

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA NAVAL Y OCEÁNICA

PROYECTO FIN DE CARRERA



“Aproximación de Ecuaciones en Derivadas Parciales mediante técnicas de Multiresolución”

Alumno: Concepción Pérez Cervantes

Centro: E.T.S.I. Naval y Oceánica

Titulación: Ingeniero Naval y Oceánico

Directores: Sergio Amat Plata

Sonia Busquier Sáez

Departamento: Matemática Aplicada y Estadística

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	4
1.-MOTIVACIÓN.	5
2.-INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE FLUIDOS	7
2.1.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA.....	7
2.2.- LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO Y ANGULAR.....	8
2.3.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.....	9
3.-ECUACIONES DE EULER Y NAVIER-STOKES	11
3.1.-ECUACIONES DE EULER	11
3.2.-ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.....	12
4.-TIPOS DE EDP'S.....	14
4.1.-EDP'S LINEALES.....	15
4.2.-EDP'S NO LINEALES.....	16
5.-OBJETIVOS DEL PROYECTO.....	18
6.-PROPIEDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DETECTAR CHOQUES.....	19
7.-HERRAMIENTAS	21
7.1.-MÉTODO DE MULTIRESOLUCIÓN.....	21
7.1.1.-DESCRIPCIÓN	21
7.1.2.-NOTACIONES MULTIRESOLUCIÓN	23
7.1.3.-MULTIRESOLUCIÓN DE HERMITE PARA VALORES PUNTUALES EN SEÑALES NO SUAVIZADAS.....	25
7.1.4.-EL PROCESO DE MULTIRESOLUCIÓN	25
7.1.5.-MULTIRESOLUCIÓN BASADA EN LA INTERPOLACIÓN DE HERMITE.....	27
7.1.6.-EJEMPLO DE UNA TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN LINEAL: INTERPOLACIÓN DE DATOS INDEPENDIENTES DE LAGRANGE.....	28
7.1.7.- EJEMPLO DE UNA TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN LINEAL COMPLETA: LA RECONSTRUCCIÓN PPH.....	31
7.2.-MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	34
7.2.1.-INTRODUCCIÓN.....	34
7.2.2.-"MONOTONÍA" EN LOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA.....	35
7.2.3.-EJEMPLO NUMÉRICO	36
7.2.4.-MÉTODOS DE SHU & OSHER.....	40
8.-METODOLOGÍA DEL PROYECTO	42

8.1.-ALGORITMO.....	43
PASO 1.....	43
PASO 2.....	44
PASO 3.....	44
PASO 4.....	45
PASO 5.....	46
PASO 5.1	47
PASO 5.2	47
PASO 5.3	48
PASO 5.4	48
PASO 6.....	49
8.2.-APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA TEMPORAL U_t	50
MÉTODOS DE ORDEN 1	50
MÉTODOS DE ORDEN 2	51
CONCLUSIONES	53
BIBLIOGRAFÍA.....	54

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar gracias a mis padres por haberme dado la oportunidad de estudiar y por su apoyo, paciencia y facilidades prestados durante todos estos años de estudio.

También a Agustín por ser mi compañero de penas y alegrías en este largo recorrido.

A mis amigos, a mi Luz, y demás familiares por sus ánimos y preocupaciones.

Y sobre todo a Sergio Amat y Sonia Busquier por hacer tan fáciles las matemáticas y por su paciencia y explicaciones siempre disponibles.

1.-MOTIVACIÓN.

El principal objeto del desarrollo de este proyecto es conocer y predecir el comportamiento de un determinado fluido cuando en la dinámica del mismo se producen discontinuidades.

Dicho de otro modo, queremos conocer cuándo se van a producir choques a lo largo de la trayectoria de un fluido que está en movimiento.

Cuando pensamos en el mundo naval, nos encontramos varios tipos de flujos que afectan a nuestro artefacto flotante.

Por un lado, tenemos la interface buque – agua al moverse el casco durante su desplazamiento por el mar. Al abrirse paso el buque entre la superficie del mar, va generando un flujo de agua a lo largo de sus costados, hasta que acaba en la popa. A lo largo de esta trayectoria, se van generando una serie de discontinuidades, choques y torbellinos que influyen en la resistencia al avance del propio buque.

Para que dicha resistencia al avance sea la mínima posible, se han de generar los cascos de los buques con unas formas que ocasionen el menor número de discontinuidades en el flujo.

Para ello, es importante conocer los puntos donde se generarán dichas discontinuidades.

Matemáticamente, queremos obtener un método que nos permita detectar los puntos donde se producen choques en el fluido.

Por otro lado, al tratarse el buque de una factoría en sí mismo, también dispondrá de fluidos en el interior de tuberías para los distintos servicios. Estos fluidos al desplazarse por el interior de los conductos, también generan discontinuidades debido a las configuraciones de la propia red de tuberías (válvulas, codos, etc...).

También podemos encontrar fenómenos de choque de flujo de fluidos en los álabes de una bomba, en la propulsión a chorro, en las hélices, turbinas, etc...

2.-INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Esta rama de la mecánica de fluidos se ocupa de las leyes de los fluidos en movimiento. Estas leyes son enormemente complejas, y aunque la hidrodinámica tiene una importancia práctica mayor que la hidrostática, sólo veremos aquí algunos conceptos básicos.

Euler fue el primero en reconocer que las leyes dinámicas para los fluidos sólo pueden expresarse de forma relativamente sencilla si se supone que el fluido es incompresible e ideal, es decir, si se pueden despreciar los efectos del rozamiento y la viscosidad. Sin embargo, como esto nunca es así en el caso de los fluidos reales en movimiento, los resultados de dicho análisis sólo pueden servir como estimación para flujos en los que los efectos de la viscosidad son pequeños.

Existen una serie de *leyes fundamentales* que rigen el movimiento de los fluidos, y que nos ayudan en el análisis de la dinámica de los mismos. Son la base de la comprensión de la dinámica de fluidos. Estas leyes son:

2.1.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Establece que la materia es indestructible. Indica que el flujo másico entrante y saliente en un volumen de control infinitesimal es igual al cambio de densidad que experimenta ese volumen de control,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Siendo cada uno de los términos:

ρ densidad de masa del elemento diferencial

v Velocidad del elemento diferencial

2.2.- LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO Y ANGULAR

“La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas externas que actúen sobre él”. Establece que el balance de cantidad de movimiento en cada una de las coordenadas entrando y saliendo del volumen de control tiene que estar en equilibrio con las tensiones σ_{ij} y fuerzas volumétricas,

$$\rho(\vec{a} - \vec{X}) = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{3}\mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v}$$

Siendo cada uno de los términos:

ρ densidad de masa del elemento diferencial

a Aceleración del elemento diferencial

X Aceleración debido a las fuerzas volumétricas

P Presión sobre el elemento diferencial

μ Viscosidad del fluido

v Velocidad del elemento diferencial

2.3.- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

También se conoce como *primera ley de la termodinámica*. Esta ley define que la energía total de un sistema aislado permanece constante.

Si un sistema está en contacto con sus alrededores, su energía se incrementa sólo si la energía de sus alrededores experimenta una disminución correspondiente.

La energía total se compone de energía potencial, cinética e interna, siendo ésta última el contenido de energía a causa de la temperatura del sistema.

La ecuación general de la energía se obtiene mediante la combinación del teorema del transporte y la ley de conservación de la energía para un sistema,

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} H) - \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau \vec{v}) - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - q_H = 0$$

Siendo cada uno de los términos:

ρ densidad de masa del elemento diferencial

E Energía por unidad de masa

v Volumen del elemento diferencial

H Entalpía del elemento diferencial

K Conductividad térmica del elemento diferencial

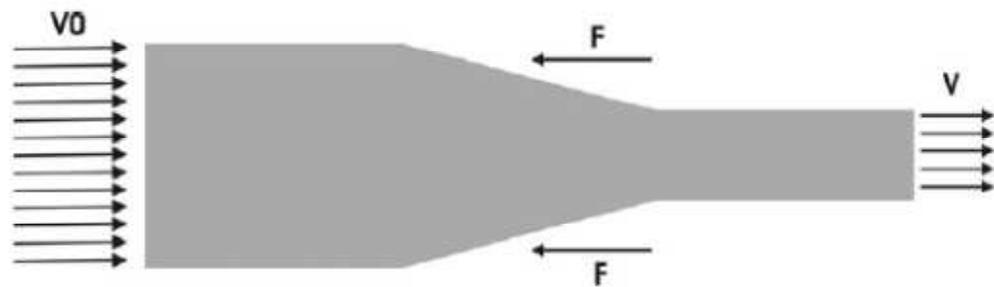
τ Tensión del elemento diferencial

T Temperatura del elemento diferencial

q_H Fuente de calor en el elemento diferencial

f Fuerzas volumétricas

Estas ecuaciones se suelen aplicar a volúmenes ‘*enteros*’, cuya forma, geometría y dimensión son arbitrarias. Por ejemplo, en el caso de un estrechamiento de una tubería.



