

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Planteamiento inicial del Proyecto	3
1.2. Objetivos del Proyecto	3
1.3. Fases del proyecto	4
1.4. Aspectos novedosos del proyecto	4
2. Revisión de la técnica	7
2.1. Formulación básica	7
2.2. Ecuaciones en línea de transmisión	11
2.3. Formulación en ecuación integral	14
3. Descripción	21
3.1. Introducción	21
3.2. Formas modales apropiadas para nuestra línea impresa. Estudio y aplicación a nuestro problema	21
3.3. Formas modales de la guía. Función de Green en una guía rectangular	33
3.4. Combinación e integración de las formas modales de la caja con las de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes en la línea impresa.	35
3.5. Tensiones en una línea de transmisión	55
3.5.1. Aplicación a nuestro problema	60
3.6. Cálculo de la excitación	63

3.7. Desarrollo de un programa para la aplicación	66
4. Resultados	75
4.1. Comprobaciones sobre la fiabilidad de los resultados obtenidos	83
4.1.1. Convergencia de las matrices resultantes de la combinación de las formas modales	83
4.1.2. Coherencia en el cálculo de la onda de tensión	89
4.2. Comparativa del resultado obtenido con el de otras técnicas fiables	92
A. Desarrollo de una versión para la simplificación del problema	99
A.1. Análisis analítico de la nueva versión	100
A.2. Programación de la nueva versión	106
B. Desarrollo de programas en Matlab para modelar el sistema estudiado	107
B.1. Programas de la primera versión	107
B.1.1. principal.m	107
B.1.2. Integrales-FGamma	115
B.1.3. Calcular_Vm	126
B.2. Programas en Matlab de la versión simplificada	133
B.2.1. principal-y	133
B.2.2. Integrales-FGamma-y	141
C. Bibliografía	149

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento inicial del Proyecto

El análisis de circuitos de radiofrecuencia es importante en comunicaciones espaciales y para aplicaciones de comunicaciones móviles. Su modelización precisa es necesaria para poder realizar de forma rápida y eficaz el diseño de estos componentes tan necesarios para los sistemas antes señalados. En este proyecto van a revisarse técnicas de análisis de los circuitos de Radiofrecuencia más comúnmente utilizados en comunicaciones, y posteriormente se estudiará una técnica que permita realizar eficazmente dicho análisis. Para ello se deberá revisar la teoría electromagnética básica, incluyendo los conceptos más importantes de la propagación de ondas en distintos medios de transmisión, así como la teoría básica de la propagación en líneas de transmisión. Desde el punto de vista de métodos numéricos se revisarán los métodos tradicionales de ecuación integral y método de los momentos. Una vez revisada la teoría necesaria se deberá plantear las técnicas más apropiadas para el análisis de sencillos circuitos impresos aplicados a comunicaciones de alta frecuencia. En concreto se pretende implementar una técnica novedosa combinando técnicas modales con el método de la ecuación integral aplicándola al análisis de sencillos circuitos de Radiofrecuencia. Con este planteamiento se pretende evaluar dicha técnica de análisis, y verificar hasta que punto dicha técnica se adecua al análisis de este tipo de circuitos.

1.2. Objetivos del Proyecto

El objetivo principal del proyecto será la investigación de técnicas numéricas que permitan el análisis eficiente de circuitos impresos de radiofrecuencia. Después de revisar la teoría y métodos numéricos necesarios para abordar el problema, se deberá elegir un lenguaje de programación, con el fin de implementar una técnica novedosa que combine métodos modales con la técnica de la ecuación integral. Dicho programa permitirá extraer los parámetros eléctricos de circuitos de Radiofrecuencia simples, a la vez que permitirá la elección de parámetros numéricos empleados en los cálculos con el fin de poder investigar el comportamiento numérico del algoritmo imple-

mentado. Una vez la herramienta de cálculo esté implementada, se deberán validar los resultados obtenidos utilizando otro tipo de herramientas disponibles , o incluso realizando algún tipo de implementación práctica y medidas en el laboratorio. Finalmente, un objetivo importante del proyecto será la evaluación de la técnica de análisis implementada en términos de precisión conseguida(exactitud de los resultados obtenidos), y de eficiencia de cálculo comparada con otras técnicas numéricas disponibles.

1.3. Fases del proyecto

El proyecto va a dividirse en tres grandes fases:

1.-Fase de estudio de la teoría básica: En esta fase se estudiará y comprenderá la teoría básica sobre la propagación de ondas en sistemas de transmisión, y los conceptos más fundamentales de la propagación en líneas de transmisión. Posteriormente se estudiará y comprenderá la teoría básica asociada al problema que se pretende resolver. Finalmente se estudiarán las técnicas numéricas asociadas que se emplearán para la resolución del problema planteado.

2.-Fase de implementación: Una vez comprendidos todos los aspectos teóricos y prácticos del trabajo a desarrollar se deberá elegir un lenguaje de programación con el fin de realizar una implementación práctica de un lenguaje que permita el análisis de circuitos de Radiofrecuencia simples. Se implementará en el programa todos los desarrollos teóricos realizados, así como las técnicas numéricas estudiadas. Esta fase deberá conducir a la obtención de una herramienta software que permita obtener de manera sencilla los parámetros eléctricos de los circuitos bajo estudio.

3.-Fase de validación y evaluación de los resultados: Finalizando el desarrollo e implementación de la herramienta software para el análisis de circuitos, se realizará una evaluación en profundidad de los resultados que pueden conseguirse con dicha herramienta. Para ello se validarán los resultados obtenidos utilizando otros simuladores disponibles en el departamento. Con ello se pretende no solo evaluar la precisión de los resultados, sino también se desea evaluar la técnica implementada en términos de eficiencia y rapidez de cálculo. En este sentido se hará un estudio exhaustivo de la convergencia numérica de la técnica implementada, y deberá evaluar el impacto que tienen los diferentes parámetros de cálculo en los resultados finales, tanto en precisión como en rapidez de cálculo.

1.4. Aspectos novedosos del proyecto

El presente proyecto trataremos que aporte una posibilidad para el análisis de circuitos de radiofrecuencia implementando una técnica novedosa que combine métodos modales con la técnica de la ecuación integral. El sistema que vamos a analizar se trata de una estructura metálica de encapsulado que contiene un circuito impreso en un dieléctrico. Si entramos un poco más en detalle podemos avanzar que el circuito que analizaremos se trata de una única línea

microstrip impresa en dicha estructura desde el puerto de entrada hasta el de salida. Se trata por tanto de una estructura multicapa en la que la parte novedosa se basará principalmente en la elección de las funciones de base para representar las corrientes inducidas por el puerto de entrada.

Este tipo de estructuras pueden analizarse con varias técnicas numéricas. Entre ellas, una de las más eficientes es la técnica de la ecuación integral, utilizando la función de Green multicapa. En este proyecto revisaremos el cálculo de dicha función de Green multicapa para estructuras apantalladas. Una parte novedosa del proyecto consistirá en la forma de resolver la ecuación integral con el método de los momentos. En este trabajo usaremos como funciones de base, expansiones modales en guías equivalentes, con las que podremos representar las corrientes inducidas en las zonas metálicas del circuito. Esta idea de utilizar funciones modales para representar las corrientes inducidas fue propuesto por primera vez en otro proyecto. En ese trabajo, sin embargo, el análisis se reducía a líneas impresas que no se tocaban, y de forma recta. Un objetivo de este trabajo es extender esa técnica para el análisis de circuitos impresos con geometrías más complicadas. En concreto, trataremos de analizar una línea microstrip con un puerto de entrada y otro puerto de salida. Esta será la base para poder extender dicha técnica a estructuras impresas más complejas.

Capítulo 2

Revisión de la técnica

2.1. Formulación básica

El primer paso para el análisis de circuitos y antenas apantallados es el desarrollo de la teoría de la función de Green aplicada en una cavidad. Se nos permita por lo tanto considerar la estructura mostrada en la figura Fig. 2.1, con un circuito metálico impreso en su interior que transporta corrientes eléctricas. Las corrientes están inducidas en un circuito impreso en una capa dieléctrica, por lo que podemos considerar en general $J_z = 0$.

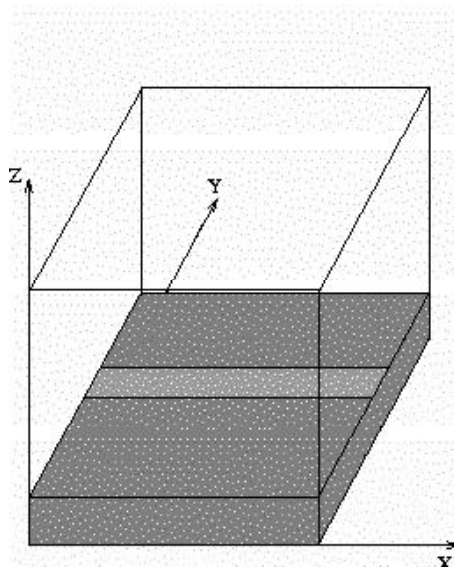


Figura 2.1: Estructura a estudiar.

Las ecuaciones de Maxwell para fuentes eléctricas se pueden expresar como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = J_s + j\omega\epsilon\bar{E} \quad (2.2)$$

El primer paso es formular el problema solamente con las componentes transversales, por lo que la propagación será en la dirección z , como en la teoría de guías de ondas.

Usaremos las ecuaciones de Maxwell separadas en sus partes transversales y longitudinales. Primeramente descompondremos el operador que tiene forma vectorial en sus partes transversal y longitudinal, por tanto tenemos que:

$$\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_t + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

Descomponemos ambos campos en sus partes transversal y normal, por lo que queda:

$$\bar{E} = \bar{E}_t + \bar{z}_0 E_z \quad (2.4)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_t + \bar{z}_0 H_z \quad (2.5)$$

Ahora usaremos las ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 para expandir 2.1 y 2.2. Por tanto nos queda:

$$\left(\bar{\nabla}_t + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\bar{E}_t + \bar{z}_0 E_z \right) = -j\omega\mu\bar{H}_t + \bar{z}_0 H_z$$

Aplicando la ley distributiva de el producto vectorial tenemos que:

$$\left(\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t \right) + \left(\bar{\nabla}_t \times \bar{z}_0 E_z \right) + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} = -j\omega\mu\bar{H}_t + \bar{z}_0 H_z \quad (2.6)$$

Ahora separamos la ecuación 2.6 en sus componentes longitudinal y transversal, obteniendo las ecuaciones 2.7 y 2.8:

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = -j\omega\mu\bar{z}_0 H_z \quad (2.7)$$

que constituye la parte longitudinal, y:

$$\left(\bar{\nabla}_t \times \bar{z}_0 E_z \right) + \left(\bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) = -j\omega\mu\bar{H}_t \quad (2.8)$$

que es la parte transversal.

A partir de las ecuaciones de Maxwell impondremos las condiciones de contorno y realizando una serie de operaciones llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = -j\omega\mu\bar{z}_0 H_z \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} - \bar{\nabla}_t E_z = -j\omega\mu(\bar{H}_t \times \bar{z}_0) \quad (2.10)$$

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = j\omega\epsilon\bar{z}_0 E_z \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} - \bar{\nabla}_t H_z = -j\omega\epsilon\bar{z}_0 \bar{E}_t - \bar{z}_0 \bar{J}_s \quad (2.12)$$

En dichas ecuaciones podemos ver separadas las partes longitudinal y transversal de las ecuaciones de Maxwell.

Para una infinidad de estructuras en las que tenemos una guía en forma de caja se puede evitar el uso de la transformada de Fourier para reducir las ecuaciones de Maxwell a ecuaciones escalares sencillas de una sola dimensión en línea de transmisión. Para ello haremos una descomposición transversal como la mostrada en las ecuaciones 2.9 y 2.12, junto a una descomposición modal, simplificando con ello las ecuaciones de Maxwell a ecuaciones de una sola dimensión en línea de transmisión.

Hay que destacar que en nuestra estructura pueden haber campos con las componentes E_z y H_z no nulas. En general no podemos limitarnos a decir simplemente que son nulas. En vez de ello usaremos las ecuaciones 2.9 y 2.11 para eliminar las componentes longitudinales de las ecuaciones 2.10 y 2.12. Si multiplicamos 2.9 por \bar{z}_0 tenemos que:

$$\bar{z}_0 \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = -j\omega\mu\bar{z}_0 \bar{z}_0 H_z \quad (2.13)$$

Podemos expresar 2.13 de la siguiente forma:

$$\bar{\nabla}_t(\bar{z}_0 \times \bar{E}_t) = j\omega\mu H_z$$

ahora introducimos H_z en la ecuación 2.12, obteniendo:

$$\frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} - \frac{1}{j\omega\mu} \bar{\nabla}_t \left[\bar{\nabla}_t(\bar{z}_0 \bar{E}_t) \right] = -j\omega\epsilon(\bar{z}_0 \bar{E}_t) - (\bar{z}_0 \bar{J}_s)$$

y por tanto nos queda que:

$$\frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} = -jw\epsilon(\bar{z}_0 \bar{E}_t) - \frac{1}{jw\mu} \bar{\nabla}_t \left[\bar{\nabla}_t(\bar{z}_0 \bar{E}_t) \right] - (\bar{z}_0 \bar{J}_s) \quad (2.14)$$

Haciendo el mismo proceso con la ecuación 2.11 tenemos que:

$$\bar{z}_0(\bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t) = jw\epsilon \bar{z}_0 \bar{z}_0 E_z \quad (2.15)$$

ahora podemos expresar 2.15 de la siguiente forma:

$$\bar{\nabla}_t(\bar{H}_t \times \bar{z}_0) = jw\epsilon E_z$$

Introduciendo E_z en 2.10 tenemos:

$$\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} - \frac{1}{jw\epsilon} \bar{\nabla}_t(\bar{H}_t \times \bar{z}_0) = -jw\mu(\bar{H}_t \times \bar{z}_0)$$

que también podemos escribir como:

$$\frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = -jw\mu(\bar{H}_t \times \bar{z}_0) - \frac{1}{jw\epsilon} \bar{\nabla}_t(\bar{H}_t \times \bar{z}_0) \quad (2.16)$$

Las ecuaciones 2.14 y 2.16 representan la parte transversal de las ecuaciones de Maxwell ya que únicamente contienen las componentes transversales de los campos.

Para encontrar solución a estas ecuaciones vamos a expandir los campos transversales como series de funciones vectoriales modales en la estructura. Por tanto buscaremos una solución de la siguiente forma:

$$\bar{E}_t = \sum_{\xi=1}^{\xi=2} \sum_{m=1}^{m=\infty} V_m(z)^{(\xi)} \bar{e}_m(x, y)^{(\xi)} \quad (2.17)$$

$$\bar{H}_t = \sum_{\xi=1}^{\xi=2} \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m(z)^{(\xi)} \bar{h}_m(x, y)^{(\xi)} \quad (2.18)$$

donde \bar{e}_m y \bar{h}_m son las conocidas funciones vectoriales modales en la estructura, mientras que $V_m(z)$ y $I_m(z)$ son funciones escalares de la coordenada longitudinal.

En las ecuaciones 2.17 y 2.18 hemos usado la siguiente notación :

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ modo } TE \\ 2 \text{ modo } TM \end{array} \right\}$$

El índice m indica una suma infinita de modos que realmente se divide en dos índices (m, n) correspondientes a las direcciones de la estructura x e y y respectivamente (números de onda a lo largo del eje x y del eje y).

Finalmente operando y realizando nuevas transformaciones llegamos a que la solución a las ecuaciones de Maxwell se ha simplificado a la solución de estos dos sistemas de ecuaciones diferenciales de una dimensión:

$$\frac{dV_m(z)^{(\xi)}}{dz} = -jZ_m^{(\xi)}k_{zm}^{(\xi)}I_m(z)^{(\xi)} \quad (2.19)$$

$$\frac{dI_m(z)^{(\xi)}}{dz} = -j\frac{1}{Z_m^{(\xi)}}k_{zm}^{(\xi)}V_m(z)^{(\xi)} - j_m(z)^{(\xi)} \quad (2.20)$$

donde

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ modo } TE \\ 2 \text{ modo } TM \end{array} \right\}$$

Estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones para tensiones y corrientes en una línea de transmisión. La constante de propagación en la línea es:

$$k_{zm}^{(\xi)} = \sqrt{k_o^2 - k_{cm}^{(\xi)2}}$$

Mientras que las impedancias características son:

$$z_m^{TE} = \frac{w\mu}{k_{zm}^{TE}}$$

$$z_m^{TM} = \frac{k_{zm}^{TM}}{w\epsilon}$$

Con esto quedaría completado el circuito equivalente en línea de transmisión para la estructura de la figura 2.1.

2.2. Ecuaciones en línea de transmisión

Vimos en la sección previa que cuando fuentes eléctricas están dentro de una guía rectangular metálica, las ecuaciones originales de Maxwell pueden transformarse en las ecuaciones 2.19 y 2.20. Recordemos dichas ecuaciones:

$$\frac{dV_m(z)^{(\xi)}}{dz} = -jZ_m^{(\xi)}k_{zm}^{(\xi)}I_m(z)^{(\xi)}$$

$$\frac{dI_m(z)^{(\xi)}}{dz} = -j\frac{1}{Z_m^{(\xi)}}k_{zm}^{(\xi)}V_m(z)^{(\xi)} - j_m(z)^{(\xi)}$$

Para hacer la representación de las ecuaciones 2.19 y 2.20 utilizemos las expresiones de las ecuaciones 2.17 y 2.18 para los campos transversos electromagnéticos. Las corrientes eléctricas podrían ser representadas por una expansión de la misma forma:

$$\bar{J}_s = \sum_{\xi=1}^{\xi=2} \sum_{m=1}^{m=\infty} j_m(z)^{(\xi)} \bar{e}_m(x, y)^{(\xi)} \quad (2.21)$$

Las ecuaciones 2.19 y 2.20 son claramente ecuaciones de línea de transmisión donde los coeficientes de las funciones de tensión e intensidad se propagan en la dirección z con constante de propagación k_z .

Podemos usar por tanto la teoría de líneas de transmisión para hallar los coeficientes de las funciones de tensión e intensidad $V_m(z)^{(\xi)}$ e $I_m(z)^{(\xi)}$ respectivamente. Una vez hallado esto podremos calcular los campos transversales con la ayuda de 2.17 y 2.18.

Esta teoría se puede usar para calcular las componentes de la función de Green en estructuras simples multicapa que contienen un circuito impreso en un dieléctrico dentro de una estructura metálica de encapsulado.

En principio vamos a considerar una guía de ondas rectangular e infinita, como la mostrada en la figura 2.1. Para calcular las componentes de la función de Green colocaremos elementos unitarios de corriente en $z=0$. Estos elementos pueden estar orientados tanto en dirección x_o como en dirección y_o .

Comenzaremos primero con una corriente unitaria en la dirección x_o y por lo tanto escribiremos:

$$\bar{J}_s = \bar{x}_o \delta(x - x')(y - y')(z) \quad (2.22)$$

Supondremos que la localización de la corriente es en el punto de el espacio (x', y', z') . En este caso supondremos que la intensidad está situada en $z'=0$ dentro de algún punto (x', y') de dicho plano. La ecuación 2.22 es función de las variables (x, y, z) , y (x', y', z') representa por tanto el punto específico donde situaremos la fuente.

Podemos introducir la ecuación 2.22 en la ecuación 2.21 y escribir:

$$\bar{x}_o \delta(x - x')(y - y')(z) = \sum_{\xi=1}^{\xi=2} \sum_{m=1}^{m=\infty} j_m(z)^{(\xi)} \bar{e}_m(x, y)^{(\xi)} \tag{2.23}$$

Ahora vamos a ver lo que ocurre a la m-esima línea de transmisión (indistintamente para los modos TE y TM, ya que las ecuaciones 2.19 y 2.20 son la misma para ambos modos). Para ello podemos multiplicar a ambos lados de la ecuación 2.23 por $\bar{e}_m^{(\xi)}(x, y)$, obteniendo:

$$\delta(x - x')(y - y')(z) [\bar{e}_m^{(\xi)}(x, y) \bar{x}_o] = \sum_{\xi=1}^{\xi=2} \sum_{k=1}^{k=\infty} j_k^{(\xi)}(z) \bar{e}_k^{(\xi)}(x, y) \bar{e}_m^{(\xi)}(x, y) \tag{2.24}$$

Donde el índice del sumatorio ha sido cambiado de m a k por conveniencia. Podemos ahora integrar la ecuación 2.24 en la sección transversa de la guía rectangular y aplicar las condiciones de ortonormalidad de las funciones modales. Por tanto obtenemos:

$$\delta(z) \bar{e}_{xm}(x', y')^{(\xi)} = j_m(z)^{(\xi)} \tag{2.25}$$

Donde $\bar{e}_{xm}^{(\xi)}$ es la componente x_o de las correspondientes funciones vectoriales modales. Como se vé la función está evaluada en el punto (x', y') que es en el que la fuente está situada. La ecuación 2.25 nos muestra como afectará la excitación a las ecuaciones de la línea de transmisión cuando un dipolo orientado en la dirección x excita la estructura.

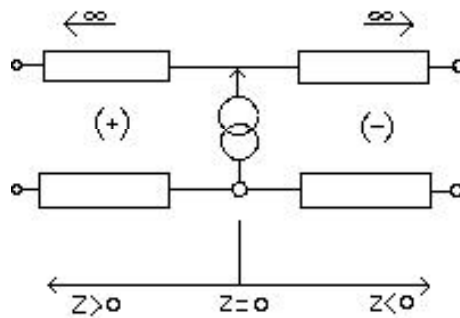


Figura 2.2: En la figura podemos ver la red equivalente de una guía y un dipolo unitario como la que vamos a someter a estudio, aunque esta es infinita y está representada para una función m genérica de línea de transmisión.

Sabemos que esta estructura soporta las siguientes ondas de tensión:

$$V_m^{(\xi)(+)}(z) = V_{1m}^{(\xi)(+)}(z)e^{-jk_z^{(\xi)}z} + V_{2m}^{(\xi)(+)}(z)e^{jk_z^{(\xi)}z}; z > 0$$

$$V_m^{(\xi)(-)}(z) = V_{1m}^{(\xi)(-)}(z)e^{-jk_z^{(\xi)}z} + V_{2m}^{(\xi)(-)}(z)e^{jk_z^{(\xi)}z}; z < 0$$

donde $V_{1m}^{(\xi)}$ y $V_{2m}^{(\xi)}$ son constantes que habrá que hallar imponiendo las condiciones de contorno en la línea de transmisión.

2.3. Formulación en ecuación integral

Nuestro circuito está formado por una única línea desde la entrada a la salida, impreso en un dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r .

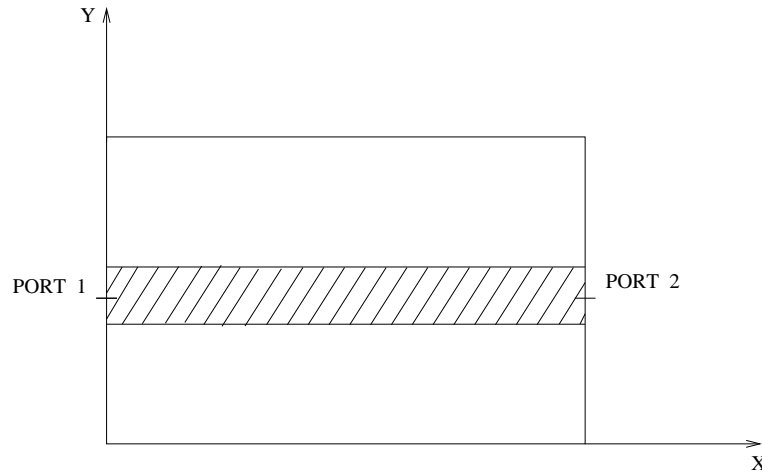


Figura 2.3: En la figura podemos observar en rallas la línea a estudio con una superficie S_1 que estará impresa sobre un dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r . La línea estará impresa desde el puerto de entrada hasta el puerto de salida en una única tira.

Para comenzar con el análisis de esta estructura consideraremos una densidad de corriente inducida en la línea a la que denominaremos J_{S_1} . Ahora podremos calcular el campo eléctrico generado por dicha densidad de corriente. Utilizando la conocida integral de superposición:

$$\bar{E}^{(scat)} = - \int_{S_1} \bar{\bar{G}}_{EJ} \bar{J}_{S_1} ds' \quad (2.26)$$

donde:

$$\bar{\bar{G}}_{EJ} = \sum_m V_m(z) \bar{e}_m(x, y) \bar{e}_m(x', y')$$

es la función de Green en una cavidad metálica, siendo V_m las tensiones en el circuito equivalente en línea de transmisión desarrollado en la sección anterior y \bar{e}_m las funciones vectoriales modales en la guía de ondas que se ven en la figura 2.3.

El siguiente paso será imponer las condiciones de contorno al campo tangente total en la superficie de la línea. Sabemos que el campo eléctrico tangente al metal debe anularse.

$$[\bar{E}^{(e)} + \bar{E}^{(scat)}] \Big|_{S_1} = 0 \quad (2.27)$$

$$\bar{E}^{(e)} = -\bar{E}^{(scat)} \quad (2.28)$$

donde

$$\bar{E}^{(e)} = - \int_{S_1} \bar{G}_{EJ} \bar{J}_{S_1} ds' \quad (2.29)$$

Ahora con la siguiente expresión expandimos la desconocida densidad de corriente como una serie de funciones base (Método de los momentos):

$$J_{S_1} = \sum_k \alpha_k^{(1)} \bar{e}_k^{(1)}$$

donde $\alpha_k^{(1)}$ son coeficientes desconocidos en la expansión y $\bar{e}_k^{(1)}$ son funciones de base a elegir.

En este proyecto vamos a elegir un tipo nuevo de funciones de base para representar las corrientes inducidas. Como funciones de base elegiremos las funciones vectoriales modales en una guía equivalente con las dimensiones de la línea impresa que vamos a analizar. Ésta guía estará formada por dos paredes magnéticas y por dos paredes eléctricas (las que conectan los puertos de entrada y salida). En la sección primera del siguiente capítulo haremos un desarrollo matemático riguroso para mostrar el cálculo de estas novedosas funciones de base.

Introduciendo la ecuación anterior en 2.29 tenemos que:

$$\left[\bar{E}^{(e)} = - \sum_k \alpha_k^{(1)} \int_{S_1} \bar{G}_{EJ} \bar{e}_k^{(1)} ds' \right]_{S_1}$$

Para completar la formulación usaremos el algoritmo de Galerkin. En esta técnica se realiza un proceso de 'testing' utilizando como función de test las mismas funciones que se utilizaron para la base. Por tanto ahora multiplicamos por las funciones $\bar{e}_i^{(1)}$ en ambos lados de la ecuación anterior e integramos en S_1 :

$$\int_{S_1} \bar{E}^{(e)} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds = - \sum_k \alpha_k^{(1)} \int_{S_1} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds \int_{S_1} \bar{G}_{EJ} \bar{e}_k^{(1)}(x', y') ds'$$

Queda introducir la función de Green de la cavidad metálica, desarrollada en la sección segunda del capítulo siguiente en la ecuación anterior, quedándonos:

$$\int_{S_1} \bar{E}^{(e)} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds = - \sum_k \alpha_k^{(1)} \int_{S_1} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds \int_{S_1} \sum_m V_m(z) \bar{e}_m(x, y) \bar{e}_m(x', y') \bar{e}_k^{(1)}(x', y') ds'$$

Sacando fuera de las integrales lo que no dependa de (x,y) o (x',y') nos queda que:

$$\int_{S_1} \bar{E}^{(e)} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds = - \sum_k \alpha_k^{(1)} \sum_m V_m(z) \int_{S_1} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) \bar{e}_m(x, y) ds \int_{S_1} \bar{e}_k^{(1)}(x', y') \bar{e}_m(x', y') ds'$$

Ahora vamos a hacer las siguientes definiciones:

$$P^{(e)}(i) = \int_{S_1} \bar{E}^{(e)} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) ds \quad (2.30)$$

y

$$R(i, k) = - \sum_m V_m(z) \int_{S_1} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) \bar{e}_m(x, y) ds \int_{S_1} \bar{e}_k^{(1)}(x', y') \bar{e}_m(x', y') ds' \quad (2.31)$$

Ahora podemos escribir la ecuación de forma más reducida:

$$P^{(e)}(i) = - \sum_k \alpha_k^{(1)} R(i, k)$$

La ecuación anterior constituye en realidad un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas los coeficientes $\alpha_k^{(1)}$. La matriz del sistema es $R(i, k)$ y se calcula mediante la ecuación 2.31. El vector de términos independientes es $P^{(e)}(i)$ y se calculará con la excitación que impongamos al circuito. Este término se calcula con la expresión 2.30 una vez que nuestro modelo de excitación nos de información acerca del campo eléctrico de excitación $\bar{E}^{(e)}$.

Una vez que tengamos calculada $R(i, k)$ sólo queda hallar $P^{(e)}(i)$ para encontrar las incógnitas $\alpha_k^{(1)}$ que nos darán la densidad de corriente que circula por la línea.

Para realizar el cálculo de $P^{(e)}(i)$ nos valdremos de la relación 2.30. Como se puede observar en dicha relación las funciones $\bar{e}_i^{(1)}(x, y)$ son las mismas funciones que las de base utilizadas para

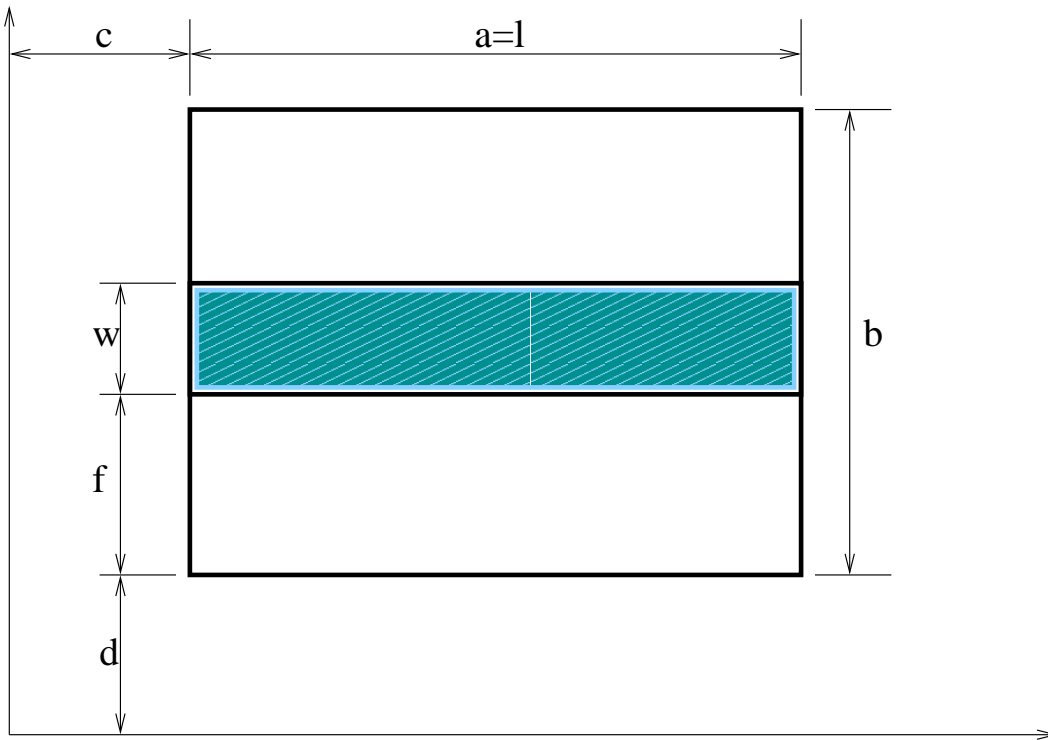


Figura 2.4: Línea con sus correspondientes medidas. Las paredes de la izquierda y derecha son eléctricas, las de arriba y abajo magnéticas.

representar las corrientes inducidas en la línea. Por tanto sólo queda conocer $\vec{E}^{(e)}$ para calcular $P^{(e)}(i)$. Sabemos que $\vec{E}^{(e)}$ es el campo eléctrico creado por el tipo de excitación utilizado, es decir, por el echo de introducir una fuente de tensión como excitación en el puerto de entrada y una impedancia de carga (Z_L) en el puerto de salida. Por tanto tenemos que:

$$\vec{E}^{(e)} = -V_1\delta(x - x_0)\vec{e}_x + V_2\delta(x - x_L)\vec{e}_x \quad (2.32)$$

Donde \vec{e}_x es el vector unitario en la dirección x , V_1 es la tensión aplicada en el puerto de entrada por el generador y V_2 es la tensión que se produce al conectar la impedancia de carga Z_L al puerto de salida. Aplicando la ley de Ohm en el puerto de salida:

$$V_2 = I_2 Z_L \quad (2.33)$$

Introduciendo 2.32 y 2.33 en 2.30 tenemos que:

$$P^{(e)}(i) = -V_1 \int_f^{f+w} \vec{e}_i^{(1)}(x_0, y) dy + I_2 Z_L \int_f^{f+w} \vec{e}_i^{(1)}(x_L, y) dy$$

Donde f es el desplazamiento de la línea impresa sobre el cero de ordenadas, w es la longitud

y de la línea, x_o es el punto donde está situada la excitación y x_L es el punto donde está situada la carga.

