UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

Teorema del muestreo potencial asintótico perturbado

JESÚS ALBERTO CABALLERO MARÍN

PROYECTO FIN DE CARRERA.
ESCUELA DE ARQUITECTURA E INGENIERÍA DE LA EDIFICACIÓN

DIRECTOR: DR. D. JUAN LUIS GARCÍA GUIRAO

CARTAGENA, 2010

Agradecimientos.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que con su apoyo me han ayudado a realizar este trabajo.

En primer lugar, mi reconocimiento al profesor Juan Luís García Guirao, director del Proyecto Final de Carrera, por la ayuda prestada para la elaboración del mismo.

Me gustaría agradecer la ayuda y el apoyo aportado hasta ahora de mi familia y mi novia.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

AUTORIZACIÓN DE LA PRESENTACIÓN DEL PROYECTO FIN DE CARRERA POR EL DEPARTAMENTO RESPONSABLE

D. Sergio Amat Plata, Director del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística,

INFORMA:

Que el Proyecto Final de Carrera titulado "***Teorema del muestreo potencial asintótico perturbado***", ha sido realizado por D. Jesús Alberto Caballero Marín, bajo la dirección y supervisión de D. Juan Luis García Guirao y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea defendido.

En Cartagena, a de de 2010

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo. Sergio Amat Plata

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

D. Juan Luis García Guirao, Profesor Doctor del Área de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística,

AUTORIZA:

La presentación del Proyecto Final de Carrera titulado "***Teorema del muestreo potencial asintótico perturbado***", realizado por D. Jesús Alberto Caballero Marín, bajo mi dirección y supervisión, en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, y que presenta para su defensa.

En Cartagena, a de de 2010

EL DIRECTOR DEL PROYECTO FINAL DE CARRERA

Fdo. Juan Luis García Guirao

Índice general

Introducción

El CTE *(Código Técnico de la Edificación)* entró en vigor el 29 de Marzo de 2007, y sus principales objetivos son asegurar la calidad en la edificación y promover la sostenibilidad e innovación. Entre otros requisitos, la nueva normativa obliga a que los edificios construidos bajo su aplicación, cuenten con fuentes de energía renovables para la obtención de electricidad y agua caliente. Aunque la domótica no es obligatoria en las construcciones, colabora con el fin del CTE de conseguir edificios más eficientes desde el punto de vista energético, disminuyendo el consumo de energía.

¿Qué es la domótica?

La palabra domótica proviene de la contracción de las palabras francesas "domo" e "informatique". La enciclopedia Larousse define el término como: "el concepto de vivienda que integra todos los automatismos en materia de seguridad, gestión de la energía, comunicaciones, etc."

La domótica es la automatización y control centralizado y/o remoto de aparatos y sistemas eléctricos y electrotécnicos en la vivienda. Los objetivos principales de la domótica son aumentar el confort, ahorrar energía y mejorar la seguridad.

El concepto domótica se refiere a la automatización y control (encendido / apagado, apertura / cierre y regulación) de aparatos y sistemas de instalaciones eléctricas y electrotécnicos (iluminación, climatización, persianas y toldos, puertas y ventanas motorizados, el riego, etc.) de forma centralizada y/o remota. El objetivo del uso de la domótica es el aumento del confort, el ahorro energético y la mejora de la seguridad personal y patrimonial en la vivienda. También, un término muy familiar para todos es el de "edificio inteligente" que aunque viene a referirse a la misma cosa, normalmente tendemos a aplicarlo más al ámbito de los grandes bloques de oficinas, bancos, universidades y edificios industriales.

El uso de las TIC *(Tecnologías de la Información y las Comunicaciones)* en la vivienda genera nuevas aplicaciones y tendencias basadas en la capacidad de proceso de información y en la integración y comunicación entre los equipos e instalaciones. Así concebida, una vivienda inteligente puede ofrecer una amplia gama de aplicaciones en áreas tales como:

- Seguridad
- Gestión de la energía
- Automatización de tareas domésticas
- Formación, cultura y entretenimiento
- Monitorización de salud
- Comunicación con servidores externos
- Ocio y entretenimiento
- Operación y mantenimiento de las instalaciones, etc.

Señales

En un sistema de comunicaciones los datos se propagan de un punto a otro mediante señales electromagnéticas. Una señal analógica es una onda electromagnética que varia constantemente con el tiempo y que, según sea su espectro, puede propagarse a través de una serie de medios como puede ser un cable coaxial, fibra óptica, etc.

Por su parte, una señal digital es una secuencia de pulsos de tensión que se pueden transmitir a través de un medio conductor, por ejemplo, un nivel de tensión positiva constante representaría un 1 binario y un nivel contante negativo un 0.

Transmisión de señales

Tanto las señales analógicas como las digitales se pueden propagar a través de un medio conductor, este medio determinará como serán tratadas estas señales.

La transmisión analógica es una forma de transmitir las señales analógicas independientemente de su contenido, las señales pueden representar datos analógicos como la voz o digitales como los datos generados por una computadora. En cualquier caso la señal analógica se irá debilitando (atenuándose) con la distancia. Para solucionar esto, el sistema de transmisión analógico incluye amplificadores que "inyectan" energía a la señal. Por desgracia estos amplificadores también dan energía a las señales de ruido. Para conseguir distancias mayores al utilizar amplificadores en cascada, la señal se distorsiona cada vez más. Para datos analógicos como la voz se puede tolerar una pequeña distorsión ya que en este caso los datos siguen siendo inteligibles. Una solución a estos problemas son los llamados filtros que son utilizados para lograr disminuir las señales de ruido que se insertan en la transmisión de nuestros datos.

Sin embargo, para los datos digitales, los amplificadores introducirán errores. La transmisión digital es dependiente del contenido de la señal. Una señal digital solo se puede transmitir a una distancia limitada ya que la atenuación y otros aspectos negativos pueden afectar la integridad de los datos que se transmiten. Para conseguir distancias mayores se utilizan repetidores. Un repetidor recibe la señal de entrada digital, regenera la cadena de bits correspondiente y los retransmite, de esta forma se evita la atenuación.

Para señales analógicas se puede usar la misma técnica anterior si la señal transmitida contiene datos digitales. En este caso el sistema de transmisión tendrá repetidores convenientemente espaciados en lugar de amplificadores. Dichos repetidores recuperan los datos digitales a partir de la señal analógica y genera una nueva señal analógica limpia, así el ruido no es acumulativo.

Perturbaciones en la transmisión

En cualquier sistema de comunicaciones se debe considerar el hecho de que la señal que se recibe diferirá de la señal transmitida debido a varias adversidades y dificultades en el proceso de transmisión de datos. En las señales analógicas, estas dificultades producen alteraciones aleatorias que degradan la calidad de las mismas. En el caso de las señales digitales se pueden producir bits erróneos, por ejemplo, un 1 se puede transformar en 0 y viceversa.

Aunque hay muchas, las perturbaciones más significativas son:

- La atenuación.
- La distorsión del retardo.
- El ruido.

Atenuación

La energía de la señal decae con la distancia en cualquier medio de trasmisión. En medios guiados esta reducción de la energía es, generalmente, logarítmica, y por lo tanto se expresa típicamente como un número constante en decibelios por unidad de longitud. En medios no guiados, la atenuación es un función más compleja de la distancia y dependiente a su vez de las condiciones atmosféricas. Se pueden establecer tres condiciones respecto a la atenuación:

- La señal recibida debe tener suficiente energía para que la circuitería electrónica en el receptor pueda detectar e interpretar la señal adecuadamente.
- Para que la señal sea percibida sin errores se debe conservar un nivel de energía suficientemente mayor que el ruido.
- La atenuación es una función de la frecuencia.

Distorsión del retardo

La distorsión de retardo es un fenómeno peculiar de los medios guiados, significa que al enviar determinada señal una parte de ella se transmita más rápido que otra parte o partes de la misma causando efectos negativos en el envío de información. Esta distorsión es causada por el hecho de que la velocidad de propagación de la señal varía con la frecuencia, para una señal de banda limitada, la velocidad tiende a ser mayor en la frecuencia central y disminuye al acercarse a los extremos de la banda. Por tanto, las distintas componentes en frecuencia de la señal llegarán al receptor en instantes diferentes de tiempo, dando lugar a desplazamientos en fases entre las diferentes frecuencias.

Ruido

La señal recibida consistirá en la señal transmitida modificada debido a las distorsiones introducidas por el sistema de comunicación y a las señales no deseadas que se insertarán entre algún punto entre el emisor y el receptor. A estas últimas señales no deseadas se les denomina ruido, es decir, el ruido es toda aquella señal que se inserta entre el receptor y el emisor y que no es deseada. El ruido es el factor de mayor importancia cuando se limitan las prestaciones del sistema de transmisión.

Conclusión

Dada una función que verifique el teorema del muestreo potencial asintótico (T.M.P.A.), vemos qué tipo de perturbaciones admite la función para seguir verificando ese teorema. El objetivo es perturbar esas funciones para que sigan cumpliendo con el T.M.P.A.

Capítulo 1

Antecedentes históricos del teorema del muestreo

Quien pretende conocer una ciencia
no debe limitarse a coger frutos maduros,
sino que ha de procurar investigar
dónde y cómo se han desarrollado.
J.C. POGGENDORF

1.1. Introducción

La *Teoría del Muestreo* ha recibido una gran atención por parte de la comunidad ingenieril, dando lugar a muchos artículos, trabajos y proyectos. Actualmente casi cualquier libro de texto de ingeniería en la materia de análisis de señales describe resultados en esta línea.

En realidad el teorema del muestreo aparece en cualquier disciplina que necesite recomponer una función a partir de datos muestreados, que son normalmente valores de la función o de sus derivadas en ciertos puntos. Esto ya resalta su gran relación con la *Teoría de la Interpolación* y *la Teoría de la Aproximación*. Una mirada un poco más atenta revelará su estrecha relación con la *Teoría de las Funciones Enteras y Series de Fourier*. Puede que sea precisamente por ello por lo que la parte matemática de la teoría del muestreo ha vivido a la sombra de estas áreas del análisis matemático, y puede que por la misma razón, en los últimos 50 años, aunque esta teoría haya sido ampliamente acogida por físicos e ingenieros, no ha atraído más que una moderada atención por parte de los matemáticos. Pero no fue así en sus comienzos, tal y como veremos.

Comenzamos esta descripción de la historia del problema del muestreo y de sus distintas modificaciones y evoluciones a lo largo de los últimos 107 años, no por el principio histórico de esta teoría sino por el punto mas alto del iceberg, el resultado más conocido en el mundo científico, aunque también el descrito con un lenguaje más práctico y menos matemático: el teorema del muestreo tal y como C.E. Shannon lo enunció en 1948.

Teorema 1.1.1. (Teorema de Shannon). *Si una señal tiene contenido frecuencial acotado, entonces toda la información contenida en la señal está de hecho contenida en los valores muestreados en puntos uniformemente espaciados y el conocimiento de la cota determina la mínima frecuencia a la que la señal necesita ser muestreada para reconstruirla exactamente.*

Además Shannon mencionó que otros conjuntos de datos también pueden ser usados para determinar una señal de banda limitada, por ejemplo los valores de f y de su primera derivada cada dos puntos, o el valor de f y de su primera y segunda derivadas cada tres puntos, etc.

Debemos señalar que estas afirmaciones fueron realizadas también por J.D. Weston aproximadamente al mismo tiempo que Shannon, y además en ambos casos se hicieron en el contexto de señales de duración finita.

La frecuencia mínima de muestreo, frecuencia de Nyquist, debe su nombre a quien señaló por primera vez, en 1928, su importancia en un trabajo en conexión con señales telegráficas (ver [Ny1928]).

El teorema de Shannon ha sido llevado al mundo matemático en términos mucho más cercanos a nuestra disciplina. Citamos aquí el teorema del muestreo en su versión más conocida, aunque separado en dos partes, la primera haciendo referencia a la determinación de la función y la segunda mostrando la forma explícita de la recomposición.

Teorema 1.1.2. (Teorema del Muestreo, versión A). *Si una función temporal $f(t)$ no tiene frecuencias superiores a $\frac{\omega}{2}$ ciclos por segundo, está completamente determinada conociendo sus valores en una sucesión de puntos equiespaciados cada $\frac{1}{\omega}$ segundos.*

Teorema 1.1.3. (Teorema del Muestreo, versión B). *Una función $f(t)$ de banda ilimitada al intervalo $[-\pi\omega, \pi\omega]$, es decir, de la forma*

$$f(t) = \int_{-\omega}^{\omega} g(x)e^{ixt}dx,$$

es la suma de la serie cardinal

$$f(t) = \sum_{k \epsilon \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\omega}\right) \frac{\operatorname{sen} \pi(\omega t - k)}{\pi(\omega t - k)}$$

Y aunque éste sea el resultado clave en el que se ha fundamentado nuestro estudio en esta memoria, no creemos que su cita escueta sea suficiente para hacer entender el porqué de nuestras investigaciones. Nuestro problema, nuestro trabajo, encuentra sus orígenes en distintos momentos de esos "107 años de muestreo"que hemos mencionado. Hemos sido inspirados por resultados de tipo límite en la frecuencia de muestreo de Ch. J. de la Vallée Poussin o J.M. Whittaker, en la visión del problema a través de la teoría de funciones enteras de G.H. Hardy, en métodos de residuos de K. Ogura y en posteriores modificaciones de la serie cardinal de P.L. Butzer y R.L. Stens, hasta el método de F. Marvasti y A.K. Jain.

Por ello el objetivo de este capítulo es doble. Por un lado hemos querido hacer un recorrido histórico de una parte de los resultados matemáticos que conducen y desencadenan de alguna forma el teorema de Shannon y también de algunas de sus modificaciones posteriores, con el fin de mostrar al lector las raíces del teorema del muestreo y su desarrollo a lo largo de la historia para que, de este modo, se entienda con mayor claridad el porqué de nuestro trabajo. Por otro lado deseamos brindar un pequeño homenaje a todas esas matemáticas que se han escondido detrás de la fama de un resultado de ingeniería y para que se reconozcan los verdaderos orígenes de una teoría absolutamente matemática.

Sin embargo, y en reconocimiento de nuestro limitado dominio de la amplia historia de este problema, recomendamos y remitimos al lector interesado en más detalles e información a los siguientes amplios trabajos de resumen: [J1977], [Lu1978], [Sp1983], [Bu1983], [Hi1985], [BuS1992] y [G2002].

A pesar de la existencia de bastantes artículos acerca del tema, hay pocos libros en el mercado que se dediquen exclusivamente a la teoría del muestreo. Entre ellos podemos citar los libros [Ma1991] y [Ma1992] de R.J. Marks II y, más recientemente, la publicación del libro [Z1993] de A.I. Zayed.

El capítulo se dividirá en dos partes desiguales en su proporción pero que debemos diferenciar por su distinto enfoque. Ambas partes se estructurarán cronológicamente. La primera, dedicada al problema centrado en funciones de banda limitada abarcará desde la sección segunda hasta la quinta; mientras que la segunda parte, centrada en funciones no necesariamente de banda limitada, constará de una única sección, la sexta. En una séptima sección introduciremos el origen del problema de la fórmula potencial.