El fluido entra a la tubería con una velocidad V_0 y sale a mayor velocidad, V . El caudal másico se conserva, **principio de conservación de la masa**, es decir, la masa que entra es la misma que la que sale. Por el **principio de conservación del momento**, la variación del momento es igual a la suma de las fuerzas aplicadas sobre el sistema. Por tanto, si sabemos la velocidad de entra y salida y la masa, podemos calcular el momento, y con ello las fuerzas F que debemos ejercer contra la reducción para que esta se mantenga quieta y no sea arrastrada por el fluido. En este caso, si suponemos que no hay variación de la temperatura, y la reducción está bien aislada, por el **principio de conservación de la energía**, esta no variará.

3.-ECUACIONES DE EULER Y NAVIER-STOKES

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos [6] y [7], conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, surgieron producto del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes.

El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por el famoso matemático Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente.

A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos.

3.1.-ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipotético sin viscosidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.

Asumimos que cada punto $P(x, y, z)$ en el fluido está sujeto a fuerzas que variarán con el tiempo en cada dirección: $f_x(x, y, z, t)$, $f_y(x, y, z, t)$, $f_z(x, y, z, t)$.

El movimiento del fluido en el punto P al tiempo t queda determinado por la velocidad con que fluye en cada dirección: $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$

Asumimos que el fluido es incompresible: no se puede "comprimir" o "expandir" cuando actúan fuerzas sobre éste.

La incompresibilidad se expresa matemáticamente por medio de

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

El problema presupone que conocemos cómo es el movimiento del fluido al inicio cuando $t = 0$. Por lo que $u_x(x, y, z, 0)$, $u_y(x, y, z, 0)$ y $u_z(x, y, z, 0)$ son conocidas (condiciones iniciales).

Al aplicar las leyes de Newton a cada punto P del fluido y la ecuación de la incompresibilidad vista arriba, Euler obtuvo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

3.2.-ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Navier y Stokes [2] modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso más realista de un fluido con viscosidad.

Introducen una constante positiva ν que mide las fuerzas de fricción en el interior del fluido.

Agregan al lado derecho de las ecuaciones de Euler vistas anteriormente, una fuerza adicional (debido a la viscosidad), dada por

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

De esta forma, las ecuaciones de Navier-Stokes [2] quedarían así

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

4.-TIPOS DE EDP'S

Las diferentes categorías de EDP's pueden ser asociadas, en términos generales, con diferentes problemas de flujos.

Las **EDP's parabólicas** rigen flujos con mecanismos disipados; es decir, fricciones significantes por efectos de la viscosidad y/o conducción térmica. En este caso la solución será suave y los gradientes se reducen a medida que pasa el tiempo (siempre y cuando las condiciones de frontera no dependan del tiempo).

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles son un ejemplo de EDP's parabólicas.

En las **EDP's hiperbólicas** no existe presencia de mecanismos disipados. Si la EDP es lineal, la solución permanecerá de amplitud constante, y puede incluso crecer si la EDP no es lineal.

Este tipo de ecuaciones en fluidos son las ecuaciones de Euler, y son por ejemplo, ecuaciones de propagación onda para acústica de un fluido, convección, etc.

En **EDP's elípticas** usualmente rigen problemas de estado estable o en equilibrio, sin embargo algunos flujos en estado estable conducen a EDP's parabólicas (flujo estable de capas limitadas) y EDP's hiperbólicas (flujo estable supersónico).

Estas ecuaciones aparecen en mecánica de fluidos como ecuaciones de Stokes, que describen un flujo incompresible potencial.

Por otro lado, tenemos otra clasificación de EDP's, en lineales o no lineales.

4.1.-EDP'S LINEALES

Un ejemplo de EDP lineal, es una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u(t, x) &\end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen solución del tipo

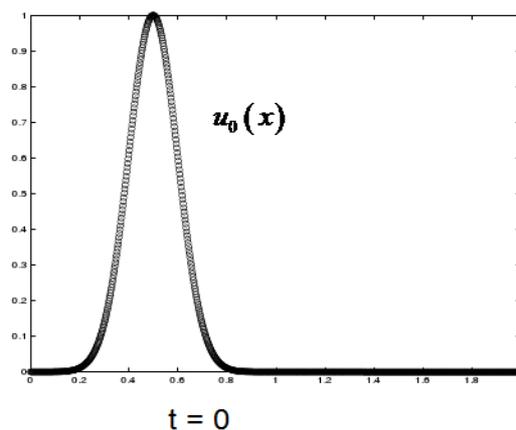
$$u(x, t) = u_0(x - at) \quad \text{Donde podemos decir que } z = x - at$$

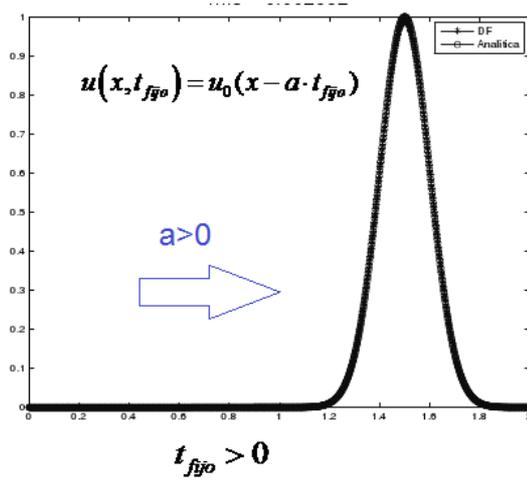
$$\text{Para } t=0: \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Demostración de la solución:

$$\left. \begin{aligned}u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} (-a) \\ u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} (1)\end{aligned} \right\} \quad \boxed{u_t + a \cdot u_x = 0}$$

La solución gráfica respecto al tiempo es:





4.2.-EDP'S NO LINEALES

Son ecuaciones de la forma:

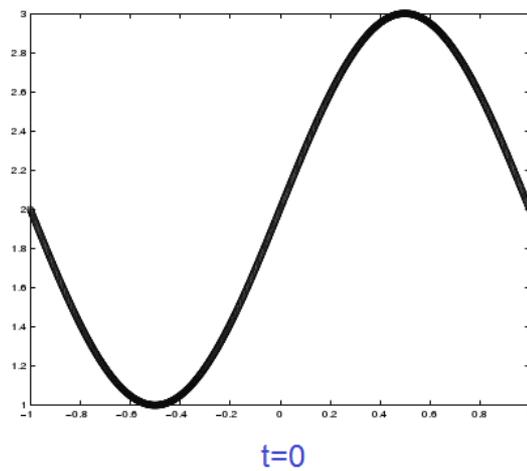
$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Su solución es de tipo:

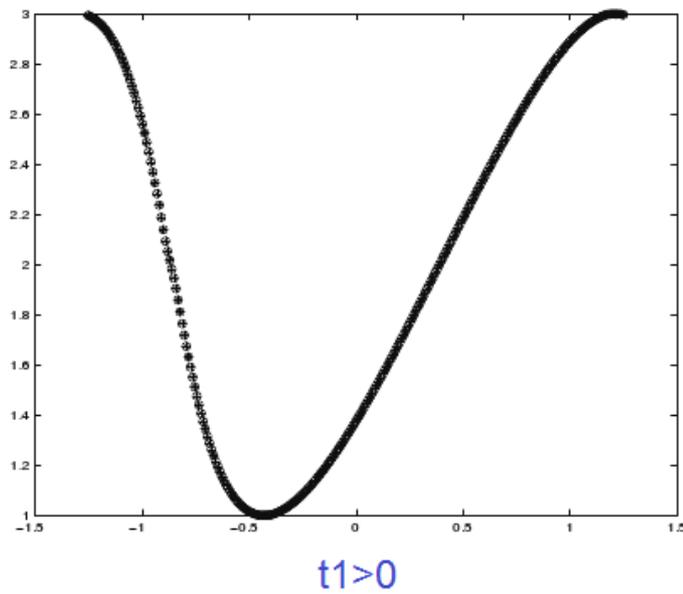
$$u(x, t) = u(x - u(x, t) \cdot t)$$

Para su representación gráfica, tomaremos una función de tipo sinusoidal

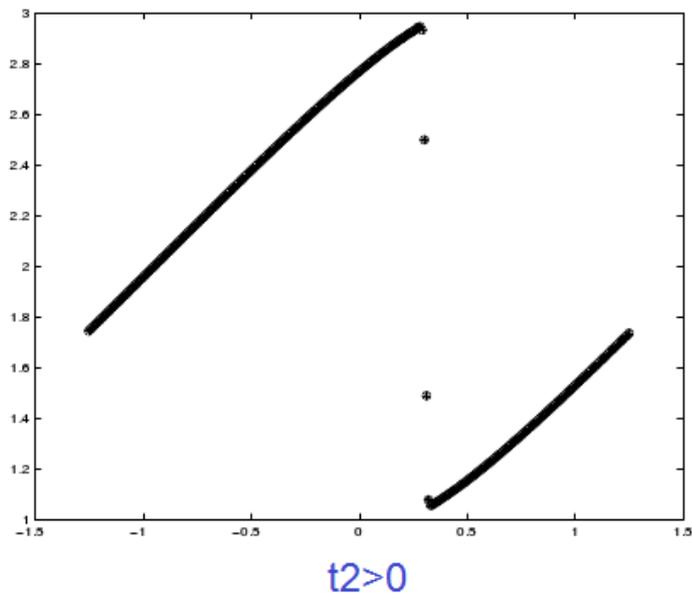
$$u_0(x) = \text{sen}(2\pi x) \in C^\infty$$