Ahora definimos:

$$\gamma_k^{(n)} = \int_{y_1^{(n)}}^{y_2^{(n)}} e_{x_i}^{-(n+1)}(a(n), y) dy \quad (2.34)$$

que es la integral de las funciones de base en la dirección x que hemos escogido para la excitación de la línea. Además está evaluada en el punto $a(n)$. Este punto en nuestro caso será el punto donde está situada la fuente para la integral $\gamma_i^{(1)}$ mientras que para la integral $\gamma_i^{(2)}$ será el punto donde está situada la carga. Por tanto tenemos:

$$P(i)^{(e)} = -V_1 \gamma_i^{(1)} + I_2 Z_L \gamma_i^{(2)} \quad (2.35)$$

Sabemos la corriente que fluye por el puerto de salida integrando en la línea la densidad de corriente que fluye por dicho puerto:

$$I_2 = \int_f^{f+w} \bar{J}_{S1}(x_L, y) dy \bar{e}_x \quad (2.36)$$

y que:

$$\bar{J}_{s1}(x, y) = \sum_k \alpha_k^{(1)} \bar{e}_k(x, y) \quad (2.37)$$

Por tanto introduciendo 2.37 en 2.36 nos queda:

$$I_2 = \sum_k \alpha_k^{(1)} \int_f^{f+w} e_{k_x}^{(1)}(x_L, y) dy = \sum_k \alpha_k^{(1)} \gamma_k^{(2)}$$

Ahora escribimos la ecuación 2.35 más desarrollada:

$$P(i)^{(e)} = -V_1 \gamma_i^{(1)} + Z_L \gamma_i^{(2)} \sum_k \alpha_k^{(1)} \gamma_k^{(2)} = -\sum_k \alpha_k^{(1)} R(i, k)$$

Pasando el segundo sumando al miembro de la derecha y dividiendo por V_1 llegamos a:

$$-\gamma_i^{(1)} = -\sum_k \frac{\alpha_k^{(1)}}{V_1} [R(i, k) + Z_L \gamma_i^{(2)} \gamma_k^{(2)}] \quad (2.38)$$

En 2.38 tenemos un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas como mencionamos son $\alpha_k^{(1)}$. La matriz $R(i,k)$ se obtiene de realizar la integración que aparece en 2.31, mientras que los valores de los factores $\gamma_i^{(1)}$, $\gamma_i^{(2)}$ y $\gamma_k^{(2)}$ vienen dados por la definición 2.34. Se suele tomar el valor standard de $Z_L = 50$ ohmios. Como se ve el término de excitación que aparece en el lado izquierdo del sistema está formado por los coeficientes $\gamma_i^{(1)}$ definidos en la ecuación 2.34.

Nunca debemos perder de vista nuestro objetivo, que es el cálculo de la impedancia de entrada. Ahora ya se puede comenzar a intuir mejor como calculamos dicha impedancia:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

De I_1 aún no hemos hablado. Esta intensidad la calcularemos del mismo modo que hicimos con I_2 , es decir, integrando en la línea la densidad de corriente que fluye en el puerto de entrada.

$$I_1 = \int_f^{f+w} J_{S1_x}(x_o, y) dy = \sum_k \alpha_k^{(1)} \int_f^{f+w} \bar{e}_k^{(e)}(0, y) dy = \sum_k \alpha_k^{(1)} \gamma_k^{(1)}$$

Como podemos observar la función está evaluada en el punto x_o . En nuestro caso este punto será cero al no estar desplazada la coordenada x de la caja ni tampoco de la línea respecto al cero de nuestro sistema de referencia. Ahora ya tenemos que:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{\sum_k \alpha_k \gamma_k^{(1)}}$$

Si definimos:

$$\alpha_k = \hat{\alpha}_k V_1$$

entonces desaparece el factor V_1 no interviniendo en el resultado final:

$$Z_{in} = \frac{1}{\sum_k \alpha_k \gamma_k^{(1)}}$$

Capítulo 3

Descripción

3.1. Introducción

En este capítulo nos vamos a centrar principalmente en encontrar unas funciones de base que sean apropiadas para representar las corrientes inducidas en la línea impresa en el dieléctrico que estamos estudiando. Como es de esperar la línea impresa estará constituida por cuatro paredes. Dicha línea microstrip conectará el puerto de entrada con el puerto de salida. Las dos paredes que harán esta conexión serán paredes eléctricas, mientras que las otras dos paredes (que serán perpendiculares a las dos anteriores) serán magnéticas. Como funciones de base vamos a elegir las funciones vectoriales modales en una guía equivalente definida en la posición de la línea impresa. Vamos entonces a ver la forma que tendrán estas funciones.

3.2. Formas modales apropiadas para nuestra línea impresa. Estudio y aplicación a nuestro problema

En esta sección intentaremos desarrollar una teoría que pueda ser utilizada para representar las corrientes inducidas en una línea impresa en un dieléctrico, cuando dicha línea une los puertos de entrada y salida de un circuito.

La línea microstrip será de forma rectangular, de modo que estará limitada por cuatro paredes equivalentes, tal como se muestra en la Fig. 2.4 (definimos funciones vectoriales modales en una guía equivalente en la posición donde se encuentra la línea impresa). Por una de ellas introducimos la excitación. Esta deberá ser una pared eléctrica para permitir el flujo de corriente entre el puerto y el circuito. En este estudio la pared paralela a dicha pared también será eléctrica por estar asociada al puerto de salida (en efecto dicha pared debe permitir el flujo de corriente entre el puerto de salida y el circuito), mientras que las dos restantes, que como sabemos son perpendiculares a la pared de la excitación, serán magnéticas. Dichas paredes magnéticas forzarán un nulo de corriente para las corrientes dirigidas perpendicularmente a la pared.

El punto más importante en la presente sección será realizar el cálculo de los espectros modales TE y TM que proporciona la estructura mostrada en la Fig. 2.4. Es decir, lo que nosotros pretendemos calcular son las funciones modales ortonormales de dicha línea.

Para realizar dicho estudio llevaremos un razonamiento paralelo al usado por Harrington. Siguiendo su desarrollo, un campo TM es aquel en el que $\vec{F} = 0$ y simplemente se tomará $\vec{A} = A_z \vec{z}_0$. De este modo la componente escalar A_z es solución de la onda escalar en la ecuación de Helmholtz, por tanto:

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0 \quad (3.1)$$

Las fórmulas generales de los campos eléctrico y magnético situados bajo la presencia de fuentes eléctricas y magnéticas son:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{F} - j\omega\mu\vec{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) \quad (3.2)$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \times \vec{A} - j\omega\mu\vec{F} + \frac{1}{j\omega\epsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{F}) \quad (3.3)$$

Primeramente vamos a calcular el caso TM. En este caso ya que $\vec{F} = 0$ las ecuaciones se ven simplificadas a:

$$\vec{E} = -j\omega\mu\vec{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Obteniendo de las ecuaciones resultantes cada una de las coordenadas y aplicando el hecho de que $\vec{A} = A_z \vec{z}_0$ tenemos las siguientes componentes de campo eléctrico y magnético:

$$E_x = \frac{1}{j\omega_0\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega_0\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega_0\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$H_z = 0$$

que claramente representan un campo TM al ser $H_z = 0$. Lo único que queda ahora es calcular A_z que es solución de la ecuación diferencial 3.1. Esta ecuación diferencial en derivadas parciales se puede resolver por el método de separación de variables. De echo provaremos con una solución del tipo:

$$A_z = C \bar{X}(x) \bar{Y}(y)$$

Se sabe de la teoría básica que cada una de las funciones $\bar{X}(x)$, $\bar{Y}(y)$ es solución de una ecuación diferencial escalar lineal de orden dos. Dicha solución será sencillamente una combinación de funciones armónicas, hallando la constante C imponiendo las condiciones de contorno en las paredes eléctricas o magnéticas de la guía equivalente.

Para continuar vamos a volver a escribir la ecuación que nos permite hallar la componente z del campo eléctrico:

$$E_z = \frac{1}{j\omega_0\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z$$

En $x=0$ sabemos que hay una pared eléctrica, y E_z es tangente a dicha pared, por tanto debe anularse. La función A_z deberá cumplir este requisito y por lo tanto al evaluarla en este punto deberá valer 0. A su vez sabemos debe ser una función armónica, por tanto nos queda:

$$\bar{X}(x) = \sin(k_x x) \tag{3.4}$$

que satisface dichas condiciones para $x=0$.

En $y=0$ sin embargo tenemos una pared magnética, por lo que E_z en principio no necesita tener valor nulo. Por tanto ya que $E_z \neq 0$ probaremos con la siguiente función armónica:

$$\bar{Y}(y) = \cos(k_y y) \tag{3.5}$$

que al contrario de ser nula será máxima, ya que el campo eléctrico tangente a una pared magnética es máximo. Por tanto llegamos a:

$$A_z = C \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (3.6)$$

Las constantes k_x y k_y o números de onda se hallarán imponiendo las condiciones de contorno en las restantes paredes de la línea. Para $x=l$ tenemos una pared eléctrica, por lo que $E_z = 0$. Por tanto:

$$\sin(k_x l) = 0$$

$$k_x l = k\pi$$

$$k_x = \frac{k\pi}{l} \quad (3.7)$$

siendo:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Para $y=b$ tenemos una pared magnética por tanto el campo eléctrico tangente será máximo y A_z también será máximo:

$$\cos(k_y w) = \pm 1$$

$$k_y w = g\pi$$

$$k_y = \frac{g\pi}{w} \quad (3.8)$$

siendo:

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

El siguiente paso es normalizar A_z de acuerdo a la conocida relación:

$$\int_{SE} \bar{e}_k \bar{e}_k ds = 1 \quad (3.9)$$

De este modo trabajaremos con un conjunto de funciones ortonormales. Para usar esta ecuación en nuestro caso usaremos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \bar{e}_k^{(TM)} &= -\bar{\nabla} A_z \\ \bar{e}_k^{(TM)} &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \bar{x}_0 - \frac{\partial A_z}{\partial y} \bar{y}_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando 3.6 tenemos que:

$$\bar{e}_k^{(TM)} = [-\bar{x}_0 k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) + \bar{y}_0 k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y)] C \quad (3.11)$$

Ahora aplicando la condición de la ecuación 3.9, realizado el correspondiente producto escalar:

$$\int_{SE} \bar{e}_k \bar{e}_k ds = \int_{SE} e_{xk} e_{xk} ds + \int_{SE} e_{yk} e_{yk} ds = 1 \quad (3.12)$$

utilizando la ecuación 3.11

$$C^2 \left[k_x^2 \int_0^l \cos^2(k_x x) dx \int_0^w \cos^2(k_y y) dy + k_y^2 \int_0^l \sin^2(k_x x) dx \int_0^w \sin^2(k_y y) dy \right] = 1 \quad (3.13)$$

Ahora podemos resolver analíticamente las integrales obteniendo:

$$\int_0^l \cos^2(k_x x) dx = \frac{x}{2} \Big|_0^l + \frac{\sin(2k_x x)}{(4k_x)} \Big|_0^l = \frac{l}{2} + \frac{\sin[2(\frac{k\pi}{l}l)]}{4\frac{\pi}{l}} = \frac{l}{2} \quad (3.14)$$

$$\int_0^w \cos^2(k_y y) dy = \frac{w}{2} \quad (3.15)$$

$$\int_0^l \sin^2(k_x x) dx = \frac{x}{2} \Big|_0^l - \frac{\sin(2k_x x)}{(4k_x)} \Big|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{\sin[2(\frac{k\pi}{l}l)]}{4\frac{\pi}{l}} = \frac{l}{2} \quad (3.16)$$

$$\int_0^w \sin^2(k_y y) dy = \frac{w}{2} \quad (3.17)$$

La ecuación 3.9 se convierte en :

$$C^2 \left[k_x^2 \frac{l}{2} \frac{w}{2} + k_y^2 \frac{l}{2} \frac{w}{2} \right] = 1$$

$$C^2 \frac{lw}{4} [k_x^2 + k_y^2] = 1$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{lw} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.18)$$

Es importante destacar que para estos modos podemos escoger los siguientes índices:

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

$$g = 0, 1, 2 \dots$$

Ya que $g=0$ es un índice modal válido, tendremos que calcular de nuevo para este caso el factor de normalización, ya que podría cambiar. Por tanto, si $g=0$ entonces $k_y = 0$ y la ecuación 3.13 se convierte en:

$$C^2 \left[k_x^2 \int_0^l \cos^2(k_x x) dx \int_0^w dy + k_y^2 \int_0^l \sin^2(k_x x) dx \int_0^w 0 dy \right] = 1$$

$$C^2 \left[k_x^2 \frac{l}{2} w \right] = 1$$

Notar que al ser $k_y = 0$ para $g=0$ podemos expresar 3.18 y 3.19 con la expresión:

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{lw} \sqrt{k_x^2}} \quad (3.19)$$

Podemos definir la constante:

$$E_g = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{para } g=0 \\ 2 & \text{para } g \neq 0 \end{array} \right\}$$

introduciendo ahora las expresiones para k_x y k_y calculadas anteriormente tenemos:

$$C = \frac{\sqrt{2E_g}}{\sqrt{lw} \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{g^2 \pi^2}{w^2}}} = \frac{\sqrt{2E_g}}{\pi \sqrt{lw} \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{g^2}{w^2}}}$$

Escribimos por tanto la función de normalización potencial escalar para el modo TM en nuestra guía de ondas tenemos:

$$A_z = \frac{\sqrt{2E_g}}{\pi \sqrt{\frac{wk^2}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \sin \left[\frac{\pi}{l} x \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.20)$$

Las funciones vectoriales modales se calcularán mediante la conocida relación:

$$\vec{e}_k^{(TM)}(x, y) = -\vec{\nabla} A_z$$

$$e_{xk}^{(TM)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = N_{ex}^{(TM)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l} x \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.21)$$

$$e_{yk}^{(TM)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial y} = N_{ey}^{(TM)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l} x \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.22)$$

con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TM)}(k) = -\frac{\sqrt{2E_n}}{\pi \sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \frac{k\pi}{l} = -\frac{\sqrt{2E_n}k}{l \sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.23)$$

$$N_{ey}^{(TM)}(k) = \frac{\sqrt{2E_n}}{\pi \sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \frac{g\pi}{w} = \frac{\sqrt{2E_n}g}{w \sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.24)$$

Para calcular la representación para el modo TE tenemos que $\vec{A} = 0$ y $\vec{F} = F_z \vec{z}_0$. Por tanto de acuerdo con la formulación de Harrington las ecuaciones quedan:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (3.25)$$

$$\vec{H} = -jw_0 \epsilon \vec{F} + \frac{1}{jw\mu} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \quad (3.26)$$

Descomponiendo las ecuaciones 3.25 y 3.26 en sus coordenadas cartesianas obtenemos las siguientes componentes de campo para los campos eléctricos y magnéticos:

$$E_x = -\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = \frac{1}{j\omega_0\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}$$

$$H_y = \frac{1}{j\omega_0\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z}$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega_0\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z$$

que claramente representan correspondencia con un campo TE al ser $E_z = 0$. Ahora queda calcular F_z que es solución de la ecuación ondulatoria escalar que sigue:

$$\nabla^2 F_z + k^2 F_z = 0 \quad (3.27)$$

El método de separación de variables nos puede ser útil para resolver analíticamente la ecuación en diferencias parciales. Por tanto procediendo de la misma forma que hicimos para el caso TM, utilizaremos una solución de la forma:

$$F_z = DX(x)Y(y) \quad (3.28)$$

Donde las funciones $X(x)$, $Y(y)$ son solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden de una dimensión. Dicha solución será por tanto una combinación de funciones armónicas. Primeramente escogeremos dichas funciones para satisfacer las condiciones de contorno en $x = 0$ e $y = 0$. Para hacer esto nos valdremos de la ecuación:

$$H_z = \frac{1}{j\omega_0\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z \quad (3.29)$$

Sabemos que en $x=0$ tenemos una pared eléctrica y el campo H_z es tangente a dicha pared, por lo que en principio no debe valer 0. De acuerdo a la ecuación anterior la componente F_z deberá cumplir este requisito y por lo tanto al evaluarla en este punto no deberá valer 0. A su vez sabemos debe ser una función armónica, por tanto nos queda:

$$\bar{X}(x) = \cos(k_x x) \quad (3.30)$$

que satisface dichas condiciones para $x=0$.

Por el contrario en $y=0$ tenemos una pared magnética, por lo que el campo tangente H_z tiene valor nulo, por tanto probaremos con la siguiente función armónica:

$$\bar{Y}(y) = \sin(k_y y) \quad (3.31)$$

y por tanto ahora podemos escribir 3.28 como:

$$F_z = D \cos(k_x x) \sin(k_y y) \quad (3.32)$$

Las correspondientes constantes las calcularemos escogiendo adecuadamente k_x e k_y para satisfacer las condiciones de contorno en $x=l$ y $y=w$. Para $x=l$ tenemos una pared eléctrica, por lo que H_z al ser tangente a dicha pared será máximo. Por tanto:

$$\cos(k_x l) = \pm 1$$

$$k_x l = k\pi$$

$$k_x = \frac{k\pi}{l} \quad (3.33)$$

Para $y=w$ tenemos una pared magnética por tanto el campo magnético tangente será nulo y tendremos:

$$\sin(k_y w) = 0$$

$$k_y w = g\pi$$

$$k_y = \frac{g\pi}{w} \quad (3.34)$$

Notar que ahora los índices serán

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

El siguiente paso es normalizar F_z de acuerdo a la conocida relación:

$$\int_{SE} \bar{h}_k(x, y) \bar{h}_k(x, y) ds = 1 \quad (3.35)$$

Para usar la ecuación 3.35 nos valdremos de la siguiente relación para el caso TE:

$$\begin{aligned} \bar{h}_k^{(TE)} &= -\bar{\nabla} F_z \\ \bar{h}_k^{(TE)} &= -\frac{\partial F_z}{\partial x} \bar{x}_0 - \frac{\partial F_z}{\partial y} \bar{y}_0 = \\ &= \bar{h}_k^{(TE)} = D \left[+ k_x \sin(k_x x) \sin(k_y y) \bar{x}_0 - k_y \cos(k_x x) \cos(k_y y) \bar{y}_0 \right] \end{aligned}$$

Ahora aplicando la condición de la ecuación 3.35 tenemos:

$$D^2 \left[k_x^2 \int_0^l \sin^2(k_x x) dx \int_0^w \sin^2(k_y y) dy + k_y^2 \int_0^l \cos^2(k_x x) dx \int_0^w \cos^2(k_y y) dy \right] = 1$$

Ya que k_x y k_y son las mismas que para el caso TM, los valores de las integrales permanecerán inalterados. Utilizando los valores obtenidos en la ecuaciones 3.14 y 3.17 tenemos que:

$$\begin{aligned} D^2 \left[k_x^2 \frac{l}{2} \frac{w}{2} + k_y^2 \frac{l}{2} \frac{w}{2} \right] &= 1 \\ D^2 \frac{lw}{4} \left[k_x^2 + k_y^2 \right] &= 1 \\ D &= \frac{2}{\sqrt{lw} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.36) \end{aligned}$$

Debemos tener en cuenta que $k=0$ es un índice modal válido. Por esto tendremos que calcular de nuevo para este caso el factor de normalización, ya que podría cambiar. Por tanto, si $k=0$ entonces $k_x = 0$ y la ecuación 3.35 se convierte en:

$$D^2 \left[k_y^2 \int_0^l dx \int_0^w \cos^2(k_y y) dy \right] = 1$$

Introduciendo el valor de las integrales en la ecuación anterior:

$$D^2 k_y^2 \frac{w}{2} l = 1$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{lw} k_y} \quad (3.37)$$

Podemos definir la constante:

$$E_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k=0 \\ 2 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

$$D = \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{lw} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.38)$$

Introduciendo ahora las expresiones para k_x y k_y calculadas en 3.33 y 3.34 tenemos:

$$D = \frac{\sqrt{2E_k}}{\sqrt{lw} \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{g^2 \pi^2}{w^2}}} = \frac{\sqrt{2E_k}}{\pi \sqrt{lw} \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{g^2}{w^2}}}$$

$$D = \frac{\sqrt{2E_k}}{\pi \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}} \quad (3.39)$$

Escribimos por tanto la función de normalización potencial escalar para el modo TE en nuestro circuito como:

$$F_z = \frac{2}{\pi \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}} \cos \left[\frac{k\pi}{l} x \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.40)$$

Las funciones vectoriales modales se calcularán mediante la relación:

$$\bar{h}_k^{(TE)} = -\bar{\nabla} A_z$$

$$\bar{h}_k^{(TE)} = -\frac{\partial F_z}{\partial x} \bar{x}_0 - \frac{\partial F_z}{\partial y} \bar{y}_0$$

$$h_{x_k}^{(TE)}(x, y) = N_{hx}^{(TE)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l} x \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.41)$$

$$h_{y_k}^{(TE)}(x, y) = N_{hy}^{(TE)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l} x \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w} y \right] \quad (3.42)$$

con los siguientes factores de normalización:

$$N_{hx}^{(TE)}(k) = -\frac{2}{\pi\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \frac{k\pi}{l} = -\frac{2k}{l\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.43)$$

$$N_{ey}^{(TE)}(k) = -\frac{2}{\pi\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \frac{g\pi}{w} = -\frac{2g}{w\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.44)$$

Finalmente las funciones modo $\bar{e}_k^{(TE)}$ las obtendremos usando:

$$\bar{e}_k^{(TE)} = -\bar{z}_0 \times \bar{h}_k^{TE} = - \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ h_{xk}^{TE} & h_{yk}^{TE} & 0 \end{vmatrix} = \bar{x}_0 h_{yk}^{TE} + \bar{y}_0 (-h_{xk}^{TE})$$

Entonces escribiremos:

$$e_{xk}^{(TE)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = N_{ex}^{(TE)}(k) \cos\left[\frac{k\pi}{l}x\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}y\right]$$

$$e_{yk}^{(TE)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial y} = N_{ey}^{(TE)}(k) \sin\left[\frac{k\pi}{l}x\right] \sin\left[\frac{g\pi}{w}y\right]$$

Introduciendo ahora en las ecuaciones anteriores los offset e y f que representan respectivamente el principio y final de nuestra guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, tenemos:

$$e_{xk}^{(TE)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = N_{ex}^{(TE)}(k) \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x - e)\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y - f)\right] \quad (3.45)$$

$$e_{yk}^{(TE)}(x, y) = -\frac{\partial A_z}{\partial y} = N_{ey}^{(TE)}(k) \sin\left[\frac{k\pi}{l}(x - e)\right] \sin\left[\frac{g\pi}{w}(y - f)\right] \quad (3.46)$$

Con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TE)}(k) = N_{hy}^{(TE)}(k) = -\frac{2g}{w\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.47)$$

$$N_{ey}^{(TE)}(k) = N_{hx}^{(TE)}(k) = -\frac{2k}{l\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}} \quad (3.48)$$

recordando que:

$$\begin{aligned}k &= 0, 1, 2, \dots \\g &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Finalmente, la constante de propagación para estos modos será:

$$\beta = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r - k_x^2 - k_y^2} \quad (3.49)$$

Donde ϵ_r es la permitividad relativa del dieléctrico. Introduciendo las relaciones calculadas anteriormente para k_x y k_y , tenemos:

$$\beta = \sqrt{k_0^2 E_r - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{g\pi}{w}\right)^2}$$

Mientras que el número de onda de corte se define como:

$$k_c^2 = k_x^2 - k_y^2 \quad (3.50)$$

$$k_c^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{g\pi}{w}\right)^2$$

3.3. Formas modales de la guía. Función de Green en una guía rectangular

En el capítulo anterior encontramos unas expresiones para las funciones de Green del problema que estamos estudiando. Dichas expresiones venían dadas en función de un desarrollo en serie de funciones vectoriales modales en la guía que encierra el circuito. En esta sección vamos a revisar las expresiones analíticas para las funciones vectoriales modales en una guía rectangular, que es la que estamos tratando en este proyecto.

Las guías de ondas rectangulares son unas de las más populares guías tradicionalmente usadas para aplicaciones de microondas. Este tipo de guías son frecuentemente utilizadas para contener circuitos MMIC y en arrays de antenas para proporcionar un bajo coeficiente de acoplamiento entre elementos que radian. Además, el uso de cavidades rectangulares en sistemas integrados de antenas está encontrando más y más aplicaciones de alta frecuencia cada día, incluyendo bandas milimétricas y sub-milimétricas, especialmente a causa de la supresión de los modos de ondas

de superficie. En esta sección haremos un estudio de este tipo de cavidades y posteriormente aplicaremos lo aquí desarrollado para la resolución del problema objeto del presente proyecto.

Una guía de ondas rectangular es quizás el sistema de guías de ondas más simple que se pueda imaginar, y debido a su simplicidad geométrica las funciones vectoriales modales asociadas se pueden expresar de forma íntegra como combinación de funciones sinusoidales. Según el resultado obtenido en [Marcuvitz, 1964], las funciones vectoriales modales de tipo eléctrico se pueden escribir como :

$$e_{x(m,n)}^{(\xi)}(x, y) = N_{e_x} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] \quad (3.51)$$

$$e_{y(m,n)}^{(\xi)}(x, y) = N_{e_y} \sin\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] \quad (3.52)$$

mientras que las de tipo magnético son:

$$h_{x(m,n)}(x, y) = N_{h_x} \sin\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] \quad (3.53)$$

$$h_{y(m,n)}(x, y) = N_{h_y} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] \quad (3.54)$$

donde ξ denota la familia de modos TE o TM , a y b son las dimensiones de la sección transversal de la cavidad, mientras que c y d son los desplazamientos respecto al origen. Los factores de normalización para ambas familias de modos vienen dados por:

$$N_{e_x}^{TM} = -\frac{2}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.55)$$

$$N_{e_y}^{TM} = -\frac{2}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.56)$$

$$N_{h_x}^{TM} = +\frac{2}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.57)$$

$$N_{h_y}^{TM} = -\frac{2}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.58)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$N_{ex}^{TE} = + \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.59)$$

$$N_{ey}^{TE} = - \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.60)$$

$$N_{hx}^{TE} = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.61)$$

$$N_{hy}^{TE} = + \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}} \quad (3.62)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = n \neq 0$$

Las constantes auxiliares (ϵ_m, ϵ_n) no se deben confundir con las permitividades relativas. Están de echo relacionadas al proceso de normalización de las funciones vectoriales modales, y vienen dadas por:

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{if } m=0 \\ 2, & \text{if } m \neq 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n=0 \\ 2, & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

3.4. Combinación e integración de las formas modales de la caja con las de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes en la línea impresa.

En las secciones anteriores hemos encontrado la expresión de las funciones vectoriales modales en la guía rectangular que entran a formar parte de las funciones de Green del problema. También de secciones anteriores sabemos las funciones de base con las que representaremos las corrientes inducidas en el circuito impreso multicapa. Hemos visto en secciones anteriores que vamos a utilizar como funciones de base las funciones vectoriales modales en una guía equivalente definida en la posición de la línea impresa. Esta guía equivalente consta de dos paredes magnéticas y dos eléctricas. En la sección segunda de este capítulo encontramos las expresiones analíticas para estas funciones de base, o funciones vectoriales modales.

En esta sección trataremos de realizar el cálculo de la matriz dada en la ecuación 2.31. Dicha ecuación también se puede escribir de la siguiente forma:

$$R(i, k) = \sum_m V_m I_{mi}(x', y') I_{mk}(x, y) \quad (3.63)$$

siendo:

$$I_{mi}(x', y') = I_{mi}^{(\xi_1, \xi_2)}(x', y') = \int_{S_1} \bar{e}_m^{(\xi_1)}(x', y') \bar{e}_i^{(1)(\xi_2)}(x', y') ds' \quad (3.64)$$

y

$$I_{mk}(x, y) = I_{mk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{S_1} \bar{e}_m^{(\xi_1)}(x, y) \bar{e}_k^{(1)(\xi_2)}(x, y) ds \quad (3.65)$$

Donde $\bar{e}_m^{(\xi_1)}(x, y)$ son las funciones modales en la caja o guía, $\bar{e}_k^{(\xi_2)}(x, y)$ son las funciones modales usadas para representar las corrientes inducidas en el circuito impreso multicapa. Las coordenadas (x,y) indican el punto donde se calcula el campo, mientras que las coordenadas (x',y') indican un punto donde se sitúa la fuente eléctrica puntual, utilizada para la definición de las funciones de Green.

Para facilitar la notación hemos definido el par (ξ_1, ξ_2) siendo primera componente (ξ_1) la forma modal de la estructura o guía, y la segunda componente (ξ_2) la forma modal de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea.

Las matrices $I_{im}(x', y')$ e $I_{km}(x, y)$ son la misma, aunque con índices distintos. Por ello en esta sección sólo será necesario realizar el cálculo de una de ellas. Nosotros realizaremos el cálculo de $I_{km}(x, y)$.

Para llevar a cabo la resolución de dicha integral utilizaremos las funciones modales calculadas anteriormente, tanto en la estructura como en la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito. Por tanto, al introducir en la integral dichas funciones, observamos que necesitaremos resolver ocho integrales (cuatro corresponden a las combinaciones TE y TM, mientras que también hay que considerar las integrales de las componentes 'x' e 'y' de las funciones vectoriales modales), en las que habrá desaparecido el carácter vectorial (nótese que en las ecuaciones 3.64 y 3.65 en el integrando tenemos que realizar el producto escalar de las dos funciones vectoriales modales) y habremos combinado las formas modales TE y TM tanto de la guía de ondas (caja) como de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea.

De secciones anteriores sabemos que en la estructura para la componente x tenemos que:

$$e_{x_m}^{(TE)} = e_{x(m,n)}^{(TE)}(x, y) = N_{e_x}^{(TE)}(m) \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right]$$

$$e_{x_m}^{(TM)} = e_{x(m,n)}^{(TM)}(x, y) = N_{e_x}^{(TM)}(m) \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right]$$

Podemos observar que ambas funciones son idénticas salvo en el término de normalización $N_{e_x}^{\xi}(m)$. Mientras que para la componente y tenemos:

$$e_{y_m}^{(TE)} = e_{y(m,n)}^{(TE)}(x, y) = N_{e_y}^{(TE)}(m) \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right]$$

$$e_{y_m}^{(TM)} = e_{y(m,n)}^{(TM)}(x, y) = N_{e_y}^{(TM)}(m) \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right]$$

De la misma forma que antes, estas funciones son idénticas salvo en el término de normalización $N_{e_y}^{\xi}(m)$. También sabemos las funciones modales de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito a estudio. Para la componente x tenemos que:

$$e_{x_k}^{(TE)} = e_{x(k,g)}^{(TE)}(x, y) = N_{e_x}^{(TE)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

$$e_{x_k}^{(TM)} = e_{x(k,g)}^{(TM)}(x, y) = N_{e_x}^{(TM)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

mientras que para la componente y:

$$e_{y_k}^{(TE)} = e_{y(k,g)}^{(TE)}(x, y) = N_{e_y}^{(TE)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

$$e_{y_k}^{(TM)} = e_{y(k,g)}^{(TM)}(x, y) = N_{e_y}^{(TM)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

Al igual que pasa en las funciones de la caja, podemos observar que las funciones de guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea son idénticas para ambas componentes, salvo en el término de normalización $N_e^{\xi}(k)$.