La Sección 2.2 estará dedicada a los antecedentes matemáticos que sin hablar directamente de muestreo ni de series cardinales contienen al propio teorema de Shannon en algunos casos que se especificarán. Abarcará los años de 1897 a 1908. La siguiente sección, Sección 2.3, está dedicada al que para nosotros es el primer teorema de muestreo, desarrollado por de la Vallée Poussin. La sección 2.4 estará centrada en los resultados referentes al estudio de series cardinales. Esta parte de la teoría se enmarca cronológicamente entre 1915 y 1981. Algunos de los resultados obtenidos en esta época sobre series cardinales resultarán muy importantes. La Sección 2.5 del capítulo comenzará con la aparición del teorema de Shannon dentro de la ingeniería, y su repercusión desde 1949 hasta nuestros días. En esta época moderna dedicaremos una parte del recorrido a las modificaciones que se han hecho de la serie que reconstruye la función muestreada.

Como hemos indicado, dedicaremos una sección, Sección 2.6 al desarrollo adicional que se ha llevado a cabo para funciones no necesariamente de banda limitada. Abarcará resultados comprendidos desde 1908 hasta hoy.

La última sección, Sección 2.7, mostrará los resultados de Marvasti-Jain y de Agud-Catalán que introducen la fórmula del muestreo potencial.

1.2. Antecedentes y precursores: 1897-1908

Aunque el teorema del muestreo sea conocido hoy en día en la literatura científica occidental con el nombre de teorema de Shannon (o teorema de Kotel'nikov para el mundo soviético), el resultado era conocido en el mundo matemático mucho antes de su aparición en la ingeniería de manos de Shannon en 1948. Los matemáticos E.T. Whittaker y J.M. Whittaker (padre e hijo respectivamente) dedicaron una buena parte de sus trabajos a estudiar las series cardinales desde un punto de vista formal, estableciendo el teorema del muestreo en su versión más formal en los años 20.

Sin embargo se encuentran numerosos resultados anteriores a la formulación y nomenclatura de los Whittaker que pueden considerarse precursores de esta teoría de interpolación. Haremos un breve resumen de algunos de estos teoremas y autores que trabajaron en estas ideas y que de algún modo están relacionadas con el teorema del muestreo y las series cardinales.

Comenzaremos recordando la fórmula de interpolación de Lagrange

$$L_m(z) = H_m(z)\left(\frac{f(0)}{z} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{f(k)}{H'(k)(z-k)} + \frac{f(-k)}{H'(-k)(z+k)}\right)\right)$$

donde

$$H_m(z) = z\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right);$$

que interpola a la función $f(z)$ en los puntos $z = -m, \dots, 0, \dots, m$.

El teorema del muestreo se obtiene como caso límite de la fórmula de interpolación de Lagrange cuando el número de nodos m tiende a infinito (ver [Bo1899], [Br1915] y [Hi1985]). Es decir, se verifica que $\lim_{m\to\infty} L_m(z) = f(z)$, pues es conocido que

$$\operatorname{senc}(z) = \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Consideremos ahora el desarrollo en cocientes parciales de Cauchy para una función meromorfa F con polos en los puntos $\{p_k\}$

$$F(z) = \sum_k \rho\left(\frac{F(\cdot)}{(z-\cdot)}, p_k\right),$$

donde $\rho(g,p)$ representa el residuo de la función g en el punto p. Pues bien, si tomamos una función f entera y aplicamos el resultado de Cauchy a la función $F(z) = \dfrac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$, que ahora tiene polos simples en los enteros, se obtiene formalmente la misma recomposición que proporciona el teorema de muestreo.

Sobre este hecho, haciendo eco textualmente de palabras de W.L. Ferrar (ver [F1925, p. 281]), podemos decir que en *Exercices de Mathématiques* (1827) de Cauchy aparece ya un teorema que muestra el verdadero carácter de la función serie cardinal cuando es considerada desde el punto de vista de la teoría de los residuos. Esta relación es tan patente que algunos autores incluso reclamaban para Cauchy el resultado fundamental de la teoría de muestreo, aunque otros como J.R. Higgins (ver [Hi1985]) han sostenido que tal afirmación no está firmemente justificada.

Ahora bien, si nos hemos decantado por el año 1897 como el comienzo de esta época de antecedentes es porque precisamente en este año aparece un trabajo de E. Borel en el cual se estudia la fórmula general de tipo Lagrange

$$f(z) = \sum c_k \frac{\phi(z)}{\phi'(a_k)(z-a_k)},$$

para ϕ una función entera que se anula en $\{a_k\}$ siendo $c_k = f(a_k)$, bajo la hipótesis de tener

$$\sum \left|\frac{c_k}{a_k\phi'(a_k)}\right| < \infty$$

para asegurar la convergencia; problema que ya había tratado en el desarrollo de su tesis doctoral. Pues bien, de dicho artículo (ver [Bo1897, p. 675]) extraemos el resultado siguiente que citamos textualmente:

"*Posons*

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)e^{izx}\, dx$$

et supposons que la fonction ψ satisfasse aux conditions de Dirichlet. Dès lors, si l'on connaît les valeurs de $f(z)$ pour $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la fonction ψ est déterminée et par suite la fonction entière f est connue sans ambiguïté."

Lo cual no deja ninguna duda de que el teorema del muestreo, en la que hemos llamado versión A, era conocido por Borel en aquel momento.

En cuanto a la segunda parte del teorema (versión B), se tiene que el primer uso explícito de la serie que aparece en dicho resultado, y que fue posteriormente denominada serie cardinal por J.M. Whittaker, lo encontramos en una nota de Borel (1898) en relación con la cuestión de cuando los coeficientes $\{a_k\}$ del desarrollo en serie de potencias de una función $f(z) = \sum a_k z^k$ determinan sus singularidades. En el desarrollo del estudio de este problema se utiliza una función auxiliar ψ interpolando dichos valores, es decir, cumpliendo que $\psi(k) = a_k$. Entre las muchas formas de tomar esta función interpolatoria Borel eligió la función

$$\psi(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi(z-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k \operatorname{senc}(z-k),$$

con $\sum |a_k| < \infty$ para tener la convergencia.

Ciertamente observamos que para ser exactamente la serie cardinal necesitamos un sumatorio en todos los enteros y evitar el coeficiente de cambio de signo. Sin embargo debemos señalar que tan sólo un año después Borel volvió al problema de la interpolación, y esta vez tomó una doble serie sobre los enteros, que eligió simétrica ($a_k = a_{-k}$) e incluyó el cambio de signo en la serie cardinal estudiando el problema bajo la hipótesis de convergencia más débil de tomar $\sum \left|\frac{a_k}{k}\right| < \infty$. En concreto, en su artículo [Bo1899], Borel afirma que

$$G(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \frac{a_k}{z-k}$$

resuelve el problema de interpolación $G(k) = a_k$, $k \in \mathbb{Z}$, si $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{a_k}{k}\right| < \infty$.

Hacemos en este momento un inciso para destacar al lector que esta condición de simetría jugará un papel fundamental en muchos de los trabajos posteriormente realizados en el estudio de series cardinales, y también en el problema que nosotros desarrollaremos en los próximos capítulos. Así como señalamos que la hipótesis anteriormente realizada sobre los coeficientes volverá a encontrarse en el transcurso de esta memoria.

Dos años después de la publicación de este trabajo de Borel, J. Hadamard realizó un estudio más extenso del mismo problema de determinar propiedades de una función a partir de los coeficientes en su desarrollo en serie de potencias (ver [Ha1901]). Para ello y nuevamente como función interpoladora utilizó la misma primera fórmula de Borel pero usando condiciones de convergencia del segundo tipo.

1.3. Primer teorema del muestreo: De la Vallée Poussin (1908)

No podemos dejar de destacar a quien se considera el creador de un primer teorema de muestreo, Charles-Jean barón de la Vallée Poussin, matemático belga conocido internacionalmente por su demostración en 1896 del teorema del número primo. Además, tal y como veremos posteriormente, fue el primer matemático en estudiar prácticamente cada aspecto del teorema del muestreo en el caso de funciones de duración limitada.

A pesar de la trascendencia de sus resultados, la continuación de su trabajo por parte del mundo matemático fue algo esporádica, especialmente entre los años 1908-1930. En principio sólo fue seguido por J.F. Steffensen, M. Theis y J.M. Whittaker, (ver [Stf1914], [Th1919] y [Whit1927]). Sin embargo, y como comentaremos en una de las secciones de este capítulo, el estudio del nivel de aproximación de la recomposición proporcionada por la serie cardinal, así como la modificación del teorema de Shannon para ser aplicado a funciones sin acotación en frecuencia, es una de las líneas actuales de la investigación en esta teoría. Es en esta línea en la que perfilamos nuestro trabajo.

Como decíamos, su artículo [Va1908], en palabras de Butzer y Stens (ver [BuS1992, p. 40]), es una de las raíces del teorema de muestreo. En él de la Vallée Poussin consideró la fórmula de interpolación

$$F_m(t) = \frac{\operatorname{sen}(mt)}{m} \sum_{[a,b)} f\left(k\frac{\pi}{m}\right) \frac{(-1)^k}{t - k\frac{\pi}{m}} \tag{1.1}$$

que no es más que

$$\sum_{[a,b)} f\left(k\frac{\pi}{m}\right) \operatorname{senc}\left(t\frac{m}{\pi} - k\right),$$

donde f es una función definida sobre el intervalo $[a, b]$ y la suma se entiende que se hace para los valores de k tales que $k\dfrac{\pi}{m} \in [a, b)$. Tomando el límite en $m \to \infty$ se obtiene que la fórmula converge puntualmente a f en cualquier punto donde la función sea continua y de variación acotada en un entorno.

Esta fórmula de interpolación es exactamente una serie cardinal y en sí misma constituye el primer teorema de aproximación asintótica, en este caso tomando límites en la frecuencia de muestreo.

Formalmente, (tomamos el enunciado que proporciona Ferrar en [F1926, p. 323]), este resultado se enuncia de la forma:

Teorema 1.3.1. *Si* $a_k = \dfrac{k\pi}{m}$ *y* $F_m(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{m} \sum_a^b (-1)^k \dfrac{f(a_k)}{x - a_k}$*, entendiendo la suma extendida sobre todo* a_k *que permanezca al intervalo* $[a, b)$*, entonces*

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) = f(x)$$

si $f(x)$ *es continua en* x *y de variación acotada en* $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ *para algún* $\epsilon > 0$.

En estos términos y usando la notación del teorema, apuntamos que, además, de la Vallée Poussin obtuvo resultados acerca de la aproximación de la derivada de f a través de las derivadas de F_m, en concreto, demostró que $\lim_{m\to\infty} F'{}_m(x_0) = f'(x_0)$ y estudió el comportamiento de la serie F_m y de la derivada $F'_m(x)$ para $m \to \infty$ en puntos de discontinuidad de salto de f y de f', respectivamente (ver [Va1908, pp. 355-366]).

1.4. Teoría de series cardinales: 1915-1981

1.4.1. Series cardinales: 1915-1935

La función cardinal fue estudiada independientemente y desde dos puntos de vista distintos por E.T. Whittaker y por de la Vallée Poussin.

Como ya hemos señalado, son dos los Whittaker a quienes debemos hacer referencia por su conexión y desarrollo de la serie cardinal, siendo uno de ellos quien la introduce formalmente (en 1915) y el otro quien la bautiza con dicho nombre (en 1920).

Este periodo tiene como punto de partida una publicación de E.T. Whittaker en 1915, (ver [Whi1915]) en la que no se presentan referencias anteriores y supone un nuevo comienzo para la teoría de la interpolación y del muestreo. Dentro del mundo matemático se ha llegado al acuerdo universal de que es en este trabajo donde se recoge una primera versión del teorema del muestreo, siendo por tanto E.T. Whittaker su creador. No obstante creemos que es justo mencionar que en 1910 F.J.W. Whipple trató la función cardinal en un manuscrito que no se publicó. En éste, Whipple da propiedades de dicha función, incluyendo su naturaleza de banda limitada, que bautizó con el nombre de "slowly swinging".

El problema de interpolación que se planteó E.T. Whittaker consiste en encontrar una función que pase por la sucesión de puntos $(a + k\omega, f_k)$ siendo $f_k = f(a + k\omega)$, con $a, \omega \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$. E.T. Whittaker llamó *conjunto cotabular* asociado a la sucesión $\{f_k\}$ al conjunto de funciones analíticas que interpolan estos puntos y demostró que la que hoy llamamos serie cardinal

$$C(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(a + k\omega)\frac{\operatorname{sen}\pi(x - a\omega - k)}{\pi(x - a\omega - k)} \tag{1.2}$$

está en el conjunto cotabular de $\{f_k\}$. Whittaker destacó esta función del conjunto cotabular como realmente especial por ser una función entera y sin oscilaciones violentas (de banda limitada en terminología actual). Él la llamó *función cardinal*.

Además de describir las principales propiedades de las series cardinales, probó que la función cardinal $C(a+xw)$ coincide con la Fórmula de interpolación de Gauss cuando ambas series son convergentes (ver [F1925, p. 269]).

Habitualmente se trabaja con la serie cardinal (1.2) tomando $a = 0$ y $w = \dfrac{1}{W}$, quedando por tanto de la forma

$$C(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{W}\right)\frac{\operatorname{sen}\pi(Wx - k)}{\pi(Wx - k)}. \tag{1.3}$$

Es ésta la expresión considerada en los trabajos posteriores de T.A. Brown [Br1924] y W.L. Ferrar [F1925], en los que de nuevo se estudia la relación de (1.3) con la serie de Newton-Gauss (ver también [F1926], [F1927], [Whit1927] y [Whit1929]).

Se debe decir que el único interés que se muestra en todos los trabajos anteriormente mencionados, fueron las series cardinales "per se", utilizadas como un procedimiento de interpolación, y la convergencia de las series en ellas mismas. Estos autores no se plantean el problema de estudiar si hay convergencia de $C(x)$ hacia $f(x)$ cuando $W \to \infty$ como hizo de la Vallée Poussin. Tampoco establecieron la representación de $f(x)$ por $C(x)$ como hicieron más tarde V. Kotel'nikov y C.E. Shannon.

Sin embargo las contribuciones esenciales de E.T. Whittaker sobre las series cardinales, fundamentales en posteriores investigaciones y punto de partida del formalismo de la teoría, hacen que sea más que justo que el nombre de Whittaker sea unido al de Shannon y Kotel'nikov en reconocimiento a este comienzo matemático del teorema del muestreo.

Quien en la historia del teorema del muestreo ha quedado relegado a un voluntario segundo plano ha sido el matemático japonés K. Ogura, que en su trabajo [O1920] estableció el teorema del muestreo en una forma similar a su forma actual y más conocida y dio las ideas de una simple y rigurosa demostración usando el cálculo de residuos. Es el primer matemático en utilizar esta técnica. Es más, ya hemos señalado que en ningún momento E.T. Whittaker demostró que la serie cardinal fuera la misma función que muestreaba. Sin embargo Ogura, que definió la función cardinal como una función entera de tipo exponencial que crece no más que $e^{\pi r|\operatorname{sen}\theta|}$ cuando $|z| \to \infty$, siendo $z = re^{i\theta}$, demostró que una de las propiedades más importantes de estas funciones cardinales es que pueden ser reconstruidas analíticamente a partir de sus valores en los enteros usando la fórmula de Whittaker. Parece que fue el primer matamático en establecer el teorema del muestreo como un teorema de recomposición para señales de banda limitada y demostrarlo. Aún así Ogura atribuyó su resultado a una consecuencia deducible de los resultados de E.T. Whittaker (erróneamente según la opinión de Butzer y Stens que mantienen que el resultado de Ogura no se puede atribuir a E.T. Whittaker, ver [BuS1992, p. 40]) y cedió todo el mérito al matemático inglés, que así ha pasado a ser considerado hasta ahora el principal iniciador de la teoría.