A continuación, veremos cómo esta función evoluciona en el tiempo para un instante siguiente:



Finalmente, otro instante después podemos apreciar el choque o discontinuidad de la función:



5.-OBJETIVOS DEL PROYECTO

1º) Intentar diseñar mecanismos que hagan los mallados adaptativos de forma automática y dinámica.

2º) Aproximar las derivadas parciales del modelo correctamente, usando los puntos de ese mallado adaptativo.

Lo que pretendemos, en resumen, es construir una multiresolución que además de darnos los puntos con posibles singularidades (discontinuidades), nos permita ya aproximar la ecuación.

Para ello, usaremos herramientas tales como las diferencias finitas y los esquemas de multiresolución (asociados a interpolaciones tipo Hermite).

6.-PROPIEDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DETECTAR CHOQUES

En principio, construiremos un método numérico que se mueva como lo hace la onda.

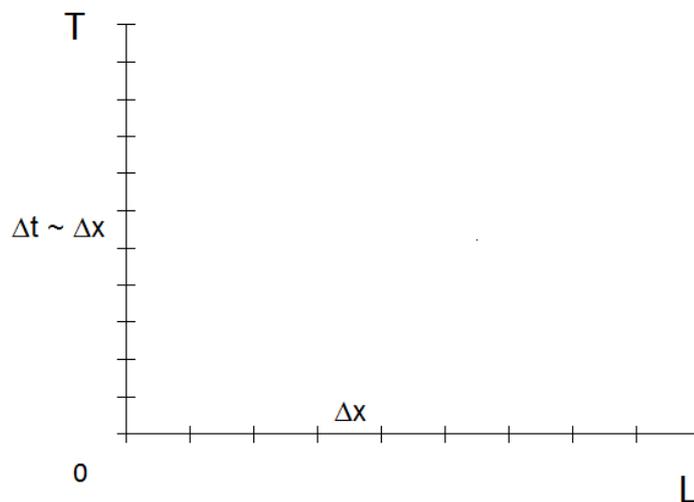
Para ello, tenemos que tener en cuenta dos conceptos importantes: estabilidad y difusión.

A) ESTABILIDAD

Consiste en que los pasos temporales estén mayorados por los espaciales

$$\Delta t \leq c\Delta x$$

Esto quiere decir que el método numérico debe viajar más lento que la onda física para poder captar los choques o discontinuidades.



B) DIFUSIÓN

Es casi lo mismo que suavizar una ecuación.

Puede haber dos tipos de difusión en las ecuaciones a tratar.

- 1) Metiendo difusión al modelo (típico de ecuaciones de Navier – Stokes):

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}$$

- 2) Difusión creada por los propios métodos. Puede ser de orden 1, 2,

...

Hay ocasiones que si juntamos los dos tipos de difusión (metida en el modelo y generada por el método), resulta una aproximación con demasiada difusión.

7.-HERRAMIENTAS

A la hora de elaborar un método para detectar choques en EDP's hiperbólicas y a la vez nos permita aproximar la solución, nos serviremos de algunas herramientas como la multiresolución asociada a una interpolación tipo Hermite para la derivada espacial de la función (u_x), y métodos como Runge-Kutta para aproximar la parte temporal (u_t).

A continuación detallamos cada una de ellas.

7.1.-MÉTODO DE MULTIRESOLUCIÓN

7.1.1.-DESCRIPCIÓN

El método de multiresolución [1] es una técnica destinada a rebajar el coste computacional asociado a los métodos de alta resolución. En situaciones estándar, el comportamiento de la solución $u(x; t)$ como función de x es altamente no uniforme, con fuertes variaciones en regiones puntuales y un comportamiento suave en la mayor parte del intervalo computacional. La técnica de multiresolución fue diseñada originalmente por Harten para ecuaciones hiperbólicas y utilizada por Bihari y Roussel et al. para ecuaciones parabólicas.

Dado un método en forma conservativa y una malla uniforme apropiada para la solución numérica del problema de valores iniciales para una ley de conservación hiperbólica escalar o una ecuación parabólica, el método de multiresolución aproxima la solución a una tolerancia prescrita de una forma más eficiente, entendiendo por eficiencia una reducción en el número de veces que se calcula el flujo numérico con el método de alta resolución.

Para ello se consideran los valores puntuales o medias en celda de la solución numérica mediante un proceso jerárquico de mallas anidadas diádicas, en el cual la malla dada es la más fina, y se introduce una representación que contiene la misma información.

La representación de multiresolución de la solución numérica está formada por sus valores puntuales en la malla más gruesa y el conjunto de errores por interpolar los valores puntuales de cada nivel de resolución a partir de los del nivel próximo más grueso.

La compresión de datos es realizada haciendo cero las componentes de la representación que están por debajo de una tolerancia prescrita, e incluso eliminando de la malla a los puntos cuyos errores son menores a esta tolerancia prescrita; por consiguiente en lugar de calcular la evolución en tiempo de la solución numérica en la malla dada, se calcula la evolución de su representación de multiresolución comprimida. Como la transformación entre una función y su representación de ondelette es rápida, la proposición de efectuar la gran parte de los cálculos en la representación de multiresolución es factible y atractiva.

La información contenida en el análisis de multiresolución de la solución numérica es utilizada para identificar la localización de las discontinuidades en la solución numérica, y diseñar métodos que mejoren el cálculo del flujo numérico. Esta información es de gran utilidad al momento de calcular los flujos, pues el procedimiento correspondiente toma en cuenta la regularidad de la función. Además, la eficiencia computacional del método de multiresolución está directamente relacionada con la razón de compresión de los datos iniciales, es decir, la solución numérica en la malla más fina. La eficiencia del algoritmo se mide mediante la tasa de compresión y el tiempo de CPU.

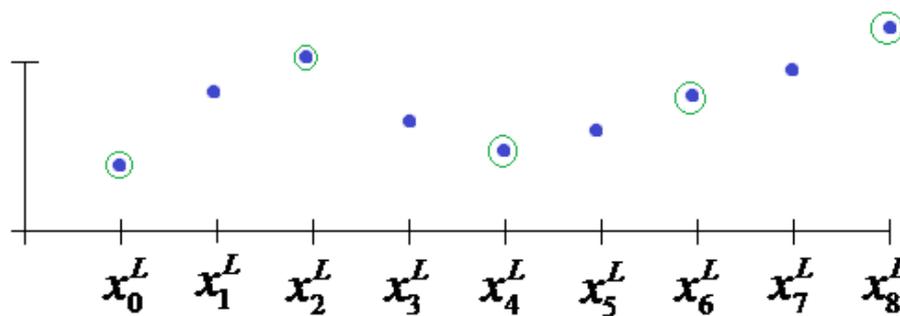
7.1.2.-NOTACIONES MULTIRESUCCIÓN

$$\text{Sea } \{f_j^L\} \equiv f(x_j^L)$$

Donde el superíndice L indica el nivel de mallado más fino, es decir, malla definida en todos sus puntos (x_j).

