemas de admisión y escape de motores aparecen habitualmente discontinuidades térmicas elevadas que pueden producir oscilaciones importantes de la solución, como es el caso del reflujo que se produce al principio el proceso de admisión en el que la presión en el cilindro es mayor que la existente en la admisión.

Las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan en este caso el flujo pseudounidimensional no estacionario deben incorporar en el sistema (1) el término correspondiente a la variación de sección longitudinal del conducto, quedando de la siguiente forma:

$$C_1(x, W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}$$

Donde el vector C_1 contiene el término que debe expresar en cada una de las Ecuaciones de conservación la influencia de la variación de la sección del conducto a lo largo del mismo.

Como puede observarse este término tiene influencia en las tres ecuaciones de conservación, afectando incluso a la ecuación de continuidad.

Si se emplean las técnicas numéricas mencionadas en el apartado anterior a la resolución del anterior sistema ecuaciones, y se aplican a la resolución de un problema del flujo no estacionario por



interior de un conducto en el que la sección transversal muestre una variación significativa, todos ellos presentarán serios problemas en obtener una solución físicamente consistente, y en muchos de ellos se producirán errores fatales que imposibilitarán el cálculo.

La razón de estas dificultades se basa sencillamente en que la forma tradicional de escribir las ecuaciones utiliza como variables conservadas $\rho, \rho U, \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right)$ cuando realmente la conservación física se establece para la masa, la cantidad movimiento y la energía. La integración de las ecuaciones que gobiernan el flujo, tal como se ha escrito más arriba, conlleva que los errores de aproximación del vector C_2 se distribuyan a lo largo de todo el sistema ecuaciones, estropeando la solución. El primer paso para resolver estas dificultades consiste en plantear el sistema en función de las variables conservadas, del siguiente modo:

$$W_t + F_x + C = 0$$

$$C(x, W) = B'(x, W) + C'(W) = 0$$

$$W(x, t) = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ A\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix}$$



$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ u A \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) \end{pmatrix}$$

$$B'(x, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \frac{dA}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C'(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \rho A_t \\ -q \rho A_t \end{pmatrix}$$

Como se observa, en este caso el único término “no conservativo” que se ve afectado por la variación de la sección es el que aparece como corrección de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, y que resulta ser la integral de las fuerzas que las paredes laterales del conducto ejercen sobre el conjunto del volumen, y que es debida a la variación de sección, desde la entrada a la salida. Obsérvese, que la fuerza debida a la variación de presión a lo largo del conducto se ha incluido en el término correspondiente del vector de flujos $F(W)$ conjuntamente con el flujo de la cantidad movimiento.

No obstante, en algunas condiciones, como puede ser la existencia de pipas de escape divergentes en motores de altas prestaciones, conductos de escape de motores de dos tiempos, y en general en todas aquellas aplicaciones en las que la variación de sección es importante, este método produce oscilaciones que pueden ser



importantes, estropeando la solución y provocando en ocasiones la interrupción del cálculo.

Los autores intentaron aplicar también las técnicas de corrección del flujo FCT que tan buenos resultados dan para el caso de conductos de sección constante, para eliminar las oscilaciones numéricas en el esquema adaptado. Sin embargo, cuando esta técnica se aplica al caso de sección variable, el paso de difusión, responsable de compensar las oscilaciones que se producen durante el paso de transporte, también produce difusión en las regiones en las que hay cambios importantes de sección, y esta difusión no se compensa en el paso posterior de antidifusión, formándose gradientes de propiedades importantes en los sitios en que la sección varía de forma importante. Para que esta técnica fuera aplicable habría que encontrar una formulación en que la difusión pudiera ser selectiva, y aplicada solamente en el entorno de una discontinuidad térmica o de presión. Sin embargo, los autores no han encontrado una formulación adecuada.

Conclusiones:

Tras el estudio se comprobó que otros esquemas, como por ejemplo los esquemas TVD o CESE, proporcionan también buenos resultados en la eliminación de las oscilaciones pero conllevan un aumento del tiempo de cálculo sustancial.

Además Cuando se den a la vez las dos problemáticas tratadas, cambio de la sección transversal a lo largo del conducto, y presencia de discontinuidades fuertes de presión y temperatura se recomienda la utilización de un esquema con propiedad TVD, tal como el que se ha descrito.



10.-Conclusiones

El principal propósito de este proyecto ha sido crear un mallado que nos permita estudiar el movimiento de los fluidos por el interior de una tubería. Pero cualquier mallado no nos sirve, lo que se pretende es optimizar costes computacionales y operacionales, es por ello que se ha tratado de conseguir un mallado adaptativo.

Como hemos podido ver la elaboración de un mallado adaptativo nos ha permitido estudiar de un modo óptimo los posibles choques de los fluidos, este apartado es de suma importancia puesto que nuestro fluido, al moverse a través de tuberías con codos, reducciones, válvulas, etc. Estará sometido constantemente a choques.

Con la ayuda de los métodos de Multiresolución lo que hemos conseguido ha sido diseñar un mallado adaptativo de modo que el propio sistema se adapte automáticamente y dinámicamente a lo largo de un periodo de tiempo “ t ” a los posibles saltos o discontinuidades que experimente el fluido. Para ello se ha tenido en cuenta la velocidad del método, está será siempre más lenta que la de la propia onda física, para de este modo asegurarnos de poder estudiar el fenómeno sin pérdida de información.

Pero lo más novedoso de este proyecto ha sido la elaboración de una MR que además de darnos un mallado con los posibles puntos con discontinuidades para estudiarlos más detalladamente, nos permitirá también aproximar la ecuación del estilo $u_t + u_x = \varepsilon u_x$. Para ello hemos usado una MR que use derivadas.



11.-Referencias bibliográficas

Artículos matemáticos:

- [1]**Ricardo Esteban Ruiz Baier**, Métodos de Multiresolución y su Aplicación a un Modelo de Ingeniería, 2005. Concepción (Chile) 31-40
- [2]**Juan Luis Vázquez**, La ecuación de Navier-Stokes, Un reto físico matemático para el siglo XXI ,2004. Madrid (Spain) 38-40
- [3]**Jesús E. Villarreal R.** Modelado y experimentación numérica de los regímenes inestables no isotérmicos del transporte de gas en tramos lineales de gasoductos, 2009 Universidad de los Andes(Venezuela) 42-53
- [4]**J.M. Corberán Salvador***, **R. Royo Pastor***, y **Ll. Gascón Martínez ♥**, Esquemas numéricos avanzados para el cálculo del flujo por el interior de los motores de combustión interna alternativos, 2004, Valencia (Spain) 2-10
- [5]**Inés Ali**, **Sergio Amat**, **J.Carlos Trillo**. Point values Hermite multiresolution for non-smooth noisy signals, 2005 Artículo ,Universidad Politécnica de Cartagena.
- [6]**Ferracina I.**, **Sipijker M.N** , Una extensión y análisis de la representación Shu-Osher de métodos Runge-Kutta, 2005.

Libros de texto:

- Merle C. Potter**, **David C Wiggert**, Mecánica de Fluidos. Editorial Thomson ,2002.
- Víctor L. Streeter**, **E. Benjamin Wylie**, **Keith W. Bedford**, Mecánica de fluidos.Editorial Mc Graw-Hill , 2001

Apuntes tutorías PFC.