En relación con la sección anterior de este capítulo dedicada a los antecedentes matemáticos del teorema del muestreo, encontramos que T.A. Brown en [Br1915], estudiando propiedades de $C(x)$, ya apuntó que la función cardinal es la forma límite de la fórmula de interpolación parabólica de Lagrange cuando los valores de la función son conocidos en los enteros. Posteriormente, en [Br1924], Brown hace un estudio acerca de la serie $C(x)$ y su relación con la serie de Newton-Gauss y además presenta una generalización de la fórmula de Gauss y de la serie cardinal. Volveremos a este punto de las generalizaciones de la serie cardinal más adelante.

En la segunda parte de los años 20 se produce un gran desarrollo en el estudio de la función cardinal a manos de W.L. Ferrar y de J.M. Whittaker y sus colaboradores, produciéndose un considerable enriquecimiento de esta teoría.

Ferrar, entre 1925 y 1927, publicó tres artículos referentes a cuestiones sobre la serie cardinal $C(x)$ dada en (1.2). En el primero de ellos, [F1925] se aportan resultados sobre la convergencia de la función cardinal cuando $\{a_k\} = \{f(a + kw)\}$ es una sucesión acotada. En este mismo artículo Ferrar da una expresión de la función cardinal como integral definida, expone un método para obtener $C(x)$ y demuestra un teorema de existencia de una función analítica resolviendo el problema de interpolación. Además estudia la relación entre la función cardinal y otros tipos de desarrollos como la fórmula de interpolación de Gauss, la fórmula de Lagrange, la fórmula de Newton y las series de Newton-Gauss.

En [F1926], tras la sugerencia de F.J.W. Whipple, Ferrar hace un estudio de la relación existente entre la función cardinal y las funciones-m de Hardy. Recordamos que f es una función-m si

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m(x-t)}{x-t} f(t)dt,$$

definidas por G.H. Hardy en 1909 (ver [F1926, p. 330]).
Además, Ferrar dedica una buena parte de este segundo trabajo a estudiar la consistencia

de la función cardinal, pero en la demostración del teorema fundamental que asegura la consistencia deja sin probar algunos puntos. En el siguiente artículo [F1927], publicado un año después, Ferrar completa la demostración del artículo anterior con la condición de que la sucesión de coeficientes en la serie cardinal cumpla que $\sum |a_k|^p$ sea convergente para algún $p > 1$.

Por otro lado, al mismo tiempo que Ferrar, J.M. Whittaker en [Whit1927] estudia la convergencia de la serie que define a la función cardinal (1.2)

$$C(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{a_r \operatorname{sen}(\frac{\pi}{w}(x-a-rw)}{\frac{\pi}{w}(x-a-rw)},$$

la cual toma los valores a_r en los puntos $a + rw$, eligiendo sin pérdida de generalidad $a = 0$ y $w = 1$.

Aquí es Whittaker hijo quien en este artículo ya denomina serie cardinal a

$$C(x) = a_0 v_0(x) + \sum_{r\in\mathbb{N}} a_r v_r(x) + \sum_{r\in\mathbb{N}} a_{-r} v_{-r}(x),$$

donde $v_r(x) = (x - r)$; y obtiene los resultados [Whit1927, p. 42] y [Whit1927, p. 43] acerca de la convergencia de dicha serie.

El teorema [Whit1927, p. 43], donde se pide que la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2$ sea convergente, fue mejorado por Ferrar en [F1927] rebajando la condición sobre los coeficientes del desarrollo, exigiendo únicamente que $\sum |a_k|^{1+1p}$ sea convergente para algún $p \geq 1$ (ver [F1927, p. 238](Teorema I)).

Destacamos que J.M. Whittaker, utilizando resultados de su padre y de Ferrar aplicados al caso de $\{a_r\}$ acotada junto con resultados de T.H. Gronwall, obtiene el teorema [Whit1927, p. 46] acerca del carácter de la serie cardinal.

Su otro trabajo [Whit1929] es, que conozcamos, el segundo artículo importante que verdaderamente continua la línea de investigación de la Vallée Poussin en la fórmula de interpolación (2.19), tal y como veremos en el apartado dedicado a funciones no necesa-riamente de banda limitada. El primero de los artículos en seguir esta línea fue publicado por M. Theis y a él volveremos en breve.

En [Whit1929, p. 171], Whittaker enuncia el teorema [Whit1929, p. 171] que garantiza la convergencia absoluta de la serie cardinal y proporciona su suma en forma integral.

En este mismo artículo, J.M. Whittaker también estudia la consistencia de la función cardinal. Además dedica una corta sección a estudiar la conexión entre la función cardinal y las integrales de Fourier de tipo finito estudiadas por Pollard y establece que la fórmula fundamental de interpolación de de la Vallée Poussin es un caso particular de la función cardinal bajo determinadas condiciones. En contraste con el resto de este artículo, Whittaker no mantiene esta sección en su libro publicado en 1935, [Whit1935], lo que hace pensar que probablemente tampoco J.M. Whittaker pensara en el actual teorema del muestreo.

Por último mencionar el teorema [Whit1935, p. 69] que puede encontrarse en la página 69 del libro de J.M. Whittaker, en el que aparece una nueva condición sobre los coeficientes del desarrollo en senos cardinales.

En la teoría de series cardinales cabe mencionar los trabajos de H.O. Pollak, que obtiene un desarrollo de funciones de banda limitada que ha conducido a nuevos resultados importantes en esta teoría (ver por ejemplo [P1961]), y de J. Mcnamee, F. Stenger y E.L.Whitney (ver [McSteW1971]), donde exponen propiedades de la función cardinal de Whittaker e ilustran con un ejemplo el uso de la función cardinal como herramienta matemática para estudiar algunos procesos numéricos (por ejemplo, resolución de ecuaciones integrales). Además establecen que no sólo la serie de Gauss, también las series de Everett y de Stirling, que todas resuelven el mismo problema de interpolación, están estrechamente relacionadas con la serie cardinal.

1.4.2. Hardy y las funciones de Paley-Wiener: 1941

A lo largo de este recorrido histórico sobre los antecedentes matemáticos que precedieron al teorema del muestreo, nos hemos centrado en la parte correspondiente a los desarrollos en funciones seno cardinal, que originan la teoría de las series cardinales.

En el enunciado que dábamos al principio de este capítulo del teorema del muestreo se hacía mención de la necesidad de tener acotación en el soporte de la transformada de Fourier de la función que muestreábamos para tener la convergencia de la serie cardinal a dicha función, y tener así un verdadero teorema de interpolación.

En esta sección tratábamos brebemente el antecedente matemático más significativo sobre este concepto ingenieril de tener una función de banda limitada: las funciones de Paley-Wiener.

De todos es sabido que el teorema clásico de Paley-Wiener, el cual asegura que *la clase de funciones enteras f de tipo exponencial T cuya restricción a $\mathbb{R}$ es de L^2 coincide con la clase de funciones representables de la forma*

$$f(z) = \int_{-T}^{T} g(u)e^{izu}du$$

con $g \in L^2((-T,T))$, es el que caracteriza las funciones de banda limitada. Estas funciones fueron bautizadas por G.H. Hardy como funciones de Paley-Wiener (ver [Har1941, p. 332]) y fue el mismo Hardy quien demostró que forman un subespacio de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ que denotó PW_T (o PW para $T = \pi$). Además Hardy (1941) probó numerosas e importantes propiedades de la función seno cardinal, entre las que destacamos las siguientes (ver, por ejemplo, [Hi1985, pp. 56-57]):

H1. *La familia de funciones $\phi(t,k) = senc(t-k); k \in \mathbb{Z}$ son un conjunto ortonormal completo en PW.*

Haremos un inciso para señalar que Shannon (1949), ver [Sh1949, p. 13], mencionó la ortogonalidad de dicho sistema, aunque no ofreció ninguna demostración de ello. En cambio Hardy proporcionó dos pruebas distintas de este resultado, añadiendo que el desarrollo de $f \in PW$ en las funciones ϕ es exactamente su serie cardinal y converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$.

H2. *PW es un espacio de Hilbert reproductor de núcleo, siendo el núcleo reproductor la función $\phi(t,x)$.*

Esto significa que toda función de PW cumple que

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) senc(t-x) dx.$$

Obsérvese que así una función $f \in PW$ puede escribirse por una parte como una serie de convolución (serie cardinal) y por otra como una integral de convolución (núcleo reproductor).

Consideremos la notación siguiente: dada f llamaremos

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(t,x)dx, \qquad c_k = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t,k)dt,$$

y denotaremos con

$$\mathcal{K} = \left\{ f; \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{2+|x|} dx < \infty \right\},$$
$$\mathcal{K}^* = \left\{ f; \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\log\ (2+|x|)}{2+|x|} dx < \infty \right\}.$$

Entonces se tiene que $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$.

H3.

i) *Si $f \in \mathcal{K}^*$ entonces $\sum c_k \phi(t,k)$ converge a F uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.*

ii) *Si $f \in \mathcal{K}$ entonces $\sum c_k \phi(t,k)$ es $(C,1)$ sumable a F uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.*

iii) *Si $f \in \mathcal{K}$ la serie de Fourier en $\{\phi(t,k)\}$ es la serie cardinal.*

H4. *Sean $\mathcal{P} = \{f; f = F\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{K} \cap \mathcal{P}$. Entonces, para cualquier $f \in \mathcal{B}$ su serie de Fourier y cardinal coinciden, siendo absolutamente convergentes. Además su serie T-cardinal converge puntualmente a f en $\mathbb{R}$.*

1.4.3. Series cardinales generalizadas: 1919-1981

Tal y como se mencionó en la introducción de este capítulo, las investigaciones acerca de la serie del muestreo se han encaminado, por un lado, a la extensión de dicho teorema a funciones que no sean de banda limitada y, por otro lado, a modificaciones del núcleo básico.

Es dificil hacer una separación entre ambas, pero por su conexión con nuestro trabajo dedicaremos la sección siguiente para hablar de funciones que no sean de banda limitada y a continuación hablaremos principalmente de las modificaciones del núcleo básico, que se reemplaza por una función $\varphi(t)$ con decrecimiento en $t \to \infty$ más rápido a cero que la función seno cardinal, y que se conocen con el nombre de series generalizadas:

$$S_W^{\varphi} f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{W}\right) \varphi(Wt - k).$$

Estamos en el periodo en el que el uso de la serie cardinal y la obtención de algunas de sus extensiones nacen de trabajos que están enfocados a la obtención de propiedades de funciones enteras a partir de su comportamiento en una sucesión de puntos.

A.- María Theis.

Comenzamos esta sección con la aparición en 1919 de un artículo de María Theis, [Th1919], el cual, como ya mencionamos, parece ser el primer trabajo explícito que extiende y propone aplicaciones del trabajo de de la Vallée Poussin. Los resultados de Theis fueron obtenidos a partir de resultados de H.Hahn (ver [Ha1918]) sobre la convergencia de procesos de interpolación.

En su artículo, M. Theis redemuestra el Teorema 2.4 de de la Vallée Poussin de la convergencia de F_m hacia f, mejorándolo en el sentido de probar que efectivamente sólo la continuidad de f en el intervalo $[a, b]$ no es suficiente para asegurar la convergencia de F_m a f.

Además fue la primera figura matemática en considerar series del muestreo generalizadas, pues modificó la fórmula de de la Vallée Poussin reemplazando la función básica seno cardinal por su cuadrado (núcleo de Fejér).

En concreto, en su trabajo [Th1919] se estudia la función

$$\psi_m f(x) = \frac{sen^2 mx}{m^2} \sum_{\alpha_k \in [a,b]} \frac{f(\alpha_k)}{(x-\alpha_k)^2} = \sum_{\alpha_k \in [a,b]} f(\alpha_k) \left(\frac{senm(x-\alpha_k)}{x-\alpha_k}\right)^2$$

que de nuevo interpola a f en los puntos α_k. Además de esta forma consigue rebajar las hipótesis sobre f en el resultado [21] que puede verse en el Anexo II.

Por otro lado, Theis demostró que la serie $\psi_m f(x)$ es, en general, divergente para $m \to \infty$ en puntos en los que f presente discontinuidades de salto.

Referente a la serie generalizada de Theis existen varios resultados. Respecto a la convergencia de $S_W^{\varphi} f(x)$ tenemos el teorema de Theis generalizado, ver [4], que en el caso de tomar $\varphi = senc^2$ el resultado anterior se reduce al teorema de Theis.

En general, podemos tomar cualquier núcleo φ que sea de banda limitada en $[-2\pi, 2\pi]$, por ejemplo: tomar $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$ o el núcleo $\dfrac{2sen\left(\frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{3x}{2}\right)}{\pi x^2}$ debido a de la Va-llée Poussin; pero la serie del muestreo basada en φ_1 ya no interpola a la función f en los nodos $\dfrac{n}{W}$. Dado $W > 0$ y utilizando la integral de convolución de tipo Fejér,

$$I_W^{\varphi} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) W \varphi(W(x-u))du,$$

se tiene el resultado [5](Teorema de Theis-Fejér), de donde se deduce [6] (ver, por ejemplo [BuS1992, p. 47]).

B.- Serie T-cardinal

Una de las extensiones de la serie cardinal más trascendente en la literatura es la conocida como serie T-cardinal,

$$\frac{sen\pi z}{\pi}\left(f'(0) + \frac{f(0)}{z} + \sum_{k\neq 0}(-1)^k f(k)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{z-k}\right)\right),$$

que fue introducida por L. Tschakaloff en 1933 en un trabajo, [Ts1933], que da respuesta afirmativa al problema de G. Pólya de 1931 acerca de la *necesidad de ser constante una función entera f que cumpliera que $f(z)e^{\epsilon z}$ fuera acotada en $\mathbb{C}$ para $\epsilon > 0$ y tal que la sucesión de valores $f(k)_{k\in z}$ estuviera acotada* (ver [Po1931]). Se demostró que si f es una función entera de tipo exponencial π acotada sobre $\mathbb{R}$, entonces $\dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ es también de tipo exponencial π y pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Además esta función puede representarse puntualmente como su serie T-cardinal.

La serie T-cardinal fue usada por M.L. Cartwright (1963) y A.J. Macintyre (1938), ver [Car1936] y [Mac1938], para demostrar teoremas sobre el crecimiento de funciones enteras. Posteriormente será el segundo de estos autores quien extenderá la serie cardinal a lo que se llama serie $T_2 - cardinal$

$$z\frac{sen\pi z}{2\pi}f''(0) + \frac{sen\pi z}{\pi}f'(0) + \frac{sen\pi z}{\pi}\left(\left(\frac{1}{z} + \frac{\pi^2 z}{3!}\right)f(0) + \sum_{k\neq 0}(-1)^k f(k)\frac{z^2}{n^2(z-k)}\right)$$

para f función entera de tipo exponencial π y $\mathcal{O}(|x|)$ sobre $\mathbb{R}$.

La serie T-cardinal tubo un uso algo diferente en manos de A. Zygmund [Zi1959], utilizándola para la demostración del teorema de Bernstein para funciones enteras de tipo exponencial (ver [33]).

Últimamente (1981)la serie T-cardinal ha sido estudiada desde el punto de vista de la teoría de la aproximación por W. Splettstöber, R.L. Stens y G. Wilmes ver [SpSWi1981].