Si bajamos un nivel de definición en el mallado, de tal forma que sólo tomamos los puntos pares para definirlo, tendríamos:

$$f_j^{L-1} = f_{2j}^L$$



Así pues, teniendo un mallado de un grado de definición menor, y usando una técnica de interpolación adecuada para los puntos que tenemos sin definir, podemos llegar a la función original.

$$f^{L-1} + \text{Técnica de interpolación} \rightarrow \tilde{f}_{2j+1}^L \approx f_{2j+1}^L$$

La diferencia entre los resultados obtenidos al interpolar en los puntos impares, y el valor real de la función en dichos puntos, es lo que llamamos *detalles*

$$d_j^L = f_{2j+1}^L - \tilde{f}_{2j+1}^L$$

Por tanto, una señal original, podemos representarla en una señal de multiresolución a partir de la misma señal definida en un menor número de puntos (mallado más grueso), más los detalles obtenidos en las sucesivas interpolaciones hasta llegar al mallado original (mallado más fino).

$f^L \leftrightarrow \{f^{L-1}, d^L\}$ señal de MR reduciendo un nivel de definición

$f^L \leftrightarrow \{f^0, d^1, d^2, \dots, d^L\}$ señal de MR reduciendo el máximo nivel de definición

A la hora de detectar posibles choques o discontinuidades, nos va a ser muy útil analizar los detalles de las MR.

Si el detalle obtenido en una MR es menor que el de cierta tolerancia que hemos establecido, $|d_j^L| \leq T_0$ quiere decir que al interpolar el error ha sido muy pequeño, y podemos no considerarlo en la malla.

Por el contrario, si $|d_j^L| > T_0$, es un indicador de que en ese punto puede haber discontinuidades. A partir de ahí, podemos ampliar alrededor de la malla y estudiar la zona para detectar dichas discontinuidades.

Para las ecuaciones que vamos a emplear

$$u_t + u_x = \varepsilon u_{xx} \quad \text{y} \quad u_t + u_x = 0,$$

Necesitamos usar una MR que use derivadas para poder detectar las discontinuidades en los puntos.

7.1.3.-MULTIRESOLUCIÓN ASOCIADA A UNA INTERPOLACIÓN TIPO HERMITE PARA VALORES PUNTUALES EN SEÑALES NO SUAVIZADAS.

Como hemos visto antes, la representación de datos mediante multiresolución desarrollada por Harten, es una herramienta muy útil para la compresión de señales.

Dada una señal finita f^L , que representa la señal de una función $f(x)$ en el nivel más fino de resolución, los algoritmos de multiresolución la representan con los siguientes elementos

$$\{f^0, d^1, d^2, \dots, d^L\}$$

Donde f^0 corresponde a función en su nivel más bajo de resolución, y cada elemento secuencial d^k representa los detalles intermedios necesarios para llegar de f^{k-1} a f^k .

7.1.4.-EL PROCESO DE MULTIRESOLUCIÓN

Consideremos un conjunto de mallas anidadas:

$$X^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{J_k} \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = 2^{-k} / J_0, \quad J_k = 2^k J_0$$

Donde J_0 es una constante de integración.

Considerando la discretización puntual

$$D_k : \begin{cases} C([0,1]) \rightarrow V^k \\ f \rightarrow f^k = (f_j^k)_{j=0}^{J_k} = \left(f(x_j^k) \right)_{j=0}^{J_k} \end{cases}$$

Donde V^k es el espacio real de las secuencias de longitud $J_k + 1$.

Un procedimiento de reconstrucción para este operador de discretización, es cualquier operador R_k tal que

$$R_k : V^k \rightarrow C([0,1]) \quad ; \quad D_k R_k f^k = f^k$$

Lo que significa que

$$(R_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k).$$

Dicho de otra forma, $(R_k f^k)(x)$ es una función continua que interpola los datos de f^k en X^k .

Por tanto, si definimos $(R_k f^k)(x) = I_k(x; f^k)$, podemos escribir la transformada de multiresolución directa así:

$$f^L \rightarrow Mf^L \begin{cases} k = L, \dots, 1 \\ f_j^{k-1} = f_{2j}^k \\ d_j^k = f_{2j-1}^k - I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ 1 \leq j \leq J_{k-1} \end{matrix}$$

Por su parte, la transformada de multiresolución inversa quedaría así:

$$Mf^L \rightarrow M^{-1}Mf^L \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \dots, L \\ f_{2^{j-1}}^k = I_{k-1}(x_{2^{j-1}}^k; f^{k-1}) + d_j^k \\ f_{2^j}^k = f_j^{k-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \leq j \leq J_{k-1} \\ 0 \leq j \leq J_{k-1} \end{array}$$

7.1.5.-MULTIRESOLUCIÓN BASADA EN LA INTERPOLACIÓN DE HERMITE

A continuación, veremos un ejemplo de multiresolución con interpolación de Hermite de orden 4. Este caso, visto en [4], utiliza los valores puntuales y los valores de la primera derivada de la función.

Definimos las mallas de menor resolución $x^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{J_k}$ donde $k=1, \dots, L$

mediante la malla diádica:

$$x_j^{k-1} = x_{2j}^k \quad j = 0, \dots, J_{k-1} = \frac{J_k}{2}$$

Suponemos, que la función $f \in F$ y sus derivadas, existen en la malla X^m .

Entonces definimos:

$$f_j^k = f(x_j^k)$$

$$g_j^k = h_k f'(x_j^k)$$

Tenemos ahora que reducir e interpolar, las dos funciones f y g . Los algoritmos de multiresolución, para casos de orden cuatro, son como los siguientes:

$$k = 1, \dots, L$$

$$f_j^{k-1} = f_{2j}^k \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_j^{k-1} = 2g_{2j}^k \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$(d_f)_j^k = f_{2j-1}^k - \frac{1}{2}(f_{2j}^k + f_{2j-2}^k) + \frac{1}{4}(g_{2j}^k - g_{2j-2}^k) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$(d_g)_j^k = g_{2j-1}^k - \frac{3}{4}(f_{2j}^k - f_{2j-2}^k) + \frac{1}{4}(g_{2j}^k + g_{2j-2}^k) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1}.$$

y

$$k = 1, \dots, L$$

$$f_{2j}^k = f_j^{k-1} \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_{2j}^k = \frac{g_j^{k-1}}{2} \quad 0 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$f_{2j-1}^k = (d_f)_j^k + \frac{1}{2}(f_j^{k-1} + f_{j-1}^{k-1}) - \frac{1}{8}(g_j^{k-1} - g_{j-1}^{k-1}) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1},$$

$$g_{2j-1}^k = (d_g)_j^k + \frac{3}{4}(f_j^{k-1} - f_{j-1}^{k-1}) - \frac{1}{8}(g_j^{k-1} + g_{j-1}^{k-1}) \quad 1 \leq j \leq J_{k-1}.$$

7.1.6.-EJEMPLO DE UNA TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN LINEAL: INTERPOLACIÓN DE DATOS INDEPENDIENTES DE LAGRANGE

Si, como en la mayoría de situaciones prácticas, sólo disponemos de valores puntuales de la función, debemos calcular los valores aproximados de la primera derivada en los nodos del mallado más fino X^m con la precisión apropiada, y luego aplicar los dos algoritmos de multiresolución.

Tal y como hemos visto en [4], necesitamos alcanzar una precisión de orden 5 en el cálculo del polinomio $I(x)$, lo que nos da $I'(x)$, y por tanto, una aproximación a las derivadas.

De este modo, mantendremos el cuarto orden del esquema de multiresolución considerado.

Debemos observar que, el modo en el que son calculadas estas aproximaciones, resultan ser cruciales en términos de precisión y compresión de datos.

A continuación veremos cómo técnicas de reconstrucción lineal asociadas a grandes soportes, están afectadas por la presencia de singularidades.

Consideraremos una serie de puntos $f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$. Ahora vamos a hacer una predicción del punto f_j .