Vamos a comenzar por tanto con la primera de las ocho integrales. Esta combinará los modos TE de la caja de apantallamiento y TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito. Para calcularla debemos hallar sus componentes por separado (esto resultará de realizar primero el producto escalar entre dos funciones vectoriales modales), es

decir calcularemos primero la componente 'x', después la componente 'y' y las sumaremos para obtener el resultado final, entonces:

$$I_{mk}^{(TE,TE)}(x, y) = I_{xmk}^{(TE,TE)}(x, y) + I_{ymk}^{(TE,TE)}(x, y) \quad (3.66)$$

y de forma genérica tenemos:

$$I_{mk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = I_{xmk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) + I_{ymk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) \quad (3.67)$$

que es válida para cualquier combinación TE y TM de los modos en la caja de apantallamiento y en la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito. Comenzamos por tanto con la componente x:

$$I_{xmk}^{(TE,TE)}(x, y) = \int_{SE} e_{xm}^{(TE)}(x, y) e_{xk}^{(TE)}(x, y) ds \quad (3.68)$$

Introduciendo las correspondientes funciones modales en la ecuación 3.68 tenemos que:

$$I_{xmk}^{(TE,TE)}(x, y) = \int_{SE} N_{ex}^{(TE)}(m) \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-c)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d)\right] N_{ex}^{(TE)}(k) \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x-e)\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y-f)\right] ds \quad (3.69)$$

con lo que tenemos una integral de superficie, siendo 'S1' la superficie del circuito (en nuestro caso una única línea impresa sobre un dieléctrico). Separaremos dicha integral en dos partes: una que dependa de 'x' y otra de 'y'. Por tanto tenemos:

$$I_{xmk}^{(TE,TE)}(x, y) = N_{ex}^{(TE)}(m) N_{ex}^{(TE)}(k) I_{xmk}^{(TE,TE)}(x) I_{xng}^{(TE,TE)}(y) \quad (3.70)$$

Siendo:

$$I_{xmk}^{(TE,TE)}(x) = \int_e^{e+l} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-c)\right] \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x-e)\right] dx$$

$$I_{xng}^{(TE,TE)}(y) = \int_f^{f+w} \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d)\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y-f)\right] dy$$

Puesto que no sabemos resolver las integrales de la ecuación anterior directamente, las transformaremos mediante relaciones sencillas trigonométricas, quedándonos:

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \int_e^{e+l} \frac{1}{2} \left(\cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] + \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] \right) dx$$

$$I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y) = \int_f^{f+w} \frac{1}{2} \left(\sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] + \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] \right) dy$$

Sacamos fuera de la integrales todo lo que no dependa de 'x' o 'y' y separamos en dos integrales:

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \frac{1}{2} \left(\int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] dx + \int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] dx \right)$$

$$I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y) = \frac{1}{2} \left(\int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy + \int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy \right)$$

integramos en 'x' e 'y':

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l} \right)} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right]_e^{e+l} + \frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l} \right)} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right]_e^{e+l} \right)$$

$$I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right]_f^{f+w} - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right]_f^{f+w} \right)$$

por tanto nos queda:

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l} \right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a}(e+l-c) + k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l} \right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a}(e+l-c) - k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] \right] \right)$$

$$I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w-d) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] \right) - \right.$$

$$\frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w}\right)} \left(\cos\left[\frac{n\pi}{b}(f+w-d) - g\pi\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{b}(f-d)\right] \right)$$

Particularizando un poco más, para nuestro caso sabemos que tanto 'c' como 'd' como 'e' van a ser nulos y entonces (devido a la ausencia de offset de la caja de apantallamiento en el espacio y también debido a que la línea está impresa sobre el dieléctrico, sin tener ningún desplazamiento sobre la caja de apantallamiento):

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l}\right)} \sin\left[\frac{m\pi}{a}l + k\pi\right] + \frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l}\right)} \sin\left[\frac{m\pi}{a}l - k\pi\right] \right)$$

$$I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w}\right)} \left(\cos\left[\frac{n\pi}{b}(f+w) + g\pi\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{b}f\right] \right) - \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w}\right)} \left(\cos\left[\frac{n\pi}{b}(f+w) - g\pi\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{b}d\right] \right) \right)$$

Ahora ya tenemos algo más sencillo. Para $I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y)$ ya no podemos seguir simplificando. Sin embargo para $I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x)$ también vamos a imponer la condición de que $a = l$ (ya que la longitud de la línea impresa es igual a la longitud de la caja de apantallamiento), de este modo nos queda:

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} + k\right)} \sin\left[\pi(m+k)\right] + \frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} - k\right)} \sin\left[\pi(m-k)\right] \right)$$

En la expresión anterior podemos observar que al ser m y k números enteros, el seno siempre se va a anular, y por tanto $I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x)$ siempre va a ser nulo, excepto cuando $m=k$ (ya que $m=-k$ no es válido porque los índices no pueden ser negativos. Esto es así porque analizamos una línea microstrip que conecta los puertos de entrada y salida). Cuando m sea igual a k tendremos una indeterminación que analizaremos más adelante.

Una vez obtenida la solución de esta primera integral para la componente 'x' y el modo TE tanto de la caja de apantallamiento como de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito, vamos a ver que la resolución para el resto de los modos será similar. Veámosla para el modo TM tanto de la caja como de la guía equivalente. Para estas formas modales tendremos:

$$I_{x_{mk}}^{(TM,TM)}(x, y) = \int_{SE} e_{xm}^{(TM)}(x, y) e_{xk}^{(TM)}(x, y) \quad (3.71)$$

Introduciendo las correspondientes funciones modales en la ecuación tenemos que:

$$I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x, y) = \int_{SE} N_{ex}^{(TM)}(m) \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right] N_{ex}^{(TM)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] ds \quad (3.72)$$

podemos observar la similitud de la ecuación 3.72 con la ecuación 3.69. Dichas integrales en cuanto a forma tan solo difieren en los términos de normalización $N_{ex}^{(TE)}(m)$ y $N_{ex}^{(TM)}(k)$. Es por ello que la solución a la integral de la ecuación 3.72 será:

$$I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(m) N_{ex}^{(TM)}(k) I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x) I_{x_{ng}}^{(TM, TM)}(y) \quad (3.73)$$

siendo las integrales las mismas que el caso anterior:

$$I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x) = \int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] dx \quad (3.74)$$

$$I_{x_{ng}}^{(TM, TM)}(y) = \int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] dy \quad (3.75)$$

Para el resto de las posibilidades (tanto para el modo TE de la caja y el modo TM de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea como para el modo TM de la caja de apantallamiento y TE de la guía equivalente) sucederá lo mismo. Esto es debido a la similitud de las funciones modales TE y TM de la caja y de la guía equivalente para la componente 'x'. Por tanto tendremos una solución común para todas formas modales para la componente 'x', simplemente calculando:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi_1)}(m) N_{ex}^{(\xi_2)}(k) I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \quad (3.76)$$

siendo

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] dx \quad (3.77)$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] dy \quad (3.78)$$

y ξ_1 las formas modales en la caja de apantallamiento:

$$\xi_1 = \left\{ \begin{matrix} TE \\ TM \end{matrix} \right\}$$

y ξ_2 las formas modales en la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito:

$$\xi_1 = \left\{ \begin{matrix} TE \\ TM \end{matrix} \right\}$$

Procediendo igual que anteriormente para calcular las integrales, llegamos a:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l} \right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a} (e + l - c) + k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a} (e - c) \right] \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l} \right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a} (e + l - c) - k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a} (e - c) \right] \right] \right)$$

donde imponiendo las condiciones $e=c=0$ y $a=l$ nos queda:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{a}(m+k)} \sin \left[\pi(m+k) \right] + \frac{1}{\frac{\pi}{a}(m-k)} \sin \left[\pi(m-k) \right] \right) \quad (3.79)$$

Si nos fijamos detenidamente en la ecuación anterior, podemos ver que el seno de un número entero de veces π siempre va a ser cero. Por tanto dicha integral se anulará para todos los valores de m y k , excepto para los que tengamos una indeterminación al dividir por cero ($m=k$). Para la otra integral tenemos que:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w - d) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} (f - d) \right] \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \left(\left[\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w - d) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} (f - d) \right] \right] \right) \right)$$

e imponiendo la condición de que $d=0$:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right) \right) \quad (3.80)$$

Ahora ya tenemos la solución para las formas modales para la componente 'x', a falta de algunas peculiaridades (como se puede apreciar en las expresiones anteriores hay casos en los que el resultado obtenido da infinito. Vease por ejemplo, en la ecuación 3.80 que se hace infinito para $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$. En estos casos debemos desarrollar expresiones alternativas). Al tener todas las integrales la misma forma para la componente 'x' vamos, a trabajar con la solución general para

dicha componente. Podemos ver que de las ecuaciones de la guía de ondas se deduce que, cuando 'n' sea nulo, la integral tendrá valor nulo. También podemos observar que la solución obtenida puede dar lugar a indeterminaciones, veamos cuales son:

-cuando $\frac{m}{a} = \frac{k}{l}$ (para nuestro sistema también es válida la condición m=k ya que a=l) se produce una indeterminación en la ecuación 3.79 al dividir por cero. Para resolver dicha indeterminación partimos de las integrales anteriores e imponemos al inicio dicha condición , por tanto:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-c)\right] \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-e)\right] dx$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d)\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y-f)\right] dy$$

procediendo igual que anteriormente:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \frac{1}{2} \left(\cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{m\pi}{a}(x-e)\right] + \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{m\pi}{a}(x-e)\right] \right) dx$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \frac{1}{2} \left(\sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f)\right] + \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f)\right] \right) dy$$

Podemos observar que respecto a la ecuación que teníamos antes de imponer la nueva condición solo cambia la integral que depende de 'x'. Resolvemos la integral:

$$\begin{aligned} I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) &= \int_e^{e+l} \frac{1}{2} \left(\cos\left[\frac{m\pi}{a}(2x-c-e)\right] + \cos\left[\frac{m\pi}{a}(e-c)\right] \right) dx = \\ &= \frac{a}{4m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{a}(2x-c-e)\right] + \frac{x}{2} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(e-c)\right] \Big|_e^{e+l} = \\ &= \frac{a}{4m\pi} \left(\sin\left[\frac{m\pi}{a}(2l-c+e)\right] - \sin\left[\frac{m\pi}{a}(e-c)\right] \right) + \frac{l}{2} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(e-c)\right] \end{aligned}$$

De este modo ya tenemos la solución cuando $\frac{m}{a} = \frac{k}{l}$. Como sabemos que en nuestro sistema e=c=0, imponemos dicha condición, y tenemos:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{l}{2}$$

Si introducimos ahora la condición $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$ resulta que 3.80 se hace infinito. Procedemos igual que anteriormente e introducimos dicha condición al inicio. Sólo cambiará la segunda de las integrales (la que depende de 'n' y 'g') quedándonos:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d)\right] \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y-f)\right] dy$$

por tanto:

$$\begin{aligned} I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) &= \int_f^{f+w} \frac{1}{2} \left(\sin\left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{n\pi}{b}(y-f)\right] + \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{n\pi}{b}(y-f)\right] \right) dy = \\ &= \int_f^{f+w} \frac{1}{2} \left(\sin\left[\frac{n\pi}{b}(2y-d-f)\right] + \sin\left[\frac{n\pi}{b}(f-d)\right] \right) dx = \\ &= \left[\frac{b}{4n\pi} \cos\left[\frac{n\pi}{b}(2y-d-f)\right] + \frac{y}{2} \cos\left[\frac{n\pi}{b}(f-d)\right] \right]_f^{f+w} dx = \\ &= \frac{b}{4n\pi} \left[\sin\left[\frac{n\pi}{b}(2w-d+f)\right] - \sin\left[\frac{n\pi}{b}(f-d)\right] \right] + \frac{l}{2} \cos\left[\frac{n\pi}{b}(f-d)\right] \end{aligned}$$

Si ahora imponemos la condición $d=0$, tenemos para $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{b}{4n\pi} \left[\sin\left[\frac{n\pi}{b}(2w+f)\right] - \sin\left[\frac{n\pi}{b}f\right] \right] + \frac{l}{2} \cos\left[\frac{n\pi}{b}f\right]$$

Ya tenemos nuestra solución cuando $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$. Como cabía esperar, la indeterminación $\frac{n}{b} = -\frac{g}{w}$ no es válida al no existir los índices negativos.

También debemos tener en cuenta para cada forma modal el primer valor de los índices m , n , k , g , ya que cuando estos toman valor nulo surgen nuevas indeterminaciones. Cuando $m=0$ y $k=0$ tenemos una nueva indeterminación. Sólo cambiará la primera de las integrales al introducir esta condición en las integrales de partida. Evaluamos y tenemos que:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \int_e^{e+l} (1+1) dx$$

por tanto:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = l$$

Podemos observar que 'm' tomará valor nulo únicamente cuando estemos estudiando la forma modal TE de nuestra caja de apantallamiento, mientras que k se anulará únicamente para la forma modal TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito.

Después de obtener la solución de la integral anterior ya tenemos totalmente definida la integral $I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$, es decir, la integral que combina las formas modales TE y TM para la componente 'x' de la estructura y del circuito. Se puede decir entonces que:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi_1)}(m) N_{ex}^{(\xi_2)}(k) I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y)$$

Siendo:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } m=k \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f+w) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right] - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f+w) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right] \right)$$

Excepto si $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$ (ya que $\frac{n}{b} = -\frac{g}{w}$ no es posible). En este caso la integral $I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x)$ queda igual, sin embargo:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{b}{4n\pi} \left[\sin \left[\frac{n\pi}{b} (2w+f) \right] - \sin \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right] + \frac{l}{2} \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right]$$

Además de lo definido anteriormente, para tener un resultado completo, tendremos en cuenta el rango de variación de los índices para cada integral. Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TE, TE)}(x, y)$, por ser el modo TE de la caja apantallada:

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \dots \\ n &= 0, 1, 2, \dots \\ m &= n \neq 0 \end{aligned}$$

Por ser el modo TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces tenemos dos nuevas indeterminaciones:

-si $m=0$ y $k=0$ tenemos que $I_{x_{ng}}^{(TE,TE)}(y)$ no cambia, mientras que

$$I_{x_{mk}}^{(TE,TE)}(x) = l$$

-si $n=0$ entonces:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = 0$$

y por tanto:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TE, TM)}(x, y)$ por ser el modo TE de la caja de apantallamiento:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = n \neq 0$$

por ser el modo TM de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso tenemos una nueva indeterminación:

-si $n=0$ entonces:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = 0$$

y por tanto:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TM, TE)}(x, y)$ por ser el modo TM de la caja de apantallamiento, tendremos los siguientes rangos de variación para los índices:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

por ser el modo TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

En este caso tampoco tenemos ninguna nueva indeterminación. Mientras que para la última de las integrales $I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x, y)$ por ser el modo TM de la caja, tendremos los siguientes rangos de variación para los índices:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Por ser el modo TM de la guía equivalente utilizada para representar la corrientes inducidas en el circuito, tendremos los siguientes rangos de variación para los índices:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

donde tampoco tendremos ninguna nueva indeterminación. Sólo nos queda ya recordar los factores de normalización que ya sabemos de secciones anteriores:

-para la caja:

$$N_{ex}^{(TE)}(m, n) = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

$$N_{ex}^{(TM)}(m, n) = -\frac{2}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

-para la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en el circuito:

$$N_{ex}^{(TE)}(k, g) = -\frac{2g}{w \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}}$$

$$N_{ex}^{(TM)}(k, g) = -\frac{\sqrt{2E_n} k}{l \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}}$$

Una vez que hemos calculado las integrales para la componente 'x' veamos lo que pasa para la componente 'y'. De la ecuacion 3.51 que corresponde a la funcion modal de la guía para la componente 'y', junto a las ecuaciones 3.22 y 3.46, podemos deducir que igual que pasaba con la componente 'x', va a ser necesario resolver una única integral para la componente 'y'. Por tanto tenemos que:

$$I_{ymk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{SE} e_{ym}^{(\xi_1)}(x, y) e_{yk}^{(\xi_2)}(x, y) ds \quad (3.81)$$

siendo:

$$e_{ym}^{(\xi_1)}(x, y) = N_{ey}^{(\xi_1)}(m) \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right] \quad (3.82)$$

$$e_{yk}^{(\xi_2)}(x, y) = N_{ey}^{(\xi_2)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] \quad (3.83)$$

por tanto tenemos:

$$I_{ymk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{SE} N_{ey}^{(\xi_1)}(m) \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x - c) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y - d) \right] N_{ey}^{(\xi_2)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] ds \quad (3.84)$$

Igual que antes esto también se puede escribir de una forma más general utilizando la ya conocida notación:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = N_{ey}^{(\xi_1)}(m) N_{ey}^{(\xi_2)}(k) I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \quad (3.85)$$

siendo:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) \right] \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x-e) \right] dx \quad (3.86)$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy \quad (3.87)$$

transformando las integrales en otras que sabemos resolver nos queda:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \frac{1}{2} \left[\cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] - \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] \right] dx$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \int_f^{f+w} \frac{1}{2} \left[\sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] + \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] \right] dy$$

sacamos fuera de las integrales todo lo que no dependa de 'x' o 'y':

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left[\int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] dx - \int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right] dx \right]$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left[\int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy + \int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy \right]$$

integramos en 'x' e 'y', obteniendo:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l} \right)} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{k\pi}{l}(x-e) \right]_e^{e+l} - \frac{1}{\pi \left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l} \right)} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{k\pi}{l}(x-e) \right]_e^{e+l} \right)$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) + \frac{g\pi}{w}(y-f) \right]_f^{f+w} - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right]_f^{f+w} \right)$$

$$- \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w}\right)} \cos \left[\frac{n\pi}{b}(y-d) - \frac{g\pi}{w}(y-f) \right]_f^{f+w}$$

por tanto nos queda que la solución a dichas integrales es:

$$\begin{aligned} I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} - \frac{k}{l}\right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a}(e+l-c) - k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi\left(\frac{m}{a} + \frac{k}{l}\right)} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a}(e+l-c) + k\pi \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] \right] \right) \\ I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) &= \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w}\right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w-d) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w}\right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w-d) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] \right] \right) \end{aligned}$$

Imponiendo la condición $e=c=0$ y $a=1$, tenemos:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{a}(m-k)} \left[\sin \left[\pi(m-k) \right] \right] - \frac{1}{\frac{\pi}{a}(m+k)} \left[\sin \left[\pi(m+k) \right] \right] \right)$$

que como sabemos se anulará siempre que 'm' sea distinto a 'k'. Si imponemos ahora la condición $d=0$ (offset de la caja nulo):

$$\begin{aligned} I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) &= \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w}\right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}f \right] \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi\left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w}\right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}f \right] \right] \right) \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos la solución a las integrales de la ecuación 3.85, habrá que tener en cuenta, igual que sucedía en el caso anterior, que tendremos casos particulares para los casos en los que las integrales anteriores se hagan infinitas. Por tanto de la ecuación 3.85 se deduce que:

-si $m=0$ ó $k=0$ entonces:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

-si $g=0$ entonces:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

-si $\frac{m}{a} = \frac{k}{l}$ (para nuestro caso basta con que $m = k$ ya que $a=l$) la integral $I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y)$ queda igual, sin embargo deberemos calcular la siguiente integral:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left[\int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) - \frac{m\pi}{a}(x-e) \right] - \cos \left[\frac{m\pi}{a}(x-c) + \frac{m\pi}{a}(x-e) \right] dx \right]$$

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left[\int_e^{e+l} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] - \cos \left[\frac{m\pi}{a}(2x-c-e) \right] dx \right]$$

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{1}{2} \left[x \cos \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] - \frac{a}{2m\pi} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(2x-c-e) \right] \right]_e^{e+l}$$

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{a}{4m\pi} \left[\sin \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right] - \sin \left[\frac{m\pi}{a}(2l-c+e) \right] \right] + \frac{l}{2} \cos \left[\frac{m\pi}{a}(e-c) \right]$$

imponiendo la condición $e=c=0$ y $a=l$:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \frac{l}{2}$$

-si $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$ (ya que $\frac{n}{b} = -\frac{g}{w}$ no es posible) la integral $I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x)$ queda igual, sin embargo debemos calcular una nueva forma para la siguiente integral:

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left[\int_f^{f+w} \sin \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] + \sin \left[\frac{n\pi}{b}(2y-d-f) \right] dy \right]$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left[y \sin \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] - \frac{a}{2m\pi} \sin \left[\frac{m\pi}{a}(2y-f-d) \right] \right]_e^{e+l}$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{b}{4n\pi} \left[\sin \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] - \sin \left[\frac{n\pi}{b}(2w-d+f) \right] \right] + \frac{1}{2} w \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right]$$

e imponiendo la condición $d=0$:

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{b}{4n\pi} \left[\sin \left[\frac{n\pi}{b} f \right] - \sin \left[\frac{n\pi}{b} (2w + f) \right] \right] + \frac{1}{2} w \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right]$$

Por tanto la solución para la integral 3.85 queda de la siguiente forma:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m=k \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} + \frac{g}{w} \right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w) + g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right] - \frac{1}{\pi \left(\frac{n}{b} - \frac{g}{w} \right)} \left[\cos \left[\frac{n\pi}{b} (f + w) - g\pi \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right] \right] \right)$$

-si $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$ la integral $I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x)$ queda igual, sin embargo:

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = \frac{b}{4n\pi} \left[\sin \left[\frac{n\pi}{b} f \right] - \sin \left[\frac{n\pi}{b} (2w + f) \right] \right] + \frac{1}{2} w \cos \left[\frac{n\pi}{b} f \right]$$

Además de lo definido anteriormente, para tener un resultado completo, tendremos en cuenta el rango de variación de los índices para cada integral. Para la integral $I_{y_{mk}}^{(TE, TE)}(x, y)$, por ser el modo TE de la caja de apantallamiento:

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \dots \\ n &= 0, 1, 2, \dots \\ m &= n \neq 0 \end{aligned}$$

Mientras que por ser el modo TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes impresas en el circuito, el rango de variación de los índices será:

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, 2, \dots \\ g &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

donde tendremos que si $m=0$ y $k=0$, entonces:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

para la integral $I_{y_{mk}}^{(TE, TM)}(x, y)$, por ser el modo TE de la caja de apantallamiento:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = n \neq 0$$

por ser el modo TM de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes impresas en el circuito, el rango de variación de los índices será:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

tenemos que si $m=0$, entonces:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Igualmente si $g=0$, entonces:

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Para la integral $I_{y_{mk}}^{(TM, TE)}(x, y)$, por ser el modo TM de la caja de apantallamiento:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

por ser el modo TE de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes impresas en el circuito, el rango de variación de los índices será:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

En este caso tenemos que si $k=0$, entonces:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Para la última de las integrales $I_{y_{mk}}^{(TM, TM)}(x, y)$, por ser el modo TM de la caja de apantallamiento:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

por ser el modo TM de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes impresas en el circuito, el rango de variación de los índices será:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

donde tendremos que si $g=0$, entonces:

$$I_{y_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = 0$$

y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Los factores de normalización para la coordenada 'y' también fueron calculados en la sección segunda y tercera del presente capítulo. Los recopilamos ahora para tener la expresión analítica completa de las integrales de acoplo. Para la caja de apantallamiento:

$$N_{ey}^{TE} = -\frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

$$N_{ey}^{TM} = -\frac{2}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

Para la guía equivalente utilizada para representar las corrientes impresas en el circuito:

$$N_{ey}^{(TE)}(k) = -\frac{2k}{l \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}}$$

$$N_{ey}^{(TM)}(k) = \frac{\sqrt{2E_n g}}{w \sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}}$$

3.5. Tensiones en una línea de transmisión

El caso más simple que podemos tratar de campos con variación temporal es el de la línea de transmisión ideal. En este caso vamos a suponer que el campo eléctrico tiene una sola componente, al igual que el campo magnético. Además vamos a despreciar cualquier variación con las coordenadas transversales, es decir, suponemos que la única variación que existe es con la coordenada longitudinal z hacia donde se dirige la línea. Además vamos a suponer que estamos en una región sin fuentes, es decir, lejos existen las fuentes que generan los campos, pero en la región donde estamos no hay fuentes. Por tanto las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia quedan:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (3.88)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (3.89)$$

Si tratamos coordenadas cartesianas los rotacionales los calculamos fácilmente:

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

quedando:

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y$$

donde ha desaparecido el carácter vectorial trasladándose a un problema escalar.

Las líneas de campo eléctrico definen una tensión entre los dos conductores de la línea que llamaremos onda de tensión $V(z)$. Sin embargo el campo magnético se propaga en ondas que rodean los conductores produciendo una corriente en cada uno de los conductores de la línea que llamaremos $I(z)$. En nuestros cálculos no utilizaremos el campo eléctrico y el campo magnético directamente, sino que utilizaremos lo que estos campos suponen en la línea: la onda de tensión y corriente.

Ya sabemos que el problema se ha traducido a un problema escalar, pudiendo escribir en un dominio frecuencial:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z) \quad (3.90)$$

Si ahora realizamos lo mismo con la otra ecuación tenemos:

$$\nabla \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \bar{H}_y & 0 \end{vmatrix} = -\bar{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

quedando:

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega\epsilon V(z) \quad (3.91)$$

Ya que nuestro objetivo es encontrar las ondas de tensión y corriente derivamos la ecuación 3.90 teniendo:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -jw\mu \frac{dI(z)}{dz}$$

y sustituimos:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -jw\mu \cdot (-jw\epsilon)V(z)$$

quedandonos:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -w^2\mu\epsilon V(z)$$

Vamos a definir una constante que depende de la frecuencia y el medio, llamada constante de propagación de el medio:

$$\beta^2 = w^2\mu\epsilon$$

por tanto:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} + \beta^2V(z) = 0$$

obtenemos una ecuación diferencial de coeficientes constantes. Para resolverla obtenemos su polinomio característico:

$$x^2 + \beta^2 = 0$$

las raíces de dicho polinomio son:

$$x^2 = -\beta^2 \quad ; \quad x = \pm j\beta$$

Luego la solución puede escribirse como:

$$V(z) = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}$$

Donde el sumando de la izquierda representa físicamente la onda incidente, ya que se propaga en la dirección z y sentido positivo, mientras que el sumando de la derecha se propaga en dirección z y sentido negativo representando físicamente la onda reflejada. Las constantes A y

B se calcularán imponiendo las condiciones de contorno del problema. Para hallar la onda de corriente derivamos la expresión anterior, obteniendo:

$$\frac{dV(z)}{dz} = A(-j\beta)e^{-j\beta z} + B(j\beta)e^{j\beta z} = j\beta \left[-Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z} \right]$$

Por tanto:

$$I(z) = \frac{\beta}{w\mu} \left[-Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z} \right]$$

siendo

$$Z_c = \frac{w\mu}{\beta}$$

que definiremos como impedancia característica de la línea de transmisión. Luego entonces:

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} \left[-Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z} \right]$$

$$V(z) = Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}$$

Por supuesto en el tiempo:

$$i(z, t) = \text{Re} \left[I(z) e^{j\omega t} \right]$$

$$V(z, t) = \text{Re} \left[V(z) e^{j\omega t} \right]$$

En la figura 3.1 podemos observar el circuito equivalente en línea de transmisión de la estructura microstrip apantallada. A la izquierda tenemos la estructura apantallada vista desde la cara por la que introducimos la excitación. A la derecha podemos ver su equivalente en línea de transmisión. En ambas figuras la parte superior delimitada por 'h' representa la parte de aire de dicha estructura, mientras que la parte inferior delimitada por 'l' representa la parte de dieléctrico de la estructura. La impedancia de entrada Z_1 la llamaremos en nuestros cálculos $Z_{in}^{(Aire)}$ mientras que a la impedancia de entrada Z_2 la llamaremos $Z_{in}^{(linea)}$.

Ahora lo único que queda es calcular las constantes A y B que dependen de las condiciones de contorno del problema. Como sabemos tenemos una impedancia de carga conectada al puerto

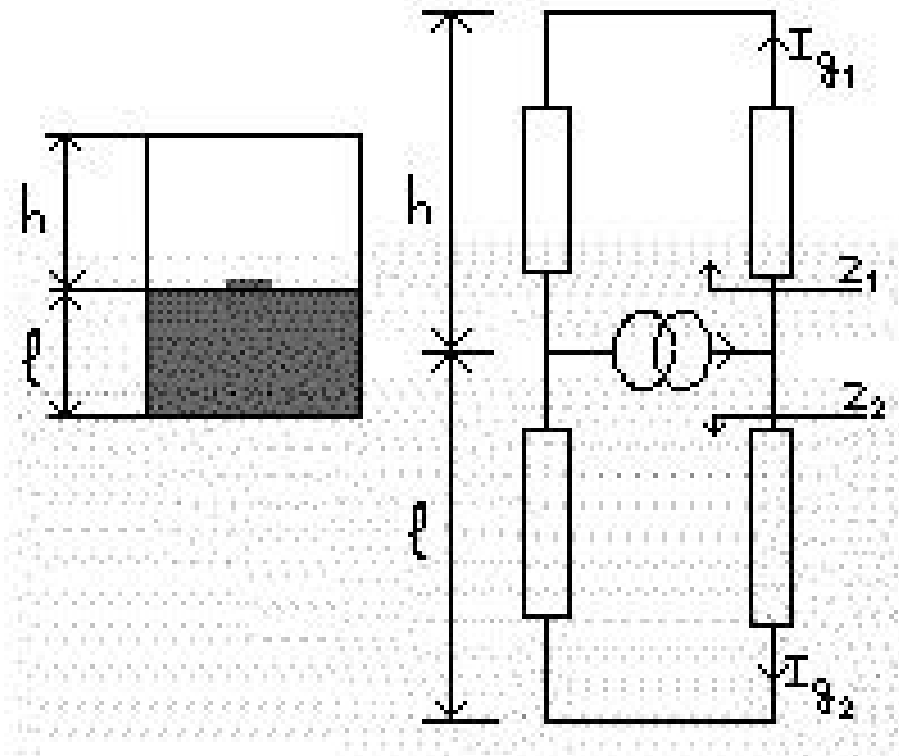


Figura 3.1: Representación del circuito equivalente en línea de transmisión de la estructura microstrip apantallada.

de salida, por lo que van a existir tanto onda incidente como reflejada. Evaluamos las ecuaciones anteriores en $z=0$ quedando:

$$I(z = 0) = \frac{1}{Z_c}(A - B) = I_l$$

$$V(z = 0) = A + B = V_l$$

Se cumple la ley de Ohm:

$$Z_l = \frac{V_l}{I_l}$$

luego:

$$Z_l = Z_c \frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}}$$

definiendo $\rho = \frac{B}{A}$ como el coeficiente de reflexión en la carga tenemos:

$$Z_l = Z_c \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

3.5.1. Aplicación a nuestro problema

Como se vió en capítulos anteriores, en la expresión de las funciones de Green que necesitábamos para analizar nuestro problema, aparecen las tensiones y corrientes en el circuito equivalente en línea de transmisión de la figura 3.1. En esta sección vamos a proceder al cálculo de dichos voltages en el circuito.

En la sección anterior, cuando existía una carga conectada a una línea de transmisión como sucede en nuestro caso, se podía aplicar la ley de Ohm para calcular la tensión en la carga:

$$V_m = I_g Z_T \quad (3.92)$$

En nuestro caso vamos a tomar una intensidad producida por la excitación (I_g) de un amperio. Aplicando la teoría en los nodos tenemos:

$$I_g = I_{g1} + I_{g2} \quad (3.93)$$

Donde I_{g1} es la intensidad que circula por la parte superior del circuito equivalente en línea de transmisión de la estructura apantallada (véase figura 3.1), mientras que I_{g2} es la intensidad que circula por la parte inferior del circuito equivalente en línea de transmisión de la estructura microstrip apantallada (véase figura 3.1). Calculando la impedancia total equivalente del sistema tenemos:

$$Z_T = \frac{Z_{in}^{(\eta_1)(\eta_2)} Z_{in}^{(\eta_1)(\eta_2)}}{Z_{in}^{(\eta_1)(\eta_2)} + Z_{in}^{(\eta_1)(\eta_2)}} \quad (3.94)$$

Donde:

$$\eta_1 = \left\{ \begin{array}{l} TE \\ TM \end{array} \right\}$$

$$\eta_2 = \left\{ \begin{array}{l} Aire \\ línea \end{array} \right\}$$

Ahora hallamos la constante de propagación del medio como definimos en la sección anterior:

$$\beta = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r^{(\eta_2)} - k_x^2 - k_y^2} \quad (3.95)$$

siendo como ya hemos deducido anteriormente:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

por tanto nos queda la constante de propagación del medio como:

$$\beta = \sqrt{k_0^2 \epsilon_r^{(\eta_2)} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

y

$$K = K_o \sqrt{\epsilon \mu}$$

Para calcular K debemos tener en cuenta que:

$$K_o = 2\pi f$$

y $\mu_o = 4\pi 10^{-7}$, $\epsilon_o = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$ y f la frecuencia de trabajo. También deberemos tener en cuenta al calcular la constante de propagación del medio que tomaremos como constantes de propagación relativas $\epsilon_r^{(Aire)} = 1$ y $E_r^{(linea)}$ cualquier valor que represente la constante dieléctrica relativa de un sustrato de material dieléctrico.

Haciendo un inciso, debemos señalar que para calcular el factor β debemos llevar cuidado, ya que su expresión procede del cálculo de una raíz. Cuando el valor sea un valor real tomaremos el positivo, mientras que si es un valor imaginario tomaremos el negativo. La finalidad de esto se ve al introducir el valor de β en la expresión $e^{-j\beta z}$.