Otras modificaciones de la serie cardinal encuentran sus orígenes en 1933. Ese año Pólya, al tiempo que Tschakaloff resolvía el problema que hemos mencionado arriba, contribuía a la solución parcial de un problema similar en dos dimensiones, que en versión de Littlewood se enuncia del siguiente modo: *si una función f entera de orden 2 es acotada en la malla de puntos $(m + in)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces es constante.*

Esta conjetura fue sin embargo probada por J.M. Whittaker en 1935, [Whit1935, p. 73], para lo cual introdujo una versión 2-dimensional de la serie cardinal, demostrando que *si f es una función entera tal que*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^2} < \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$f(z) = \sigma(z) \sum f(m + in) \frac{(-1)^{m+n+mn} e^{-\pi \frac{m^2+n^2}{2}}}{z - (m + in)},$$

donde M es la función maximal y σ es la Sigma de Weierstrass.

C.- Otros núcleos.

I.J. Schoenberg en su famoso artículo [Sc1946], en el cual introdujo splines, reconoce las desventajas prácticas de las series con núcleo senc ya que, debido al lento decrecimiento de la función senc$(Wt - k)$ cuando k tiende a $\pm\infty$, se requiere el cálculo de muchos términos para obtener una buena aproximación para series infinitas.

Posteriormente el mismo Schoenberg (ver [Sc1969]) tomará como núcleo el spline central de grado n exponiendo propiedades de las funciones B-Splines (M_n con $n \in \mathbb{N}$), extendiendo de este modo la teoría de Whittaker para este tipo de funciones. Por ello, es considerado por Butzer, Engels, Riesz y Stens como el padre de las funciones splines. (Para un corto relato de la vida y el trabajo del profesor Schoenberg referirse a [K1973]).

La mayor ventaja de estos núcleos es que tienen soporte compacto y por lo tanto la serie del muestreo resultante $S_W^{\varphi} f(t)$ se reduce a una suma finita incluso en el caso de que f tenga soporte no compacto, y, por lo tanto, no hay truncación (ver [BuERS1986]).

Además el error de aproximación generalmente decrece más rápidamente que la serie clásica cuando $W \to \infty$, siendo $\dfrac{1}{W}$ la distancia entre los puntos del muestreo. Por ejemplo, para la función núcleo $\varphi(t) = 5M_4(t) - 4M_3(t)$ con soporte $\left[\dfrac{-5}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ el error decrece con orden $\mathcal{O}(W^{-4})$ a pesar de que la señal tiene derivada de orden 4, mientras que para la serie clásica el orden es $\mathcal{O}(W^{-4} logW)$.

Durante esta época de la historia, muchos de los trabajos que se publican se refieren a estudiar posibles núcleos que garanticen el poder aproximar una función f por la serie $S_W^{\varphi} f$. También se estudiará su comportamiento en las discontinuidades de tipo salto y la aproximación de $f^{(r)}(x)$ por $(S_W f)^{(r)}(x)$.

La serie $S_W f$ también se puede utilizar para aproximar la transformada de Hilbert $\hat{f}$. Tan solo es necesario reemplazar el núcleo senc por su transformada de Hilbert (ver por ejemplo [Ste1981] y [S1984]).

Para series del muestreo generalizadas con núcleos que provienen de la propiedad de interpolación así como un teorema de aproximación ver [BuS1985] y [GeRaSc1978].

En este sentido también podemos citar el artículo [RS1984] de S. Ries y R.L. Stens, donde aparecen resultados acerca de cotas de convergencia asociadas a $\lim\limits_{W \to \infty} S_W^{\varphi} f(t) = f(t)$, siendo $S_W^{\varphi} f$ la dada en (2.4), y estudian propiedades de la clase $l^1(\mathbb{R})$ formada por las funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ acotadas tales que $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(x-k)|$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

Stens también investigó la aproximación de derivadas de f por derivadas de la serie $S_W^{\varphi} f$ y da una cota de dicha aproximación (ver [S1983] y [S1984]).

Son varios los artículos de Butzer y su grupo de investigación acerca de todo lo referente a series generalizadas. Así, por ejemplo, en [BuERS1986] escoge φ como combinación lineal de B-splines de diferente orden o como combinación lineal de una B-spline y sus traslaciones o como una suma de dos de esos tipos, y estudia

a) teorema del muestreo: $\lim\limits_{W \to \infty} S_W(f;\varphi)(t) = f(t)$,

b) derivadas: $\lim\limits_{W \to \infty} S_W^{(j)}(f;\varphi)(t) = f^{(j)}(t)$,

proporcionando, en ambos casos, una cota del error de aproximación, la cual es mejor que la obtenida con la función núcleo senc (i.e. examina los errores $|S_W(f;\varphi)(t) - f(t)|$ así como $|S_W^{(j)}(f;\varphi)(t) - f^{(j)}(t)|$).

También podemos encontrar varios núcleos tratados con detalle:

$\varphi_1 = M_2(t)$

$$\varphi_2 = 4M_3(t) - 3M_4(t)$$

$$\varphi_3 = \tfrac{5}{4}M_3(t) - \tfrac{1}{8}\left(M_3(t+1) + M_3(t-1)\right)$$

$$\varphi_4 = 4M_4(t) - 4M_5(t)$$

$$\varphi_5 = \tfrac{1}{3}M_4(t) - \tfrac{1}{6}\left(M_4(t+1) + M_4(t-1)\right)$$

$$\varphi_6 = M_4(t) + \tfrac{1}{3}M_2(t) - \tfrac{1}{6}\left(M_2(t+1) + M_2(t-1)\right)$$

$$\varphi_7 = 4M_4(t) + \tfrac{1}{2}\left(M_4(t+1) + M_4(t-1)\right) - 2\left(M_5\left(t+\tfrac{1}{2}\right) + M_5\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

demostrando que las series $S_W(f;\varphi)$ basadas en este tipo de núcleos convergen a f cuando $W \to \infty$ y, adicionalmente en algunos casos, las derivadas $S'_W(f;\varphi)$ y $S''_W(f;\varphi)$ serán convergentes a f' y f'' respectivamente. En cuanto a la aproximación de derivadas por muestreo de la función con núcleo de tipo spline (funciones splines) ver también [Si1977].

Hay que decir que algunos de estos núcleos ya habían sido estudiados con anterioridad. Por ejemplo: los núcleos φ_6 y φ_7 por Schoenberg en 1945 pero estudiados en el contexto de la interpolación (no estudia la convergencia ni estimación del error), los núcleos φ_2 y φ_4 por Engels, Stark y Vogt en [EStV1987].

Estudios de un problema general de muestreo para funciones que se representan por otro tipo de transformada integral a través de un sistema ortonormal de funciones interpoladoras pueden encontrarse en [Z1996] y [G2000].

1.5. Teoría de la comunicación: de 1948 a la actualidad

Inmerso en el mundo ingenieril nació el trabajo [Sh1948] de C.E. Shannon que revolucionó las técnicas de la comunicación y de la información, provocando así el inicio de numerosos artículos acerca del teorema del muestreo y sus aplicaciones; aunque con lo expuesto hasta el momento ya queda patente que la teoría del muestreo había vivido y se había desarrollado ampliamente con anterioridad a este lanzamiento a pesar de que para el mundo práctico permaneciera oculta en áreas tradicionales del *Análisis Matemático*.

Las semillas de la teoría de la comunicación son los artículos de Nyquist [Ny1928], Hartley [Hat1928] y Shannon [Sh1948]. La publicación del teorema llegó un año después ([Sh1949]), aunque el teorema de Shannon fuera ya reconocido en el mundo científico americano antes de su publicación (que se retrasó desde 1940 hasta el final de la segunda guerra mundial).

En honor a la verdad debemos apuntar que si bien Shannon realizó su trabajo sin conocimiento alguno del resultado de V.A. Kotel'nikov hasta los años 50, este ingeniero soviético publicó su trabajo [Ko1933] con anterioridad al estadounidense. De ahí que sean tres los nombres propios que acompañan al teorema del muestreo en la literatura actual, quedando así la denominación de *Teorema de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov*.

Dicho teorema en versión de Shannon ha aparecido en la introducción de este capítulo. Reescribimos aquí la versión de J.L. Brown Jr. dada en [Bro1967]:

Teorema 1.5.1. Teorema de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov. *Sea f una función real de banda limitada en $[-\pi W, \pi W]$ con $W > 0$ (i.e. su transformada de Fourier se anula fuera de $[-\pi W, \pi W]$). Entonces f puede ser reconstruida a partir de sus muestras $f\left(\frac{k}{W}\right)$ tomadas en los nodos $\frac{k}{W}$, $k \in \mathbb{Z}$, igualmente espaciados a los largo del eje real, de la forma*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{W}\right) \mathit{senc}(Wx - k).$$

Además, si f es continua y pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, entonces la convergencia es uniforme en $(-\infty, \infty)$.

Nacen además con estos dos ingenieros los términos actuales de *banda limitada, señal* y *frecuencia de muestreo* con los que el teorema se escribe hoy en día. Estos términos no se utilizaban en las versiones anteriores del teorema del muestreo ya que los artículos en los que aparecía, y que hemos citado aquí, eran estudios puramente matemáticos y ninguno de ellos utiliza estos conceptos de ingeniería.

Como antes apuntábamos, a partir de que Shannon publicara en 1948 su *A Mathematical Theory of Communication* el teorema del muestreo ha sido el germen de numerosos trabajos de ingeniería, llevándolo a campos tan diversos como teoría de señales, radar, procesamiento de imágenes, sonar, acústica, óptica, holografía, metereología, oceanografía, cristalografía, química física, imágenes médicas, etc. (Más de 800 referencias a distintas aplicaciones pueden encontrarse en [J1986]).

Quizá el gran mérito que comparten Shannon y Whittaker fue su interés por la convergencia de la serie cardinal con frecuencia fija a la propia función f que se interpola. Hasta entonces los resultados se centraron en el estudio de la propia serie cardinal o en teoremas de aproximación a la función f haciendo límites en la frecuencia de muestreo.

A partir de esta fecha, 1949, y a pesar de que importantes investigaciones en el campo de las recomposiciones de Shannon son llevadas a cabo por matemáticos, han sido los miembros de la comunidad ingeniera quienes le han dedicado una atención considerable. Prueba de ello es que muchos artículos acerca de este tema han aparecido en revistas de ingeniería y que las bases de dicha teoría aparecen en casi todos los libros de ingeniería que tratan de análisis de señales.

Las variantes actuales del teorema del muestreo se centran en varias direcciones, entre las que citamos las siguientes: puntos de muestreo no equiespaciados, otros tipos de datos discretos, señales multidimensionales, señales no necesariamente de banda limitada, análisis del error, búsqueda de algoritmos de implementación, etc.

La descomposición atómica de funciones, wavelets, frames y análisis multirresolución no han sido ajenas a esta teoría, apareciendo sus técnicas en las demostraciones de los últimos avances en muestreo.

1.6. Funciones no necesariamente de banda limitada

Fue de nuevo de la Vallée Poussin en su trabajo de 1908, [Va1908], el primero en considerar un teorema de muestreo para funciones no necesariamente de banda limitada, pues de hecho trabajó con funciones de duración finita, como se vió en la Sección 1.3.

También fue el primero en dar un resultado de aproximación para funciones continuas de variación acotada a través de una serie cardinal, apoyándose en resultados conocidos entonces sobre la aproximación del mismo tipo de funciones por la integral de convolución de Dirichlet.

J.M. Whittaker también estudió el caso de funciones no necesariamente de banda limitada, ver [Whit1929], extendiendo el resultado de de la Vallée Poussin. Afirma que la función de interpolación de de la Vallée Poussin es un caso particular de la función cardinal y que su resultado fundamental está incluido en el teorema [28] del Anexo II.

Este teorema es una mejora del resultado de de la Vallée Poussin en cuanto que no exige que la función f sea de soporte acotado en el intervalo $[a, b]$.

Recogemos aquí otro resultado de Whittaker (ver [Whit1929, p, 171]; [27]) para funciones no necesariamente de banda limitada, tal y como aparece en [BuS1992, p. 45]:

Teorema 1.6.1. *Si una función f puede escribirse de la forma*

$$f(x) = \int_0^1 (\cos \pi x t d\phi(t) + \operatorname{sen} \pi x t d\psi(t))$$

con ϕ, ψ continuas, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\pi} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(\frac{f(n)}{x-n} + \frac{f(-n)}{x+n} \right) \right]$$

es sumable (C,1) a $f(x)$. Es decir

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) f(k) \frac{\operatorname{sen} \pi(x-k)}{\pi(x-k)}.$$

Sobre este resultado haremos dos comentarios. El primero es hacer notar que si f es una función de banda limitada en $[-\pi, \pi]$ siempre puede escribirse de la forma que exige el enunciado, tomando

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\pi}^{t} (f(\pi u) + f(-\pi u))\, du, \\ \beta(t) &= \frac{i}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{t} (f(\pi u) - f(-\pi u))\, du. \end{aligned}$$

El segundo nos afecta más directamente, por cuanto que es éste el primer resultado de aproximación en límite $n \to \infty$ en el que el parámetro n aparece formando parte de los coeficientes del desarrollo, y en el que la frecuencia de muestreo permanece fija.

Fue a partir de los años 60 cuando aumentó el interés en estudiar la propia fórmula de Shannon

$$S_W f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{W}\right) \operatorname{senc}(Wx - k)$$

y cuándo se podía asegurar que $S_W f(x)$ aproxima a $f(x)$ para funciones f que no verifiquen ser de banda limitada. En este sentido fueron P. Weiss en 1963 (sin demostración) y J.L. Brown en 1967 (dando ya una prueba) los que presentaron el resultado [2] (ver [We1963] y [Bro1967]), que indica cómo $S_W f$ aproxima a f cuando la anchura de banda considerada $W \to \infty$. Señalaremos que además el resultado es el mejor posible en cuanto que la constante de la acotación no puede ser mejorada. Por último observamos que en el caso de que la función sea de banda limitada, para W admisible por la frecuencia de Nyquist, el resultado repite el teorema de Shannon.

Brown demuestra además un resultado similar (ver [Bro1967, p. 76]) para la cota de error al aproximar una función por la serie del teorema del muestreo para funciones de paso de banda definido por Middleton (ver [Mi1960, pp. 216]) en el resultado [20].

El trabajo de Brown en esta dirección fue seguido en los años 70 (empezando en 1976) por Butzer y su grupo de investigación, que también se centraron en la validez del teorema de Shannon para funciones no necesariamente de banda limitada (ver especialmente [BuSpS1988] y las referencias allí citadas, y [BuSp1990]).

El comportamiento de la aproximación de la fórmula de interpolación estudiada por de la Vallée Poussin tomó entonces un interés fundamental en la amplia área de la teoría del muestreo y teoría de la comunicación.

Se dio una nueva demostración del teorema de de la Vallée Poussin y se dedujeron estimaciones del error para funciones diferenciables y continuas Lipschitz. Al principio tales resultados estaban restringidos para funciones de tiempo limitado (ver [BuSp1977], [Sp1977], [Sp1979] y [S1980a]), pero más tarde esta condición fue rebajada a condiciones sobre el comportamiento asintótico de f, ver [RS1987] y [SpSWi1981]. Como ejemplo citaremos el teorema [3] de Butzer y Stens del Anexo II.

Resultados similares se han obtenido para series generalizadas $S_W^{\varphi} f(x)$ tal y como hemos relatado anteriormente.