La ecuación polinomial para $[x_{j-2}, \dots, x_{j+2}]$ será la siguiente:

$$I(x) = a_0 + a_1(x - x_j) + a_2(x - x_j)^2 + a_3(x - x_j)^3 + a_4(x - x_j)^4$$

Y, por tanto:

$$I'(x_j) = a_1 \approx f'_j \quad (\text{Orden } h^4)$$

Así pues, para calcular cada a_i , tendremos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)^2 + a_3(-2h)^3 + a_4(-2h)^4 &= f_{j-2} \\ a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2 + a_3(-h)^3 + a_4(-h)^4 &= f_{j-1} \\ a_0 &= f_j \\ a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2 + a_3(h)^3 + a_4(h)^4 &= f_{j+1} \\ a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 + a_3(2h)^3 + a_4(2h)^4 &= f_{j+2} \end{aligned}$$

De donde deducimos

$$a_1 = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12h}$$

Para los puntos de los límites, tenemos:

1.- En el punto f_1 , consideramos el polinomio para el intervalo $[x_1, \dots, x_5]$,

$$I(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)^2 + a_3(x - x_1)^3 + a_4(x - x_1)^4$$

Las condiciones de interpolación son:

$$\begin{aligned} a_0 &= f_1 \\ a_0 + a_1(h) + a_2(h)^2 + a_3(h)^3 + a_4(h)^4 &= f_2 \\ a_0 + a_1(2h) + a_2(2h)^2 + a_3(2h)^3 + a_4(2h)^4 &= f_3 \\ a_0 + a_1(3h) + a_2(3h)^2 + a_3(3h)^3 + a_4(3h)^4 &= f_4 \\ a_0 + a_1(4h) + a_2(4h)^2 + a_3(4h)^3 + a_4(4h)^4 &= f_5 \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$a_1 = \frac{-75f_1 + 144f_2 - 108f_3 + 48f_4 - 9f_5}{36h}$$

2.- En el punto f_2 , consideramos el polinomio para el intervalo $[x_1, \dots, x_5]$,

$$I(x) = a_0 + a_1(x - x_2) + a_2(x - x_2)^2 + a_3(x - x_2)^3 + a_4(x - x_2)^4$$

Y con las condiciones de interpolación adecuadas, obtenemos el valor:

$$a_1 = \frac{-3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5}{12h}$$

Si, por razones de simetría, consideramos el tramo de polinomio entre

$[x_{n-4}, \dots, x_n]$, tenemos para f_n :

$$a_1 = \frac{-75f_n + 144f_{n-1} - 108f_{n-2} + 48f_{n-3} - 9f_{n-4}}{36h}$$

Y para f_{n-1}

$$a_1 = \frac{-3f_n - 10f_{n-1} + 18f_{n-2} - 6f_{n-3} + f_{n-4}}{12h}$$

7.1.7.-EJEMPLO DE UNA TÉCNICA DE RECONSTRUCCIÓN LINEAL COMPLETA: LA RECONSTRUCCIÓN PPH

En este ejemplo, presentaremos una técnica de interpolación de quinto orden no lineal y de datos dependientes. Esta técnica de interpolación, está basada en un operador de interpolación polinomial centrado por tramos (llamado reconstrucción PPH) para una reconstrucción polinomial armónica por tramos.

Partimos de la serie de puntos $f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}$ y del polinomio

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_j) + a_2(x - x_j)^2 + a_3(x - x_j)^3 + a_4(x - x_j)^4$, y tenemos

$$a_1 = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12h}.$$

Ahora tenemos lo que se llaman diferencias divididas, definidas por:

$$d_{j-r} = \frac{f_{j-r+1} - f_{j-r}}{h}; \quad r = -1, 0, 1, 2$$

$$e_{j-r} = \frac{d_{j-r+1} - d_{j-r}}{h}; \quad r = 0, 1, 2$$

$$E_{j-r} = \frac{e_{j-r+1} - e_{j-r}}{h}; \quad r = 1, 2$$

$$\hat{e}_{j-r} = e_{j-r}(1 + h^3); \quad r = 0, 2$$

$$\hat{E}_{j-2} = \frac{e_{j-2} - \hat{e}_{j-2}}{h}; \quad \hat{E}_{j-1} = \frac{e_j - \hat{e}_j}{h};$$

$$\ddot{E}_{j-2} = \frac{e_{j-1} - \hat{e}_{j-2}}{h}; \quad \ddot{E}_{j-1} = \frac{e_{j-1} - \hat{e}_j}{h}$$

$$Y \quad D_{j-r} = \frac{d_{j-r+1} - d_{j-r}}{2h}; \quad r = 0, 2.$$

Primero, asumimos que $|D_j| > |D_{j-2}|$ y $|d_{j+1}| > |d_j|$. Esto indica la presencia de una posible singularidad en el punto $x_d \in [x_{j+1}, x_{j+2}]$.

La idea es escribir a_1 como una forma equivalente donde las diferencias divididas asociadas a intervalos “contaminados” por la presencia de una

singularidad forme una media aritmética con las diferencias divididas usando datos pertenecientes a regiones suavizadas de la función. Después de esto, sustituiremos esta media aritmética con el fin de obtener las propiedades de precisión deseadas.

Por este camino, y después de algunas operaciones algebraicas, llegamos a:

$$a_1 = \frac{-e_j + 6e_{j-1} + e_{j-2}}{12} h + d_{j-1}$$

$$a_1 = \frac{-E_{j-1} - E_{j-2}}{12} h^2 + d_{j-1} + \frac{h}{2} e_{j-1}$$

Podemos observar que, en presencia de una discontinuidad en $[x_{j+1}, x_{j+2}]$

$$E_{j-1} = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

Y esto es lo que causa una mala aproximación.

Como E_{j-2} permanece limitado en $O(1)$, sustituiremos la media aritmética

$$\frac{E_{j-1} + E_{j-2}}{12} \text{ por la media armónica } \frac{2E_{j-1}E_{j-2}}{E_{j-1} + E_{j-2}} \text{ siempre que } E_{j-1}E_{j-2} > 0.$$

La expresión modificada para a_1 , será:

$$\tilde{a}_1 = -\frac{h^2}{3} \left(\frac{E_{j-1}E_{j-2}}{E_{j-1} + E_{j-2}} \right) + d_{j-1} + \frac{h}{2} e_{j-1}$$

En regiones suavizadas $a_1 - \tilde{a}_1 = O(h^3)$, ya que la diferencia entre la media armónica y la media aritmética original es $O(h^2)$.

Si $E_{j-1}E_{j-2} \leq 0$, la media armónica puede presentar algunos problemas, ya que en algunos casos $E_{j-1} + E_{j-2} \approx 0$.

Por tanto, consideraremos:

$$\ddot{a}_1 = d_{j-1} + \frac{h}{2} e_{j-1} \quad \text{y} \quad a_1 - \ddot{a}_1 = O(h).$$

En segundo lugar, si $|d_{j+1}| \leq |d_j|$ consideraremos:

$$a_1 = \frac{(-E_{j-1} - \hat{E}_{j-1}) + 5(\ddot{E}_{j-2} + \hat{E}_{j-2})}{12} h^2 + d_{j-1} + \frac{h}{12} (5e_{j-2} + \hat{e}_{j-2})$$

En este caso $\hat{E}_{j-2} = O(1)$, $\hat{E}_{j-1} = O(1)$ y podemos cambiar de forma similar como antes de las medias.

Finalmente, apreciamos que las modificaciones en el caso en el que $|D_j| \leq |D_{j-2}|$ son similares por simetría. Por ejemplo, la última posibilidad viene dada por

$$a_1 = \frac{(-E_{j-2} - \hat{E}_{j-1}) + 5(\ddot{E}_{j-1} + \hat{E}_{j-2})}{12} h^2 + d_j + \frac{h}{12} (5e_j + \hat{e}_j)$$

7.2.-MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

7.2.1.-INTRODUCCIÓN

Los sistemas de EDOs se utilizan con frecuencia en procesos cuyo proceso natural evoluciona según el tiempo. Un sistema de EDO, por ejemplo, puede modelizar la evolución en el tiempo de especies químicas o biológicas.

Normalmente el estado de un proceso es conocido en un momento determinado (inicial), mientras que su evolución es objeto de estudio. Esto se conoce como Problema de Valor Inicial (PVI) para un sistema de EDOs.

El PVI se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}U(t) = F(U(t))$$

donde :

$$(t \geq 0), U(0) = u_0$$

u_0 es un vector dado en un espacio vectorial real V , y F permite obtener una función desde V a si misma. El problema es encontrar $U(t) \in V$ para $t > 0$.

Lo más común es aproximar las soluciones al PVI mediante métodos numéricos, y más en concreto para este trabajo, nos centraremos en los métodos de Runge-Kutta.

Estos métodos constituyen una clase conocida como métodos paso a paso, en los que cada paso comienza desde una aproximación u_{n-1} de $U(t)$ en el punto $t = t_{n-1} \geq 0$.

El tamaño de paso $\Delta t > 0$ se selecciona y t_n es un conjunto igual a $t_{n-1} + \Delta t$.

Una aproximación u_n de $U(t_n)$ puede ser programada desde u_{n-1} .

El resultado de este paso, u_n , es entonces el valor inicial para el siguiente paso.

En particular, cuando aplicamos un método de Runge-Kutta al PVI, la aproximación u_n de $U(t_n)$ puede ser definida en términos de u_{n-1} por las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s k_{ij} F(y_j) \quad (1 \leq i \leq s+1), \\ u_n = y_{s+1}, \end{array} \right.$$

Aquí k_{ij} son parámetros reales, especificados por los métodos de Runge-Kutta, e y_i ($1 \leq i \leq s$) son aproximaciones intermedias necesarias para programar $u_n = y_{s+1}$ a partir de u_{n-1} .