Supongamos que hemos obtenido lo siguiente al calcular la raíz:

$$\beta = \pm \alpha$$

Siendo α un número real la expresión queda:

$$e^{-j\alpha z}$$

Como podemos observar hemos tomado la solución positiva de la raíz indicando una onda que se propaga en la dirección positiva del eje z . Sin embargo si obtenemos como solución de la raíz un valor imaginario:

$$\beta = \pm j\alpha$$

tomaremos la solución negativa, con la finalidad de que la onda resultante se atenúe al propagarse en la dirección positiva del eje z . En caso contrario obtendríamos algo físicamente imposible, es decir una onda que crece (en lugar de atenuarse) mientras se propaga.

$$e^{-j(-j\alpha)z} = e^{-\alpha z}$$

Ahora vamos a calcular la impedancia característica de la línea. Esta va a tener una expresión para la forma modal TE:

$$Z_c^{(\eta_2)} = \frac{w\mu}{\beta} \quad (3.96)$$

Mientras que tendrá otra expresión para el modo TM:

$$Z_c^{(\eta_2)} = \frac{\beta}{w\epsilon} \quad (3.97)$$

De forma genérica podremos escribir $Z_c^{(\eta_1, \eta_2)}$, donde como sabemos:

$$\eta_1 = \left\{ \begin{array}{l} TE \\ TM \end{array} \right\}$$

$$\eta_2 = \left\{ \begin{array}{l} Aire \\ línea \end{array} \right\}$$

Por tanto para hacer referencia a la ecuación 3.96 escribiremos $Z_c^{(TE, \eta_2)}$, mientras que para hacer referencia a la ecuación 3.97 escribiremos $Z_c^{(TM, \eta_2)}$.

La impedancia de entreda viene definida en función de Z_c como:

$$Z_{in}(z) = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta z)} \quad (3.98)$$

Imponiendo la condición de que $Z_L = 0$:

$$Z_{in}^{(\eta_1, \text{linea})} = j Z_c^{(\eta_1, \text{linea})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{linea})} l)$$

Ahora ya tenemos una impedancia de entrada para la línea que dependerá de la longitud de la línea. Mientras que la impedancia de entrada para el aire nos queda:

$$Z_{in}^{(\eta_1, \text{Aire})} = j Z_c^{(\eta_1, \text{Aire})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{Aire})} h)$$

Sabemos que $I_g = 1$ y por la ley de Ohm tenemos $V_m = Z_T$, por tanto llegamos a la siguiente expresión para las tensiones en la línea de transmisión:

$$V_m^{(\eta_1)} = Z_T = \frac{Z_{in}^{(\eta_1, \text{Aire})} Z_{in}^{(\eta_1, \text{linea})}}{Z_{in}^{(\eta_1, \text{Aire})} + Z_{in}^{(\eta_1, \text{linea})}} \quad (3.99)$$

Llegamos a la siguiente expresión que habrá que evaluar tanto para el modo TE como para el modo TM:

$$V_m^{(\eta_1)} = \frac{j Z_c^{(\eta_1, \text{Aire})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{Aire})} h) j Z_c^{(\eta_1, \text{linea})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{linea})} l)}{j Z_c^{(\eta_1, \text{Aire})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{Aire})} h) + j Z_c^{(\eta_1, \text{linea})} \tan(\beta^{(\eta_1, \text{linea})} l)} \quad (3.100)$$

3.6. Cálculo de la excitación

Una vez obtenida la matriz $R(i,k)$, según vimos en el capítulo segundo, en la sección "formulación en ecuación integral", en la ecuación 2.38, sólo queda calcular las funciones gamma de la excitación definidas en la ecuación 2.34 para obtener los factores α_k que son los necesarios para el cálculo de las corrientes inducidas en el circuito, y por consiguiente los necesarios para hallar la impedancia de entrada del circuito.

Para calcular las funciones gamma de la excitación nos valdremos de las funciones modales para la componente x de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Dichas funciones están calculadas en la sección "formas modales apropiadas para nuestra línea impresa". Por comodidad vamos a recordarlas:

-para el modo TE tenemos:

$$e_{x_k}^{(TE)}(x, y) = N_{ex}^{(TE)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

-mientras que para el modo TM:

$$e_{x_k}^{(TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

Como ya hemos comentado en alguna ocasión anterior estas dos funciones son muy parecidas. Vimos que sólo difieren en el término de normalización $N_{ex}^{(TE)}(k)$. Por tanto, dichas funciones también se puede escribir de la siguiente forma:

$$e_{x_k}^{(\xi)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

Siendo:

$$\xi = \{TE, TM\}$$

Ya no tendremos que calcular las funciones gamma dos veces, utilizando la simplificación anterior bastará con hacerlo una vez. Por tanto vamos a empezar hallando la función $\gamma_i^{(1)(\xi)}$. Lo haremos utilizando la definición de la ecuación 2.34 del capítulo segundo. Según dicha definición tenemos que:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = \int_{y_1(1)}^{y_2(1)} \bar{e}_{x_i}^{(\xi)}(a(1), y) dy \quad (3.101)$$

El punto 'a(1)' se corresponde con 'e' que en nuestro caso es el punto donde está situado el puerto de entrada, mientras que los puntos 'y₁(1)' y 'y₂(1)' son respectivamente 'f' y 'f+w'. Aplicando todo esto a la ecuación tenemos:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = \int_f^{f+w} \bar{e}_{x_i}^{(\xi)}(e, y) dy \quad (3.102)$$

Añadiendo también a la ecuación la función $\bar{e}_{x_i}^{(\xi)}(e, y)$ que no es más que la descrita anteriormente y evaluando en el punto a(1) tenemos:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = \int_f^{f+w} N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(e - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right] dy$$

Operando nos queda:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = N_{ex}^{(\xi)}(k) \int_f^{f+w} \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y-f) \right] dy$$

Integrando en y :

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = N_{ex}^{(\xi)}(k) \frac{w}{g\pi} \sin \left(\frac{g\pi}{w}(y-f) \right) \Big|_f^{(f+w)}$$

y llegamos a la siguiente expresión:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = N_{ex}^{(\xi)}(k) \frac{w}{g\pi} \sin(g\pi)$$

Sabemos que g es un número entero, por este motivo podemos observar que curiosamente la expresión anterior se va anular siempre que g sea distinto de cero. Para g igual a cero tendremos que volver a analizar la integral para saber su valor. Por tanto imponemos dicha condición y tenemos:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} \Big|_{g=0} = N_{ex}^{(\xi)}(k) \int_f^{f+w} dy$$

Cuya solución es inmediata:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} \Big|_{g=0} = N_{ex}^{(\xi)}(k) w$$

Ahora ya tenemos una solución para $\gamma_i^{(1)(\xi)}$:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = \begin{cases} w N_{ex}^{(\xi)}(k) & si \quad g=0 \\ 0 & si \quad g \neq 0 \end{cases} \quad (3.103)$$

Pasemos entonces a calcular $\gamma_i^{(2)(\xi)}$. Igual que hemos echo antes para $\gamma_i^{(1)(\xi)}$ aplicamos la definición y tenemos:

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = \int_f^{f+w} e_{x_i}^{-}(\xi)(a(2), y) dy$$

puesto que $a(2) = e + l$ ($a(2)$ es el punto donde está situado el puerto de salida del circuito), tenemos que:

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = \int_f^{f+w} N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos(k\pi) \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y-f)\right] dy$$

Sabiendo que:

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ -1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \quad (3.104)$$

Tenemos que la solución es:

-si k es un número par:

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = \begin{cases} N_{ex}^{(\xi)}(k)w & \text{si } g=0 \\ 0 & \text{si } g \neq 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

-mientras que si k es impar

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = \begin{cases} -N_{ex}^{(\xi)}(k)w & \text{si } g=0 \\ 0 & \text{si } g \neq 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

También se puede escribir de la siguiente forma:

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = \begin{cases} -N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos(k\pi)w & \text{si } g=0 \\ 0 & \text{si } g \neq 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

Esto completaría todos los cálculos analíticos que necesitamos para introducir la excitación de nuestro circuito.

3.7. Desarrollo de un programa para la aplicación

El lenguaje de programación escogido para la simulación de nuestra estructura es Matlab. La elección de dicho lenguaje, y no otro, se debe a la facilidad que ofrece este para realizar operaciones matemáticas con matrices.

El programa consta de tres ficheros: un programa principal, otro para el cálculo de las tensiones en la línea de transmisión, y otro en el que se calculan las integrales que combinan las funciones de Green con las funciones de base utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, así como el término de excitación en arrays que denominaremos factores gamma.

El programa principal consta primeramente de una serie de parámetros que deberán ser introducidos por el usuario, tales como las longitudes de nuestra estructura, desplazamiento de

la estructura en el espacio, y de la línea impresa respecto al origen de coordenadas, así como frecuencias de trabajo y constantes de utilidad.

A continuación se realiza una llamada al fichero *Integrales-FGamma* que nos devuelve el cálculo de las integrales. Después comenzamos un bucle en el que hacemos un recorrido por las frecuencias de interés. En este bucle se van calculando para cada una de dichas frecuencias las tensiones y corrientes en la línea de transmisión equivalente utilizada para el cálculo de las funciones de Green. Estas tensiones se calculan en el circuito en línea de transmisión representado en la figura 3.1. El cálculo de las tensiones se realiza para todos los modos TE y TM seleccionados en el cálculo de la función de Green. Así mismo para cada una de estas frecuencias realizamos los cálculos oportunos hasta obtener la impedancia de entrada buscada. Dichos cálculos se especifican en la sección titulada "formulación en ecuación integral" dentro del capítulo de revisión técnica. Al final de dicho programa principal también obtenemos una serie de gráficas que nos ayudan a visualizar de forma más fácil los resultados obtenidos. De ello hablaremos en el capítulo de los resultados.

Otro de los tres ficheros empleados se llama *Calcular-Vm*. Este fichero será llamado desde el programa principal tantas veces como frecuencias queramos estudiar. Como hemos mencionado anteriormente éste realiza el cálculo de las tensiones en la línea de transmisión equivalente (ver figura 3.1). Este circuito representa la variación de la estructura a lo largo del eje z . La línea impresa tendrá de permitividad la del dieléctrico y su longitud será el espesor del dieléctrico. La línea superior tendrá de permitividad el aire, y su longitud será igual a la altura de la caja medida desde el dieléctrico. Todos estos parámetros los fija el usuario. En concreto se pasarán como parámetros las dimensiones tanto de la caja de apantallamiento como de la línea impresa, el espesor del dieléctrico, el espesor del aire, el número de modos a calcular, la frecuencia de trabajo y las permitividades relativas del dieléctrico y del aire (ϵ_r -línea ϵ_r -aire).

El programa comienza con una inicialización de las variables. Después comenzamos dos bucles: uno para el índice modal 'm' y otro para el 'n' (estos son los índices modales que recorren los modos de la caja de apantallamiento, y se utilizan para definir las funciones de Green del problema). El primer cálculo que realizaremos dentro de el bucle serán las constantes de propagación de las líneas de transmisión en el circuito equivalente en el aire y en la línea. Para ello utilizaremos dos constantes de propagación a lo largo del eje z en el aire: una para el modo TE (B-Aire-TE) y otra para el modo TM (B-Aire-TM). Así mismo utilizaremos otras dos constantes de propagación en la línea: una para el modo TE (B-línea-TE) y otra para el modo TM (B-línea-TM).

A continuación podemos observar en el programa un algoritmo con condiciones if y else. Utilizamos este para tomar la solución de la constante de propagación que nos convenga. Es decir, puesto que la solución de nuestra constante de propagación se obtiene al resolver una raíz cuadrada, tendremos dos soluciones: una positiva y otra negativa. En el caso que la solución sea real tomaremos la positiva, mientras que si es imaginaria tomaremos la negativa. Esto es lo que conseguimos con dicho algoritmo, y sirve para fijar siempre como dirección de propagación el eje z positivo.

Continuando con dicho fichero lo que hacemos a continuación es calcular la impedancia característica de las líneas de transmisión del circuito equivalente, tanto de la línea que modeliza el aire, como de la línea que modeliza el dieléctrico. Al igual que ocurría con dichas constantes, tendremos varias impedancias características dependiendo de si el medio es el dieléctrico o el aire. De igual manera tendremos que hacer distinción dependiendo de si el modo es TE o TM. Una vez hecho esto calculamos las impedancias que se ven en los puertos de entrada de las líneas de transmisión. El planteamiento analítico de estas impedancias de entrada se ha calculado en la sección "tensiones en una línea de transmisión. Aplicación a nuestro problema" dentro de este capítulo.

Ahora sólo queda aplicar la ecuación que nos da las tensiones buscadas para las formas modales TE y TM. Para más ayuda todos estos cálculos se especifican en el apartado "tensiones en una línea de transmisión. Aplicación a nuestro problema" dentro de este capítulo

Después de haber obtenido las tensiones mediante las ecuaciones que las relacionan con las impedancias de entrada (ecuación (3.99)), utilizaremos un algoritmo de condiciones con el fin de que los arrays que representan las tensiones se correspondan con unos índices 'm' y 'n' válidos para la forma modal que representan. Así, por ejemplo, el primer elemento de el array que representa la forma modal TE corresponderá con los índices $m=0$ y $n=1$, mientras que el último se corresponderá con los índices $m = N_m - 1$ y $n = N_n - 1$ (donde N_m es máximo valor para el índice m y N_n es el máximo valor para el índice n). Esto se debe a que en la primera iteración, en los bucles externos no tenemos en cuenta los valores calculados para el par de índices $m=0$ y $n=0$ ya que no es un par de índices válido. De igual manera, para la forma modal TM el primer elemento del array se corresponderá con los índices $m=1$ y $n=1$, mientras que el último tendrá índices $m = N_m$ y $n = N_n$. Al realizar los cálculos con este procedimiento resulta que tenemos un elemento más en el array que representa la forma modal TM que el array que representa la forma TE, sin influir esto en el resultado final.

Una vez calculada la onda de tensión podemos realizar una comprobación parcial. Dicha comprobación aunque no nos dirá si las tensiones calculadas son correctas, si nos garantiza parcialmente que el resultado tiene la forma deseada. Consiste en comprobar que cuando el número de formas modales propagadas en la caja de apantallamiento crece, la tangente hiperbólica de la constante de propagación tiene una asíntota horizontal en uno o menos uno. Esta tangente puede observarse en la ecuación 3.100.

El tercero de los ficheros que incluimos se llama Integrales-FGamma. Como mencionamos anteriormente las expresiones de este fichero representan el cálculo de la combinación de las integrales que modelan nuestro sistema, tanto las integrales entre funciones vectoriales modales, como las integrales utilizadas para modelar la excitación del circuito. Valiéndonos de la teoría expuesta al final del capítulo segundo, y habiendo definido previamente las funciones que modelan la caja de apantallamiento y las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa, ya tenemos las integrales necesarias para completar la formulación del problema.

Igual que se hizo con el fichero Calcular-Vm, a este otro también le pasaremos una serie de parámetros. En este caso dichos parámetros nos indicarán las dimensiones del sistema de ecuaciones lineales que resulta de la aplicación del Método de los Momentos, y el número de formas modales a calcular tanto en la caja de apantallamiento como en las funciones de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes inducidas en la línea impresa.

Al comienzo del programa lo primero será realizar las inicializaciones necesarias. Una vez echo esto comenzaremos un bucle donde el índice 'm' recorrerá los valores desde 0 hasta $N_m - 1$. Después mediante una sentencia if asignaremos un valor a la variable "Em" que nos será útil para calcular los factores de normalización. Ahora abriremos otro bucle en el que el índice 'n' recorrerá los valores desde 0 hasta $N_n - 1$. Estos dos índices nos serán útiles para calcular las formas modales de la caja de apantallamiento. Igual que antes utilizaremos condiciones para calcular "En" (variable utilizada en el cálculo de los factores de normalización).

Debemos tener cuidado con la variación de los índices modales a la hora de calcular los factores de normalización de la guía (por ejemplo, el modo $m = 0$ y $n = 0$ no existe). Por esto nos valdremos de secuencias de condiciones para calcularlos.

A continuación debemos abrir otros dos bucles internos a los anteriores. Estos tendrán dos índices que denominaremos 'k' y 'g' y nos serán útiles para calcular las formas modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Dichos bucles son internos a los que utilizamos para calcular las formas modales en la caja de apantallamiento sin ningún motivo que los forzase a ello, pudiendo haber sido los otros internos a estos últimos. Definimos las variables 'Ek' y 'Eg' igual que hicimos anteriormente con las variables 'Em' y 'En' tal y como viene en la sección "Formas modales en una línea de transmisión. Estudio y aplicación a nuestro problema".

Introducimos ahora los factores de normalización de las funciones de la línea. Lo hacemos tal como vienen definidos en la teoría en las ecuaciones (3.23) y (3.24) para el modo TM y (3.47) y (3.48) para el modo TE. Al hacer esto debemos tener cuidado con el rango de variación de los índices. Estas variaciones también vienen definidas en la teoría, y debemos tenerlas en cuenta a la hora de realizar el programa. Por esto observamos en dicho programa que por ejemplo para el modo TE al índice 'g' le sumamos uno. Con esto conseguimos que en vez de comenzar en cero comience en uno. De esta forma la variación de 'g' será desde uno hasta N_g , mientras que para este modo la variación de 'k' será desde cero hasta $N_k - 1$. De la misma forma para el modo TM la variación de 'g' será ahora desde cero hasta $N_g - 1$, mientras que la de 'k' será desde uno hasta N_k (ver ecuaciones 3.108 y 3.109). Estos detalles nos obligan a tener en cuenta si el índice se corresponde con las funciones vectoriales modales de caja de apantallamiento o con las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. También será importante tener en cuenta si la forma modal con la que estamos trabajando es TE o TM.

$$ModoTE- > \left\{ \begin{array}{l} k=0,1,\dots,N_k-1 \\ g=1,2,\dots,N_g \end{array} \right\} \quad (3.108)$$

$$ModoTM- > \left\{ \begin{array}{l} k=1,2,\dots,N_k \\ g=0,1,\dots,N_g-1 \end{array} \right\} \quad (3.109)$$

Primero comenzaremos calculando en nuestro programa las integrales que combinan las funciones de la componente 'x'. La primera de dichas integrales será la que combine las funciones vectoriales modales TE de la caja de apantallamiento y las funciones vectoriales modales TE utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Por este motivo observamos que los índices modales de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento 'm' y 'n' comienzan desde cero hasta $N_m - 1$ y $N_n - 1$ respectivamente, mientras que los índices 'k' y 'g' no van a tener el mismo rango de variación. Esto se debe como hemos mencionado antes a que en el modo TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, el índice 'g' variará desde uno hasta N_g . Principalmente serán estas cosas las que deberemos tener en cuenta en el momento de ir plasmando todos los cálculos en el programa.

Dentro de éste fichero lo que probablemente sea más complicado sea el cálculo de $R(i,k)$. Ésta es una matriz que nosotros hemos calculado de la siguiente forma: cada elemento de esta matriz estará formada por unos índices concretos de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa: $(k',g') \rightarrow i(k,g) \rightarrow k$. También unas formas modales en concreto (TE ó TM) para dichas funciones vectoriales modales. Esta matriz tendrá procedencia de multiplicar dos matrices iguales cuyas filas estarán representadas por los índices de la caja de apantallamiento (m,n) y cuyas columnas estarán identificadas con los índices de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa (k,g). Además como podemos observar en la ecuación 2.31 hay un sumatorio donde el resultado de la integral hay que multiplicarlo por las tensiones en línea de transmisión para cada par de índices (i,k) y seguidamente realizar una suma para todos los valores del índice m. De esta forma para cada columna de una de las matrices que tendrá unos índices 'k' y 'g' (y que identificaremos con otro índice 'i') escogeremos otra columna de la otra matriz idéntica con otros índices k' y g'(que identificaremos con otro índice 'k') y multiplicaremos ambas columnas como si se tratase de multiplicación de matrices quedando un único número que será el elemento (i,k) de la matriz $R(i,k)$. Además en esa multiplicación de matrices ya debe estar introducida la multiplicación por las tensiones V_m . Esta introducción se hará sobre una de las columnas de las matrices idénticas multiplicando elemento a elemento la columna de la matriz con la de las tensiones.

Podemos observar que en el programa hemos utilizado sentencias de condiciones para calcular cada una de las integrales. Tenemos que utilizar dichas sentencias o otras similares porque, como ya se mencionó, las integrales tienen indeterminaciones que debemos tener en cuenta. Cada indeterminación que se calculó debe ser plasmada en el programa. Esto explica que dependiendo

del valor de los índices modales en el programa se le asigne un valor u otro a la integral. Dichas indeterminaciones podemos observarlas por ejemplo en la ecuacione 3.80 cuando $\frac{n}{b} = \frac{g}{w}$

Realizaremos el proceso explicado anteriormente para cada una de las integrales. Ya se mencionó que se obtenían ocho integrales. Las cuatro que surgen de la componente 'x' tienen la misma forma, mientras que sus índices modales tienen rangos de variación diferentes. Debido a esta diferencia en los rangos será más sencillo calcular cada una por separado que complicar excesivamente el programa. Con las otras cuatro integrales correspondientes a la componente 'y' haremos lo mismo. Realmente lo que acabamos de hacer no ha sido calcular las integrales en sí, sino calcular unos factores: ' $f - \xi_1 \xi_2 x1$ ' y ' $f - \xi_1 \xi_2 x3$ ' y también ' $f - \xi_1 \xi_2 y1$ ' y ' $f - \xi_1 \xi_2 y3$ ' que como se observa en el programa debemos multiplicar entre sí y por los factores de normalización para obtener el cálculo de la integral tal como vimos en la teoría según las fórmulas 3.76 y 3.85. Lo siguiente será sumar la integral que corresponde a la componente 'x' con la de la componente

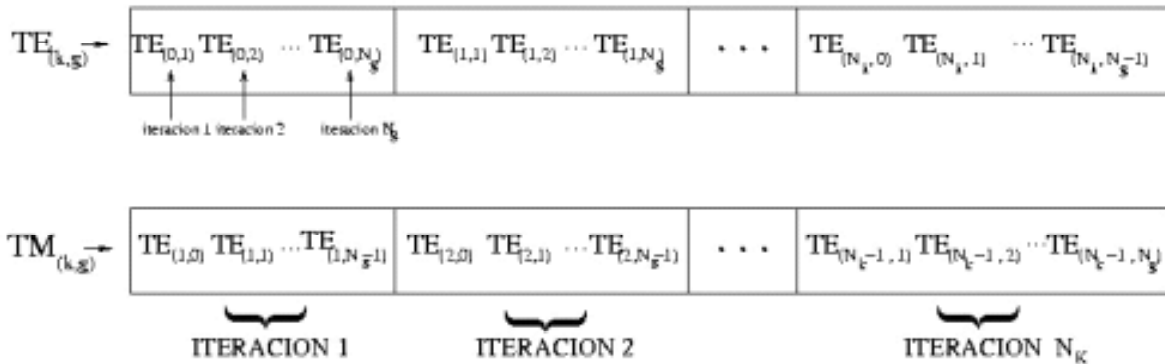


Figura 3.2: Vectores formados con las formas modales TE y TM de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento y de las funciones modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa. A partir de dichos vectores nos será más sencillo formar la matriz $I(m,k)$ y por consiguiente calcular la matriz $R(i,k)$.

'y'. Una vez hecho esto vamos formando la matriz que nos conducirá al resultado final. Por

tanto primero vamos a crear cuatro vectores fila. Cada uno de estos vectores corresponderá a una combinación de dos funciones vectoriales modales: una función vectorial modal de la caja de apantallamiento y otra función vectorial modal procedente de las funciones utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Vamos introduciendo elementos en el vector de forma ordenada. Para formar este vector sólo tendremos en cuenta los índices de las funciones modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Los índices modales de las funciones modales de la caja de apantallamiento permanecerán constantes al estar en los bucles más externos. Si por ejemplo estamos tratando el modo TE en las funciones vectoriales modales utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, los primeros índices posibles serán $k=0$ y $g=1$, mientras que si fuese el modo TM estos serían $k=1$ y $g=0$. Por tanto el primer elemento del vector TETE (el vector que combina la forma modal TE de las funciones modales de la caja de apantallamiento y la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea) procederá de los índices $m=0$, $n=1$, $k=0$ y $g=1$, mientras que el último elemento de dicho vector tendrá índices $m = N_m - 1$, $n = N_n - 1$, $k = N_k - 1$ y $g = N_g$.

La matriz que se observa en la figura 3.3 nos ayuda a comprender como se ha realizado en el programa el cálculo de la matriz $I(m,k)$. Como se observa en la figura 3.2 primero hemos formado vectores con las formas modales TE y TM. A partir de dichos vectores hemos formado la matriz de la figura 3.3. Las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento y las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa tendrán unos índices determinados dependiendo de la forma modal (TE o TM) con la que estemos trabajando. Dichos índices tendrán una variación que está representada en las ecuaciones 3.108 y 3.109 y que podemos observar en el dibujo. Una vez formados los vectores compondremos la matriz situándolos en unas posiciones determinadas.

Pasamos ahora al cálculo de las funciones gamma. Estas funciones son integrales que proporcionan las expansiones modales de la línea. Son necesarias para modelar la excitación del circuito. Esto indica que serán función de 'k' y 'g' y por ello las calcularemos en otro bucle independiente de 'm' y 'n'. Tendremos que calcular dos funciones: γ_{i1} y γ_{i2} . Las funciones γ_i serán expansiones en las que tendremos en cuenta los puertos de entrada y salida. Por el puerto de entrada introduciremos la excitación que será una fuente de tensión. Este puerto vendrá modelado por γ_{i1} . El puerto de salida vendrá modelado por la función γ_{i2} . A este puerto ira conectada la carga que se suele tomar de cincuenta ohmios. La función γ_k será la misma que γ_{i2} pero recorrida con el índice 'k' en vez del índice 'i'. Cada una de estas funciones vendrá representada por un vector. A su vez separaremos cada uno de estos vectores en dos, uno para los cálculos del modo TE y otro para el modo TM.

Una vez resuelto el cálculo de las funciones gamma que modelan la excitación, pasamos a calcular las integrales en los bucles más externos. Primero formamos dos nuevos vectores a partir de los cuatro que combinaban las formas modales (TE, TM) de las funciones modales de la caja de apantallamiento y las funciones vectoriales modales utilizadas para representar las corrientes

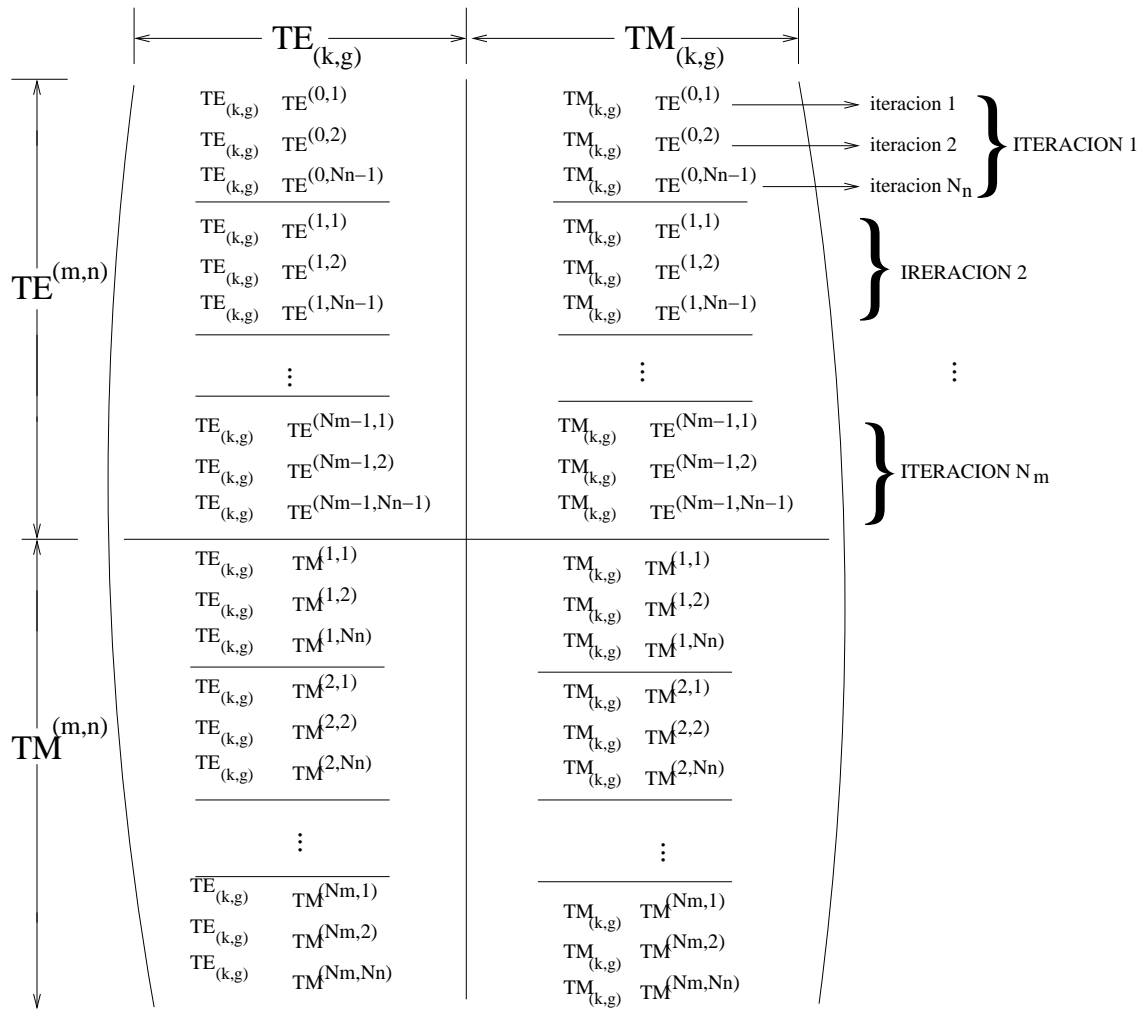


Figura 3.3: Matriz que nos muestra como hemos formado en el programa la matriz I(m,k).

inducidas en la línea impresa. En ellos juntamos las formas modales de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea impresa que tienen una misma forma modal en la caja de apantallamiento (se juntarán los vectores TETE y TETM por un lado y TMTE y TMTM por otro). Es decir, ahora tendremos un vector fila para la forma modal TE de las funciones de la caja de apantallamiento (F-TE) y otro para la forma modal TM (F-TM) de dichas funciones. Puesto que todos los vectores que procedan de una misma forma modal (TE, TM) de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento tendrán la misma longitud sólo queda formar dos matrices a partir de estos dos vectores. Esto se puede hacer situando cada uno de los vectores en una fila o columna de la matriz final. Nosotros hemos optado por realizarlo situando cada vector en cada fila de la matriz. Una vez echo esto finalizaremos el fichero.

Capítulo 4

Resultados

Ahora vamos a comenzar una nueva fase del proyecto en la que podremos ir tomando resultados, sacando conclusiones e ir corrigiendo los fallos cometidos en el desarrollo. Todo ello será lo que forme este nuevo capítulo con el que concluiremos el proyecto.