En el artículo [BuS1992] de Butzer y Stens, cuyo objetivo es establecer la teoría del muestreo para funciones no necesariamente de banda limitada, podemos encontrar un desarrollo histórico de esta teoría desde 1908 hasta 1992.

1.7. Fórmula potencial

Para finalizar, y por su conexión con nuestro objetivo, recogemos aquí el trabajo [MarJa1986] de F. Marvasti y A.K. Jain, en el que se realiza un estudio de las señales redundantes, es decir, aquellas cuya anchura de banda puede ser comprimida en el dominio de la frecuencia sin ninguna distorsión. En particular esto es lo que ocurre con el operador $(\cdot)^{\frac{1}{n}}$. En dicho trabajo (p. 652) presentan el resultado siguiente:

Teorema 1.7.1. (Teorema Marvasti-Jain) *Sea f compleja de banda limitada con anchura de banda ω, entonces $g = f^{\frac{1}{n}}$ es de banda limitada con anchura de banda $\dfrac{\omega}{n}$ si y sólo si f tiene todos sus ceros de orden n.*

La idea clave que se deduce de este resultado, como sus autores indican, es que si f es de dicho tipo, entonces puede ser reconstruida a partir de la aplicación del teorema de Shannon a su raíz $g = f^{\frac{1}{n}}$

$$f(z) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k\tau) \operatorname{senc}\left(\frac{z}{\tau} - k \right) \right)^n ,$$

utilizando una frecuencia de recomposición $\tau \leq \dfrac{n}{\omega}$ mejor que la que ofrece un teorema directo para f, puesto que se ha disminuido la anchura de banda.

En esta misma línea tenemos el resultado complementario de L. Agud y R.G. Catalán en el trabajo [AC2001], en el que se recoge (p. 47) el teorema siguiente:

Teorema 1.7.2. (Teorema Agud-Catalán) *Sean p impar, $\omega > 0$ y τ tales que $0 < \tau < \dfrac{1}{\omega}$. Sea $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^{\frac{2}{p}}(\mathbb{Z})$. Existen exactamente p señales f_i con $0 \leq i \leq p-1$ tales que f_i^p tienen banda limitada en $\left[-p\dfrac{\omega}{2}, p\dfrac{\omega}{2} \right]$ e interpolan los puntos $(k\tau, s_k)$.*

Además, en la demostración de este resultado se prueba que

$$f_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k^{\frac{1}{p}} \operatorname{senc}(\omega x - k),$$

donde $s_k^{\frac{1}{p}}$ es la raíz real p-ésima de s_k.

En la expresión de f_0 aparece una serie de tipo cardinal con coeficientes modificados por el parámetro p como raíces de los valores de interpolación.

En el artículo se prueba que podemos aplicar el teorema del muestreo de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov a un tipo particular de señales de banda limitada usando muestras a mayor distancia que la dada por la frecuencia de Nyquist. Esto supone una ventaja técnica ya que utilizamos menos muestras por unidad de tiempo que la cota dada por la frecuencia de Nyquist asociada a la señal.

La importancia práctica de este resultado es que abre un camino para hacer una reconstrucción de tipo Shannon de señales que incluso no sean de banda limitada a través de un proceso límite.

La unión de estas ideas de Marvasti-Jain y Agud-Catalán para funciones de banda limitada, junto con la aproximación asintótica de J.M. Whittaker para funciones no necesariamente de banda limitada y el tratamiento desde la perspectiva de las funciones analíticas y la teoría de residuos de Ogura, es lo que origina el presente trabajo.

Capítulo 2

Perturbando funciones que satisfacen el T.M.P.A

El verdadero viaje hacia el descubrimiento
no consiste en buscar nuevos horizontes
sino en tener nuevos ojos.
MARCEL PROUST

2.1. Introducción

En trabajos anteriores se ha visto que el universo de señales que satisfacen el T.M.P.A. es no vacío.

Nuestra idea ahora es modificar funciones f que ya verifiquen el TMPA. Estas funciones quedan unívocamente determinadas por sus valores en los puntos de muestreo, en nuestro caso los enteros. Por ello las modificaciones que vamos a realizar se harán sobre la sucesión de valores $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

A priori, sería lógico definir una modificación sobre $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de la forma $\{f(k)+\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, con $\varepsilon_k > -f(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En este sentido puede enfocar bajo el punto de vista de que si variamos la función nula en un número finito de puntos enteros

$$f(k) = \begin{cases} \varepsilon_k & \text{si } k \in V\varepsilon, \\ 0 & \text{si } k \notin V\varepsilon, \end{cases}$$

la función resultante al aplicar el algoritmo del Teorema del Muestreo Potencial Asintótico se comporta de forma caótica, en el sentido de que según el número de puntos que mofiquemos la función resultante es nula o infinito en un mismo intervalo.

Por lo tanto se deduce que, en general, no existe estabilidad haciendo modificaciones en suma, es decir del tipo

$$\widetilde{f}(k) = \varepsilon_k + f(k) \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

ya que con una variación pequeña en un único punto las funciones resultantes son muy distintas.

Por todo ello, el modo de perturbar el valor de una función en los puntos del muestreo lo haremos mediante productos, es decir

$$\widetilde{f}(k) = \lambda_k f(k) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Además tomaremos $\lambda_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ para evitar ceros en la nueva función, ya que el número de ceros influye en la anulación o no acotación de la función resultante al aplicar el TMPA. El comportamiento asintótico cuando uno de los parámetros perturbadores tienda a cero se tratará en la segunda sección del capítulo.

Concretando, las modificaciones que ahora vamos a considerar vendrán dadas por una sucesión de valores, que denotaremos en todo lo que sigue como $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\lambda_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, y variarán el valor de la función en los valores muestreados. En definitiva, nuestro objetivo será estudiar si a partir de una función f que verifica el Teorema del Muestreo Potencial Asintótico y una sucesión pertubadora λ, existe la función

$$F_\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \right)^n . \qquad (2.1)$$

En este caso diremos que F_λ es una perturbación de f, T.M.P.A.

Si nos restringimos a esta definición de perturbación es fácil observar que este planteamiento es equivalente a tomar la sucesión $s = \{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ para la aplicación directa del T.M.P.A. Además, tal y como se verá más adelante, en este caso dadas dos funciones cualesquiera de $\mathcal{MP}$ una de ellas siempre es perturbada da la otra y viceversa. Por este motivo, nos centraremos en el caso que la función resultante al aplicar la fórmula del TMPA a la sucesión perturbada se además de la forma

$$F_\lambda = f\sigma_\lambda. \qquad (2.2)$$

Veremos que en general esto no ocurre. Nótese que obviamente, en el caso de que F_λ sea de la forma (3.2), si f es analítica entonces F_λ también lo es.

El capítulo presente ha sido estructurado como sigue:

En la siguiente sección, se tratará el caso de sucesiones perturbadoras que modifican el valor de la función únicamente en un número finito de puntos. Nos referiremos a estas sucesiones como finitamente no unitarias. Veremos que todas ellas originarán funciones de la forma (3.2).

En la Sección 3.3 se definirán varios tipos de perturbaciones, que en el caso de perturbaciones finitas coincidirán, pero serán distintos conceptos cuando λ sea finitamente no unitaria.

El paso a perturbaciones infinitas se realizará en la Sección 3.4. En ella se caracterizarán las sucesiones perturbadoras que originan funciones que se ajustan a la expresión (3.2). Otras condiciones suficientes sobre λ más sencillas de comprobar serán propuestas.

A lo largo de este capítulo asumiremos los siguientes convenios, y además utilizaremos la siguiente notación:

Notación 3.1 *Dadas $f \in \mathcal{MP}$ donde $\mathcal{MP}$ denota las funciones positivas que verifican el T.M.P.A., $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{N}$, detonaremos formalmente*

$$F_\lambda(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k).$$

$$f(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k).$$

Por otro lado, utilizaremos reiteradamente el hecho de que si $f \in \mathcal{MP}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(t,n) = f(t) \tag{2.3}$$

y por tanto para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $f(t,n) > \delta > 0$.

2.2. Perturbaciones en un número finito de puntos

En esta sección trabajaremos con sucesiones $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\lambda_k = 1$ excepto para un número finito de índices. Entonces, si llamamos

$$Q = \{k \in \mathbb{Z}; \lambda_k \neq 1\} = \{q_1, \ldots, q_m\},$$

tenemos que existe

$$\sigma_\lambda(t) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)} = \prod_{i=1}^{m} {\lambda_{q_i}}^{sinc(t-q_i)}.$$

Si usamos este tipo de sucesiones obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1. *Sean $f \in \mathcal{MP}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_m\} \subset \mathbb{Z}$ un conjunto finito y $\{\lambda_{q_1}, \ldots, \lambda_{q_m}\} \subset \mathbb{R}^+$. Sea $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ la sucesión dada por*

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & si\ k \notin Q, \\ \lambda_{q_1}, & si\ k = q_i \in Q; \end{cases}$$

y sea F_λ la función dada en (3.1). Entonces

$$F_\lambda(t) = f(t) \prod_{i=1}^{m} \lambda_{q_i}{}^{sinc(t-q_1)} = f(t)\,\sigma_\lambda(t)$$

y es una función de $\mathcal{MP}$.

Demostración: Obsérvese que efectivamente se tiene que $F_\lambda(t)$ es una perturbación de $f(t)$ en el sentido mencionado anteriormente ya que si $k \in \mathbb{Z}$

$$F_\lambda(k) = \begin{cases} f(k), & \text{si } k \in Q, \\ \lambda_{q_i} f(q_i), & \text{si } k = q_i, i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Así, teniendo en cuenta que, por (3.3), $f(t,n) \neq 0$ a partir de un cierto $n_0(t)$ y utilizando la Notación 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} F_\lambda(t,n) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\notin Q}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{q_i}^{\frac{1}{n}}(q_i)\, sinc(t-q_i) \\ &= f(t,n) + \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_{q_i}^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(q_i)\, sinc(t-q_i) \\ &= f(t,n)\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{q_i}^{\frac{1}{n}} - 1}{f(t,n)} f^{\frac{1}{n}}(q_i) sinc(t-q_i)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, llamando

$$H(t,n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{q_i}^{\frac{1}{n}} - 1}{f(t,n)} f^{\frac{1}{n}}(q_i) sinc(t-q_i)$$

podemos escribir que

$$(F_\lambda(t,n))^n = (f(t,n)^n (1 + H(t,n)))^n. \tag{2.5}$$

Como por (3.3) se verifica

$$\lim_{n\to\infty} H(t,n) = 0,$$

utilizando las equivalencias en límites y de nuevo (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + H\left(t, n\right)\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + H\left(t, n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} nH\left(t, n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{q_i}^{\frac{1}{n}} - 1}{f\left(t, n\right)} f^{\frac{1}{n}}(q_i) sinc(t - q_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \log \lambda_{q_i} sinc\left(t - q_i\right) = \log \prod_{i=1}^{m} \lambda_{q_i}{}^{sinc(t-q_i)},
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + H\left(t, n\right)\right)^n = \prod_{i=1}^{m} \lambda_{q_i}{}^{sinc(t-q_i)}.$$

Además, como por hipótesis $f \in \mathcal{MP}$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(t, n\right)\right)^n = f(t).$$

Así, tomando límite cuando n tiende a infinito en la expresión (3.5), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_\lambda\left(t, n\right)\right)^n = f(t) \sum_{i=1}^{m} \lambda_{q_i}{}^{sinc(t-q_i)} = f(t)\sigma_\lambda(t).$$

•

Obsérvese que la demostración del teorema anterior no es válida si λ_{q_i} es 0 para algún $i = 1, \ldots, m$, ya que no podríamos utilizar la equivalencia de la función logaritmo $(\log(1 + x) \sim x$ cuando $x \to 0)$ y además λ_{q_i} no sería finito. Ahora bien, no es sólo que la demostración no sería valida, sino que en este caso tampoco se mantendría la estabilidad del teorema, tal y como se deduce del siguiente ejemplo.

Supongamos que perturbamos una función $f \in \mathcal{MP}$ en un único punto $q \in \mathbb{Z}$ multiplicando por $\lambda_q = 0$. En este caso tendríamos que (3.4) se convierte en

$$F_\lambda(k) = \begin{cases} f(k), & \text{si } k \neq q, \\ 0, & \text{si } k = q. \end{cases}$$

Así

$$F_\lambda(t, n) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k\neq q}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t - k) + 0 = f(t, n) - f^{\frac{1}{n}}(q) sinc(t - q)$$

y, por (3.3),

$$\lim_{n\to\infty} F_\lambda(t, n) = 1 - sinc(t - q).$$

Por lo tanto, puntualmente tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_\lambda\left(t,n\right)\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } sinc(t-q) > 0, \\ \infty, & \text{si } sinc(t-q) < 0, \\ f(t), & \text{si } sinc(t-q) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Este hecho muestra que la anulación de un valor puede disparar la expresión a infinito o anularla. A priori, este comportamiento puede resultar extraño ya que si λ_q está muy próximo a cero, pero con $\lambda_q \neq 0$, el teorema sí es válido y obteníamos la función

$$F_\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \left(F_\lambda\left(t,n\right)\right)^n = f(t){\lambda_q}^{sinc(t-q)}.$$

Sin embargo, este comportamiento que hemos calificado de extraño en un principio, aunque ciertamente es muy brusco, se produce con continuidad tal y como se deduce a partir de la expresión anterior de la perturbación de $f(t)$. En efecto, si λ tiende a 0 tenemos que

$$\text{si } sinc(t-q) > 0 \text{ entonces } {\lambda_q}^{sinc(t-q)} \text{ está próximo a 0,}$$

$$\text{si } sinc(t-q) < 0 \text{ entonces } {\lambda_q}^{sinc(t-q)} \text{ está próximo a infinito,}$$

lo cual se corresponde con lo obtenido en (3.6). Este hecho nos reafirma en la idea que apuntamos en la introducción de tomar como medida de proximidad la topología de los cocientes en vez de las diferencias.

Observación 3.3 *El teorema anterior se puede rescribir de la siguiente forma:*

Sea $s \in \mathcal{S}$, entonces para cualquier sucesión λ de términos positivos finitamente no unitaria, la sucesión perturbada $s_\lambda = \{\lambda_k s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ pertenece a $\mathcal{S}$. Además, la función asociada f_{s_λ} verifica que

$$f_{s_\lambda} = f_s \sigma_\lambda.$$

2.3. Tipos de perturbaciones

Además de la matización anterior provocada por el resultado obtenido para perturbaciones finitas, queremos hacer notar que realmente todas las funciones de $\mathcal{MP}$ pueden obtenerse unas de otras mediante una perturbación en los enteros. Por ejemplo, todas las sucesiones de $\mathcal{S}$ son coeficientes de una perturbación de la función unidad. Por ello, entendemos que conviene matizar y añadir algún adjetivo a la palabra perturbación.