Para simplificar, definimos la matriz K $(s+1) \times s$ por $K = (k_{ij})$. Podemos entonces identificar el método de Runge-Kutta con la matriz de coeficiente K .

Si $k_{ij} = 0$ (siendo $1 \leq i \leq j \leq s$) las aproximaciones intermedias se pueden programar directamente partiendo de u_{n-1} y el valor conocido y_i ($j < i$); de lo contrario tendríamos que resolver un sistema de ecuaciones (no lineales) para obtener y_i . El primer caso sería el conocido como método K explícito de Runge-Kutta, y el segundo sería el método implícito.

7.2.2.-"MONOTONÍA" EN LOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Las ecuaciones de Runge-Kutta que acabamos de ver, tienen la propiedad de la monotonía, ya que el vector $u_n \in V$ obtenido a partir de $u_{n-1} \in V$, satisface (ver [5]).

$$\|u_n\| \leq \|u_{n-1}\|$$

A pesar de que hay otras situaciones donde la monotonía es una propiedad deseable o un requerimiento natural, los métodos de Runge-Kutta con dicha

propiedad han sido específicamente diseñados para resolver PVI de la forma vista anteriormente a través de una semidiscretización del tiempo (método de líneas) dependientes de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), especialmente de las leyes de conservación del tipo:

$$\frac{d}{dt}u(x,t) + \frac{d}{dx}\varphi(u(x,t)) = 0$$

7.2.3.-EJEMPLO NUMÉRICO

A continuación, veremos un ejemplo de la importancia de la propiedad de la monotonía a la hora de resolver EDP's en función del tiempo, a partir de unas condiciones iniciales dadas.

Tomaremos como ejemplo la ecuación de conservación que acabamos de ver.

La aplicación del método de líneas a un problema de Cauchy para la ecuación de conservación consiste en dos pasos:

–Primero se hace una discretización del espacio (basado en la diferencia finita, elementos finitos o el método de volumen finito por ejemplo) y se aplica a la ecuación. Esto se aplicará a un PVI con t como variable continua – esto es conocido como sistema semidiscreto. En esta situación, la función F del PVI depende del valor dado ϕ así como del proceso de semidiscretización que se esté usando, y u_0 depende del dato inicial del problema de Cauchy.

–Segundo, se hace la integración en el tiempo (siguiendo un método de Runge-Kutta o un método multipaso por ejemplo) se aplica al PVI ya obtenido, para convertirlo en un proceso numérico totalmente discreto.

Para clarificar la aproximación descrita arriba, consideraremos el problema de Cauchy (Riemann) para el test escalar de la ecuación de Burgers siguiente:

$$\frac{d}{dt}u(x,t) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2(x,t)\right) = 0 \quad t \geq 0, -\infty < x < \infty,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t/2 \\ 0 & \text{si } x > t/2 \end{cases}$$

es la solución exacta (aunque poco precisa) de la ecuación anterior.

Queda claro que no es necesario buscar una solución aproximada al problema, salvo para propósitos exclusivamente demostrativos, aplicaremos MDL. La solución será aproximada combinando un espacio de discretización, basado en el método de diferencias finitas, y un método Runge-Kutta integrado según el tiempo. Ya que conocemos la solución exacta (aunque poco precisa) podemos compararla con la aproximación numérica y será fácil comprobar si la solución numérica da una aproximación fiable o no.

Dado el ancho de malla $\Delta x = 1$, considerando un punto de la malla en el espacio $G = \{x_j \mid x_j = j\Delta x, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Los puntos (x_j, t) se aproximan a la solución de la ecuación (ley de conservación), y designamos por $U_j(t)$

esta aproximación. Al final, la cantidad $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2(x,t)\right)$ es reemplazada

por una diferencia de cocientes (conservativa) $\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{2}(U_j(t))^2 - \frac{1}{2}(U_{j-1}(t))^2\right]$.

Así obtenemos el siguiente sistema semi-discreto.

$$\frac{d}{dt}U_j(t) = -\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{2}(U_j(t))^2 - \frac{1}{2}(U_{j-1}(t))^2\right]$$

Usando el vector notación $U(t) = (\dots, U_{-1}(t), U_0(t), U_1(t), \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, llegamos al PVI, donde $\mathbb{R} = \mathbb{R}^\infty$.

Como el PVI ahora está puesto de forma semi-discreta de la ley de conservación, es importante que el proceso *totalmente discreto* sea monótono en el sentido de $\|u_n\| \leq \|u_{n-1}\|$ donde $\|\cdot\|$ denota la *variación-total* de la seminorma.

$$\|y\|_{TV} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\eta_j - \eta_{j-1}| \quad (\text{Para } y \in \mathbb{R}^\infty \text{ con componentes } \eta_j)$$

Con esta seminorma, la propiedad de monotonía reduce hasta la conocida como propiedad **Variación Total Decreciente (TVD)**.

Ahora veremos por qué la garantía de monotonía (propiedad TVD) en la aproximación numérica es importante. Al final resolvemos el PVI aplicando dos métodos de Runge-Kutta diferentes. El primer método se define por la relación

$$\begin{cases} y_1 = u_{n-1}, \\ y_2 = u_{n-1} + \Delta t F(y_1), \\ y_3 = u_{n-1} + \Delta t \left(\frac{1}{2} F(y_1) + \frac{1}{2} F(y_2) \right), \\ u_n = y_3 \end{cases}$$

Y el segundo por

$$\begin{cases} y_1 = u_{n-1}, \\ y_2 = u_{n-1} - 20\Delta t F(y_1), \\ y_3 = u_{n-1} + \Delta t \left(\frac{41}{40} F(y_1) - \frac{1}{40} F(y_2) \right), \\ u_n = y_3 \end{cases}$$

Es muy sencillo verificar que los dos métodos coinciden si F es lineal. No obstante, ya que la función F bajo consideración es no lineal, podemos observar diferentes resultados cuando se aplican ambos métodos. Utilizamos el mismo tamaño de paso $\Delta t = 0,75$ en ambos métodos. En la figura 1, superior e inferior, mostramos los resultados del primer y el segundo método respectivamente, después de 53 pasos – el perfil de la solución verdadera ha sido superpuesta sobre una malla de 20 puntos aproximadamente. Vemos claramente que el segundo resultado es oscilatorio, mientras que el primero no.

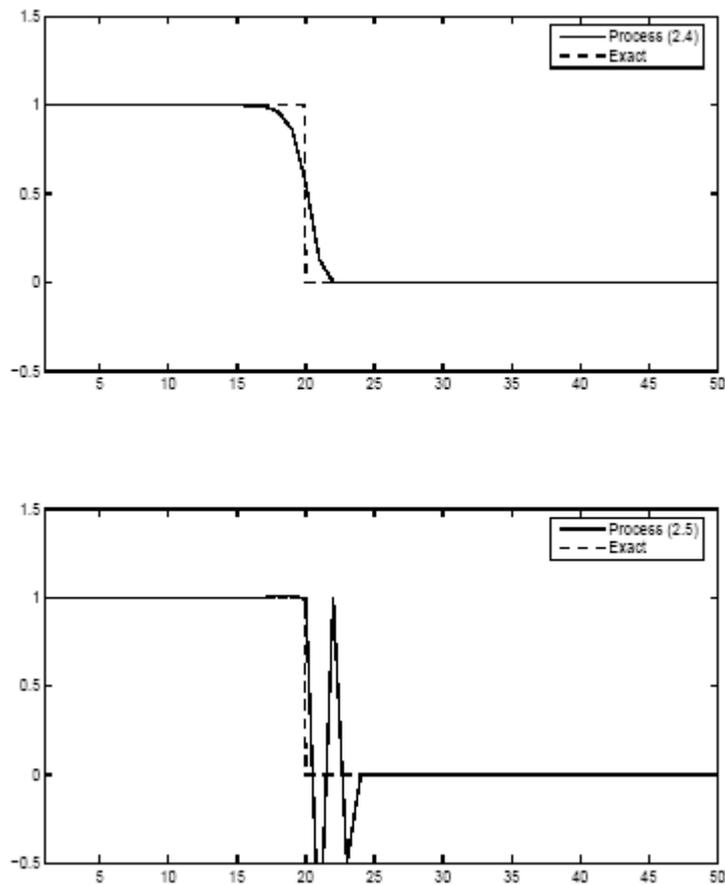


Figura 1 Arriba, solución con primer proceso. Abajo solución con segundo proceso.

Claramente la solución de arriba se aproxima satisfactoriamente a la solución verdadera, mientras que la solución de abajo no. Esto está fuertemente relacionado con el hecho de que el primer método de Runge-

Kutta tiene la propiedad de la monotonía (con $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{TV}$) mientras que el segundo método no.