En el capítulo anterior vimos la forma analítica que tenían las funciones de distribución del campo eléctrico de los modos utilizados para representar las corrientes inducidas en la línea impresa que estamos utilizando. A continuación vamos a obtener su representación gráfica para un modo en concreto. Si recordamos las expresiones analíticas que teníamos para las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, para la forma modal TM tenemos:

$$e_{x_k}^{(TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

$$e_{y_k}^{(TM)}(x, y) = N_{ey}^{(TM)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

Con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TM)}(k) = -\frac{\sqrt{2E_k}k}{l\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}}$$

$$N_{ey}^{(TM)}(k) = \frac{\sqrt{2E_g}g}{w\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}}$$

sabiendo que:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

Mientras que para el modo TE:

$$e_{xk}^{(TE)}(x, y) = N_{ex}^{(TE)}(k) \cos \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \cos \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

$$e_{yk}^{(TE)}(x, y) = N_{ey}^{(TE)}(k) \sin \left[\frac{k\pi}{l}(x - e) \right] \sin \left[\frac{g\pi}{w}(y - f) \right]$$

Con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TE)}(k) = -\frac{2g}{w\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}}$$

$$N_{ey}^{(TE)}(k) = -\frac{2k}{l\sqrt{\frac{k^2w}{l} + \frac{g^2l}{w}}}$$

Recordando que:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

Para realizar la representación gráfica debemos escoger dos valores para los índices k y g . Por ejemplo vamos a dar los valores $k=1$ y $g=0$ con los que no existirá la distribución del campo eléctrico para forma modal TE para las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa y sólo existirá distribución de campo eléctrico para la forma modal TM de dichas funciones. Por tanto, las funciones de distribución del campo eléctrico para dicho modo quedan:

$$e_{x(1,0)}^{(TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(1, 0) \cos \left[\frac{\pi}{l}(x - e) \right] \quad (4.1)$$

Como sabemos que en nuestro caso $e=0$, entonces para $k=0$ y $g=1$, la distribución del campo eléctrico quedará:

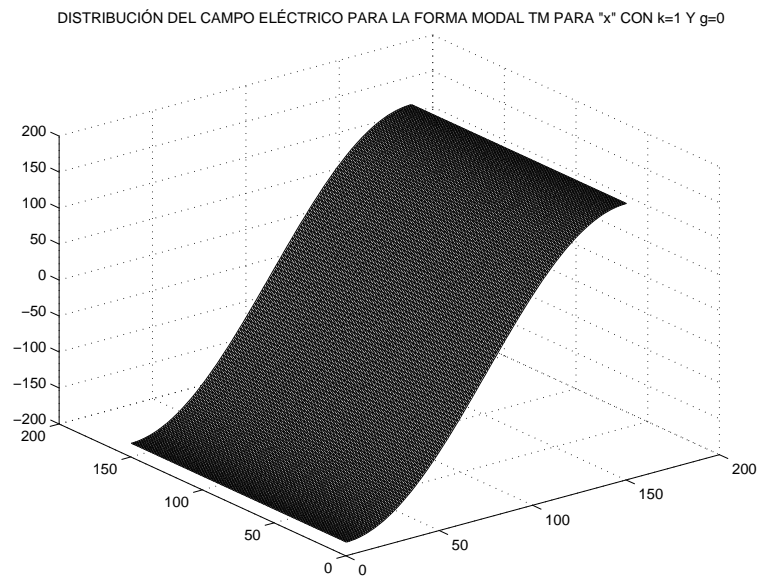


Figura 4.1: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'x' siendo k=1 y g=0

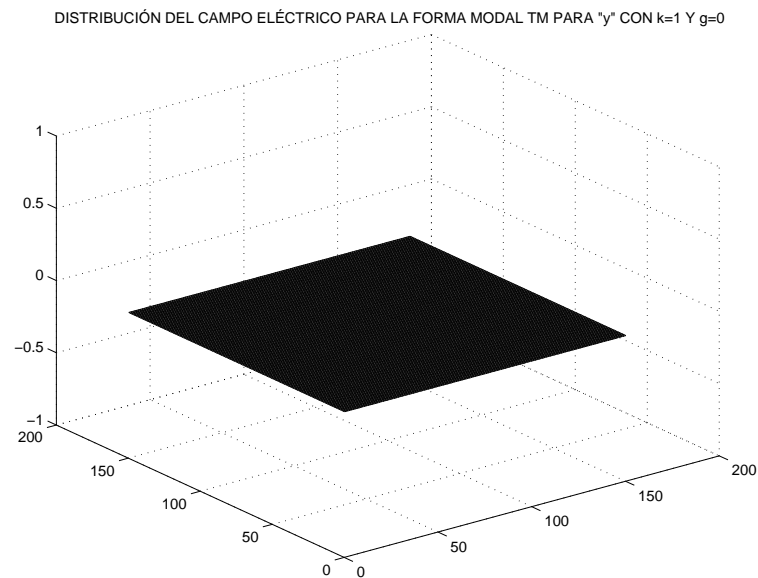


Figura 4.2: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'y' siendo k=1 y g=0

$$e_{x(1,0)}^{(TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(1, 0) \cos \left[\frac{\pi}{l}(x) \right] \quad (4.2)$$

Mientras que para la función de distribución del campo eléctrico para componente 'y', tenemos:

$$e_{y(1,0)}^{(TM)}(x, y) = 0 \quad (4.3)$$

Con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TM)}(1, 0) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{lw}} \quad (4.4)$$

$$N_{ey}^{(TM)}(1, 0) = 0 \quad (4.5)$$

Por lo tanto como observamos en la ecuación 4.3 y en la figura 4.1 la componente 'y' de la función de distribución de campo eléctrico en la línea se anula, mientras que para la 'x' nos quedará un coseno, como se puede observar en la ecuación 4.2 y de forma visual en la figura 4.2. Si ahora escogemos los índices $k=0$ y $g=1$ para las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, tenemos que sólo existirá distribución de campo eléctrico para la forma modal TE. Por tanto:

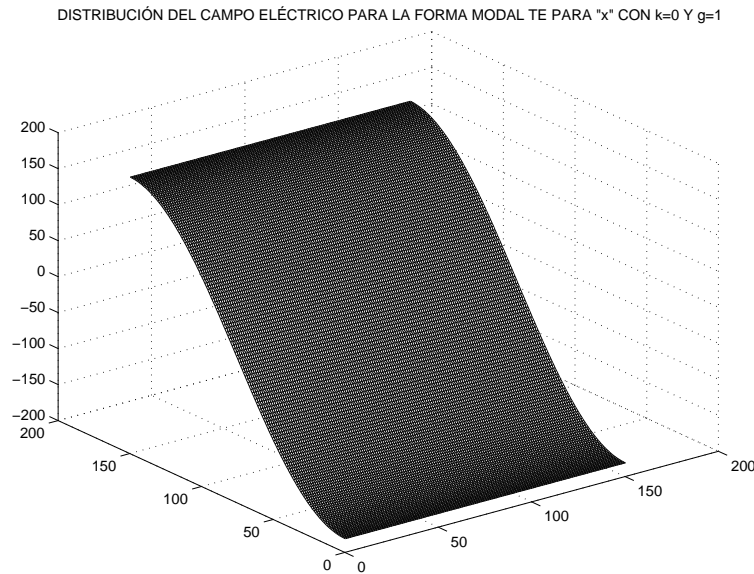


Figura 4.3: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'x' siendo $k=0$ y $g=1$

$$e_{x(0,1)}^{(TE)}(x, y) = N_{ex}^{(TE)}(0, 1) \cos \left[\frac{\pi}{w}(y - f) \right] \quad (4.6)$$

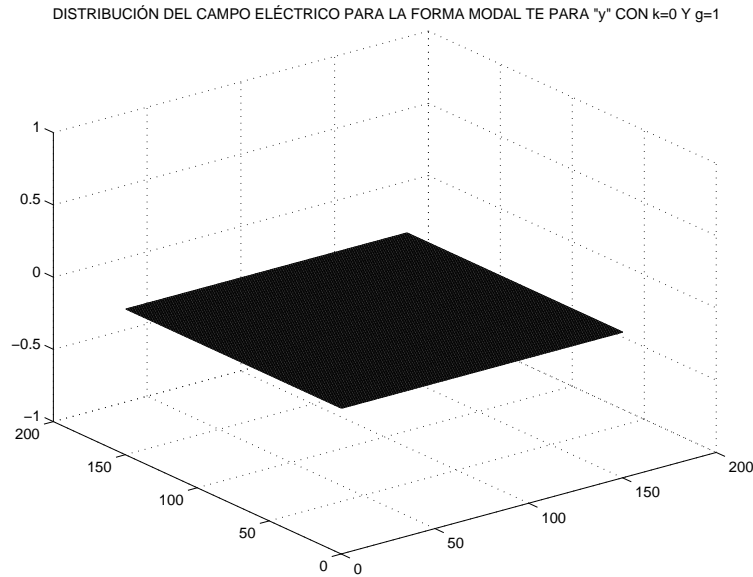


Figura 4.4: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'y' siendo $k=0$ y $g=1$

$$e_{y(0,1)}^{(TE)}(x, y) = 0 \quad (4.7)$$

con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TE)}(0, 1) = -\frac{2}{\sqrt{wl}} \quad (4.8)$$

$$N_{ey}^{(TE)}(0, 1) = 0 \quad (4.9)$$

Como podemos observar en este caso sólo va a existir la forma modal TE para las funciones de distribución de campo eléctrico, ya que al ser los índices $k=0$ y $g=1$ la forma modal TM no va a existir para dichas funciones. También podemos observar que se va a anular la función de distribución de campo eléctrico para la forma modal TE y la componente 'y' de dichas funciones tal como se puede observar en la ecuación 4.7 y de forma visual en la figura 4.4. Para la función de distribución de campo eléctrico para la componente 'x' podemos observar en la ecuación 4.6 y de forma visual en la figura 4.3, nos va a quedar la misma expresión que teníamos para el modo (1,0) donde sólo cambia el factor de normalización, es decir tendremos un coseno, pero esta vez dicho coseno estará representado en la dirección 'y'.

Es curioso observar el parecido de las figuras 4.2 y 4.4. Como sabemos, la figura 4.2 corresponde a la distribución del campo eléctrico en la línea microstrip impresa para la componente

'y' de la forma modal TM para los índices $k=1$ y $g=0$, mientras que la figura 4.4 corresponde también a la distribución del campo eléctrico para la componente 'y', pero para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales e índices $k=0$ y $g=1$. Lo que debemos destacar es que cuando los índices 'k' o 'g' de las funciones vectoriales modales se anulan son los únicos modos para los cuales la distribución del campo eléctrico se anula, y además resulta que cuando k se anula sólo va a existir la forma modal TE para las funciones vectoriales modales, mientras que en el otro caso, es decir cuando se anula g, sólo existirá la forma modal TM para dichas funciones.

Vamos ahora a escoger unos valores para los índices 'k' y 'g' de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa con los que si va a existir distribución de campo eléctrico para ambas formas modales (TE y TM) de las funciones vectoriales modales. Escogemos por ejemplo $k=2$ y $g=1$ y tenemos que para dichos índices las funciones de distribución de campo eléctrico nos quedan de la siguiente manera:

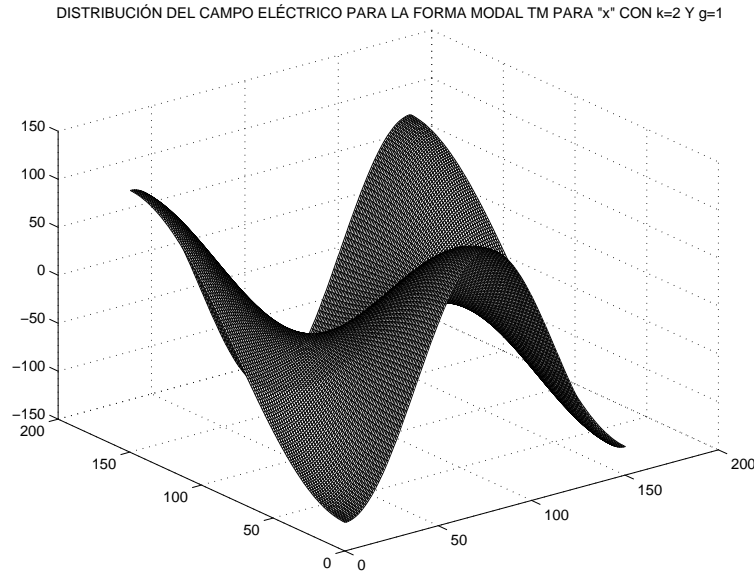


Figura 4.5: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'x' siendo $k=2$ y $g=1$

$$e_{x(2,1)}^{(TM)}(x, y) = N_{ex}^{(TM)}(2, 1) \cos \left[\frac{2\pi}{l} x \right] \cos \left[\frac{\pi}{w} y \right] \quad (4.10)$$

$$e_{y(2,1)}^{(TM)}(x, y) = N_{ey}^{(TM)}(2, 1) \sin \left[\frac{2\pi}{l} x \right] \sin \left[\frac{\pi}{w} y \right] \quad (4.11)$$

con los siguientes factores de normalización:

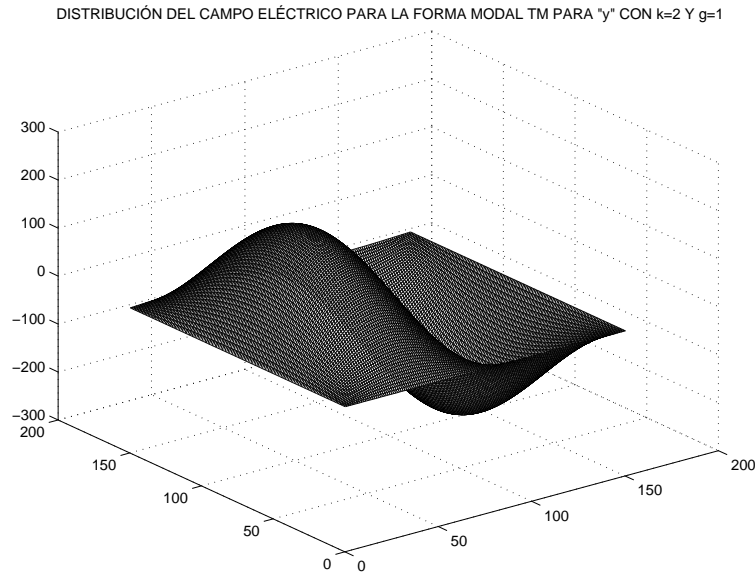


Figura 4.6: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'y' siendo k=2 y g=1

$$N_{ex}^{(TM)}(2, 1) = -\frac{4}{l\sqrt{\frac{4w}{l} + \frac{l}{w}}} \quad (4.12)$$

$$N_{ey}^{(TM)}(2, 1) = \frac{\sqrt{2}}{w\sqrt{\frac{4w}{l} + \frac{l}{w}}} \quad (4.13)$$

Mientras que para el modo TE serán las mismas expresiones en las que sólo cambiarán los factores de normalización, como se observa de forma visual en las figuras 4.7 y 4.7 para la forma modal TE y en las figuras 4.5 y 4.5 para la forma modal TM:

$$e_{x(2,1)}^{(TE)}(x, y) = N_{ex}^{(TE)}(2, 1)\cos\left[\frac{2\pi}{l}x\right]\cos\left[\frac{\pi}{w}y\right] \quad (4.14)$$

$$e_{y(2,1)}^{(TE)}(x, y) = N_{ey}^{(TE)}(2, 1)\sin\left[\frac{2\pi}{l}x\right]\sin\left[\frac{\pi}{w}y\right] \quad (4.15)$$

con los siguientes factores de normalización:

$$N_{ex}^{(TE)}(2, 1) = -\frac{2}{w\sqrt{\frac{4w}{l} + \frac{l}{w}}} \quad (4.16)$$

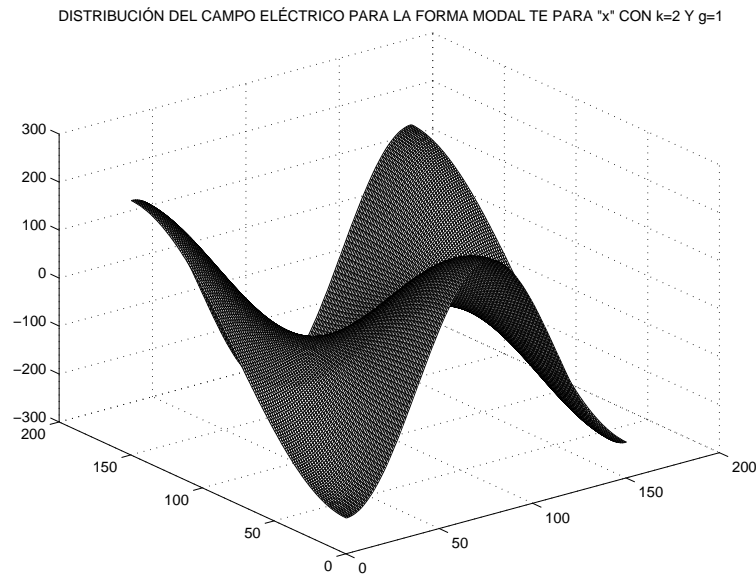


Figura 4.7: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'x' siendo k=2 y g=1

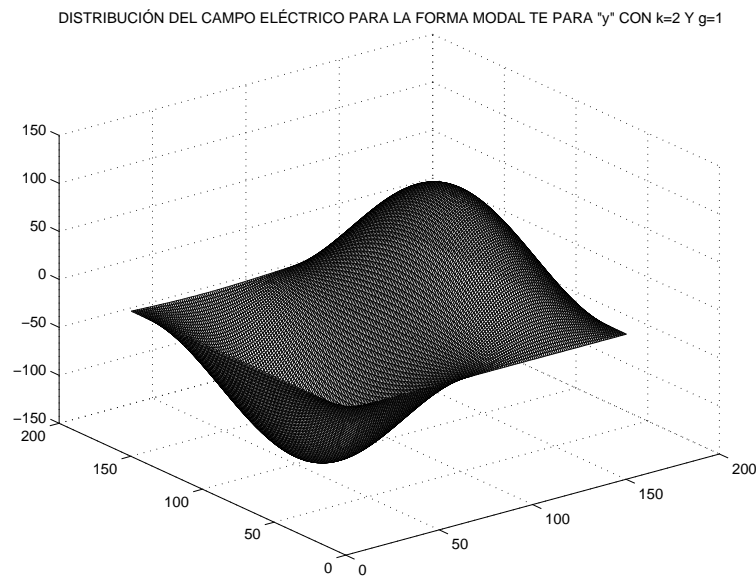


Figura 4.8: Distribución del campo eléctrico para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa para la componente 'y' siendo k=2 y g=1

$$N_{ey}^{(TE)}(2, 1) = -\frac{4}{l\sqrt{\frac{4w}{l} + \frac{l}{w}}} \quad (4.17)$$

Como ya hemos mencionado y podemos observar, las Figuras 4.5 y 4.6 que nos muestran la distribución del campo eléctrico para las componentes 'x' e 'y' de la forma modal TM y para los índices $k=2$ y $g=1$ de las funciones vectoriales modales, son muy parecidas a las Figuras 4.7 4.8 que nos muestran la distribución del campo eléctrico también para ambas componentes y para los mismos índices $k=2$ y $g=1$ pero para la forma modal TE. Esto también lo podemos observar en las expresiones analíticas 4.10 4.11 para la forma modal TM y 4.14 y 4.15 para la forma modal TE donde sólo cambian los factores de normalización.

4.1. Comprobaciones sobre la fiabilidad de los resultados obtenidos

4.1.1. Convergencia de las matrices resultantes de la combinación de las formas modales

Cuando hablamos de convergencia de las matrices resultantes de la combinación de las formas modales, nos referimos a la convergencia de las matrices que combinan las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento con las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa. Dichas matrices que recordaremos a continuación, aparecían por primera vez en el capítulo segundo cuando realizábamos el planteamiento en ecuación integral, y las calculamos en el capítulo tercero. Podemos observar las matrices mencionadas en las ecuaciones 4.18 y 4.19.

Las primeras comprobaciones que realizaremos en este capítulo consisten, como hemos mencionado anteriormente, en sacar unas gráficas no sólo sobre la convergencia de las matrices de las ecuaciones 4.18 y 4.19, sino unas gráficas sobre la convergencia de la suma 4.18. En dicha suma, como podemos observar, también aparecen las tensiones en línea de transmisión:

$$R(i, k) = \sum_m V_m I_{mi}(x', y') I_{mk}(x, y)$$

Donde como ya sabemos:

$$I_{mi}(x', y') = I_{mi}^{(\xi_1, \xi_2)}(x', y') = \int_{S_1} \bar{e}_m^{(\xi_1)}(x', y') \bar{e}_i^{(1)(\xi_2)}(x', y') ds \quad (4.18)$$

y

$$I_{mk}(x, y) = I_{mk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{S_1} \bar{e}_m^{(\xi_1)}(x, y) \bar{e}_k^{(1)(\xi_2)}(x, y) ds' \quad (4.19)$$

donde $\bar{e}_m^{(\xi_1)}(x, y)$ son las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento, y $\bar{e}_k^{(\xi_2)}(x, y)$ son las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente

para representar las corrientes inducidas en la línea impresa. Como sabemos ambas integrales son iguales.

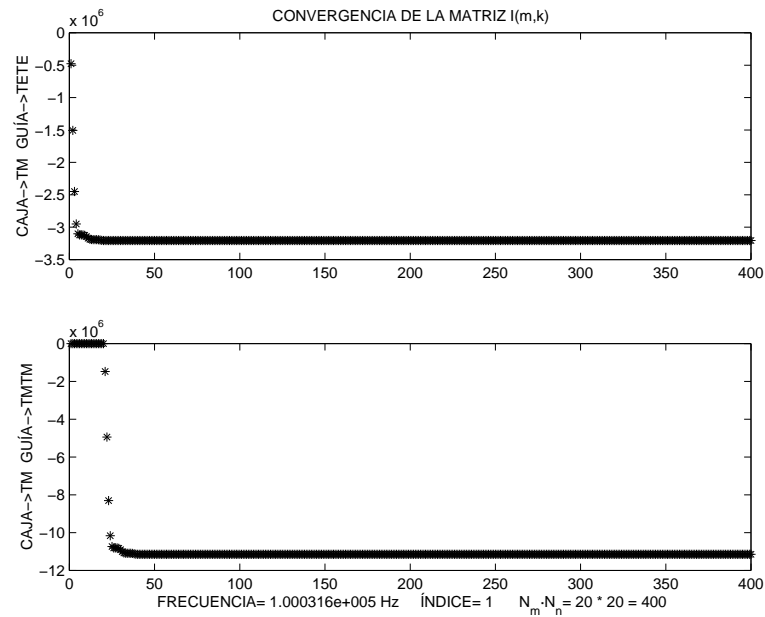


Figura 4.9: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TM y la frecuencia 10^5

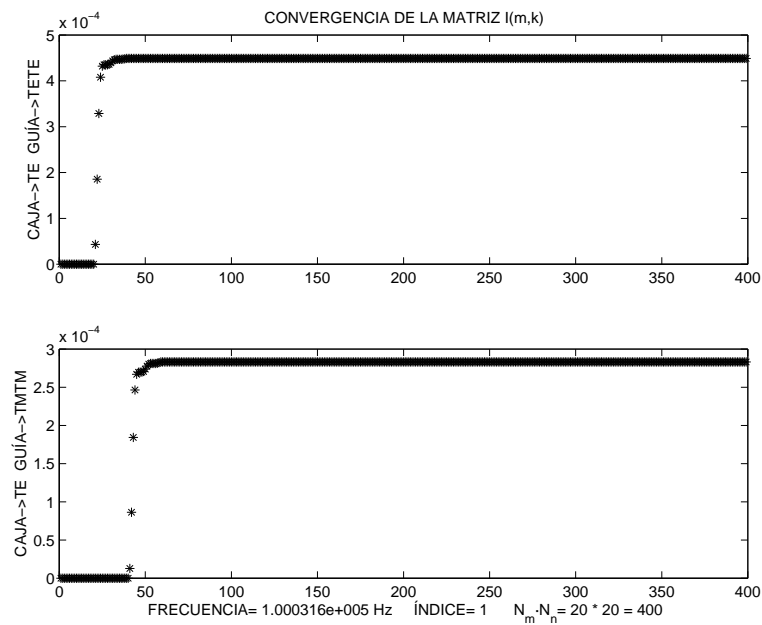


Figura 4.10: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TE y la frecuencia 10^5

Vamos entonces a explicar como hemos monitorizado la suma mediante unas gráficas. Para ello hay que tener en cuenta los siguientes puntos:

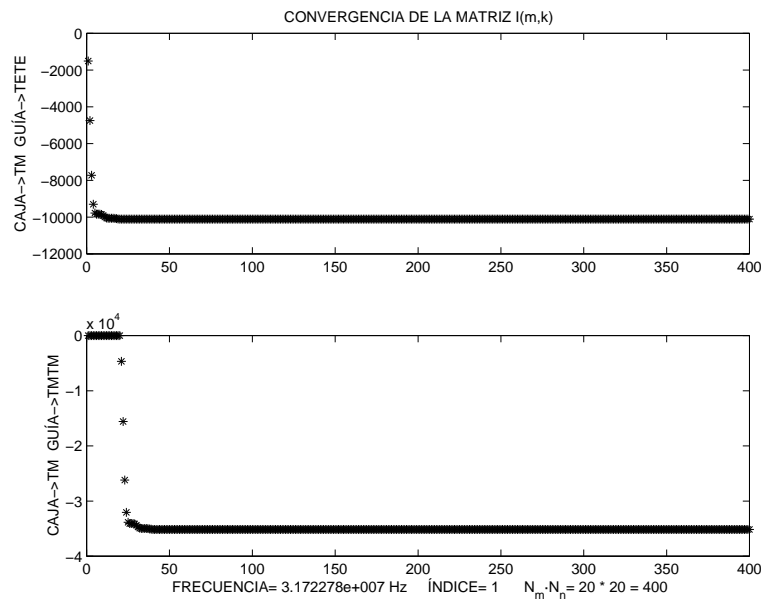


Figura 4.11: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TM y la frecuencia 10^7

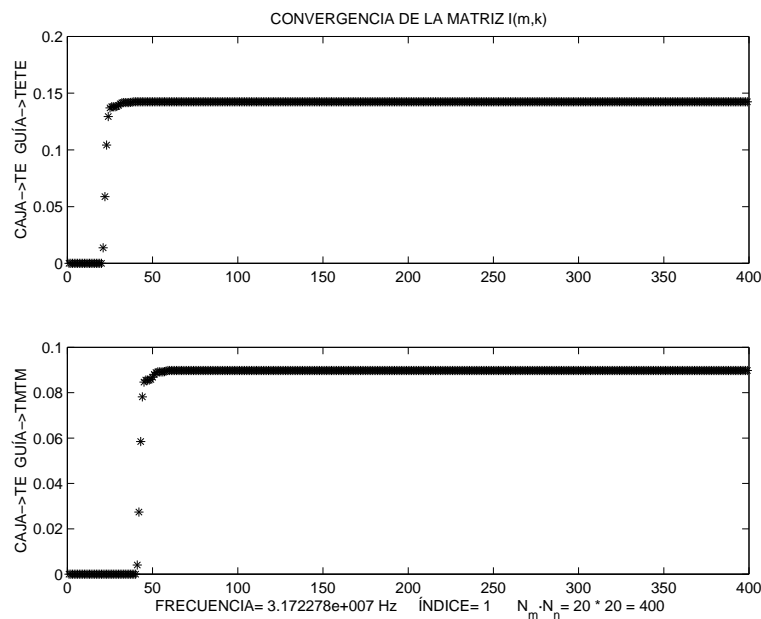


Figura 4.12: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TE y la frecuencia 10^7

-Como sabemos la suma anterior incorpora dos integrales iguales que darán lugar a dos matrices idénticas (sólo cambian los índices). Dicha suma incluye sumar las formas modales de las funciones utilizadas para representar la caja de apantallamiento. Las formas modales de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea

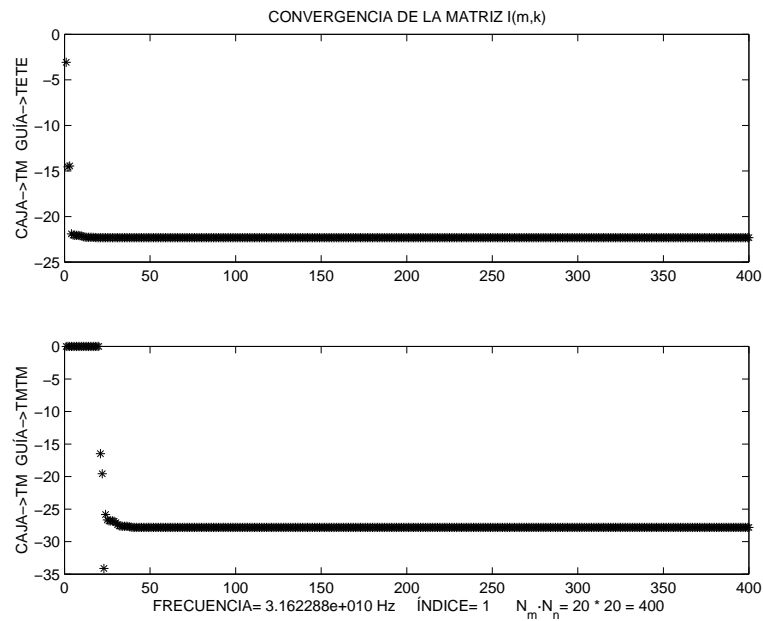


Figura 4.13: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TM y la frecuencia 10^{10}

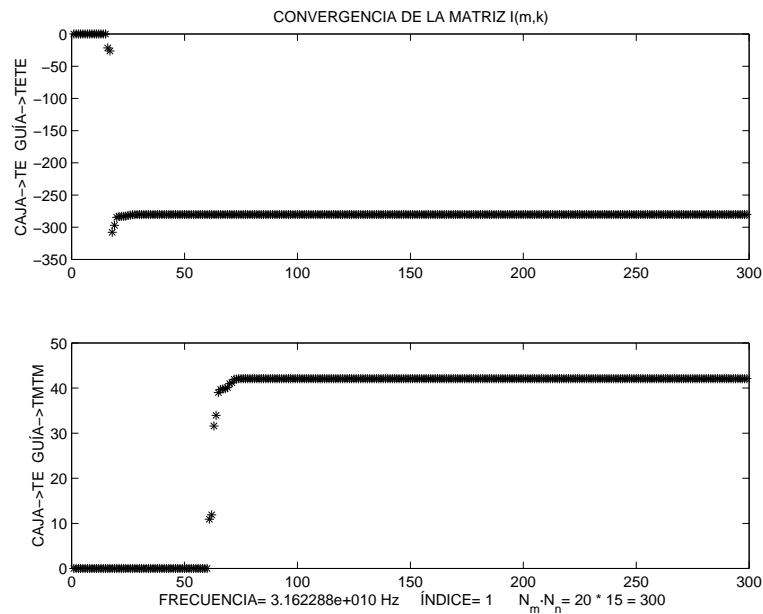


Figura 4.14: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TE y la frecuencia 10^{10}

impresa van por separado. Para cada una de dichas formas modales sería necesario un sumatorio distinto. Sin embargo nosotros vamos a desmenuzar más aun la suma para representarla. Nosotros separaremos también las formas modales de las funciones utilizadas para representar la caja de apantallamiento. Para cada una de dichas formas modales haremos una suma distinta. Así

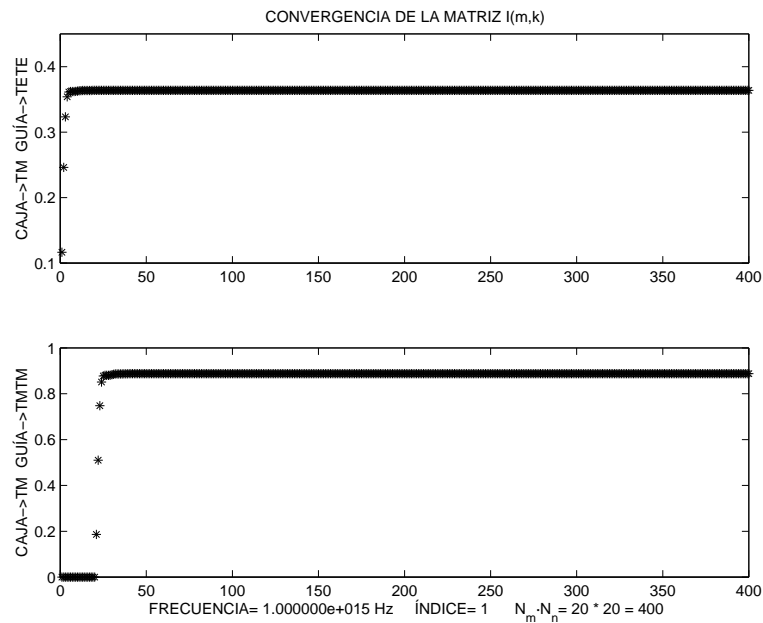


Figura 4.15: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TM y la frecuencia 10^{15}

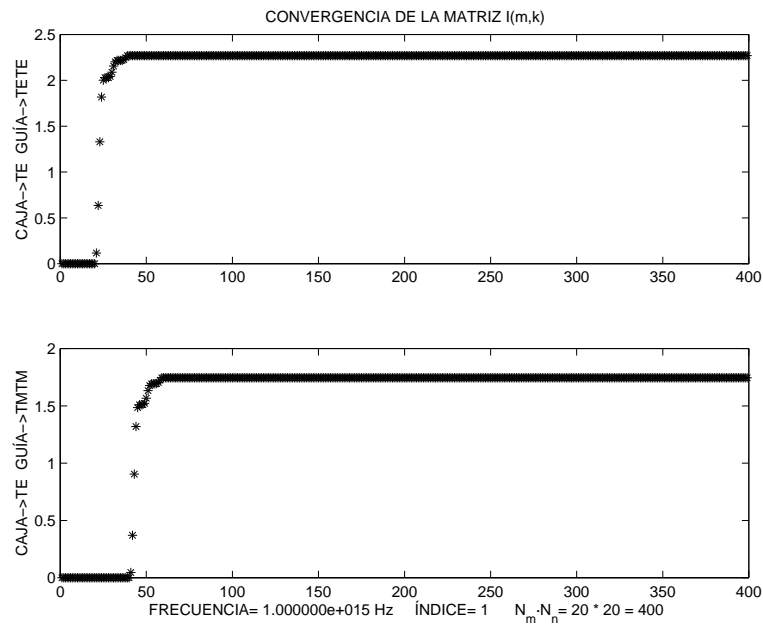


Figura 4.16: Convergencia de las funciones modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento para la forma modal TE y la frecuencia 10^{15}

podremos estudiar mejor la convergencia.