Sea λ una sucesión de números reales positivos. Distinguiremos los siguientes tipos de perturbaciones:

Definición 3.4 *Diremos que una sucesión λ es admisible para una función $f \in \mathcal{MP}$, si para todo $t \in \mathbb{R}$ existe el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k{}^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \right)^n ,$$

definiendo por tanto una función $F_\lambda \in \mathcal{MP}$. Denotaremos por Λ_f al conjunto de sucesiones admisibles para f

$$\Lambda_f = \left\{ \lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ ; F_\lambda \in \mathcal{MP} \right\} .$$

Obviamente, que una sucesión λ sea admisible para una función f es equivalente a que la sucesión $s = \{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ verifique las condiciones F0), F1) y F2), es decir, que $s \in \mathcal{S}$. Tales condiciones aplicadas al caso que nos ocupa se convierten, utilizando la Notación 3.1, en que para todo $t \in \mathbb{R}$

F0) $\exists n_0(t) \in \mathbb{N}$ tal que $F_\lambda(t,n)$ converge para todo $n \geq n_0$,

F1) $\lim\limits_{n\to\infty} F_\lambda(t,n) = 1$,

F2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(f_\lambda(t,n) - 1) \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.5 *El conjunto de perturbaciones admisibles no es universal sino que depende de la función que queramos perturbar. En general $\Lambda_f \neq \Lambda_g$.*

Demostración: Sea, por ejemplo, la sucesión $\lambda = \left\{ e^{k^2} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Entonces λ es admisible para la función Gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} g^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc(t-k) \right)^n = 1 \in \mathcal{M},$$

pero no es admisible para la función unidad porque ni siquiera la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} sinc(t-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{k^2}{n}} sinc(t-k)$$

es convergente.

•

Nótese que para toda $f \in \mathcal{MP}$ podemos caracterizar Λ_f del modo

$$\Lambda_f = \left\{ \Lambda = \left\{ \frac{g(k)}{f(k)} \right\}_{k\in\mathbb{Z}} ; g \in \mathcal{MP} \right\} .$$

Por lo tanto, únicamente con la definición de perturbaciones admisibles caemos en la trivialidad de que todas las funciones de la familia $\mathcal{MP}$ son perturbaciones unas de otras a través de perturbaciones admisibles. Dicho de otro modo, las familias Λ_f son demasiado grandes en cuanto que nos llevan de la función f a todas las demás funciones de $\mathcal{MP}$. Lo que nos proponemos es asociar a cada $f \in \mathcal{MP}$ una subfamilia de la anterior de manera que las funciones asociadas tengan algún tipo de proximidad con f. Esto nos lleva a introducir otros tipos de perturbaciones.

Sea Λ el conjunto:

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+; \prod_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{sinc(t-k)} \in (0, \infty) \right\}. \tag{2.7}$$

Definición 3.6 *Diremos que una sucesión $\lambda \in \Lambda$ es una perturbación compatible con $f \in \mathcal{MP}$, si la función $f\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}$. Denotaremos Λ_f^* a la familia de tales sucesiones, es decir*

$$\Lambda_f^* = \{\lambda \in \Lambda; f\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}\}.$$

Ejemplo 3.7 *En el Capítulo 3, se vio que la familia*

$$\mathcal{L} = \left\{ \lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+; \sum_{\| \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\log \lambda_\|}{\|} \right| < \infty \right\}$$

cumple que $\mathcal{L}^{\mathcal{A}} \subset *_{\sqcap}^*$, siendo $u(t)$ la función unidad, puesto que en el Teorema 3.26 se demostró que si $\lambda \in \mathcal{L}^{\mathcal{A}}$ entonces $\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}$.

En la búsqueda de una similitud entre la función $f \in \mathcal{MP}$ y su perturbada F_λ a través de una perturbación compatible, una propiedad interesante acerca de la sucesión λ es que sea estable, es decir, que $\lim_{t \to \infty} \sigma_\lambda(t) = 1$.

Definición 3.8 *Una sucesión λ diremos que es una perturbación estable respecto de una función $f \in \mathcal{MP}$, si es una perturbación compatible con f y es una sucesión estable. Denotaremos $\tilde{\Lambda}_f$ a la familia de tales sucesiones, es decir,*

$$\tilde{\Lambda}_f = \tilde{\Lambda}_f^* \cap \Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda_0; f\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}\}.$$

Observación 3.9 *Si λ es una sucesión finitamente no unitaria los tres conceptos definidos anteriormente coinciden. Esto es, en el caso de perturbaciones finitas para toda $f \in \mathcal{MP}$ se tiene que $\lambda \in \Lambda_f$, $\lambda \in \Lambda_f^*$, $\lambda \in \tilde{\Lambda}_f$. Dicho con palabras, λ es estable, admisible y compatible con f, para toda $f \in \mathcal{MP}$.*

Por lo tanto, las definiciones anteriores sólo las utilizaremos en el caso de "perturbaciones infinitas".

Proposición 3.10 *Si consideramos sucesiones λ con infinitos términos distintos de la unidad entonces dada $f \in \mathcal{MP}$ se tiene que en general*

$$\tilde{\Lambda}_f \subset \tilde{\Lambda}^*_f \subset \Lambda_f,$$

con contenidos estrictos.

Demostración: Por la propia definición de los conjuntos anteriores se tiene que $\tilde{\Lambda}_f = \tilde{\Lambda}^*_f \cap \Lambda_f$. Para ver que los contenidos son estrictos consideramos la función unidad $u(t) = 1$. Sea λ tal que $\lambda_k = e^{-1^k}$. Sabemos que

$$\sigma_\lambda(t) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{sinc(t-k)} = e^{cos\pi t}$$

es una función analítica y que $\sigma_\lambda \in \mathcal{M}$; así pues, $\lambda \in \Lambda^*_u$. Sin embargo $\lambda \notin \tilde{\Lambda}_u$, porque claramente

$$\lim_{t \to \infty} \sigma_\lambda(t) \neq 1.$$

Por lo tanto $\tilde{\Lambda}_u \subset \Lambda^*_u$.

Por otro lado, sea λ tal que $\lambda_k = e^{-k^2}$. Se tiene

$$U_\lambda(t) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k^{\frac{-k^2}{n}} sinc(t-k) \right)^n = e^{-t^2} \in \mathcal{MP},$$

por ello $\lambda \in \Lambda_u$. Sin embargo $\lambda \notin \Lambda^*_u$ porque el producto $\prod_{k \in \mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)}$ no converge. Por lo tanto, $\Lambda^*_u \subset \Lambda_u$.

•

Proposición 3.11 *Toda la sucesión constante es admisible y compatible con toda $f \in \mathcal{MP}$ y la única estable es la sucesión unidad. Es decir*

$$\left\{ \lambda = \{c\}_{k \in \mathbb{Z}} \, ; c \in \mathbb{R}^+ \right\} \in \bigcap_{f \in \mathcal{MP}} \Lambda^*_f \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{MP}} \Lambda_f.$$

Si $c \neq 1$ entonces $\lambda = \{c\}_{k \in \mathbb{Z}} \notin \tilde{\Lambda}_f$.

Demostración: Por (5.5) se tiene que si perturbamos una función f de $\mathcal{MP}$ con una sucesión constante positiva $\lambda = \{c\}_{k \in \mathbb{Z}}$, entonces claramente la función perturbada verifica el TMPA ya que en este caso se obtiene que $F_\lambda = cf \in \mathcal{MP}$ y en consecuencia λ es admisible para f. Además como

$$\sigma_\lambda(t) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{sinc(t-k)} = c,$$

se obtiene que $F_\lambda = f\sigma_\lambda$ y por lo tanto también se verifica que λ es compatible con f. Sin embargo, obviamente, la única sucesión constante estable es la sucesión unidad.

•

2.4. Extensión del caso finito a perturbaciones infinitas

En el caso de perturbaciones finitas hemos obtenido que las modificaciones de una función $\in \mathcal{MP}$ son del tipo

$$f(t)\prod_{k=1}^{m}\lambda_{q_k}{}^{sinc(t-q_k)}$$

y también verifican el Teorema del Muestreo Potencial Asintótico, es decir, que la función anterior pertenece al conjunto $\mathcal{MP}$. Es más, de la sección anterior se deduce que cuando se parte de una función $f \in \mathcal{MP}$ y se perturba en un número finito de puntos enteros mediante una sucesión λ resultan los siguientes hechos:

a) La nueva sucesión $\{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ origina una función $F_\lambda \in \mathcal{MP}$, es decir, λ admisible para f.

b) La relación entre f y F_λ es de la forma $F_\lambda = f\sigma_\lambda$, siendo

$$\sigma_\lambda(t) = \prod_{k=1}^{m}\lambda_{q_k}{}^{sinc(t-q_k)},$$

es decir, λ compatible para f.

c) Estas funciones σ_λ tienden a 1 en el infinito, lo cual supone que el cociente entre f y su perturbada F_λ también tiende a 1. Es decir, λ es estable.

En vista de estos hechos es natural la cuestión que nos planteamos ahora: estudiar cuándo es posible asegurar las tres propiedades anteriores en el caso de que el número de puntos perturbados sea infinito y así obtener una nueva función de $\mathcal{MP}$ a través de un producto infinito, lo cual nos conduce de nuevo a las funciones σ_λ.

En definitiva, nuestro objetivo es encontrar condiciones sobre λ que aseguren que si $f \in \mathcal{MP}$ entonces F_λ sea de la forma

$$F_\lambda(t) = f(t)\prod_{k=1}^{m}\lambda_k{}^{sinc(t-q_k)} = f(t)\sigma_\lambda(t)$$

y que $F_\lambda \in \mathcal{MP}$. Es decir, en términos de la sección anterior, nos proponemos estudiar los conjuntos Λ_f^* y $\tilde{\Lambda}_f$ de las perturbaciones compatibles con f y estables respecto de f.

Ahora bien, como la propiedad de estabilidad

$$\lim_{t\to\infty}\prod_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k^{sinc(t-k)} = \lim_{t\to\infty}\sigma_\lambda(t) = 1$$

es conocida, nos centramos en esta sección en el estudio de Λ_f^*.

Consideraremos que perturbamos $f \in \mathcal{MP}$ en todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ multiplicando por un número real positivo λ_k el valor que toma la función en dichos puntos y adimitiendo, por lo tanto, que los λ_k puedan tomar valor 1, lo cual equivale a no realizar ninguna modificación.

De aquí en adelante, tomaremos como conjunto universal de sucesones perturbadoras el conjunto (3.7)

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+; \prod_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{sinc(t-k)} \in (0,\infty) \right\}.$$

que se estudió en el Capítulo 3.

Analizando la demostración del Teorema 3.2 se observa que para poder repetir el razonamiento utilizado en el caso de perturbar un número finito de puntos es necesario, que dadas $f \in \mathcal{MP}$ y $\lambda \in \Lambda$, se verifiquen las siguientes condiciones:

A) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda_k f(k))^{\frac{1}{n}} \, sinc(t-k) < \infty,$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda_k f(k))^{\frac{1}{n}} \, sinc(t-k) = 1,$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) = 0,$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k).$

Estas condiciones cumplen las siguientes relaciones elementales:

Lema 3.12 *Sean $f \in \mathcal{MP}$ y $\lambda \in \Lambda$. Entonces $D) \Rightarrow C) \Leftrightarrow B) \Rightarrow A)$*

Demostración: La primera implicación se verifica ya que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)\right) = 0 \end{aligned}$$

porque $\lambda \in \Lambda$.

Para obtener la equivalencia entre C) y B) basta con observar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda_k f(k))^{\frac{1}{n}} \, sinc(t-k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) + f(t,n).$$

Por lo tanto, las series que aparecen en ambas condiciones tienen el mismo carácter. Además, tomando límite en la expresión anterior y utilizando que $\lim\limits_{n\to\infty} f(t,n) = 1$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k f(k)\right)^{\frac{1}{n}} sinc(t-k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) + f(t,n) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \right) + 1 \qquad ,$$

de donde se deduce el resultado.
La última implicación es evidente.

•

Así, podemos afirmar que para garantizar que el procedimiento utilizado en el caso de perturbaciones finitas también es válido para el caso infinito bastará, tomando $\lambda \in \Lambda$, asegurar la condición D).

Queremos hacer notar que cuando afirmemos que una sucesión λ cumple la condición D) para una función f, estaremos diciendo que para todo $t \in \mathbb{R}$

a) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)$ converge,

b) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)$ converge para todo n mayor o igual que un cierto n_0,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)$.

Ahora bien, como tomaremos $\lambda \in \Lambda$ ya tendremos asegurado que se cumple a). Por otro lado, al estar perturbando funciones $f \in \mathcal{MP}$ la condición b) resulta equivalente a la condición

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) \in \mathbb{R},$$

que aquí hemos llamado A) y en el Capítulo 5 se estudió como F0) para la sucesión $s = \{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

En el siguiente teorema vamos a demostrar que la condición D) es una condición necesaria y suficiente para que se verifique que F_λ es de la forma

$$F_\lambda(t) = f(t)\prod_{k\in\mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)} = f(t)\sigma_\lambda(t)$$

y que $F_\lambda \in \mathcal{MP}$. Es decir, para que λ sea una perturbación compatible con f.

Teorema 3.13 *Sean $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$, $f \in \mathcal{MP}$ y F_λ definida en (3.1). Entonces $\lambda \in \Lambda_f^*$ si y sólo si λ cumple la condición D).*

Demostración: Obsérvese que efectivamente se tiene que F_λ es una perturbación de f en el sentido mencionado en la introducción, ya que para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$F_\lambda(k) = \lambda_k f(k).$$

En primer lugar veamos que D) es una condición necesaria. Supongamos que $F_\lambda = f\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}$, esto es

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)\right)^n = f(t)\sigma_\lambda(t) \in \mathcal{MP}.$$

Aplicando logaritmos y utilizando, gracias a (3.3), la equivalencia del logaritmo se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) - 1\right) \tag{2.8}$$

$$= \log(f(t)\sigma_\lambda(t)) = \log f(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k).$$

De forma análoga, como $f \in \mathcal{MP}$,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) - 1\right) = \log f(t). \tag{2.9}$$

Mediante unas sencillas operaciones la serie que aparece en la condición D) se puede escribir de la forma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)$$

$$= n\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k)\right)$$

$$= n\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) - 1\right) - n\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) - 1\right).$$

Por lo tanto, tomando límite en la expresión anterior se tiene, por (3.8) y (3.9), que se cumple D).

Veamos a continuación que la condición D) es suficiente. Nótese que las convergencias del producto infinito y de la serie que aparecen al aplicar el Teorema del Muestreo Potencial Asintótico quedan garantizadas.

Por (3.3), $f(t,n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Así, utilizando la Notación 3.1 dada al principio del capítulo, se tiene que

$$\begin{aligned}
F_\lambda(t,n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(\lambda_k f(k))^{\frac{1}{n}} sinc(t-k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) \\
&= f(t,n) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k) \\
&= f(t,n)\left(1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1}{f(t,n)} f^{\frac{1}{n}(k)sinc(t-k)}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, llamando

$$H(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1}{f(t,n)} f^{\frac{1}{n}(k)sinc(t-k)},$$

podemos escribir que

$$(F_\lambda(t,n))^n = (f(t,n))^n(1 + H(t,n))^n. \tag{2.10}$$

Como por (3.3) y C) (por el Lema 3.12: D) $\Rightarrow$ C))

$$\lim_{n\to\infty} H(t,n) = 0,$$

utilizando las equivalencias en límites se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log(1 + H(t,n))^n &= \lim_{n\to\infty} n\log(1 + H(t,n)) = \lim_{n\to\infty} nH(t,n) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1}{f(t,n)} f^{\frac{1}{n}}(k)sinc(t-k),
\end{aligned}$$

de donde se deduce, por D), que

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+H(t,n))^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k) = \log \prod_{k\in\mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)}.$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} (1+H(t,n))^n = \prod_{k\in\mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)}. \tag{2.11}$$

Además, como por hipótesis $f \in \mathcal{MP}$, se tiene que

$$\underset{n\to\infty}{(f(t,n))^n} = f(t).$$

Así, tomando límite cuando n tiende a infinito en la expresión (3.10), obtenemos gracias a la igualdad anterior junto con (3.11) que

$$\lim_{n\to\infty} (F_\lambda(t,n))^n = f(t) \prod_{k\in\mathbb{Z}} {\lambda_k}^{sinc(t-k)}.$$

•

Vamos a dedicar algunas páginas a otras condiciones más sencillas de comprobar que garantizan que $\lambda \in \Lambda_f^*$, es decir, condiciones suficientes que garantizan D).