Apreciamos finalmente que el requerimiento de la propiedad TVD (monotonía) de la solución numérica es un requerimiento natural. En efecto, si denotamos la restricción de la solución en el punto de malla G por $u(t) = (\dots, u(x_{-1,t}), u(x_{0,t}), u(x_{1,t}), \dots)$ claramente tenemos

$$\|u(t_1)\|_{TV} \leq \|u(t_2)\|_{TV} \text{ para cada } t_1 \geq t_2$$

7.2.4.-MÉTODOS DE SHU & OSHER

Como hemos estudiado en [5], Shu & Osher (1988) introdujeron una representación inteligente de los métodos de Runge-Kutta explícitos los cuales facilitan la prueba de la existencia de monotonía en la situación donde, para todo $\tau_0 > 0$,

$$\|v + \tau_0 \cdot F(v)\| \leq \|v\| \quad (\text{para todo } v \in V).$$

Para describir la representación introducida por Shu & Osher (1998), suponemos dado un método de Runge-Kutta explícito arbitrario con una matriz de coeficientes $K = (k_{ij})$.

$$\begin{cases} y_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s k_{ij} F(y_j) & (1 \leq i \leq s+1), \\ u_n = y_{s+1}, \end{cases}$$

Asumimos que λ_{ij} ($1 \leq j < i \leq s+1$) es cualquier parámetro real con

$$\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{i,i-1} = 1 \quad (2 \leq i \leq s+1)$$

Y definimos los coeficientes correspondientes μ_{ij} por

$$\mu_{ij} = k_{ij} - \sum_{l=j+1}^{i-1} \lambda_{il} k_{lj} \quad (1 \leq j < i \leq s+1)$$

(donde el último sumando podría considerarse 0, cuando $j = i-1$)

Así pues, la ecuación de Runge-Kutta puede reescribirse de la forma

$$\begin{cases} y_1 = u_{n-1}, \\ y_i = \sum_{j=1}^{i-1} [\lambda_{ij} y_j + \Delta t \cdot \mu_{ij} F(y_j)] & (2 \leq i \leq s+1) \\ u_n = y_{s+1} \end{cases}$$

Ahora tenemos una *representación Shu-Osher* del método Runge-Kutta explícito.

Por tanto, ahora nos queda una restricción del tamaño de paso, de la forma

$$0 < \Delta t \leq c \cdot \tau_0$$

bajo la cual es válida la propiedad de monotonía, cuando u_n es programado partiendo de u_{n-1} acorde con la representación de Shu-Osher obtenida.

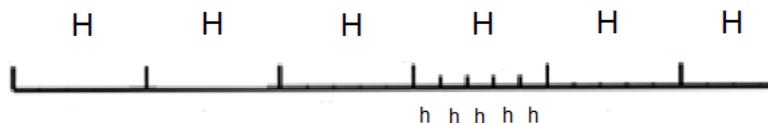
8.-METODOLOGÍA DEL PROYECTO

Nuestro primer objetivo es la construcción de un *mallado adaptativo* $X^k = \{x_j^k\}$. En un primer lugar, esto nos permitirá la representación de la parte espacial de la solución u_x mediante una compresión de datos (multiresolución) para aproximar dicha solución con un menor coste computacional que si utilizáramos la función completa.

Este mallado consistirá en un tipo de malla gruesa para las zonas regulares de la función, y un tipo de mallado más fino en las zonas de posibles discontinuidades.

Cuando hablamos de mallado grueso nos referimos a un espaciado mayor entre dos puntos consecutivos de nuestra malla (x_j, x_{j+1}) , donde dicha función presenta un comportamiento suave y lo representamos mediante H .

De igual manera, el mallado fino corresponde a un espaciado menor que nos permite tener más detalle de la función en esas regiones puntuales donde sufre grandes variaciones. Lo representaremos mediante h .



¿Cómo sabremos cuáles son las zonas de posibles discontinuidades?

Usaremos como herramienta la multiresolución. Fijándonos en los detalles o errores de interpolación obtenidos de la MR, podemos detectar los puntos con posibles singularidades. Es decir, los puntos donde la MR de la función o su derivada nos dé detalles grandes, serán zonas donde probablemente se presenten los choques.

Una vez aproximada la solución en su parte espacial u_x y con las zonas donde se presentan los choques, vamos a ir aproximando la solución en los distintos intervalos temporales u_t .

Todo esto lo desarrollaremos en el siguiente algoritmo.

8.1.-ALGORITMO

Sea $u(x_j, t_m)$ la solución a aproximar $u_t + f(u)_x = 0$

$$u_j^m \simeq u(x_j, t_m)$$

Veamos los pasos que seguiremos para aproximar la solución y, a la vez, detectar las zonas de discontinuidades.

PASO 1.

Como punto de partida, sólo disponemos de valores puntuales de la solución a aproximar. Lo primero que debemos hacer es calcular los valores aproximados de la primera derivada en los nodos del mallado más fino X^k con la precisión apropiada, y luego aplicar los dos algoritmos de multiresolución.

Para ello, usaremos como herramienta la interpolación de datos no lineales llamada reconstrucción PPH vista en el apartado 7.1.7 de este trabajo.

Al resultado de la interpolación para calcular los valores en los nodos del mallado más fino, le llamaremos $\Gamma(x, 0)$.

PASO 2

Una vez que tenemos los valores en los nodos del mallado más fino, ya podemos comprimir la función y su derivada. Esto consistirá en hacer una multiresolución (en este caso basada en una interpolación de Hermite) a las siguientes funciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f_j^L = u(x_j^L, 0) = u_j^0 \\ g_j^L = h_L \cdot I'(x_j^L, 0) \end{array} \right.$$

La herramienta empleada para este tipo de multiresolución viene detallada en el apartado 7.1.3/4 donde hemos analizado el proceso de esta compresión de datos.

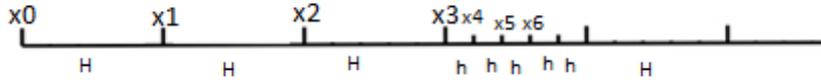
PASO 3

Tras hacer la MR de las 2 funciones del paso anterior, estudiaremos los detalles (o errores de interpolación) grandes obtenidos en el proceso, llamados $(d_f)_j^k$ y $(d_g)_j^k$. Éstos, son indicadores de zonas con posibles discontinuidades.

Con estos datos, ya podemos construir nuestra malla adaptativa X^k . Para ello, emplearemos las zonas donde $(d_f)_j^k$ y $(d_g)_j^k$ han dado valores altos, y en dichas zonas realizaremos el mallado más fino (espaciado h). Para el resto, que serán zonas de regularidad, realizaremos un mallado más grueso (espaciado H).

PASO 4

Una vez que tenemos nuestra malla adaptativa como la de la figura:



El siguiente paso es calcular u_j^1 en dicho mallado adaptativo.

Para ello, partimos del punto del que conocemos: el valor de u_j^0 . Dicho valor corresponde a la aproximación de la solución en el mallado más fino, para $t=0$.



Por tanto, para ecuaciones del tipo $u_t + u_x = \mathcal{E} \cdot u_{xx}$ calcularemos simultáneamente, por un lado la parte temporal, y por otro la parte espacial.

- La parte de la derivada temporal u_t ,

Esta parte la calculamos mediante la ecuación de Euler: $\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t}$

- La parte de la derivada espacial u_x ,

Corresponde a lo anteriormente calculado en el PASO 1, y sabemos que sólo depende de u_j^0 . Por tanto es igual a $I'(x_j, 0)$.

- En cuanto a la segunda parte de la ecuación $\mathcal{E} \cdot u_{xx}$, como en el caso anterior depende sólo de u_j^0 .

u_{xx} se trata de la segunda derivada de una interpolación de las u 's y sus derivadas de forma que junto a \mathcal{E} el error sea el de los otros términos.

Por tanto, veamos cómo únicamente nos queda una ecuación que depende de u^0 .

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} + I'(x_j, 0) = \mathcal{E} \cdot u_{xx} = f(u^0)$$

Con esta ecuación, ya podemos despejar $\{u_j^1\}$ en la malla adaptativa.

PASO 5

Para representar la mayoría de casos prácticos que estudiamos en este proyecto, no nos sirve un mallado regular, ya que, en las zonas de posibles discontinuidades este tipo de mallado no se adapta bien debido a que le falta flexibilidad. Por tanto, lo que buscamos es un mallado que se adapte de la forma adecuadamente a nuestra función.

La forma de conseguirlo es mediante un mallado no uniforme. Esto quiere decir que habrá regiones equiespaciadas, y otras regiones con información no centrada.

Por tanto, ahora queremos aproximar la solución u_j^1 en el mallado no uniforme, que será la aproximación buscada en el momento $t=1$.