-En cada figura se representan dos gráficas, ambas para la misma forma modal de la caja de encapsulado.

-En cada figura la gráfica de la parte superior representa la combinación TETE de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa. Esta combinación significa que hemos escogido la forma modal TE en dichas funciones para ambas integrales. Además al escoger la misma forma modal en ambas integrales, el rango de variación de los índices 'k' y 'g' será el mismo para ambas. De la misma forma, la parte inferior de la figura representa otra gráfica con la combinación TMTM. Esta significa que hemos escogido la forma modal TM para ambas integrales.

-Como las figuras representan la suma $R(i,k)$ las matrices resultantes de las integrales $I(m,k)$ irán multiplicadas por las correspondientes tensiones $V_m(z)$, como se puede observar en 4.18.

-En cada ejecución del programa podemos hacer un barrido por las frecuencias de interés. Esto nos permite sacar para cada una de dichas frecuencias las gráficas de convergencia. La frecuencia afectará sólo a los coeficientes $V_m(z)$, ya que la matriz $I(m,k)$ de la ecuación 4.18 procedente de la combinación de las funciones vectoriales modales no se verá afectada por la frecuencia de trabajo.

En la parte baja de cada figura, es decir cada dos gráficas podemos observar que se indica la frecuencia de trabajo. También se indica el 'INDICE' que nos da una idea sobre los valores de 'k' y 'g' escogidos. A continuación se muestran las constantes N_m y N_n (máximos valores que pueden tomar los índices 'm' y 'n' respectivamente de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento) y su producto. Dicho producto indica el número de puntos representados en las gráficas o lo que es lo mismo el número total de modos introducidos en el sumatorio. En nuestro caso dicha suma va a converger muy pronto y no será necesario escoger un número muy elevado de puntos para observar la convergencia.

Si nos fijamos en las gráficas, a simple vista se puede deducir que converge más rápidamente la combinación de las formas modales de las funciones de la caja de apantallamiento con formas modales TE de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa, que la combinación con las formas modales TM de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa. Asimismo también se puede observar que las gráficas que muestran la convergencia de las formas modales TE de las funciones utilizadas para representar la caja de apantallamiento lo hacen después que las de los modos TM.

Otra cosa que se puede deducir de las gráficas 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16 es que la convergencia es independiente de la frecuencia si nos referimos al valor donde comienza dicha convergencia respecto del valor de términos sumados. Es decir para la frecuencia de 10^5 , y por ejemplo para el modo TM de la guía de ondas podemos observar que la convergencia en la gráfica superior (formas modales TE de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar en la guía equivalente las corrientes inducidas en la línea impresa) comienza casi desde el primer término, mientras que en la gráfica de la parte inferior comienza cuando llevamos un número cercano a cincuenta términos sumados. Si observamos ahora la misma gráfica para

cualquier otra frecuencia veremos que la convergencia comienza cuando llevamos un número similar de términos sumados.

4.1.2. Coherencia en el cálculo de la onda de tensión

La siguiente comprobación que vamos a realizar consiste en verificar parcialmente que el resultado de las tensiones $V_m(z)$ es coherente con lo esperado. Para esto vamos a representar en unas gráficas las tangentes de la ecuación 4.20. Recordemos dicha ecuación:

$$V_m^{(\eta_1)} = \frac{jZ_c^{(\eta_1, Aire)} \tan(\beta(\eta_1, Aire)h) jZ_c^{(\eta_1, linea)} \tan(\beta(\eta_1, linea)l)}{jZ_c^{(\eta_1, Aire)} \tan(\beta(\eta_1, Aire)h) + jZ_c^{(\eta_1, linea)} \tan(\beta(\eta_1, linea)l)} \quad (4.20)$$

Como se observa, la ecuación 4.20 tiene dos tangentes diferentes si se evalúa para la forma modal TE y otras dos si se evalúa para la forma modal TM. Para asegurar la convergencia de dichas tangentes tendremos que estudiar el comportamiento de todas ellas. Por tanto si comenzamos con las tangentes que aparecen al evaluar la ecuación 4.20 para la forma modal TE, aparecen en la ecuación las dos siguientes tangentes:

$$\tan(\beta^{(TE, Aire)}h) \quad (4.21)$$

$$\tan(\beta^{(TE, linea)}l) \quad (4.22)$$

β es un número complejo puro: $\beta = j\alpha$ y por tanto nos queda que:

$$\tan(j\alpha^{(TE, Aire)}h) = jTh(\alpha^{(TE, Aire)}h) \quad (4.23)$$

$$\tan(j\alpha^{(TE, linea)}l) = jTh(\alpha^{(TE, linea)}l) \quad (4.24)$$

Como sabemos dicha la tangente hiperbólica tiene una asíntota horizontal en 1 y otra en -1. Nuestra comprobación consiste en verificar que dicha tangente hiperbólica tiende a 1 o -1 cuando los índices modales de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento ('m' y 'n') aumentan. Las siguientes gráficas muestran dicha situación para la forma modal TE de dichas tangentes.

En estas primeras gráficas podemos observar lo que ocurre de forma más acentuada al comienzo de la convergencia. Ello es debido a que éstas gráficas tienen un número bajo de puntos. Después se verán otras con un mayor número de puntos en las que para las ecuaciones 4.23 y 4.24 se observa una convergencia perfecta casi desde el primer término.

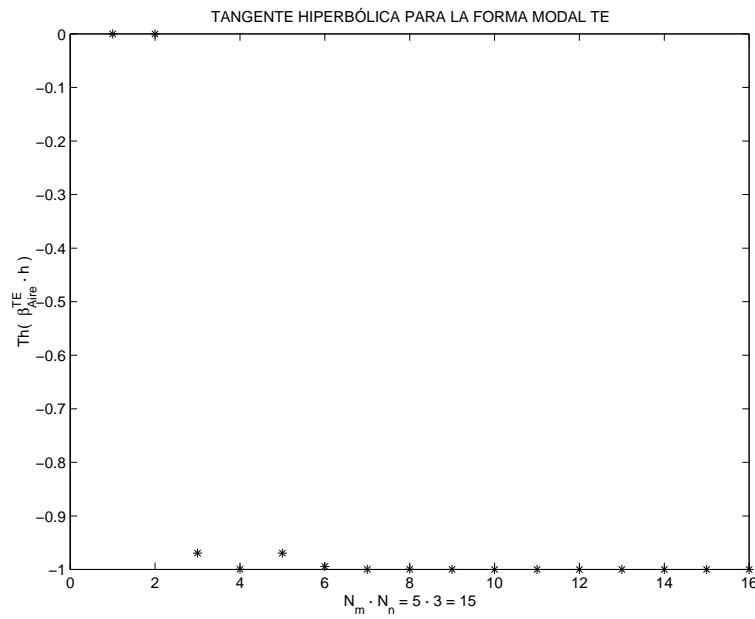


Figura 4.17: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.23.

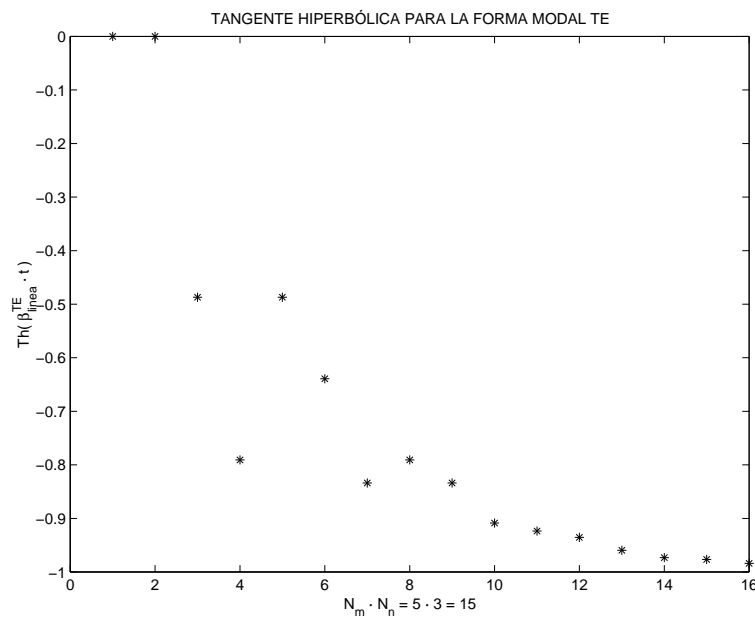


Figura 4.18: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.24.

Se puede observar en la gráfica de la figura 4.18 que a pesar de tener un bajo número de puntos ya existe una cierta convergencia para la ecuación 4.23. Para la gráfica de la figura 4.17 la convergencia es más acentuada.

Para la forma modal TM, tenemos:

$$\tan(j\alpha^{(TM,Aire)h}) = jTh(\alpha^{(TM,Aire)h}) \tag{4.25}$$

$$\tan(j\alpha^{(TM,linea)l}) = jTh(\alpha^{(TM,linea)l}) \tag{4.26}$$

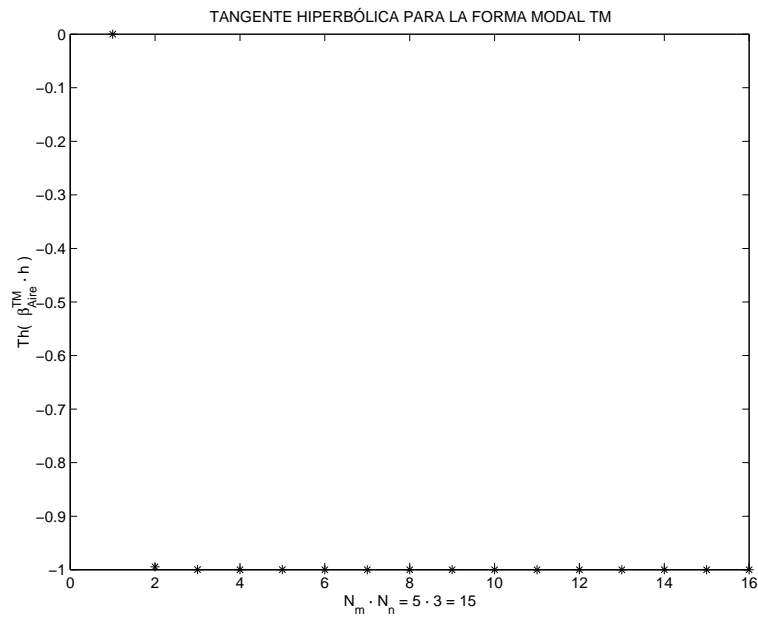


Figura 4.19: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.25.

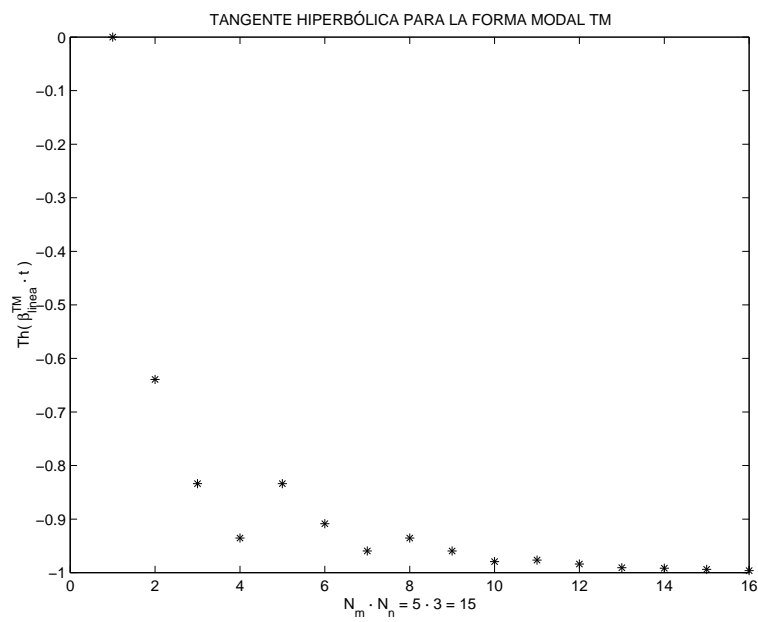


Figura 4.20: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.26.

Una conclusión que parece evidente al comparar las figuras anteriores es que las ecuaciones 4.25 y 4.26 que están evaluadas para la forma modal TM convergen antes que las ecuaciones 4.25 y 4.26, que están evaluadas para la forma modal TE.

Vamos ahora a observar las mismas gráficas para un número de puntos mayor donde la convergencia está ya más acentuada. Para las gráficas en las que se tiene en cuenta la constante de propagación de la línea se observa que les cuesta un poco más converger mostrando una cierta oscilación al principio. Para las gráficas que tienen en cuenta la constante de propagación del aire convergen casi desde el primer término sin mostrar dicha oscilación.

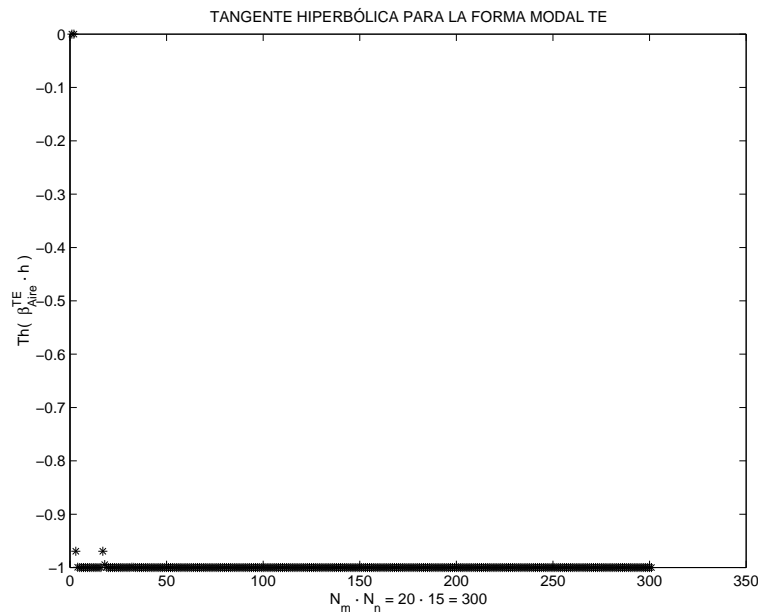


Figura 4.21: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.23 para un número elevado de puntos.

Un dato importante que se ve en las gráficas es que el valor de convergencia siempre es a -1. Esto coincide con la definición de una onda que se propaga físicamente en la dirección z positivo.

Una vez concluida esta verificación parcial podemos asegurar que los cálculos de la onda de tensión en la línea muestran la forma deseada.

4.2. Comparativa del resultado obtenido con el de otras técnicas fiables

En secciones anteriores desarrollemos los cálculos necesarios para llegar hasta la impedancia de entrada de nuestro circuito. Primero se hizo un planteamiento general en el capítulo segundo del proceso para llegar a dicha impedancia. Después, en el capítulo tercero fuimos desarrollando cada una de las partes de dicho proceso: se hizo el cálculo de las tensiones en el circuito equivalente

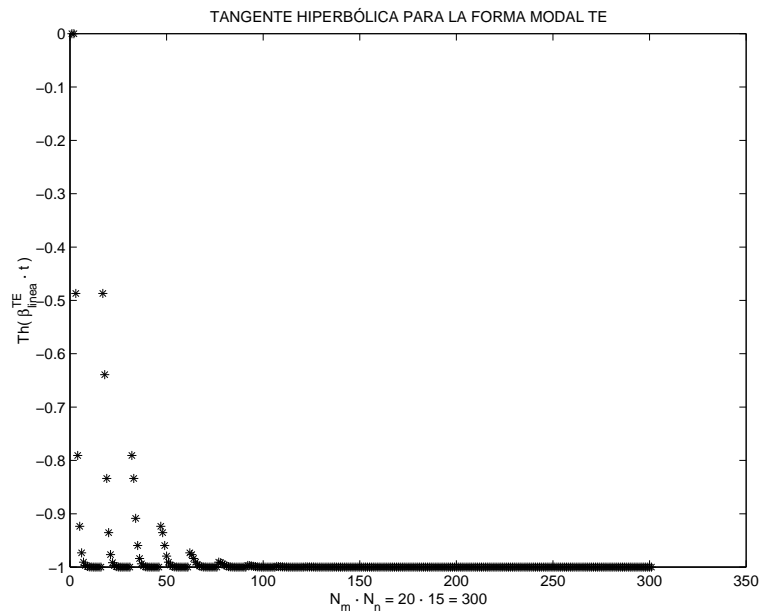


Figura 4.22: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.24 para un número elevado de puntos.

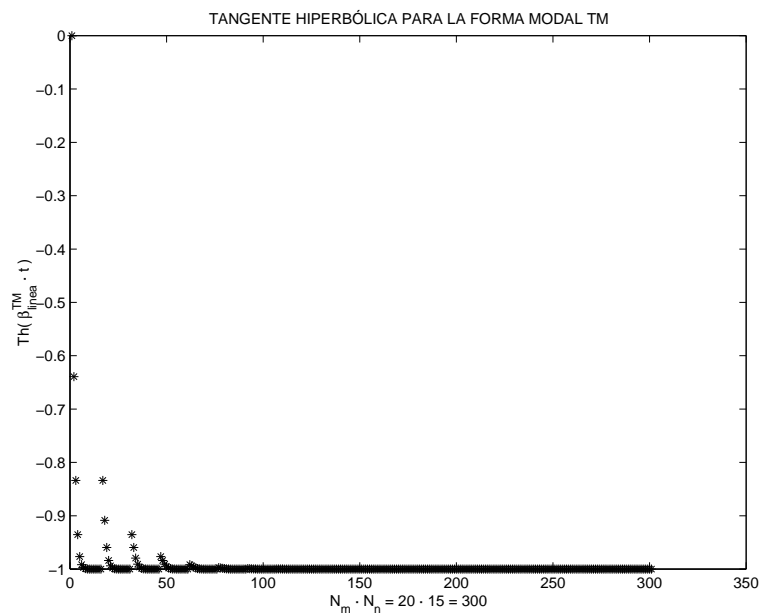


Figura 4.23: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.26 para un número elevado de puntos.

en línea de transmisión en la sección 'Tensiones en una línea de transmisión' del capítulo tercero, se compuso la matriz del método de los momentos en la sección 'Combinación e integración de las formas modales de la caja con las de la guía equivalente utilizada para representar las corrientes en la línea impresa' en el capítulo tercero, se resolvió el sistema de ecuaciones lineales

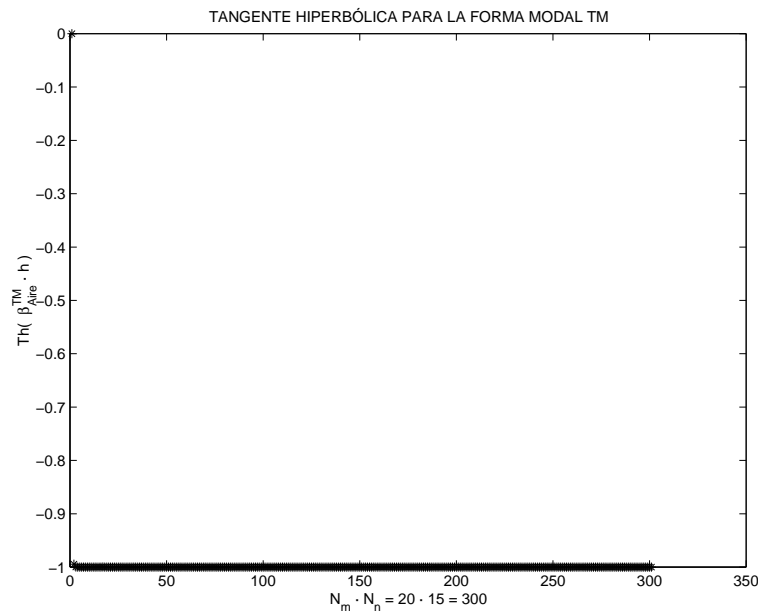


Figura 4.24: Gráfica del comportamiento de la tangente hiperbólica de la ecuación 4.25 para un número elevado de puntos.

correspondiente, y encontramos las corrientes inducidas en la línea impresa. Estas corrientes nos sirven para calcular la impedancia de entrada del circuito con el procedimiento descrito en el capítulo segundo en la sección 'formulación en ecuación integral'.

Vamos a pasar entonces a mostrar en la figura 4.25 una gráfica con el resultado final obtenido. Como sabemos se trata de un barrido recorriendo las frecuencias de interés y calculando para cada una de ellas la impedancia de entrada. El procedimiento de dicho cálculo está descrito, como ya hemos mencionado antes, en el capítulo segundo en la sección 'formulación en ecuación integral'. En el eje de abscisas de la figura 4.25 se muestran las frecuencias, mientras que en el eje de ordenadas se muestra el valor obtenido de impedancia para la frecuencia correspondiente.

Para comprender la gráfica debemos tener en cuenta lo siguiente: al aumentar la frecuencia se van a producir fenómenos de propagación de ondas. En consecuencia la impedancia de entrada cambiará de la misma forma en que cambia la impedancia de entrada en una línea de transmisión.

Si la impedancia característica de la estructura está entorno a 50 ohmios, las oscilaciones de la impedancia de entrada son pequeñas entorno a 50 ohmios. Si dicha impedancia característica es muy diferente de 50 ohmios, se producirá una fuerte onda reflejada y la interacción entre la onda incidente y la reflejada dará lugar a una fuerte oscilación de la impedancia de entrada alrededor de 50 ohmios.

A baja frecuencia se espera que no sean tan notorios los fenómenos de propagación en la línea impresa y la impedancia de entrada sea muy próxima a los 50 ohmios. Sin embargo a alta frecuencia esperamos que sean más relevantes dichos fenómenos de propagación y la impedancia

de entrada tenga una fuerte oscilación entorno a 50 ohmios. Esto lo podemos observar en la figura 4.27. A continuación en la figura 4.25 podemos observar el resultado obtenido al realizar una ejecución del programa. Como podemos ver las gráficas obtenidas no muestran exactamente el resultado esperado.

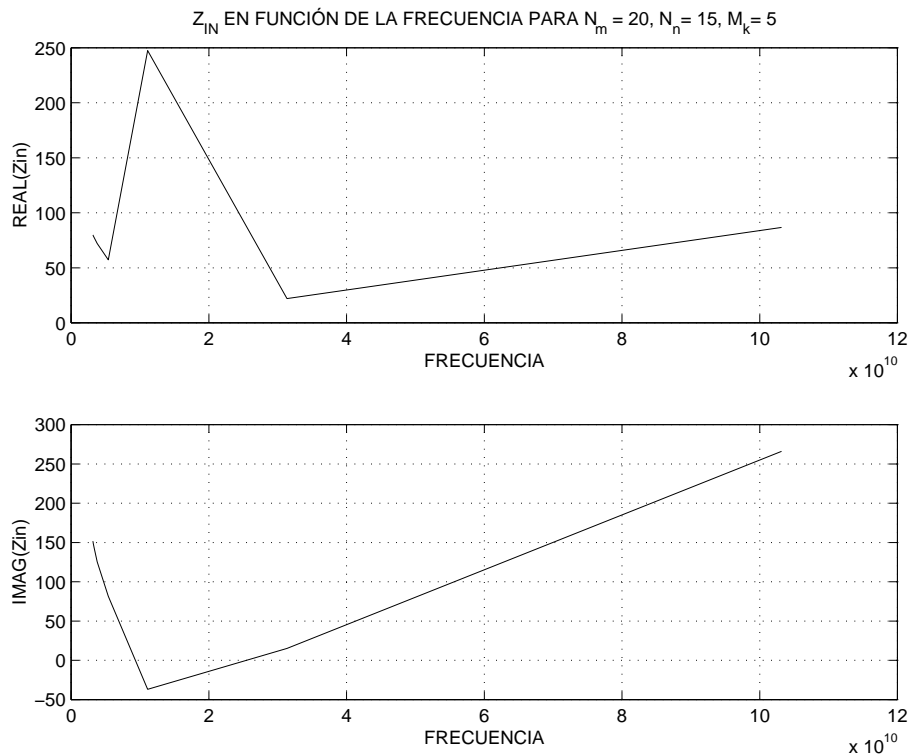


Figura 4.25: Impedancia de entrada para distintas frecuencias. Gráfica obtenida con el programa desarrollado en el proyecto

Debido a los resultados obtenidos fué necesario realizar una nueva versión más simplificada del problema que nos proporcionaría a su vez una versión más simplificada del programa. Esto no permitió realizar un seguimiento más preciso del desarrollo. Todo el desarrollo llevado a cabo para esta nueva versión en la que desaparece la componente 'y' del problema no nos permitió llegar tampoco a unos resultados esperados. Sin embargo nos ha servido para corroborar algunos de los resultados sobre convergencia obtenidos anteriormente que nos indican la fiabilidad de ciertos resultados como el cálculo de las tensiones en el circuito equivalente en línea de transmisión. Mostramos también en la figura 4.26 la gráfica obtenida esta segunda versión que realizamos tomando únicamente corrientes inducidas por la excitación en la dirección x.

Para poder realizar una comparación con otras técnicas del departamento ya comprobadas, en la figura 4.27 mostramos la gráfica de impedancia de entrada que se obtiene como resultado con dichas técnicas.

Como podemos observar en las figuras 4.25 y 4.26 la gráfica que nos muestra la parte real de la impedancia de entrada (resistencia de entrada) tiene una cierta similitud con la gráfica

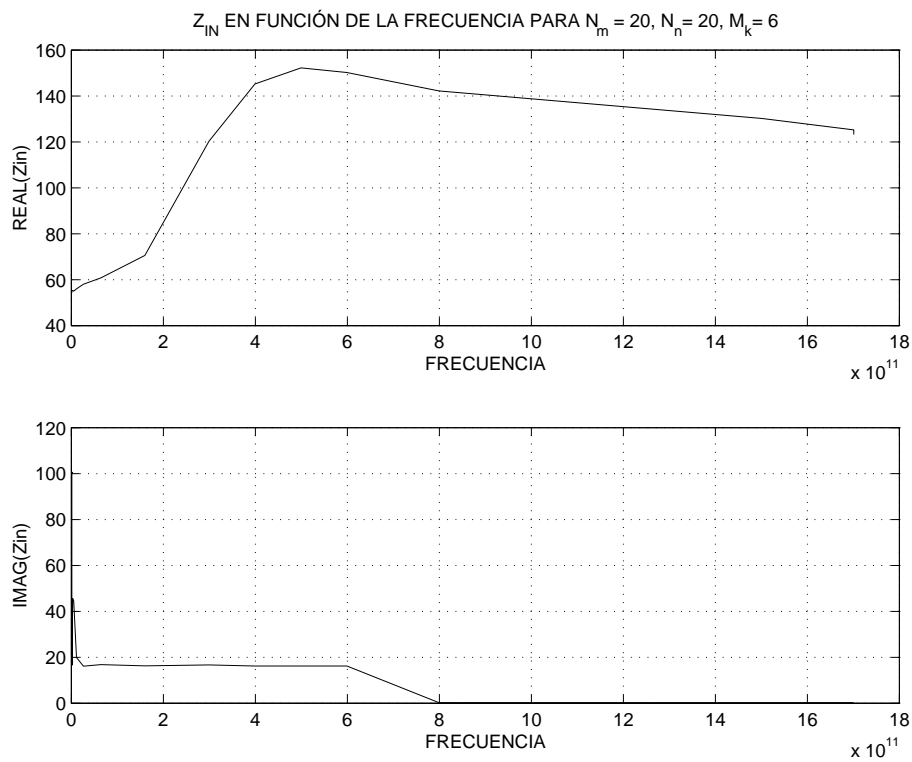


Figura 4.26: Impedancia de entrada para distintas frecuencias. Gráfica obtenida con la segunda versión desarrollada en el proyecto. En ella se tomaban corrientes inducidas por la excitación en la dirección x .

que nos muestra la parte real de dicha impedancia en la figura 4.27. Sin embargo también se puede observar en las figuras 4.25 y 4.26 que la gráfica que nos muestra la parte imaginaria de la impedancia de entrada (reactancia de entrada) no tiene similitud con la gráfica que nos muestra la reactancia de dicha impedancia en la figura 4.27.

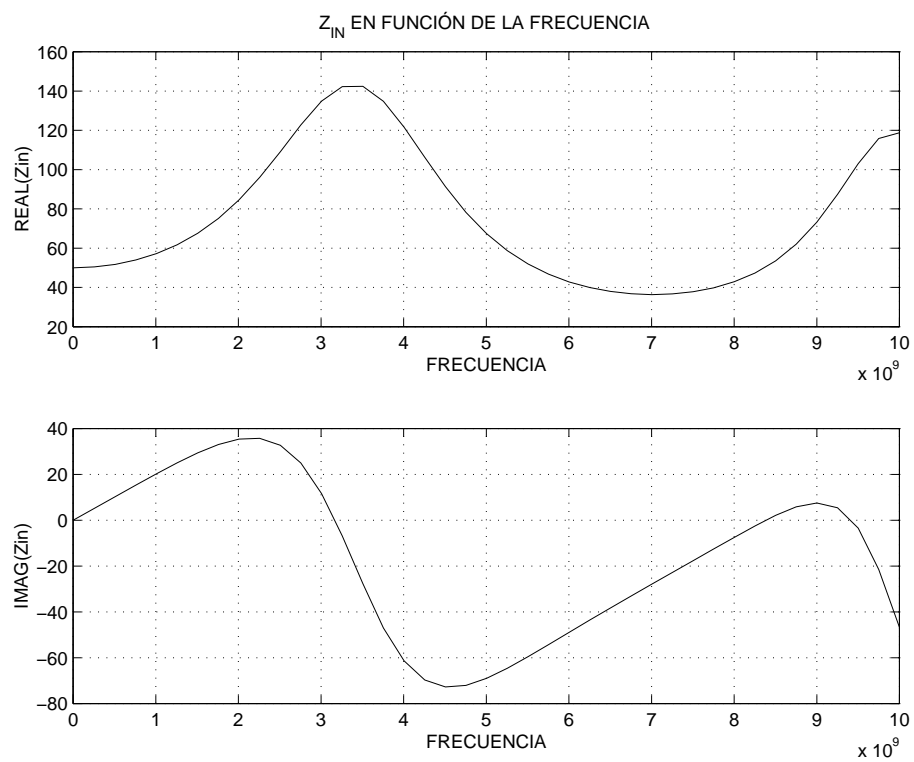


Figura 4.27: Impedancia de entrada para distintas frecuencias. Gráfica obtenida con otras técnicas comprobadas

Apéndice A

Desarrollo de una versión para la simplificación del problema

La implementación del programa descrito en el capítulo tercero condujo a una versión del programa que no daba los resultados esperados. Debido al poco éxito de estos resultados obtenidos vamos a intentar abordar el problema realizando una nueva versión. Se planteó realizar un análisis de la estructura más sencillo. Al ser una versión simplificada de la principal y por tanto ser de cálculos más sencillos esperamos que realizándola el problema se resuelva de una manera gradual, simplificando con ello su resolución.

En concreto se trata de simplificar el problema a una única dimensión. Por tanto, ahora tomaremos sólo corrientes inducidas por la excitación en la dirección 'x', teniendo la densidad de corriente esa única dirección. Con esto lógicamente simplificamos el problema al no tener que preocuparnos de la componente 'y' de las integrales. En el cálculo de las integrales es donde se prevee que esté el problema. Sin embargo también se prevee que esta simplificación no afecte en gran medida al resultado final manteniéndose este prácticamente inalterado.

Al anular la componente 'y' del problema el índice 'g' será forzosamente nulo y no variará. Por tanto, con esta condición eliminamos la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea impresa, lo que simplificará de forma considerable el problema. Ahora sólo tendremos que calcular dos integrales para la componente 'x' y otras dos para la 'y', mientras que antes teníamos el doble de integrales. En concreto tendremos que resolver las siguientes integrales: (TE,TM) y (TM,TM), ambas tanto para la componente 'x' como para la 'y'. El primer par significa la combinación de la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento, con la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa. El segundo par significa la combinación de la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento, con la forma modal TM de las funciones

vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa.

A.1. Análisis analítico de la nueva versión

Comencemos entonces los cálculos necesarios para llevar a cabo esta nueva versión. Lo primero será echar un vistazo rápido para ver lo que podremos mantener de los cálculos echos con anterioridad y lo que variará.