Los resultados que presentamos son válidos para conjuntos de funciones $f \in \mathcal{MP}$ que cumplen alguna condición adicional, lo cual permite suavizar las condiciones sobre λ.

Proposición 6.14 *Sean $f \in \mathcal{MP}$ una función de la forma producto $f = \sigma_\beta$ y $\lambda \in \Lambda$ tales que*

a) $\{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión simétrica,

b) La sucesión $\left\{ \frac{\log(\lambda_k f(k))}{\log k} \right\}_{k=2}^{\infty}$ está acotada superior e inferiormente.

Entonces se verifica D), es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1 \right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k).$$

Demostración: En primer lugar nótese que la serie $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)$ es convergente porque $\lambda \in \Lambda$.

Por otro lado, como por hipótesis $f = \sigma_\beta \in \mathcal{MP}$ (obviamente $\beta = \{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$), se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} n \left(f^{\frac{1}{n}}(k) - 1 \right) sinc(t-k) = \log f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log f(k) sinc(t-k).$$

Además, por la Proposición 5.26 tomando $s = \{\lambda_k f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) - 1\right) sinc(t-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log(\lambda_k f(k)) sinc(t-k).$$

Así, utilizando las dos igualdades anteriores, queda asegurada la convergencia de la primera serie de la expresión D) y se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} f^{\frac{1}{n}}(k) - 1\right) sinc(t-k) - \lim_{n\to\infty} n \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f^{\frac{1}{n}}(k) - 1) sinc(t-k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log(\lambda_k f(k)) sinc(t-k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log f(k) sinc(t-k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)
\end{aligned}$$

•

Proposición 3.15 *Sea $f \in \mathcal{MP}$ acotada sobre $\mathbb{Z}$. Si $\lambda \in \mathcal{L}^{\mathcal{A}}$ entonces se verifica D).*

Demostración: Sea $B_k(t,n) = n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) sinc(t-k)$.
Como por hipótesis f está acotada en $\mathbb{Z}$, existe $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ $|f(k)|^{\frac{1}{n}} < M$. Por lo tanto, aplicando el Lema 3.25, se tiene que existe $L > 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |B_k(t,n)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right| \left|f^{\frac{1}{n}}(k)\right| |sinc(t-k)|\\
&\leq L \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\log \lambda_k| \left|f^{\frac{1}{n}}(k)\right| |sinc(t-k)|\\
&\leq LM \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\log \lambda_k sinc(t-k)|\,.
\end{aligned}$$

Así, como $\lambda \in \mathcal{L}$, por la Proposición 3.21 queda garantizada la convergencia de las dos series que aparecen en la expresión D).
El resultado se concluye aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada y teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} B_k(t,n) = \log \lambda_k sinc(t-k)$.

•

Proposición 3.16 *Sea $f \in \mathcal{MP}$ tal que*

a) $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es acotada,*

b) *existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y existen $C, \mu > 0$ tales que*

$$\left| f^{\frac{1}{n}}(2k-1) - f^{\frac{1}{n}}(2k) \right| < \frac{C}{|k|^{\mu}}$$

para todo $|k| \geq k_0$ y para todo n a partir de un cierto n_0.

Sea $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales positivos tal que

c) $\{\log \lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *está acotada,*

d) *existen $N, \eta > 0$ tales que $|\log \lambda_{2k-1} - \log \lambda_{2k}| < \frac{N}{|k|^{\eta}}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Entonces se verifica D).

Demostración: Obviamente la condición D) se verifica para todo $t \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto a lo largo de toda la demostración supondremos que $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En primer lugar obsérvese que, por las hipótesis pedidas a la sucesión λ, la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)$$

es convergente. En efecto, utilizando la definición de $sinc(t-k)$
Por lo tanto, utilizando las hipótesis exigidas a λ, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\log \lambda_k sinc(t-k)| \;&\leq\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\log \lambda_{2k-1} - \log \lambda_{2k}}{2k-1-t} \right| \\ &+\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\log \lambda_{2k}}{(2k-1-t)(2k-t)} \right| < \infty. \end{aligned}$$

Sea

$$M_k(n) = n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1\right) f^{\frac{1}{n}}(k) - \log \lambda_k. \tag{2.12}$$

Entonces, utilizado de nuevo la definición de $sin(t-k)$, podemos escribir

$$\left(n\left(\lambda_k^{\frac{1}{n}}\right) f^{\frac{1}{n}}(k) - \log \lambda_k\right) sinc(t-k) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{M_k(n)}{k-t}.$$

Además, como $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{k+1}\frac{M_k(n)}{k-t} = 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k+1}\frac{M_k(n)}{k-t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{M_{2k-1}(n)}{(2k-1)-t} - \frac{M_{2k}(n)}{2k-t} \right).$$

Por todo ello, demostrar que se verifica D) es equivalente a demostrar que para todo $t \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{M_{2k-1}(n)}{2k-1-t} - \frac{M_{2k}(n)}{2k-t} \right)$$

es convergente y que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} \frac{M_k(n)}{k-t} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{M_{2k-1}(n)}{2k-1-t} - \frac{M_{2k}(n)}{2k-t} \right) = 0. \tag{2.13}$$

Para ello, veamos antes dos propiedades que verifica $M_k(n)$.
Por hipótesis, existen constantes $\overline{M}$yR tales que $|\log \lambda_k| \leq \overline{M}$ y $\left| f^{\frac{1}{n}}(k) \right| < R$. Por lo tanto, tomando módulos en la expresión (3.12) de $M_k(n)$ y aplicando el Lema 3.25, se tiene que

$$\begin{aligned} |M_k(n)| &\leq \left| n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right| \left| f^{\frac{1}{n}}(k) \right| + |\log \lambda_k| \leq R \left| n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right| + \overline{M} \\ &\leq RL \, |\log \lambda_k| + \overline{M} \leq RL\overline{M} + \overline{M} = T. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Es decir, existe $T > 0$ tal que $|M_k(n)| \leq T$ uniformemente en k y en n.
Por otro lado, tomando límite en n en la expresión (3.12) y utilizando que $\lim_{n \to \infty} f^{\frac{1}{n}}(t) = 1$ y que $\lim_{n \to \infty} n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \log \lambda_k$, se tiene que $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \to \infty} M_k(n) = \lim_{n \to \infty} n \left(\lambda_k^{\frac{1}{n}} - 1 \right) f^{\frac{1}{n}}(k) - \log \lambda_k = 0. \tag{2.15}$$

Procederemos ahora a demostrar (3.13).
Obsérvese que la serie que aparece en (3.13) se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{M_{2k-1}(n)}{2k-1-t} - \frac{M_{2k}(n)}{2k-t} \right) \\ &\quad = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2k-t)M_{2k-1}(n) - (2k-1-t)M_{2k}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)} \\ &\quad = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(t+1)M_{2k}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{tM_{2k-1}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)} \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2k(M_{2k-1}(n) - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Veremos sucesivamente que cada una de las series anteriores es una serie convergente y que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

En primer lugar, dado T de (3.14) podemos afirmar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{M_{2k}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)}\right| \leq T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{(2k-1-t)(2k-t)}\right| < \infty.$$

Además, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada y utilizando (3.15), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(t+1)M_{2k}(n)}{(2n-1-t)(2k-t)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{n\to\infty}\frac{(t+1)M_{2k}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0. \tag{2.17}$$

De forma análoga se obtiene la convergencia de la segunda serie de la expresión (3.16) y que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{tM_{2k-1}(n)}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0. \tag{2.18}$$

Para finalizar veamos que también se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2k(M_{2k-1}(n)-M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0.$$

Utilizando la expresión de $M_k(n)$ dada en (3.12) y operando se tiene que

$$\begin{aligned}
&M_{2k-1}(n) - M_{2k}(n)\\
&\quad= n\left[\left(\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}}-1\right)f^{\frac{1}{n}}(2k-1) - \left(\lambda_{2k}^{\frac{1}{n}}-1\right)f^{\frac{1}{n}}(2k)\right]\\
&\qquad+\log\lambda_{2k}-\log\lambda_{2k-1}\\
&\quad= n\left[\left(\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(f^{\frac{1}{n}}(2k-1)-f^{\frac{1}{n}}(2k)\right)+f^{\frac{1}{n}}(2k)\left(\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}}-\lambda_{2k}^{\frac{1}{n}}\right)\right]\\
&\qquad+\log\lambda_{2k}-\log\lambda_{2k-1}.
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función exponencial en el intervalo definido por los puntos $\frac{\log\lambda_{2k-1}}{n}$ y $\frac{\log\lambda_{2k}}{n}$, se tiene que existe $\mu_k(n)$ perteneciente a dicho intervalo tal que

$$\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}}-\lambda_{2k}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log\lambda_{2k-1}}{n}} - e^{\frac{\log\lambda_{2k}}{n}} = \frac{e^{\mu_k(n)}}{n}(\log\lambda_{2k-1}-\log\lambda_{2k}).$$

Así, por hipótesis y teniendo en cuenta que existe una constante E tal que $\left|e^{\mu_k(n)}\right| \leq E$, se tiene que existen $N,\eta > 0$ de manera que para todo $k\in\mathbb{Z}$

$$\left|\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}}-\lambda_{2k}^{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{E}{n}\frac{N}{|k|^{\eta}}.$$

En consecuencia, tomando módulos en la expresión de $M_{2k-1}(n) - M_{2k}(n)$, podemos afirmar por la acotación anterior, el Lema 3.25 y de nuevo por las hipótesis del enunciado que también existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y existen $C, \mu > 0$ tales que para todo $|k| \geq k_0$

$$|M_{2k-1}(n) - M_{2k}(n)| \leq \left|n\left(\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right| \left|f^{\frac{1}{n}}(2k-1) - f^{\frac{1}{n}}(2k)\right|$$

$$+n\left|f^{\frac{1}{n}}(2k)\right| \left|\lambda_{2k-1}^{\frac{1}{n}} - \lambda_{2k}^{\frac{1}{n}}\right| + |\log \lambda_{2k} - \log \lambda_{2k-1}|$$
$$\leq L\left|\log \lambda_{2k-1}\right| \frac{C}{|k|^{\mu}} + R\frac{EN}{|k|^{\mu}} + \frac{N}{|k|^{\mu}}$$
$$\leq \frac{L\overline{M}C}{|k|^{\mu}} + R\frac{EN}{|k|^{\mu}} + \frac{N}{|k|^{\mu}} = \frac{A}{|k|^{\mu}} + \frac{B}{|k|^{\mu}}$$

para todo n a partir de un cierto n_0.

En definitiva hemos obtenido que para todo $|k| \geq k_0$

$$\left|\sum_{|k|\geq k_0} \frac{2k(M_{2k-1}(n) - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)}\right| \leq \sum_{|k|\geq k_0} \frac{2\left|k\right|\left(A\left|k\right|^{\eta} + B\left|k\right|^{\mu}\right)}{|k|^{\mu+\eta}\left|(2k-1-t)(2k-t)\right|}.$$

Por lo tanto es convergente y, por el Teorema de la Convergencia Dominada junto con (3.15),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\geq k_0} \frac{2k(M_{2k-1(n)} - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0.$$

Además para el resto de la suma con $|k| < k_0$, por ser una suma finita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|<k_0} \frac{2k(M_{2k-1(n)} - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)}$$

$$= \sum_{|k|<k_0} \lim_{n\to\infty} \frac{2k(M_{2k-1(n)} - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0.$$

Así, se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2k(M_{2k-1(n)} - M_{2k}(n))}{(2k-1-t)(2k-t)} = 0.$$

Por lo tanto, por el resultado anterior junto con (3.17) y (3.18) podemos afirmar que la serie (3.16) es convergente y, tomando límite cuando n tiende a infinito en dicha expresión, se obtiene (3.13).

•

Las condiciones impuestas sobre f en la proposición anterior no son muy restrictivas. A continuación vamos a ver que, por ejemplo son verificadas por la función Gaussiana.

Observación 3.17 *La función Gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$ verifica la condiciones a) y b) de la proposición anterior. Es decir, es acotada y positiva en $\mathbb{Z}$ y existen $k_0 \in \mathbb{N}$ y $C, \mu > 0$ tales que $\left| g^{\frac{1}{n}}(2k+1) - g^{\frac{1}{n}} \right| < |k|^{\mu}$ para todo $|k| \geq k_0$ a partir de un cierto n_0 en adelante.*

Demostración: Obviamente se verifica la primera afirmación. En cuanto a la condición b), aplicando el Teorema del Valor Medio a la función exponencial en el intervalo $\left[-\frac{(2k+1)^2}{n}, -\frac{(2k)^2}{n}\right]$, se tiene que existe c perteneciente al intervalo anterior tal que

$$e^{-\frac{(2k)^2}{n}} - e^{-\frac{(2k+1)^2}{n}} = e^c \left(\frac{(2k+1)^2}{n} - \frac{(2k)^2}{n} \right) = e^c \frac{4k+1}{n}.$$

Tomando módulos

$$\left| e^{-\frac{(2k+1)^2}{n}} - e^{-\frac{(2k)^2}{n}} \right| = e^c \left| \frac{4k+1}{n} \right| \leq e^{-\frac{(2k)^2}{n}} \left| \frac{4k+1}{n} \right|$$

$$= \frac{\frac{(2k)^2}{n}}{e^{\frac{(2k)^2}{n}}} \frac{|4k+1|}{4k^2} \leq \frac{1}{e} \frac{|4k+1|}{4k^2}.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que existen $C > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $|k| \geq k_0$

$$\left| e^{-\frac{(2k+1)^2}{n}} - e^{-\frac{(2k)^2}{n}} \right| \leq \frac{C}{|k|}.$$

Así, tomando $\mu = 1$, se obtiene que efectivamente la función Gaussiana verifica la condición b).

•

Por lo tanto, usando conjuntamente la Proposición 3.16 y la observación anterior, obtenemos que si una sucesión λ cumple c) y d) entonces λ es compatible con la Gaussiana, es decir $\lambda \in \Lambda_g^*$.

En primer lugar nótese que la familia $\mathcal{S}$ coincide con las perturbaciones admisibles para la función unidad. Además en el presente capítulo nos hemos estado planteando bajo qué condiciones la función resultante de la perturbación es de la forma

$$\sigma_\lambda(t) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k^{sinc(t-k)}$$

y por supuesto se tenga que $\sigma_\lambda \in \mathcal{M}$, es decir, que la perturbación sea compatible con la función unidad. Recuérdese que, tal y como se vio en la Proposición 3.10, puede ser que una perturbación sea admisible pero no compatible con la función unidad (por ejemplo, $\lambda_k = e^{-k^2}$).

Así pues, dada una sucesión λ, para todos los resultados anteriores que nos aseguren que $\sigma_\lambda \in \mathcal{MP}$ nos sirven para poder afirmar que $\lambda \in \Lambda_u^*$.