En resumen, ahora repetiremos los 4 pasos anteriores, pero teniendo en cuenta ahora que la malla NO es uniforme (aproximación más real).

Paso 5.1

Es equivalente al PASO 1 visto al principio, sólo que ahora en vez de aproximar $u_x(x,0)$, lo haremos para $u_x(x,1)$. Interpolamos la función para obtener $I'(x,1)$, pero ahora teniendo en cuenta que tenemos un espaciado irregular. Para lograr esta interpolación, usaremos la interpolación de datos independientes de Lagrange en el apartado 7.1.6.

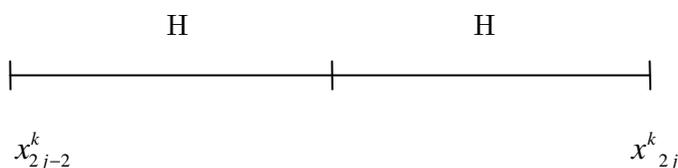
En regiones donde los puntos estén equiespaciados no va a cambiar nada.

- En regiones donde haya varios tipos de espaciado, usaremos información no centrada.
- Además, en regiones regulares (zonas de suavidad), usaremos métodos de interpolación más baratos, como Polinomios de Lagrange)

Paso 5.2

Tal y como hemos hecho en el PASO 2, realizaremos ahora la MR a la función u_j^1 y su derivada, partiendo de los datos obtenidos en el paso anterior. Al igual que en el caso anterior, el hecho de que el mallado no sea regular, influirá en las ecuaciones para obtener dicho mallado.

Un mallado regular es de la forma:



Esto quiere decir que únicamente tenemos espaciados regulares entre los puntos a una distancia H o múltiplos de ella.

Nosotros tenemos el caso de un mallado en el que hay intervalos regulares e intervalos con información no centrada como se ve en la figura:



Por tanto, la fórmula tendrá

$(x_{2j}^k - x_{2j-1}^k)$ en las zonas de mallado más fino (espaciado h).

$(x_{2j-1}^k - x_{2j-2}^k)$ en las zonas de mallado grueso (espaciado H).

Paso 5.3

Tras hacer la multiresolución de la función u_j^1 y su derivada, y al igual que hicimos en el PASO 3, obtenemos las regiones con cuyos detalles de MR superan la tolerancia que hemos determinado.

Ahora ya podemos construir nuestro mallado adaptativo buscado tal y como el descrito en el Paso 5.2.

Paso 5.4

Una vez construido el mallado adaptativo, haremos lo mismo que en el PASO 4.

Volvemos a la ecuación y ahora ya podemos aproximar la solución u^1 a nuestro mallado adaptativo no regular.

PASO 6

Consistirá en repetir únicamente el PASO 5 de forma sucesiva, para obtener $u^2, u^3, u^4, \dots, u^t$

Esto quiere decir que con el u^0 calculado, y usándolo como dato de partida, podemos aproximar la solución en el siguiente salto temporal u^1 .

Posteriormente, calculando u^1 en el mallado adaptativo deseado, éste será nuestro siguiente punto de partida para ir aproximando la solución de la ecuación en el resto de intervalos temporales.

8.2.-APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA TEMPORAL u_t .

MÉTODOS DE ORDEN 1

A la hora de aproximar la derivada temporal de la ecuación, uno de los métodos de orden 1 vamos a usar, será la ecuación de Euler, que se describe como sigue:

$$y' = f(t, y)$$

$$y'(t_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_{n+h}) - y(t_n)}{h} \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n)$$

Con esto, ya podemos obtener y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

Así pues, con este método hemos aproximado la parte temporal con una única evaluación de f .

A la hora de evaluar una EDP de grado 1 como por ejemplo una ecuación de Euler, emplearemos para la derivada temporal métodos de orden 1 como el que acabamos de ver.

Dada la EDP de la forma $u_t + u_x = 0$

Acabamos de evaluar la parte temporal, y ya hemos aproximado mediante el algoritmo, la parte espacial, por lo que nos quedarían 2 ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x_j, t_m) \approx \frac{u(x_j, t_{m+1}) - u(x_j, t_m)}{\Delta t} \\ u_x(x_j, t_m) \approx I'(x_j, t_m) \end{array} \right.$$

Por tanto, la EDP quedaría así:

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + I'(x_j, t_m) = 0$$

Así, ya podemos despejar la ecuación en el siguiente salto temporal mediante una única evaluación de f .

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \Delta t \cdot I'(x_j, t_m)$$

MÉTODOS DE ORDEN 2

Como ejemplo de método para emplear de orden 2 (necesita 2 evaluaciones de f), tenemos un Runge-Kutta de orden 2.

Un ejemplo de este método sería:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_m, y_m) + f(t_{m+1}, y_{m+1}^c) \right]$$

Donde

$$y_{m+1}^c = y_m + \frac{h}{2} \cdot f(t_m, y_m)$$

Al ser un método de orden 2, el error también será de orden 2

Este método es bueno y se cumple, siempre que no haya discontinuidades.

En el caso de que existan saltos o discontinuidades, necesitamos un método que nos suavice estos saltos, y para ello emplearemos Runge-Kutta con TDV.

Lo que nos hace el TVD (Total Variation Decreasing) es mantener constantes o disminuir los saltos u oscilaciones $\sum |u_j - u_{j-1}|$.

Como ejemplos de métodos TVD tenemos:

- Métodos de Euler

Se trata de métodos de orden 1 como hemos visto anteriormente.

- RK-TVD

Son métodos que pueden ser de orden 2 y superior.

- Orden 2 (requieren 2 evaluaciones de f)
- Orden 3 (requieren 3 evaluaciones de f)

Los métodos de orden 2 y 3 son los desarrollados por Shu-Osher

- Orden >3 (duplican su coste tanto en tiempo como en espacio de memoria, es decir, son métodos “caros”).

CONCLUSIONES

Este proyecto nos ha permitido predecir y detectar el comportamiento irregular de los fluidos en movimiento que se dan en múltiples situaciones en la vida cotidiana de un buque.

En el caso de un fluido por el interior de tuberías, debido a las irregularidades en los circuitos (válvulas, codos, etc...) queríamos predecir en qué momento se producirían dichos choques, así como el comportamiento del fluido en los mismos.

Al tratarse de fluidos en movimiento, hemos modelizado su comportamiento a través de las leyes de conservación mediante EDP's.

A partir de ahí, usaremos la herramienta de multiresolución para detectar los puntos donde pueden producirse choques o discontinuidades.

Esta herramienta consiste en comprimir la señal mediante un mallado más grueso (definida en menos puntos), y detectar los puntos donde los detalles son grandes. Estos puntos los hemos considerado como candidatos para indicar zonas de posibles discontinuidades.

A continuación, nos hemos construido un mallado adaptativo de tal forma que en las zonas regulares esté constituido por una malla gruesa, y en las zonas donde hay posibles choques, un mallado más fino.

La innovación en el algoritmo ideado en el proyecto ha sido el hecho de que, además de detectar las discontinuidades o choques, simultáneamente hemos podido aproximar la ecuación en dichos puntos para conocer el comportamiento del fluido en esas zonas.

Por otro lado, la parte temporal de la ecuación la hemos aproximado mediante herramientas como Runge Kutta de distinto orden.

BIBLIOGRAFÍA

Artículos:

- [1] **Ricardo Esteban Ruiz Baier**, Métodos de Multiresolución y su Aplicación a un Modelo de Ingeniería. *Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático*. Universidad de Concepción (Chile), 2005, 8-36.
- [2] **Juan Luis Vázquez**, La ecuación de Navier-Stokes, Un reto físico matemático para el siglo XXI. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*. (España), **26**, (2004), 31-56.
- [3] **Jesús E. Villarreal R.** Modelado y experimentación numérica de los regímenes inestables no isotérmicos del transporte de gas en tramos lineales de gasoductos. *Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. Universidad de los Andes* (Venezuela), 2009, 42-53.
- [4] **Ines Ali, Sergio Amat, y J Carlos Trillo.** *Point values Hermite multiresolution for non-smooth noisy signals*. Artículo Universidad Politécnica de Cartagena (España), 2005.
- [5] **Ferrachina I., Sipijker M.N.** Una extensión y análisis de la representación Shu-Osher de métodos Runge-Kutta, 2005.

Libros de texto:

- [6] **Merle C. Potter, David C Wiggert**, *Mecánica de Fluidos*. Ed. Thomson, 2002.
- [7] **Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie, Keith W. Bedford**, *Mecánica de fluidos*. Ed. McGraw Hill, 9ª edición, 2001.

Apuntes tutorías PFC.