Como ya hemos comentado, las integrales que combinan las formas modales de las funciones modales de la caja de apantallamiento y las formas modales de las funciones modales utilizadas para representar las corrientes inducidas en la línea impresa van a cambiar, simplificándose su cálculo. Las funciones gamma de la excitación van a ser muy parecidas a las anteriores. Como vimos en la otra versión, estas se anulaban para la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa siempre que 'g' era distinto de cero, mientras que para la forma modal TE ahora no van a existir. Respecto a las tensiones V_m hay que mencionar que no cambiarán en absoluto al no tener dependencia de la dimensión eliminada.

Dicho esto vamos a comenzar con el cálculo de la nueva matriz $R(i,k)$ cuando $g = 0$. Vamos a recordar la definición de dicha matriz:

$$R(i, k) = \sum_m V_m(z) \int_{S_1} \bar{e}_i^{(1)}(x, y) \bar{e}_m(x, y) ds \int_{S_1} \bar{e}_k^{(1)}(x', y') \bar{e}_m(x', y') ds'$$

o de forma más simplificada:

$$R(i, k) = \sum_m V_m I_{mi}(x', y') I_{mk}(x, y) \quad (\text{A.1})$$

donde $I_{mi}(x', y')$ e $I_{mk}(x, y)$ son las integrales descritas en la ecuaciones 3.64 y 3.65.

Si recordamos las funciones de dicha matriz, teníamos que las funciones vectoriales modales para componente 'x' de la caja de apantallamiento eran:

$$e_{x_m}^{(TE)} = e_{x(m,n)}^{(TE)}(x, y) = N_{e_x}^{(TE)}(m) \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right]$$

$$e_{x_m}^{(TM)} = e_{x(m,n)}^{(TM)}(x, y) = N_{e_x}^{(TM)}(m) \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right]$$

y decíamos que ambas funciones son idénticas salvo en el término $N_{e_x}^\xi$. Mientras que para la componente 'y' de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento, tenemos:

$$e_{ym}^{(\xi)} = e_{y(m,n)}^{(\xi)}(x, y) = N_{ey}^{(\xi)}(m) \sin\left[\frac{m\pi}{a}(x - c)\right] \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right]$$

siendo:

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} TE \\ TM \end{array} \right\}$$

Donde ya hemos escrito de forma más reducida ambas funciones al diferenciarse sólo en el término $N_{ey}^{(\xi)}(m)$. También sabemos las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa. Para la componente 'x':

$$e_{xk}^{(\xi)} = e_{x(k,g)}^{(\xi)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x - e)\right] \cos\left[\frac{g\pi}{w}(y - f)\right]$$

Mientras que para la componente 'y':

$$e_{yk}^{(\xi)} = e_{y(k,g)}^{(\xi)}(x, y) = N_{ey}^{(\xi)}(k) \sin\left[\frac{k\pi}{l}(x - e)\right] \sin\left[\frac{g\pi}{w}(y - f)\right]$$

Imponiendo la condición $g = 0$ en las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento no va a cambiar nada. Sin embargo en las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa tenemos para la componente 'x':

$$e_{xk}^{(\xi)} = e_{x(k,g)}^{(\xi)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x - e)\right]$$

Para la componente 'y':

$$e_{yk}^{(\xi)} = e_{y(k,g)}^{(\xi)}(x, y) = 0$$

Como se comentó con anterioridad se anula la componente 'y' de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa. Por tanto ahora las integrales que combinan las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento para la componente 'y', junto a las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa para la componente 'y', serán nulas.

Ya sabemos que las dos integrales de la ecuación A.1 son iguales pero con índices distintos. Igual que hicimos con la otra versión en este apartado bastará con solucionar una de ellas para obtener las dos. Si por ejemplo escogemos la integral de la derecha:

$$I_{mk}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) + I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$$

donde como sabemos el sumando de la izquierda representa el cálculo de la integral con las funciones que nos dan el comportamiento de la componente 'x', y el sumando de la derecha representa la integral formada por funciones que modelan la componente 'y'. Si comenzamos con la componente 'x' tenemos:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = N_{ex}^{(\xi_1)}(m) N_{ex}^{(\xi_2)}(k) I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \quad (\text{A.2})$$

siendo en esta ocasión:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \int_e^{e+l} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x' - c)\right] \cos\left[\frac{k\pi}{l}(x' - e)\right] dx \quad (\text{A.3})$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \Big|_{g=0} = \int_f^{f+w} \sin\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] dy \quad (\text{A.4})$$

y ξ_1 las formas modales de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento:

$$\xi_1 = \left\{ \begin{matrix} TE \\ TM \end{matrix} \right\}$$

y ξ_2 las formas modales de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa.

$$\xi_1 = \left\{ \begin{matrix} TE \\ TM \end{matrix} \right\}$$

Si observamos la integral de la ecuación A.3 podemos observar que no varía nada respecto a la versión anterior, por tanto ya sabemos su solución. Respecto a la integral de la ecuación A.4 se ha simplificado notoriamente, siendo ahora su solución inmediata:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \Big|_{g=0} = \frac{b}{n\pi} \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - d)\right] \Big|_f^{f+w}$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \Big|_{g=0} = \frac{b}{n\pi} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b}(f-d) \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w-d) \right] \right)$$

Imponiendo la condición $d=0$:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \Big|_{g=0} = \frac{b}{n\pi} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b}f \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w) \right] \right)$$

Por tanto la solución para la integral $I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$ será la ecuación A.2, siendo:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m=k \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) \Big|_{g=0} = \frac{b}{n\pi} \left(\cos \left[\frac{n\pi}{b}f \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{b}(f+w) \right] \right)$$

Además de lo definido anteriormente, para tener un resultado completo, tendremos en cuenta el rango de variación de los índices utilizados en las funciones vectoriales modales para cada integral. Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TE, TE)}(x, y)$, por ser la forma modal TE de las funciones modales utilizadas para representar caja de apantallamiento:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = n = 0$$

Por ser la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

Como $g=0$ no es un índice modal válido para la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa, dicha integral no existe en esta versión. Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TE, TM)}(x, y)$, por ser la forma modal TE de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento:

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = n = 0$$

Por ser la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0$$

Esta integral si existe en esta versión y además en este caso tendremos una nueva indeterminación si $n=0$, entonces:

$$I_{x_{ng}}^{(\xi_1, \xi_2)}(y) = 0$$

y por tanto:

$$I_{x_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = 0$$

Para la integral $I_{x_{mk}}^{(TM, TE)}(x, y)$, por ser la forma modal TM de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Por ser la forma modal TE de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$g = 1, 2, 3, \dots$$

Como $g = 1, 2, 3, \dots$, esta integral no existe en esta versión. Para la última de las integrales $I_{x_{mk}}^{(TM, TM)}(x, y)$, por ser la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas para representar la caja de apantallamiento:

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Por ser la forma modal TM de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa:

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g = 0, 1, 2, \dots$$

En este caso tampoco tendremos ninguna nueva indeterminación. Sólo nos que ya recordar los factores de normalización que ya sabemos de secciones anteriores. Para las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento:

$$N_{ex}^{(TE)}(m, n) = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{b} \frac{n}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

$$N_{ex}^{(TM)}(m, n) = -\frac{2}{a} \frac{m}{\sqrt{m^2 \frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}}}$$

Para las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa:

$$N_{ex}^{(TM)}(k, g) = -\frac{\sqrt{2E_n}k}{l\sqrt{\frac{k^2 w}{l} + \frac{g^2 l}{w}}}$$

ya que $N_{ex}^{(TE)}(k, g)$ no existe. Para la componente 'y' tenemos que $e_{yk}^{(\xi_2)}(x, y) = 0$, y por tanto:

$$I_{y_{mk}}^{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{SE} e_{ym}^{(\xi_1)}(x, y) e_{yk}^{(\xi_2)}(x, y) = 0$$

Con lo que la componente 'y' queda anulada. En esta nueva versión sabemos que los factores gamma de la excitación también van a cambiar. Más que cambiar en realidad tendremos que particularizar las expresiones a las que llegemos para $g=0$. Por tanto tenemos para el factor $\gamma_i^{(1)(\xi)}$ de la excitación:

$$\gamma_i^{(1)(\xi)} = N_{ex}^{(\xi)}(k)w$$

Para el factor $\gamma_i^{(2)(\xi)}$ de la excitación tenemos:

$$\gamma_i^{(2)(\xi)} = -N_{ex}^{(\xi)}(k) \cos(k\pi)w$$

y como sabemos $\gamma_k^{(2)(\xi)}$ es el mismo que $\gamma_i^{(2)(\xi)}$ pero con índice 'k' en vez de 'i'.

A.2. Programación de la nueva versión

Después del análisis analítico de esta nueva versión vamos a comentar los ficheros utilizados para programarla. Lógicamente los cambios necesarios en la nueva versión no van a afectar a todos los ficheros.

En el programa principal sólo tendremos que realizar dos simples modificaciones. La primera será la de llamar al fichero 'Integrales-FGamma-y' en vez de 'Integrales-FGamma', mientras que la segunda será eliminar la constante M_g ya que 'g' siempre valdrá cero y ya no será necesaria. En lo demás este fichero permanecerá invariable.

El fichero 'Calcular-Vm' permanecerá inalterado. Esto se debe a que las tensiones dependen de la variación longitudinal de la guía y por tanto únicamente de los índices de la guía 'm' y 'n'.

El fichero que tendremos que modificar en mayor medida será 'Integrales-FGamma' que como hemos mencionado llamaremos 'Integrales-FGamma-y' y se encargará del cálculo de las integrales y las funciones gamma en esta nueva versión. Las modificaciones que tendremos que realizar vendrán todas originadas por el hecho de que el índice 'g' tome valor nulo constante, no teniendo que realizar ninguna otra modificación. Lo primero será asignar a 'g' cero durante las inicializaciones. Dicho valor permanecerá inalterado en el resto del programa. Por tanto ya no existirá el bucle para 'g'. Eliminaremos también las sentencias de asignación a E_g que ahora tomará valor constante uno. Los factores de normalización de las funciones vectoriales modales de la caja de apantallamiento permanecerán inalterados, mientras que los de las funciones vectoriales modales utilizadas en la guía equivalente para representar las corrientes inducidas en la línea microstrip impresa desaparecerán los correspondientes a la forma modal TE. Esto se debe a que para este modo el índice $g=0$ no es un índice válido. En el cálculo de las integrales como acabamos de mencionar no existirá la forma modal TE y sólo tendremos que calcular las correspondientes a la forma modal TM. Respecto al cálculo de los factores γ_1 , γ_2 y γ_k no tendremos que realizar nuevos cálculos. Sólo habrá que particularizar los de la versión anterior para $g=0$ como ya hemos hecho en el desarrollo analítico.

Apéndice B

Desarrollo de programas en Matlab para modelar el sistema estudiado

B.1. Programas de la primera versión

B.1.1. principal.m

PROGRAMA PRINCIPAL DESDE DONDE SE LLAMA AL RESTO DE LOS FICHEROS Y DONDE SE REALIZAN TODOS LOS CÁLCULOS HASTA OBTENER LA RESISTENCIA DE ENTRADA CON LAS MATRICES OBTENIDAS DE LOS DEMÁS FICHEROS.

```
function [R_in] = principal();
```

%En principio la función no recibe argumentos. Los parámetros que deberá introducir el usuario los tenemos a continuación:

```
%LONGITUDES DE LA ESTRUCTURA O GUÍA:
```

```
%longitud x de la guía:
```

```
a=0.015;
```

```
%longitud z de la guía:
```

```
b=0.015;
```

```
%LONGITUDES DE LA LINEA:
```

```
%l=longitud x de la línea
```

```
l=0.015;
```

```
%w=longitud y de la línea
```

```
w=0.015;
```

```
%DESPLAZAMIENTO DE LA ESTRUCTURA RESPECTO AL PUNTO (0,0):
```

```
%abcisa de la estructura desplazada en el espacio respecto 0:
```

```
c=0;
```

```
%ordenada de la estructura desplazada en el espacio respecto 0:
```

```
d=0;
```

```
%DESPLAZAMIENTO DE EL CIRCUITO RESPECTO AL PUNTO (0,0) DE LA ESTRUCTURA:
```

```
%e=abcisa de la línea desplazada sobre la caja respecto 0 de la guía
```

```
e=0;
```

```
%f=ordenada de la línea desplazada sobre la caja respecto 0 de la guía
```

```
f=0.006;
```

```
%longitud Z de el espacio de aire en la guía
```

```
h=0.010;
```

```
%longitud Z de el dieléctrico en la guía
```

```
t=0.00257;
```

```
%VARIACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LA GUÍA:
```

```
%N_m=variación del índice m
```

```
N_m=20;
```

```
%N_n=variación del índice n
```

```
N_n=15;
```

```
%VARIACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LA GUÍA:
```

```
%N_k=variación del índice k:
```

```
M_k=3;
```

```
%N_g=variación del índice g:
```

```
M_g=3;
```

%dentro del recorrido especificado por la frecuencia inicial y final se tomaran tantas frecuencias como iteraciones tengamos. Se tomarán según un recorrido geométrico o aritmético.

```

iteraciones=2;

frecuencia_inicial=10(5);

frecuencia_final=10(12);

%constantes relativas características

Er_Aire=1;

Er_linea=2.33;

%Impedancia de carga

ZL=50;

%FIN DE LOS PARÁMETROS

%----- %
%----- %

%INICIALIZACIONES

alpha_gorro=0;

Z_in=0;

Z_in_vector=0;

frecuencias_vector=0;

distancia_frecuencias=frecuencia_final - frecuencia_inicial;

frecuencia=0;

num_ceros=0;

iteraciones_por_cero=0;

%índice que indica el modo de la línea que estamos representando en las gráficas:

indice=2;

%FIN DE INICIALIZACIONES

%----- %
%----- %

% OBTENEMOS EL EXPONENTE DE LAS FRECUENCIAS

while distancia_frecuencias>1

```

```

    distancia_frecuencias=distancia_frecuencias/10;

    num_ceros=num_ceros+1;

end

iteraciones_por_cero=iteraciones/num_ceros;

%-----%
%-----%

%LLAMAMOS AL FICHERO PARA QUE CALCULE LAS INTEGRALES Y LAS FUNCIONES
GAMMA

[C_Caja_TE,C_Caja_TM,Gamma_i1,Gamma_i2]=Integrales_FGamma_nuevo(a,b,l,w,c,d,e,f,N_m,N_n,M

%COMENZAMOS EL BUCLE PRINCIPAL DEL PROGRAMA DONDE HACEMOS EL RECOR-
RIDO EN FRECUENCIA

for n_iteracion=0:iteraciones,

%RECORRIDO EXPONENCIAL:

    frecuencia=frecuencia_inicial + (10^(n_iteracion/iteraciones_por_cero));

%RECORRIDO GEOMÉTRICO:

    frecuencia=frecuencia_inicial+(n_iteracion*(frecuencia_final-frecuencia_inicial)/iteraciones);

%LLAMAMOS AL FICHERO PARA QUE CALCULE LAS TENSIONES:

    [Vm_TE_ok,Vm_TM_ok]=Calcular_Vm(a,b,c,d,h,t,N_m,N_n,frecuencia,Er_Aire,Er_linea);

%-----%

%COMPROBACIÓN DE QUE CUANDO m->(m,n) CRECE LAS GRÁFICAS CONVERGEN A
UN VALOR EXISTIENDO UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL PARA LA FRECUENCIA DE TRABAJO

%FRECUENCIA:indica la frecuencia de trabajo para las gráficas que estamos tratando

%indice:si fuese necesario a partir de este podemos deducir los índices m y k representados en las
gráficas

%el factor 'N_m*N_n' indica el número de términos sumados. Según la teoría conforme aumente
este la gráfica debe converger a un valor

[l_caja_TE,c_caja_TE]=size(C_Caja_TE);

[l_caja_TM,c_caja_TM]=size(C_Caja_TM);

C_TE_L_TE=C_Caja_TE(:,1:(c_caja_TE/2));

```

```

C_TE_L_TM = C_Caja_TE(:,((c_caja_TE/2)+1:c_caja_TE));
C_TM_L_TE = C_Caja_TM(:,1:(c_caja_TM/2));
C_TM_L_TM = C_Caja_TM(:,((c_caja_TM/2)+1:c_caja_TM));
C_TE_L_TETE = C_TE_L_TE(:,indice).*C_TE_L_TE(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TETE = C_TM_L_TE(:,indice).*C_TM_L_TE(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TETM = C_TE_L_TE(:,indice).*C_TE_L_TM(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TETM = C_TM_L_TE(:,indice).*C_TM_L_TM(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TMTE = C_TE_L_TM(:,indice).*C_TE_L_TE(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TMTE = C_TM_L_TM(:,indice).*C_TM_L_TE(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TMTM = C_TE_L_TM(:,indice).*C_TE_L_TM(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TMTM = C_TM_L_TM(:,indice).*C_TM_L_TM(:,indice).*Vm_TM_ok;

```

%Valores de las gráficas

```

C_TE_L_TETE_graf = cumsum(C_TE_L_TETE);
C_TM_L_TETE_graf = cumsum(C_TM_L_TETE);
C_TE_L_TETM_graf = cumsum(C_TE_L_TETM);
C_TM_L_TETM_graf = cumsum(C_TM_L_TETM);
C_TE_L_TMTE_graf = cumsum(C_TE_L_TMTE);
C_TM_L_TMTE_graf = cumsum(C_TM_L_TMTE);
C_TE_L_TMTM_graf = cumsum(C_TE_L_TMTM);
C_TM_L_TMTM_graf = cumsum(C_TM_L_TMTM);

```

%MOSTRAMOS LAS GRÁFICAS DE CONVERGENCIA PARA LA FRECUENCIA DE TRABA-
JO

```

titulo_graficas_convergencia= sprintf('FRECUENCIA=%d Hz ÍNDICE=%d N_m * N_n
=%d *%d =%d', frecuencia, indice,N_m , N_n, N_m*N_n);

```

figure,

subplot(2,1,1),

plot(imag(C_TE_L_TETE_graf),'*'), %representamos la parte imaginaria porque la
real es nula

title('GUIA->TE LÍNEA->TETE'),

```

subplot(2,1,2),
plot(imag(C_TE_L_TMTM_graf),'*'),
title('GUIA->TE LÍNEA->TMTM')
xlabel(titulo_graficas_convergencia)

figure,
subplot(2,1,1),
plot(imag(C_TM_L_TETE_graf),'*'),
title('GUIA->TM LÍNEA->TETE')
subplot(2,1,2),
plot(imag(C_TM_L_TMTM_graf),'*'),
title('GUIA->TM LÍNEA->TMTM')
xlabel(titulo_graficas_convergencia)

%Al combinar las formas no puras salen siempre nulas

% figure(5),
% plot(imag(C_TE_L_TETM_graf),'*'),
% title('Modo TE de la guia y TETM de la línea')

% figure(6),
% plot(imag(C_TM_L_TETM_graf),'*'),
% title('Modo TM de la guia y TETM de la línea')

% figure(7),
% plot(imag(C_TE_L_TMTE_graf),'*'),
% title('Modo TE de la guia y TMTE de la línea')

% figure(8),
% plot(imag(C_TM_L_TMTE_graf),'*'),
% title('Modo TM de la guia y TMTE de la línea')

%FIN DE LA COMPROBACIÓN

%-----%
```



```

%-----%
%Muestra sólo una matriz cuadrada R(i,k) de la forma : [TETE,TETM ; TMTE,TMTM]

Vm = [Vm_TE_ok ; Vm_TM_ok];
C = [C_Caja_TE ; C_Caja_TM];
[filas_C,columnas_C] = size(C);
for j=1:columnas_C
    if(j==1)
        Vm_ok = Vm;
    else
        Vm_ok = [Vm_ok Vm];
    end%if
end %for

R = (C'*(Vm_ok.*C));

%-----%
%-----%

%Mostrar dos sub-matrices de la matriz R(i,k): una para el modo TETE de la línea y otra para el
TMTM

% C_linea_TE=C(1:filas_C,1:columnas_C/2);
% C_linea_TM=C(1:filas_C,((columnas_C/2)+1):columnas_C);
% Vm_TE_ok = Vm_ok(1:filas_C,1:columnas_C/2);
% Vm_TM_ok = Vm_ok(1:filas_C,(columnas_C/2)+1:columnas_C);
% R_TE = (C_linea_TE'*(Vm_TE_ok.*C_linea_TE));
% R_TM = (C_linea_TM'*(Vm_TM_ok.*C_linea_TM));

%-----%
%-----%

%GAMMA_k ES EL CONJUGADO DE GAMMA_i2

Gamma_k = Gamma_i2';

```

```

A = R + ((ZL* Gamma_i2) * Gamma_k);
alpha_gorro = A Gamma_i1;
Z_in = 1/(alpha_gorro' * Gamma_i1);
if(n_iteracion==0)
    Z_in_vector=Z_in;
    frecuencias_vector=frecuencia;
else
    Z_in_vector=[Z_in_vector,Z_in];
    frecuencias_vector = [frecuencias_vector,frecuencia];
end %if
end %for PRINCIPAL

%-----%
%-----%

%REPRESENTACIÓN DE LA IMPEDANCIA DE ENTRADA EN FUNCIÓN DE LA FRECUEN-
CIA

a= sprintf('Z_IN EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA PARA N_m =%d, N_n=%d,
M_k=%d', N_m, N_n, M_k);

figure,
    subplot(2,1,1),
    plot(frecuencias_vector,real(Z_in_vector),'*')
    ylabel('REAL(Zin)')
    xlabel('FRECUENCIA')
    title(a)
    grid on
    subplot(2,1,2),
    plot(frecuencias_vector,imag(Z_in_vector),'*'),
    ylabel('IMAG(Zin)')
    xlabel('FRECUENCIA')
    grid on

```

```
%FIN DEL PROGRAMA
```

```
%-----%
```

```
%-----%
```

```
%-----%
```

```
%-----%
```

B.1.2. Integrales-FGamma

Función que calcula las matrices resultantes de combinar las integrales de la guía con las de la línea (C_Caja_TE, C_Caja_TM). También calcularemos los factores de la excitación gamma (Gamma_i1 y Gamma_i2)

```
function [C_Caja_TE,C_Caja_TM,Gamma_i1,Gamma_i2] = Integrales_FGamma_nuevo(a,b,l,w,c,d,e,f,N_m,N_n,M_k,M_g);
```

```
%-----%
```

```
%INICIALIZACIONES:
```

```
%Factores de noramalización:
```

```
NcajaTEx=0;
```

```
NcajaTMx=0;
```

```
NcajaTEy=0;
```

```
NcajaTMy=0;
```

```
NlineaTEx=0;
```

```
NlineaTEy=0;
```

```
NlineaTMx=0;
```

```
NlineaTMy=0;
```

```
%Integrales en los bucles internos:
```

```
TETEx=0;
```

```
TETMx=0;
```

```
TMTEx=0;
```

```
TMTMx=0;
```

```
TETEy=0;
```

```

TETMy=0;
TMTEy=0;
TMTMy=0;
TETE=0;
TETM=0;
TMTE=0;
TMTM=0;

%factores para simplificar para facilitar la claridad del cálculo de los vectores Gamma(i) y Gamma(k)
Gamma_i1_TE=0;
Gamma_i1_TM=0;
Gamma_i1=0;
Gamma_i2_TE=0;
Gamma_i2_TM=0;
Gamma_i2=0;
Gamma_k_TE=0;
f_Gamma_TE=0;
f_Gamma_TM=0;

%Integrales en los bucles externos:
F_TE=0;
F_TM=0;
C_TE=0;
C_TM=0;
R=0;
C_Caja_TE=0;
C_Caja_TM=0;

%FIN DE INICIALIZACIONES

%-----%
%-----%

```

```

for k=0:M_k-1, %for k
    if (k==0)
        Ek =1;
    else
        Ek=2;
    end %if
    for g=0:M_g-1, %for g
        if (g==0)
            Eg =1;
        else
            Eg=2;
        end %if
        NlineaTEEx (k+1,g+1)= -sqrt(2*Ek)*(g+1)/(w*sqrt((w*k2/1) + ((1*(g+1)2)/w)));
        NlineaTMx(k+1,g+1) = -sqrt(2*Eg)*(k+1)/(1*sqrt(((w*(k+1)2)/1)+((1*(g2))/w)));
        NlineaTEy(k+1,g+1) = -(sqrt(2*Ek)*k)/(1*sqrt((w*k2/1) + (1*(g+1)2/w)));
        NlineaTMy(k+1,g+1) = (sqrt(2*Eg)*g)/(w*sqrt((w*(k+1)2/1) + (1*g2/w)));
        %Cálculo de los factores gamma_i1, gamma_i2 y gamma_K
        if(g==0)
            f_Gamma_TM = NlineaTMx(k+1,g+1)*w;
        else
            f_Gamma_TM = 0;
        end
        if(k==0 & g==0);
            Gamma_i1_TM = f_Gamma_TM;
            Gamma_i2_TM = f_Gamma_TM * cos((k+1)*pi);
            Gamma_i1_TE = 0;
            Gamma_i2_TE = 0;
        else

```

```

Gamma_i1_TM = [Gamma_i1_TM ; f_Gamma_TM];
Gamma_i2_TM = [Gamma_i2_TM;f_Gamma_TM*cos((k+1)*pi)];
Gamma_i1_TE = [Gamma_i1_TE ; 0];
Gamma_i2_TE = [Gamma_i2_TE ; 0];

end

end %for g

end %for k

Gamma_i1 = [Gamma_i1_TE ; Gamma_i1_TM];
Gamma_i2 = [Gamma_i2_TE ; Gamma_i2_TM];

for m=0:N_m-1, %for1
    if (m==0)
        Em =1;
    else
        Em=2;
    end %if
    for n=0:N_n-1, %for2
        if (n==0)
            En =1;
        else
            En=2;
        end %if
        if(m==0 & n==0)
            NcajaTMx = (-2*(m+1))/(a*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
            NcajaTMy = (-2*(n+1))/(b*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
        else
            NcajaTEEx = (sqrt(Em*En)*n)/(b*sqrt(((b*m^2)/a) + ((a*n^2)/b)));
            NcajaTMx = (-2*(m+1))/(a*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
            NcajaTEy = (-sqrt(Em*En)*m)/(a*sqrt(((b*m^2)/a) + ((a*n^2)/b)));
        end
    end
end

```

```

    NcajaTMy = (-2*(n+1))/(b*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
end
for k=0:M_k-1, %for3
    for g=0:M_g-1, %for4
        %Cálculo de las integrales dentro de los bucles más internos
        %Aproximación para el cálculo de las integrales cuando se produce la in-
determinación al dividir por 0 ya que (m/a) = (k/l)
        MIN = 10^(-7);
        %g+1;k;m;n
        f_TETEx=(NcajaTEx*NlineaTEx(k+1,g+1));
        if(m==0 & k==0)
            f_TETEx1=1;
        else if(m==0 | k==0)
            f_TETEx1= 0;
        else if(m =k)
            f_TETEx1= 0;
        else
            f_TETEx1= 1/2;
        end
        end
    end
    if(n==0)
        f_TETEx3= 0;
    else if(((n/b)+((g+1)/w)) <MIN)
        f_TETEx3=(1/2)*(sin(n*pi*(f-d)/b))-[(b/(4*n*pi))*(cos(n*pi*(f-
d+(2*w))/b)-cos(n*pi*(f-d)/b))];
    else
        f_TETEx3=(1/2)*[(1/(pi*(n/b)+((g+1)/w)))*(cos((n*pi*(w+f-
d)/b)+((g+1)*pi))-cos(n*pi*(f-d)/b)]-[(1/(pi*(n/b)-((g+1)/w)))*(cos((n*pi*(w+f-d)/b)-((g+1)*pi))-
cos(n*pi*(f-d)/b))];
    end
end
end
end

```

```

        end

    end

    %g+1;k;m+1;n+1
    f_TMTEEx=(NcajaTMx*NlineaTEEx(k+1,g+1));
    if(k==0)
        f_TMTEEx1=0;
    else if((m+1) =k)
        f_TMTEEx1= 0;
    else
        f_TMTEEx1= 1/2;
    end
end

if((((n+1)/b)+((g+1)/w)) <MIN)
    f_TMTEEx3 = (1/2) * (sin((n+1)*pi*(f-d)/b) -
    [(b/(4*(n+1)*pi))*(cos((n+1)*pi*(f-d+(2*w)/b)-cos((n+1)*pi*(f-d)/b))]);
    else
        f_TMTEEx3=(1/2)*[[(1/(pi*((n+1)/b)+((g+1)/w)))*(cos(((n+1)*pi*(w+f-
d)/b)+((g+1)*pi))-cos((n+1)*pi*(f-d)/b)]-[1/(pi*((n+1)/b)-((g+1)/w)))*(cos(((n+1)*pi*(w+f-d)/b)-
((g+1)*pi))-cos((n+1)*pi*(f-d)/b)]];
    end

    %g;k+1;m;n
    f_TETMx=(NcajaTEEx*NlineaTMx(k+1,g+1));
    if(m =(k+1))
        f_TETMx1= 0;
    else
        f_TETMx1= 1/2;
    end
end
if(n==0)
    f_TETMx3= 0;

```



```

else if(((n/b)+(g/w)) <MIN)
    f_TETMx3 = (1/2) * (sin(n*pi*(f-d)/b) - [(b/(4*n*pi)) *
(cos(n*pi*(f-d+(2*w))/b)-cos(n*pi*(f-d)/b))]);
else
    f_TETMx3 = (1/2) * [(1/(pi*(n/b)+(g/w))) * (cos((n*pi*(w+f-
d)/b)+(g*pi)) - cos(n*pi*(f-d)/b))] - [(1/(pi*(n/b)-(g/w))) * (cos((n*pi*(w+f-d)/b)-(g*pi)) - cos(n*pi*(f-
d)/b))]];
end
end
%g;k+1;m+1;n+1
f_TMTMx=(NcajaTMx*NlineaTMx(k+1,g+1));
if((m+1) =(k+1))
    f_TMTMx1= 0;
else
    f_TMTMx1= 1/2;
end
if((((n+1)/b)+(g/w)) <MIN)
    f_TMTMx3 = (1/2) * (sin((n+1)*pi*(f-d)/b) - [(b/(4*(n+1)*pi))
* (cos((n+1)*pi*(f-d+(2*w))/b) - cos((n+1)*pi*(f-d)/b))]);
else
    f_TMTMx3=(1/2)*[(1/(pi*((n+1)/b)+(g/w)))*(cos(((n+1)*pi*(w+f-
d)/b)+(g*pi))-cos((n+1)*pi*(f-d)/b)]-[1/(pi*((n+1)/b)-(g/w)))*(cos(((n+1)*pi*(w+f-d)/b)-(g*pi))-
cos((n+1)*pi*(f-d)/b))]];
end
%g+1;k;m;n
f_TETEy=(NcajaTEy*NlineaTEy(k+1,g+1));
if(m==0 | k==0)
    f_TETEy1= 0;
else if(m =k)
    f_TETEy1= 0;

```

```

else
    f_TETEy1= 1/2;
end
end
if(n==0)
    f_TETEy3=-w*(cos((g+1)*pi)-1)/((g+1)*pi);
else if(((n/b)-(g+1)/w) <MIN)
    f_TETEy3=(1/2)*((-sin(n*pi*(f-d)/b))-[(b/(2*n*pi))*(cos(n*pi*(f-
d+(2*w))/b)-cos(n*pi*(f-d)/b))]);
else
    f_TETEy3 = (1/(2*pi)) * ((1/((n/b) - (g+1)/w)) - (1/((n/b) +
(g+1)/w))) * (cos((n*pi*(w+f-d)/b)+((g+1)*pi)) - cos(n*pi*(f-d)/b));
end
end
%g+1;k;m+1;n+1
f_TMTEy=(NcajaTMy*NlineaTEy(k+1,g+1));
if(k==0)
    f_TMTEy1= 0;
else if((m+1) =k)
    f_TMTEy1= 0;
else
    f_TMTEy1= 1/2;
end
end
if(((n+1)/b)-(g+1)/w) <MIN)
    f_TMTEy3 = (1/2) * ((-sin((n+1)*pi*(f-d)/b)) - [(b/(2*(n+1)*pi)
* (cos((n+1)*pi*(f-d+(2*w))/b) - cos((n+1)*pi*(f-d)/b))]);
else
    f_TMTEy3 = (1/(2*pi)) * ((1/(((n+1)/b) - (g+1)/w)) -
(1/(((n+1)/b) + (g+1)/w))) * (cos(((n+1)*pi*(w+f-d)/b)+((g+1)*pi)) - cos((n+1)*pi*(f-d)/b));

```

```

end

%g;k+1;m;n

f_TETMy=(NcajaTEy*NlineaTMy(k+1,g+1));

if(m==0)

    f_TETMy1= 0;

else if(m =(k+1))

    f_TETMy1= 0;

else

    f_TETMy1= (1/2);

end

end

if(g==0)

    f_TETMy3=0;

else if(n==0)

    f_TETMy3=-w*(cos((g+1)*pi)-1)/(g*pi);

else if(((n/b)-(g/w)) <MIN)

    f_TETMy3=(1/2)*((-sin(n*pi*(f-d)/b)-[(b/(2*n*pi))*(cos(n*pi*(f-
d+(2*w))/b)-cos(n*pi*(f-d)/b))]);

else

    f_TETMy3 = (1/(2*pi)) * ((1/((n/b) - g/w)) - (1/((n/b) + g/w)))
* (cos((n*pi*(w+f-d)/b)+(g*pi)) - cos(n*pi*(f-d)/b));

end

end

end

%g;k+1;m+1;n+1

f_TMTMy=(NcajaTMy*NlineaTMy(k+1,g+1));

if((m+1) =(k+1))

    f_TMTMy1= 0;

else

```

```

        f_TMTMy1= 1/2;

    end

    if(g==0)

        f_TMTMy3=0;

    else if((((n+1)/b)-(g/w)) <MIN)

        f_TMTMy3 = (1/2) * ((-sin((n+1)*pi*(f-d)/b)) - [(b/(2*(n+1)*pi))
* (cos((n+1)*pi*(f-d+(2*w))/b) - cos((n+1)*pi*(f-d)/b))]);

    else

        f_TMTMy3 = (1/(2*pi)) * ((1/(((n+1)/b) - g/w)) - (1/(((n+1)/b)
+ g/w))) * (cos(((n+1)*pi*(w+f-d)/b)+(g*pi)) - cos((n+1)*pi*(f-d)/b));

    end

end

fTETEx = f_TETEx1 * f_TETEx3;

fTMTEx = f_TMTEx1 * f_TMTEx3;

fTETMx = f_TETMx1 * f_TETMx3;

fTMTMx = f_TMTMx1 * f_TMTMx3;

fTETEy = f_TETEy1 * f_TETEy3;

fTMTEy = f_TMTEy1 * f_TMTEy3;

fTETMy = f_TETMy1 * f_TETMy3;

fTMTMy = f_TMTMy1 * f_TMTMy3;

TETEx= f_TETEx * fTETEx;

TMTEx= f_TMTEx * fTMTEx;

TETMx= f_TETMx * fTETMx;

TMTMx= f_TMTMx * fTMTMx;

TETEy= f_TETEy * fTETEy;

TMTEy= f_TMTEy * fTMTEy;

TETMy= f_TETMy * fTETMy;

TMTMy= f_TMTMy * fTMTMy;

if(k==0 & g==0)

```

```

        TETE= TETEx + TETEy;
        TETM= TETMx + TETMy;
        TMTE= TMTEx + TMTEy;
        TMTM= TMTMx + TMTMy;
    else
        TETE= [TETE , TETEx + TETEy];
        TETM= [TETM , TETMx + TETMy]
        TMTE= [TMTE , TMTEx + TMTEy];
        TMTM= [TMTM , TMTMx + TMTMy]
    end %if

    %fin de el cálculo de las integrales dentro de los bucles más internos
    %-----%
    %-----%
end %for4

end %for3

%Cálculo de las integrales en los bucles más externos

if(m==0 & n==0);
else
    F_TE = [TETE,TETM];
end %if

F_TM = [TMTE,TMTM];

TETE=0;
TETM=0;
TMTE=0;
TMTM=0;

if(m==0 & n==0);
else if(m==0 & n==1)
    C_Caja_TE = F_TE;

```

```

        else
            C_Caja_TE=[C_Caja_TE ; F_TE];
        end %if

    end

    if(m==0 & n==0);
        C_Caja_TM = F_TM;
    else
        C_Caja_TM = [C_Caja_TM ; F_TM];
    end %if

    %-----%
    %-----%
end %for2

end %for1

%FIN DEL PROGRAMA

%-----%
%-----%
%-----%
%-----%

```

B.1.3. Calcular V_m

Función que calcula la matriz V_m

```

function [Vm_TE_ok,Vm_TM_ok] = Calcular_Vm(a,b,c,d,h,t,N_m,N_n,frecuencia,Er_Aire,Er_linea);
%-----%

%INICIALIZACIONES:

fr=frecuencia;

Vm=0;

Vm_ok=0;

Vm_TE=0;

```

```
Vm_TM=0;
Vm_TE_ok=0;
Vm_TM_ok=0;
%Calculo de Zc
Zc_Aire_TE=0;
Zc_Aire_TM=0;
Zc_linea_TE=0;
Zc_linea_TM=0;
Wo=2*pi*fr;
u=4*pi*10-7;
E=8.85418782*10-12;
Ko=Wo*sqrt(E*u);
%Cálculo de B(constante de propagación en al medio)
B_Aire_TE=0;
B_Aire_TM=0;
B_linea_TE=0;
B_linea_TM=0;
B_Aire_TE_ok=0;
B_Aire_TM_ok=0;
B_linea_TE_ok=0;
B_linea_TM_ok=0;
Kx_TE=0;
Ky_TE=0;
Kx_TM=0;
Ky_TM=0;
K_Aire=Ko*sqrt(Er_Aire);
K_linea=Ko*sqrt(Er_linea);
%Cálculo de la impedancia de entrada
```

```

Zin_Aire_TE=0;

Zin_linea_TE=0;

Zin_Aire_TM=0;

Zin_linea_TM=0;

%Vectores para la comprobación de que la tangente hiperbólica (Th) tiende a 1 ó -1

Th_Aire_TE = 0;

Th_Aire_TM = 0;

Th_linea_TE = 0;

Th_linea_TM = 0;

%FIN DE INICIALIZACIONES

%-----%

%COMENZAMOS CON LOS BUCLES

for m=0:N_m-1,%for1

    for n=0:N_n-1,%for2

        Kx_TE=(m*pi)/a;

        Ky_TE=(n*pi)/b;

        Kx_TM=((m+1)*pi)/a;

        Ky_TM=((n+1)*pi)/b;

        %Constante de propagación en el aire:

        %-para el modo TE:B_Aire_TE

        %-para el modo TM:B_Aire_TM

        %Constante de propagación en la línea(B_linea):

        %-para el modo TE:B_linea_TE

        %-para el modo TM:B_linea_TM

        B_Aire_TE=sqrt((K_Aire^2)-(Kx_TE^2)-(Ky_TE^2));

        B_linea_TE=sqrt((K_linea^2)-(Kx_TE^2)-(Ky_TE^2));

        B_Aire_TM=sqrt((K_Aire^2)-(Kx_TM^2)-(Ky_TM^2));

        B_linea_TM=sqrt((K_linea^2)-(Kx_TM^2)-(Ky_TM^2));

```



```

>K_Aire2))
    if((abs(Kx_TE2) + abs(Ky_TE2) >K_linea2) & (abs(Kx_TE2) + abs(Ky_TE2)
    >K_Aire2))
        B_linea_TE_ok = -B_linea_TE;
        B_Aire_TE_ok = -B_Aire_TE;
    else if(abs(Kx_TE2) + abs(Ky_TE2) >K_Aire2)
        B_linea_TE_ok = B_linea_TE;
        B_Aire_TE_ok = -B_Aire_TE;
    else if(abs(Kx_TE2) + abs(Ky_TE2) >K_linea2)
        B_linea_TE_ok = -B_linea_TE;
        B_Aire_TE_ok = B_Aire_TE;
    else
        B_linea_TE_ok = B_linea_TE;
        B_Aire_TE_ok = B_Aire_TE;
    end %if
    end %if
    if((abs(Kx_TM2) + abs(Ky_TM2) >K_linea2) & (abs(Kx_TM2) +
    abs(Ky_TM2) >K_Aire2))
        B_linea_TM_ok = -B_linea_TM;
        B_Aire_TM_ok = -B_Aire_TM;
    else if(abs(Kx_TM2)+abs(Ky_TM2) >K_Aire2)
        B_linea_TM_ok = B_linea_TM;
        B_Aire_TM_ok = -B_Aire_TM;
    else if(abs(Kx_TM2)+abs(Ky_TM2) >K_linea2)
        B_linea_TM_ok = -B_linea_TM;
        B_Aire_TM_ok = B_Aire_TM;
    else
        B_linea_TM_ok = B_linea_TM;
        B_Aire_TM_ok = B_Aire_TM;
    end %if
end %if

```

```

        end %if
        end %if
    end %if

%impedancia característica de la línea de transmisión e impedancia característica del aire
    Zc_Aire_TE=(Wo*u)/B_Aire_TE_ok;
    Zc_linea_TE=(Wo*u)/B_linea_TE_ok;
    Zc_Aire_TM=B_Aire_TM_ok/(E*Er_Aire*Wo);
    Zc_linea_TM=B_linea_TM_ok/(E*Er_linea*Wo);

%impedancia de entrada en la línea de transmisión
    Zin_Aire_TE = i*Zc_Aire_TE*tan(B_Aire_TE_ok*h);
    Zin_linea_TE = i*Zc_linea_TE*tan(B_linea_TE_ok*t);
    Zin_Aire_TM = i*Zc_Aire_TM*tan(B_Aire_TM_ok*h);
    Zin_linea_TM = i*Zc_linea_TM*tan(B_linea_TM_ok*t);

%Arrays para la comprobación de la convergencia de la constante de propagación
    Th_Aire_TE = [Th_Aire_TE , tan(B_Aire_TE_ok*h)];
    Th_Aire_TM = [Th_Aire_TM , tan(B_Aire_TM_ok*h)];
    Th_linea_TE = [Th_linea_TE , tan(B_linea_TE_ok*t)];
    Th_linea_TM = [Th_linea_TM , tan(B_linea_TM_ok*t)];
    Vm_TE= (Zin_Aire_TE * Zin_linea_TE)/(Zin_Aire_TE + Zin_linea_TE);
    Vm_TM= (Zin_Aire_TM * Zin_linea_TM)/(Zin_Aire_TM + Zin_linea_TM);
    if(m==0 & n==0)
        Vm_TM_ok = Vm_TM;
    else if(m==0 & n==1)
        Vm_TM_ok = [Vm_TM_ok ; Vm_TM];
        Vm_TE_ok = Vm_TE;
    else
        Vm_TM_ok = [Vm_TM_ok ; Vm_TM];
        Vm_TE_ok = [Vm_TE_ok ; Vm_TE];
    end

```

```

                end %if
            end
        end %for2
    end %for1

%-----%
%-----%

```

%Comprobamos que cuando m crece la tangente hiperbólica de la constante de propagación tiene una asíntota horizontal en 1 ó -1

```

%título para la gráfica
label_Th= sprintf('N_m û N_n = %d û %d = %d' , N_m, N_n, N_m*N_n);
%Mostramos las gráficas
%figure(9),
    %plot(imag(Th_Aire_TE),'*'),
    %title('Modo TE de la guia de ondas'),
    %ylabel('Th( beta_AireTE û t )')
    %xlabel(label_Th)
%figure(10),
    %plot(imag(Th_Aire_TM),'*'),
    %title('Modo TM de la guia de ondas'),
    %ylabel('Th( beta_AireTM û t )')
    %xlabel(label_Th)
%figure(11),
    %plot(imag(Th_linea_TE),'*'),
    %title('Modo TE de la guia de ondas'),
    %ylabel('Th( beta_lineaTE û t )')
    %xlabel(label_Th)
%figure(12),
    %plot(imag(Th_linea_TM),'*'),

```

```

    %title('Modo TM de la guia de ondas'),
    %ylabel('Th( beta_linea $\hat{T}M$   $\hat{u}$  t )')
    %xlabel(label_Th)

%-----%
%-----%

%Gráfica de las tensiones para cada valor de m->(m,n). Modo TE:
    %figure(80),
    %plot(abs(imag(Vm_TE_ok)),'*'),
    %title('Valor absoluto de la onda de tensión. Modo TE'),
    %ylabel('V_m $\hat{T}E$ (z)')
    %xlabel('m')

%Gráfica de las tensiones para cada valor de m->(m,n). Modo TM:
    %figure(81),
    %plot(abs(imag(Vm_TM_ok)),'*'),
    %title('Valor absoluto de la onda de tensión. Modo TM'),
    %ylabel('V_m $\hat{T}M$ (z)')
    %xlabel('m')

%graf_suma_TE=cumsum(Vm_TE_ok);
%graf_suma_TM=cumsum(Vm_TM_ok);

%Monitorización del sumatorio de las tensiones para los valores de m->(m,n). Modo TE:
    %figure(82),
    %plot(imag(graf_suma_TE),'*'),
    %title('Modo TM de la guia de ondas'),
    %ylabel('cumsum(V_m $\hat{T}E$ (z))')
    %xlabel('m')

%Monitorización del sumatorio de las tensiones para los valores de m->(m,n). Modo TM:
    %figure(83),
    %plot(imag(graf_suma_TM),'*'),

```

```

    %title('Modo TM de la guia de ondas'),
    %ylabel('cumsum(V_m\hat{T}M(z))')
    %xlabel('m')

%FIN DEL PROGRAMA

%-----%
%-----%
%-----%
%-----%

```

B.2. Programas en Matlab de la versión simplificada

B.2.1. principal-y

PROGRAMA PRINCIPAL DESDE DONDE SE LLAMA AL RESTO DE LOS FICHEROS Y DONDE SE REALIZAN TODOS LOS CÁLCULOS HASTA OBTENER LA RESISTENCIA DE ENTRADA CON LAS MATRICES OBTENIDAS DE LOS DEMÁS FICHEROS. EN ESTA VERSIÓN PARTICULARIZAMOS PARA QUE LA COMPONENTE Y DE LAS INTEGRALES SEA NULA. PARA ELLO HACEMOS $g=0$.

```
function [R_in] = principal();
```

%En principio la función no recibe argumentos. Los parámetros que deberá introducir el usuario los tenemos a continuación:

```
%LONGITUDES DE LA GUÍA
```

```
%longitud x de la guía
```

```
a=0.015;
```

```
%longitud z de la guía
```

```
b=0.015;
```

```
%LONGITUDES DE LA LÍNEA
```

```
%l=longitud x de la línea
```

```
l=0.015;
```

```
%w=longitud y de la línea
```

```
w=0.004;
```

```
%DESPLAZAMIENTO DE LA ESTRUCTURA ENVOLVENTE RESPECTO AL PUNTO (0,0)
```

```
%abcisa de la guía desplazada en el espacio respecto 0
```

```
c=0;
```

```
%ordenada de la guía desplazada en el espacio respecto 0
```

```
d=0;
```

```
%DESPLAZAMIENTO DE EL CIRCUITO RESPECTO AL PUNTO (0,0) DE LA GUÍA
```

```
%e=abcisa de la línea desplazada sobre la caja respecto 0 de la guía
```

```
e=0;
```

```
%f=componente y de la líneas desplazada sobre la caja respecto 0 de la guía
```

```
f=0.006;
```

```
%longitud Z de el espacio de aire en la guía
```

```
h=0.010;
```

```
%longitud Z de el dieléctrico en la guía
```

```
t=0.00257;
```

```
%GUÍA m,n
```

```
%RANGO DE VARIACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LA GUÍA
```

```
%Rango de variación de m
```

```
N_m=5;
```

```
%Rango de variación de n
```

```
N_n=3;
```

```
%RANGO DE VARIACIÓN DE LOS ÍNDICES DE LA LÍNEA
```

```
%M_k=rango de variación de k
```

```
M_k=2;
```

```
%frecuencia de funcionamiento
```

```
iteraciones=1;
```

```
frecuencia_inicial=109;
```

```
frecuencia_final=1010;
```

```
%Constantes de propagación para la línea y el aire
    Er_Aire=1;
    Er_linea=2.33;
%Impedancia de carga
    ZL=50;
%fin de los parámetros
%-----%
%-----%
%INICIALIZACIONES
    alpha_gorro=0;
    Z_in=0;
    Z_in_vector=0;
    frecuencias_vector=0;
    distancia_frecuencias=frecuencia_final - frecuencia_inicial;
    frecuencia=0;
    num_ceros=0;
    iteraciones_por_cero=0;
%índice que indica el modo de la línea que estamos representando en las gráficas
    indice=2;
%FIN DE INICIALIZACIONES
%-----%
%-----%
%OBTENEMOS EL EXPONENTE DE LAS FRECUENCIAS
    while distancia_frecuencias>1
        distancia_frecuencias=distancia_frecuencias/10;
        num_ceros=num_ceros+1;
    end
```

```

iteraciones_por_cero=iteraciones/num_ceros;

%-----%
%-----%

%LLAMAMOS AL FICHERO PARA QUE CALCULE LAS INTEGRALES Y LAS FUNCIONES
GAMMA:

[C_Caja_TE,C_Caja_TM,Gamma_i1,Gamma_i2] = Integrales_FGamma_y_nuevo(a,b,l,w,c,d,e,f,N_m,N_n,
C = [C_Caja_TE ; C_Caja_TM];

%COMENZAMOS EL BUCLE PRINCIPAL DEL PROGRAMA DONDE HACEMOS EL RECOR-
RIDO EN FRECUENCIA

for n_iteracion=0:iteraciones,

%RECORRIDO EXPONENCIAL

frecuencia=frecuencia_inicial + (10^(n_iteracion/iteraciones_por_cero));

%OTRO POSIBLE RECORRIDO EXPONENCIAL

%aux=(1/iteraciones)*LOG10(frecuencia_final/frecuencia_inicial);

%frecuencia=frecuencia_inicial * 10^(aux*n_iteracion);

%RECORRIDO GEOMÉTRICO

%frecuencia=frecuencia_inicial + (n_iteracion*(frecuencia_final - frecuen-
cia_inicial)/iteraciones)

%LLAMAMOS AL FICHERO PARA QUE CALCULE LAS TENSIONES

[Vm_TE_ok,Vm_TM_ok] = Calcular_Vm(a,b,c,d,h,t,N_m,N_n,frecuencia,Er_Aire,Er_linea);

%-----%

%COMPROBACIÓN DE QUE CUANDO m->(m,n) CRECE LAS GRÁFICAS CONVERGEN
A UN VALOR

%EXISTIENDO UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL PARA LA FRECUENCIA DE TRABAJO

%FRECUENCIA:indica la frecuencia de trabajo para las gráficas que estamos tratando

%indice:si fuese necesario a partir de este podemos deducir los índices m y k representados en
las gráficas

%el factor "N_m*N_n"indica el número de términos sumados. Según la teoría conforme au-
mente este la gráfica debe converger a un valor

[lineas_caja_TE,columnas_caja_TE] = size(C_Caja_TE);

```



```

[lineas_caja_TM,columnas_caja_TM] = size(C_Caja_TM);
C_TE_L_TE = C_Caja_TE(:,1:(columnas_caja_TE/2));
C_TE_L_TM = C_Caja_TE(:,((columnas_caja_TE/2)+1:columnas_caja_TE));
C_TM_L_TE = C_Caja_TM(:,1:(columnas_caja_TM/2));
C_TM_L_TM = C_Caja_TM(:,((columnas_caja_TM/2)+1:columnas_caja_TM));
C_TE_L_TETE = C_TE_L_TE(:,indice).*C_TE_L_TE(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TETE = C_TM_L_TE(:,indice).*C_TM_L_TE(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TETM = C_TE_L_TE(:,indice).*C_TE_L_TM(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TETM = C_TM_L_TE(:,indice).*C_TM_L_TM(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TMTE = C_TE_L_TM(:,indice).*C_TE_L_TE(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TMTE = C_TM_L_TM(:,indice).*C_TM_L_TE(:,indice).*Vm_TM_ok;
C_TE_L_TMTM = C_TE_L_TM(:,indice).*C_TE_L_TM(:,indice).*Vm_TE_ok;
C_TM_L_TMTM = C_TM_L_TM(:,indice).*C_TM_L_TM(:,indice).*Vm_TM_ok;

%Valores de las gráficas

C_TE_L_TETE_graf = cumsum(C_TE_L_TETE);
C_TM_L_TETE_graf = cumsum(C_TM_L_TETE);
C_TE_L_TETM_graf = cumsum(C_TE_L_TETM);
C_TM_L_TETM_graf = cumsum(C_TM_L_TETM);
C_TE_L_TMTE_graf = cumsum(C_TE_L_TMTE);
C_TM_L_TMTE_graf = cumsum(C_TM_L_TMTE);
C_TE_L_TMTM_graf = cumsum(C_TE_L_TMTM);
C_TM_L_TMTM_graf = cumsum(C_TM_L_TMTM);

%MOSTRAMOS LAS GRÁFICAS

    titulo_graficas_convergencia = sprintf('FRECUENCIA = %d Hz ÍNDICE = %d N_m *
N_n = %d * %d = %d', frecuencia, indice, N_m , N_n, N_m * N_n);

    %figure,

        %subplot(2,1,1),

            %plot(imag(C_TE_L_TETE_graf),'*'), %REPRESENTAMOS LA PARTE
IMAGINARIA PORQUE LA REAL ES NULA

```

```

    %title('GUIA->TE LÍNEA->TETE'),
    %subplot(2,1,2),
    %plot(imag(C_TE_L_TMTM_graf),'*'),
    %title('GUIA->TE LÍNEA->TMTM')
    %xlabel(titulo_graficas_convergencia)
%figure,
    %subplot(2,1,1),
    %plot(imag(C_TM_L_TETE_graf),'*'),
    %title('GUIA->TM LÍNEA->TETE')
    %subplot(2,1,2),
    %plot(imag(C_TM_L_TMTM_graf),'*'),
    %title('GUIA->TM LÍNEA->TMTM')
    %xlabel(titulo_graficas_convergencia)
%Al combinar las formas no puras salen siempre nulas
%figure(5),
    %plot(imag(C_TE_L_TETM_graf),'*'),
    %title('Modo TE de la guia y TETM de la línea')
%figure(6),
    %plot(imag(C_TM_L_TETM_graf),'*'),
    %title('Modo TM de la guia y TETM de la línea')
%figure(7),
    %plot(imag(C_TE_L_TMTE_graf),'*'),
    %title('Modo TE de la guia y TMTE de la línea')
%figure(8),
    %plot(imag(C_TM_L_TMTE_graf),'*'),
    %title('Modo TM de la guia y TMTE de la línea')
%Fin de la comprobación
%—————%

```

```

%-----%
%Muestra sólo una matriz cuadrada R(i,k) de la forma : [TETE,TETM ; TMTE,TMTM]
Vm = [Vm_TE_ok ; Vm_TM_ok];
[filas_C,columnas_C] = size(C);
for j=1:columnas_C
    if(j==1)
        Vm_ok = Vm;
    else
        Vm_ok = [Vm_ok Vm];
    end %if
end %for
R = (C'*(Vm_ok.*C));
%-----%
%-----%
%Mostrar dos sub-matrices de la matriz R(i,k): una para el modo TETE de la línea y otra para
el TMTM
%C_linea_TE=C(1:filas_C,1:columnas_C/2);
%C_linea_TM=C(1:filas_C,((columnas_C/2)+1):columnas_C);
%Vm_TE_ok = Vm_ok(1:filas_C,1:columnas_C/2);
%Vm_TM_ok = Vm_ok(1:filas_C,(columnas_C/2)+1:columnas_C);
%R_TE = (C_linea_TE'*(Vm_TE_ok.*C_linea_TE));
%R_TM = (C_linea_TM'*(Vm_TM_ok.*C_linea_TM));
%-----%
%-----%
%Realizamos las últimas operaciones con las matrices para obtener la Resistencia de entrada
Gamma_k = Gamma_i2';
A = R + ((ZL* Gamma_i2) * Gamma_k);
alpha_gorro = A Gamma_i1;

```

```

Z_in = 1/(alpha_gorro' * Gamma_i1);
if(n_iteracion==0)
    Z_in_vector=Z_in;
    frecuencias_vector=frecuencia;
else
    Z_in_vector=[Z_in_vector,Z_in];
    frecuencias_vector = [frecuencias_vector,frecuencia];
end %if
end %FOR PRINCIPAL
%-----%
%-----%

%REPRESENTACIÓN DE LA IMPEDANCIA DE ENTRADA EN FUNCIÓN DE LA FRECUEN-
CIA

label_Zin= sprintf('Z_IN EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA PARA N_m =%d,
N_n=%d, M_k=%d', N_m, N_n, M_k);

figure(13),
subplot(2,1,1),
plot(frecuencias_vector,real(Z_in_vector))
ylabel('REAL(Zin)')
xlabel('FRECUENCIA')
title(label_Zin)
grid on
subplot(2,1,2),
plot(frecuencias_vector,imag(Z_in_vector))
ylabel('IMAG(Zin)')
xlabel('FRECUENCIA')
grid on

%FIN DEL PROGRAMA

%-----%

```

```
%-----%
%-----%
%-----%
```

B.2.2. Integrales-FGamma-y

Función que calcula las matrices C_Caja_TE, C_Caja_TM, Gamma_i1 y Gamma_i2

```
function [C_Caja_TE,C_Caja_TM,Gamma_i1,Gamma_i2] = Integrales_FGamma_y_nuevo(a,b,l,w,c,d,e,f,N_m,N_n,M_k);
```

```
%INICIALIZACIONES:
```

```
%Factores de normalización
```

```
NcajaTEEx=0;
```

```
NcajaTMx=0;
```

```
NcajaTEy=0;
```

```
NcajaTMy=0;
```

```
NlineaTEEx=0;
```

```
NlineaTEy=0;
```

```
NlineaTMx=0;
```

```
NlineaTMy=0;
```

```
%factores para simplificar para facilitar la claridad del cálculo de los vectores Gamma(i) y Gamma(k)
```

```
Gamma_i1_TEx=0;
```

```
Gamma_i1_TMx=0;
```

```
Gamma_i1=0;
```

```
Gamma_i2_TE=0;
```

```
Gamma_i2_TM=0;
```

```
Gamma_i2=0;
```

```
Gamma_k_TE=0;
```

```
f_Gamma_TE=0;
```

```
f_Gamma_TM=0;
```

```

%Cálculo de las integrales:

TETEx=0;

TETMx=0;

TMTEx=0;

TMTMx=0;

TETEy=0;

TETMy=0;

TMTEy=0;

TMTMy=0;

TETE=0;

TETM=0;

TMTE=0;

TMTM=0;

F_TE=0;

F_TM=0;

C_TE=0;

C_TM=0;

R=0;

%FIN DE INICIALIZACIONES

%-----%
%-----%

for k=0:M_k-1, %for k

    g=0;

    Eg=1;

    %Factores de normalización de la línea:

    NlineaTMx (k+1,g+1)= -sqrt(2*Eg)*(k+1)/(1*sqrt(((w*(k+1)2)/1)+((1*(g2))/w)));

    NlineaTMy (k+1,g+1)= (sqrt(2*Eg)*g)/(w*sqrt((w*(k+1)2/1) + (1*g2/w)));

    %Cálculo de los factores gamma_i1, gamma_i2 y gamma_K

```

```
if(g==0)
    f_Gamma_TM = NlineaTMx(k+1,g+1)*w;
else
    f_Gamma_TM = 0;
end
if(k==0 & g==0);
    Gamma_i1_TM = f_Gamma_TM;
    Gamma_i2_TM = f_Gamma_TM * cos((k+1)*pi);
else
    Gamma_i1_TM = [Gamma_i1_TM ; f_Gamma_TM];
    Gamma_i2_TM = [Gamma_i2_TM;f_Gamma_TM*cos((k+1)*pi)];
end
end %for k
Gamma_i1 = [Gamma_i1_TM];
Gamma_i2 = [Gamma_i2_TM];
for m=0:N_m-1, %for1
    if (m==0)
        Em =1;
    else
        Em=2;
    end %if
    for n=0:N_n-1, %for2
        if (n==0)
            En =1;
        else
            En=2;
        end %if
        if(m==0 & n==0)
```

```

NcajaTMx = (-2*(m+1))/(a*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
NcajaTMy = (-2*(n+1))/(b*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
else
NcajaTEEx = (sqrt(Em*En)*n)/(b*sqrt(((b*m^2)/a) + ((a*n^2)/b)));
NcajaTMx = (-2*(m+1))/(a*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
NcajaTEEy = (-sqrt(Em*En)*m)/(a*sqrt(((b*m^2)/a) + ((a*n^2)/b)));
NcajaTMy = (-2*(n+1))/(b*sqrt((b*(m+1)^2/a) + (a*(n+1)^2/b)));
end
for k=0:M_k-1, %for3
    g=0;
    %Cálculo de las integrales dentro de los bucles más internos
    %-----%
    %-----%
    %g=0;k+1;m;n
    f_TETMx=(NcajaTEEx*NlineaTMx(k+1,g+1));
    if(m =(k+1))
        f_TETMx1= 0;
    else
        f_TETMx1= (1/2)*1;
    end
    if(n==0)
        f_TETMx3= 0;
    else
        f_TETMx3= -b*(cos(n*pi*(f+w-d)/b)-cos(n*pi*(f-d)/b))/(n*pi);
    end
    %-----%
    %g;k+1;m+1;n+1
    f_TMTMx=(NcajaTMx*NlineaTMx(k+1,g+1));

```



```

if((m+1) =(k+1))
    f_TMTMx1= 0;
else
    f_TMTMx1= (1/2)*1;
end

f_TMTMx3 = - b * (cos((n+1) * pi * (f+w-d) / b) - cos((n+1) * pi * (f-d)/b))
/ ((n+1)*pi);

%----- %
%g;k+1;m;n
f_TETMy=(NcajaTEy*NlineaTMMy(k+1,g+1));
f_TETMy1=0;
f_TETMy3=0;
%----- %
%g;k+1;m+1;n+1
f_TMTMy=(NcajaTMMy*NlineaTMMy(k+1,g+1))/4;
f_TMTMy1=0;
f_TMTMy3=0;
%----- %
fTETMx = f_TETMx1 * f_TETMx3;
fTMTMx = f_TMTMx1 * f_TMTMx3;
fTETMy = (f_TETMy1) * (f_TETMy3);
fTMTMy = (f_TMTMy1) * (f_TMTMy3);
%----- %

TETMx= f_TETMx * fTETMx;
TMTMx= f_TMTMx * fTMTMx;
TETMy= f_TETMy * fTETMy;
TMTMy= f_TMTMy * fTMTMy;
%----- %

```

```

    if(k==0 & g==0)
        TETM= TETMx + TETMy;
        TETM_x=TETMx;
        TETM_y=TETMy;
        TMTM= TMTMx + TMTMy;
        TMTM_x=TMTMx;
        TMTM_y=TMTMy;
    else
        TETM= [TETM , TETMx + TETMy];
        TETM_x=[TETM_x , TETMx];
        TETM_y=[TETM_y , TETMy];
        TMTM= [TMTM , TMTMx + TMTMy];
        TMTM_x=[TMTM_x , TMTMx];
        TMTM_y=[TMTM_y , TMTMy];
    end %if
    %----- %
    %fin de el cálculo de las integrales dentro de los bucles más internos
    %----- %
    %----- %
end %for3
%----- %
%Cálculo de las integrales en los bucles más externos
if(m==0 & n==0);
else
    F_TE = [TETM];
    F_TE_x = [TETM_x];
    F_TE_y = [TETM_y];
end %if

```

```

F_TM = [TMTM];
F_TM_x = [TMTM_x];
F_TM_y = [TMTM_y];
if(m==0 & n==0);
else if(m==0 & n==1)
    C_Caja_TE = F_TE;
    C_Caja_TE_x = F_TE_x;
    C_Caja_TE_y = F_TE_y;
else
    C_Caja_TE = [C_Caja_TE ; F_TE];
    C_Caja_TE_x = [C_Caja_TE_x ; F_TE_x];
    C_Caja_TE_y = [C_Caja_TE_y ; F_TE_y];
end %if
end
if(m==0 & n==0);
    C_Caja_TM = F_TM;
    C_Caja_TM_x = F_TM_x;
    C_Caja_TM_y = F_TM_y;
else
    C_Caja_TM = [C_Caja_TM ; F_TM];
    C_Caja_TM_x = [C_Caja_TM_x ; F_TM_x];
    C_Caja_TM_y = [C_Caja_TM_y ; F_TM_y];
end %if
%-----%
%-----%
end %for2
end %for1
"FIN DEL PROGRAMA"

```

%----- %

%----- %

%----- %

%----- %

Apéndice C

Bibliografía

- Field Computation by Moment Methods, Harrington,1993
- Field Theory of Guided Waves by Robert E. Collin
- The Green's Function Moment Method, Johnson, W.A. and D.G.Dudley
- Electromagnetic Modelling of Wire Antenna Structures D. Poljak, 2001
- Electromagnetic Shielding for Wired and Wireless EMC Applications. Review by Reinaldo Pérez.
- Efficient CAD of Boxed Microwave Circuits Based on Arbitrary Rectangular Elements, by Alejandro Álvarez Melcón, Juan R. Mosig. Fellow IEEE, and Marco Guglielmi.