Este problema se abordó de forma directa en el Capítulo 3, obteniendo que $\mathcal{L}^{\mathcal{A}} \subset *_\sqcap^*$, resultado que coincide con lo dicho en este capítulo para cualquier f. Además en aquel momento dimos algunos ejemplos de perturbaciones compatibles con la función unidad:

1) $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{sinc(x-k)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$;

2) $\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ e^{\frac{(-1)^k}{k}} & \text{si } k \neq 0; \end{cases}$

3) $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{\frac{(-1)^k}{1+k^2}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}};$

4) $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{(-1)^k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$

Sin embargo, conviene puntualizar que otros resultados anteriores se pueden aplicar al caso que nos ocupa. Obsérvese que, dada $\lambda \in \Lambda$ se verifica que $\sigma_\lambda \in \mathcal{M}$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k^{\frac{1}{n}} sinc(t-k) - 1 \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k).$$

Es decir, $\sigma \in \mathcal{M}$ si y sólo si se cumple la condición F2) con límite $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \log \lambda_k sinc(t-k)$.

Pues bien, podemos afirmar que

Proposición 3.18 *Sea λ una sucesión simétrica de términos positivos tal que la sucesión $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=2}^{\infty}$ dada por $\alpha_k = \frac{\log \lambda_k}{\log k}$ está acotada superior e inferiormente. Entonces $\sigma_\lambda \in \mathcal{M}$. Es decir, λ es una perturbación compatible con la función unidad.*

Los resultados de esta sección se resumen, en términos de los conjuntos de sucesiones definidos en la sección anterior, como sigue a continuación:

1) Por el Teorema 3.13: para toda $f \in \mathcal{MP}$

$$\Lambda_f^* = \{\lambda \in \Lambda; \lambda \text{ verifica D)}\}.$$

2) Por la Proposción 3.14: para toda $f \in \mathcal{MP}$ tal que f es de la forma producto σ_β se cumple que

$$\left\{ \lambda \in \Lambda; \{\lambda_k f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ simétrica y } \left\{ \frac{\log(\lambda_k f(k))}{\log k} \right\}_{k=2}^{\infty} \text{ acotada} \right\} \subseteq \Lambda_f^*.$$

3) Por la Proposición 3.15:

$$f \in \mathcal{MP}^A, \lambda \in \mathcal{L}^A \Longrightarrow f\sigma_f \in \mathcal{MP}^A.$$

Además el recíproco es falso (tómese, por ejemplo, $f(t) = 1$ y $\lambda_k = e^{(-1)^k}$). Por lo tanto, para toda función $f \in \mathcal{MP}^{\mathcal{A}}$ se verifica que

$$\mathcal{L}^A \subset \Lambda_f^* \subseteq \Lambda_f^*. \tag{2.19}$$

Además sabemos que el primer contenido es estricto ya que, por ejemplo, las sucesiones constantes distintas de la unidad pertenecen a Λ_f^* para toda $f \in \mathcal{MP}$ pero no pertenecen a $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}$.

Así, podemos afirmar que

$$\mathcal{L}^A \subset \bigcap_{f \in \mathcal{MP}^{\mathcal{A}}} \Lambda_f^*.$$

4) Por la Proposición 3.16: para toda función $f \in \mathcal{MP}^{\mathcal{A}}$ tal que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y existen $C, \mu > 0$ tales que

$$\left| f^{\frac{1}{n}}(2k+1) - f^{\frac{1}{n}}(2k) \right| < \frac{C}{|k|^\mu}$$

para todo $|k| \geq k_0$ y para todo n a partir de un cierto n_0, se verifica que

$$\{\lambda \in \Lambda; \lambda \text{ acotada y que existen } N, \mu > 0 \text{ tales que}$$

$$|\log \lambda_{2k+1} - \log \lambda_{2k}| < \frac{N}{|k|^\eta} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \Lambda_f^*.$$

Para finalizar, como por definición $\widetilde{\Lambda}_f = \Lambda_f^* \cap \Lambda_0$, todos los resultados anteriores acerca de perturbaciones compatibles intersecándolos con Λ_0 son válidos también para perturbaciones estables. Por ejemplo, a partir de (3.19) podemos afirmar que para toda $f \in \mathcal{MP}^{\mathcal{A}}$

$$\mathcal{L}^A \cap \Lambda_0 \subset \Lambda_f^{*A} \cap \Lambda \subseteq \widetilde{\Lambda}_f.$$

Es decir

$$\mathcal{L}^A \cap \Lambda_0 \subset \bigcap_{f \in \mathcal{MP}^A} \widetilde{\Lambda}_f.$$

Bibliografía

[AC2001] L. Agud, R.G. Catalán, *New Shannon's sampling recomposition,* Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, **56**, (2001), 45-48.

[Bo1897] E. Borel, *Sur l'interpolation,* C. R. Acad. Sci. Paris **124**, (1897), 673-676.

[Bo1899] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes,* Ann. Ecole Norm. Sup., (3), **76**, (1899), 9-131.

[Bo1905] E. Borel, *La divergence de la formule de Lagrange a été établie également,* Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, Gauthier-Villars, Paris, (1905), 74-79.

[Br1915] T.A. Brown, *Fourier's integral,* Proc. Edinburg Math. Soc., **34**, (1915-1916), 3-10.

[Br1924] T.A. Brown, *On a class of factorial series,* Proc. London Math. Soc. (2), **23**, (1924), 149-171.

[Bro1967] J.L. Brown Jr., *On the error in reconstructing a non-bandlimi-ted function by means of the bandpass sampling theorem,* Jour. Math. Anal. Appl., **18**, (1967), 75-84. Erratum, **21**, (1968), 699.

[Bu1981] P.L. Butzer, *The Shannon sampling theorem and some of its generalizations. An overview,* Constructive Functions Theory (Proc. Conf., Varna, Bulgaria, June 1-5, 1981; Bl. Sendov et al., eds.), Publishing House Bulgarian Acad. Sci., Sofia, (1983), 258-274.

[Bu1983] P.L. Butzer, *A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions,* J. Math. Res. Exposition, **3**, (1983), 185-212.

[BuERS1986] P.L. Butzer, W. Engels, S. Ries, R.L. Stens, *The Shannon sampling series and the reconstruction of signals in terms of linear, quadratic and cubic splines,* SIAM J. Appl. Math., **46**, (1986), 229-323.

[BuS1985] P.L. Butzer, R.L. Stens, *A modification of the Whittaker-Kotel'ni-kov-Shannon sampling series,* Aequationés Math., **28**, 4, (1985), 305-311.

[BuS1992] P.L. Butzer, R.L. Stens, *Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview,* SIAM review, **34**, 4, (1992), 40-53.

[BuSp1977] P.L. Butzer, W. Splettstößer, *A sampling theorem for duration-limited functions with error estimates,* Inform. and Control, **34**, (1977), 55-65.

[BuSp1990] P.L. Butzer, W. Splettstößer, *Index of papers on signal theory 1972-1989,* Lehrstuhl A für Mathematik, Aachen University of Technology, Aachen, Germany, (1990).

[BuSpS1988] P.L. Butzer, W. Splettstößer, R.L. Stens *The sampling theorem and linear prediction in signal analysis,* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, **90**, (1988), 1-70.

[Car1936] M.L. Cartwright, *On certain integral functions of order one,* Quart. J. Math. Oxford Ser., **7**, (1936), 46-55.

[EStV1987] W. Engels, E.L. Stark, L. Vogt, *Optimal kernels for a general sampling theorem,* J. Approx. Theory, **50**, (1987), 69-83.

[F1925] W.L. Ferrar, *On the cardinal function of interpolation-theory,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **45**, (1925), 269-282.

[F1926] W.L. Ferrar, *On the cardinal function of interpolation-theory,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **46**, (1926), 323-333.

[F1927] W.L. Ferrar, *On the consistency of cardinal function interpolation,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **47**, (1927), 230-242.

[G2000] A.G. García, *Orthogonal sampling theorems: a unified approach,* SIAM. Rev., **42**, (2000), 499-512.

[G2002] A.G. García, *A brief walk through sampling theory,* Advances in Imaging and Electron Physics., **124**, (2002), 63-137.

[GeRaSc1978] R. Gervais, Q.I. Rahman, G. Schmeisser, *Simultaneous interpolation and approximation by entire functions of exponential type,* Numerische Methoden der Approximation-theorie, Bd. 4 (Proc. Conf., Math.

Res. Inst. Oberwolfach, Black Forest, November 13-19, 1977; L. Collatz, G. Meinardus and H. Werer, eds.) ISNM 42, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, (1978), 145-153.

[Ha1901] J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique,* Scientia, **12**, (1901), 1-100.

[Ha1918] H. Hahn, *Über das interpolationproblem,* Math. Z., **1**, (1918), 115-142.

[Har1941] G.H. Hardy, *Notes on special systems of orthogonal functions IV. The orthogonal functions of Whittaker's cardinal series,* Proc. Cambridge Philos. Soc., **37**, (1941), 331-348.

[Hat1928] R.V.L. Hartley, *The transmission of information,* Bell System Tech. J., **7**, (1928), 535-560.

[Hi1985] J.R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series,* Bull. Amer. Math. Soc., **12**, (1985), 45-89.

[J1977] A.J. Jerri, *The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications: a tutorial review,* Proc. IEEE, **65**, (1977), 1565-1596.

[J1986] A.J. Jerri, *The sampling expansion - a detailled bibliography,* Monograph, Clarkson University, (1986).

[K1973] S. Karlin, *To I. J. Schoenberg and his mathematics,* J. Approx. Theory, **8**, (1973), 6-15.

[Ko1933] V.A. Kotel'nikov, *On the carrying capacity of the "ether.[a]nd wire in telecommunications*, Matherial for the First All-Union Conference on Questions of Communications, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moskow, Russian, (1933).

[Lu1978] H.D. Lüke, *Zur entstehung des abtasttheorems*, Nachr. Techn. Z., **31**, (1978), 271-274.

[Ma1991] R.J. Marks II, *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*, Springer-Verlag, New York, (1991).

[Ma1992] R.J. Marks II, *Advanced topics on Shannon sampling and interpolation theory*, Springer-Verlag, New York, (1992).

[Mac1938] A.J. Macintyre, *Laplace's transformation and integral functions*, Proc. London Math. Soc., **45**,(1938), 1-20.

[MarJa1986] F. Marvasti, A.K. Jain, *Zero crossings bandwidth compression, and restoration of nonlinearly distorted bandlimited signals*, J. Optical Soc. Amer., **3**, (1986), 651-654.

[McSteW1971] J. McNamee, F. Stenger, E.L. Whitney, *Whittaker's cardinal function in retrospect*, Math. of Comp., **25**, (1971), 141-154.

[Mi1960] D. Middleton, *An introduction to statistical communication theory,* McGraw-Hill, New York, 1960.

[Ny1928] H. Nyquist, *Certain topics in telegraph transmission theory*, Trans. Amer. Inst. Elec. Engrg., **47**, (1928), 617-644.

[O1920] K. Ogura, *On a certain transcendental integral function in the theory of interpolation*, Tôhoku Math. J., **17**, (1920), 64-72.

[P1961] H.O. Pollak, *Energy distribution of band-limited functions whose samples on a half line vanish*, J. Math. Anal. Appl., **2**, (1961), 299-322.

[Po1931] G. Pólya, *Aufgabe 105*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, **40**, (1931), 80.

[RS1984] S. Ries, R.L. Stens, *Approximation by generalized sampling series,* Proc. Internat. Conf. Constructive Theory of Functions, Varna, Bulgaria, June 1984, Bulgarian Acad. Sci., Sofia, (1984), 746-756.

[RS1987] S. Ries, R.L. Stens, *A localization principle for the approximation by sampling series* Proc. Internat. Conf. Theory of Approximation of Functions, (Proc. Conf., Kiev, May 30-June 6,1983; N.P. Korneĭchuk et al., eds.) Izdat. Nauka, Moscow, (1987), 507-509.

[S1980a] R.L. Stens, *Approximation of duration-limited functions by sampling sums,* Signal Process., **2**, (1980), 173-176.

[S1983] R.L. Stens, *A unifed approach to sampling theorems for derivates and Hilbert transforms,* Signal Process., **5**, (1983), 139-151.

[S1984] R.L. Stens, *Approximation of functions by Whittaker's cardinal series,* General Inequalities **4** (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, Black Forest, May 8-14, 1983; W. Walter, ed.); ISNM **71**, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984), 137-149.

[Sc1946] I.J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A: On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae,* Quart. Appl. Math., (1946), 45-99.

[Sc1969] I.J. Schoenberg, *Cardinal interpolation and spline functions,* J. Approx. Theory, **2**, (1969), 167-206.

[Sh1948] C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication,* Bell System Tech. J., **27**, (1948), 379-423, 623-656.

[Sh1949] C.E. Shannon, *Communication in the presence of noise,* Proc. IRE, **137**, (1949), 10-21.

[Si1977] R.S. Singh, *Improvement on some known nonparametric uniformly consistent estimators of derivates of a density,* Ann. Statist., **5**, (1977), 349-399.

[Sp1977] W. Splettstößer, *Über die approximation stetiger funktionen durch die klassischen und durch neve abtastsummen mit fehlerabschät-zungen,* Ph. D., RWTH Aachen, Aachen Germany, (1977).

[Sp1979] W. Splettstößer, *Error estimates for sampling approximation of non-bandlimited functions,* Math. Methods Appl. Sci., **1**, (1979), 127-137.

[Sp1983] W. Splettstößer, *75 years aliasing error in the sampling theorem,* EUSIPCOM 83, Signal Processing: Theories and Applications (Proc. Second Signal Processing Conf., Erlangen, September 12-16, 1983, H. W. Shüssler, ed), North-Holland, Amsterdam, (1983), 1-4.

[SpSWi1981] W. Splettstößer, R.L. Stens, G. Wilmes, *On approximation by the interpolation series of G. Valiron,* Funct. Approx. Comment. Math., **11**, (1981), 39-56.

[Stf1914] J.F. Steffensen, *Über eine klasse von ganzen funktionen and ihre anwendung auf die zahlentheorie,* Acta Math., **37**, (1914), 75-112.

[Ste1981] F. Stenger, *Numerical methods based on Whittaker cardinal or sinc functions,* SIAM Rev., **23**, (1981), 165-224.

[Th1919] M. Theis, *Über eine interpolationsformel von de la Vallée Poussin,* Math. Z., **3**, (1919), 93-113.

[Ts1933] L. Tschakaloff, *Zweite losung der aufgabe 105,* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, **43**, (1933), 11-12.

[Va1908] Ch.-J de la Vallée Poussin, *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes,* Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., **4**, (1908), 319-410.

[We1963] P. Weiss, *An estimate of the error arising from misapplication of the sampling theorem,* Notices Amer. Math. Soc., **10**, (1963), 351.

[Whi1915] E.T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **35**, (1915), 181-194.

[Whit1927] J.M. Whittaker, *On the cardinal function of interpolation theory*, Proc. Edinburg Math. Soc., **1**, 41-46, (1929a).

[Whit1929] J.M. Whittaker, *The "Fourier"theory of the cardinal function*, Proc. Edinburg Math. Soc., **1**, (1929b), 169-176.

[Whit1935] J.M. Whittaker, *Interpolatory function theory* , University of Cambridge Press, Cambridge, London, (1935).

[Z1993] A.I. Zayed, *Advances in Shannon's Sampling Theory,* Ed. CRC Press, (1993).

[Z1996] A.I. Zayed, *Sampling in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc., **124**, (1996), 3767-3776.

[Zi1959] A. Zygmund *Trigonometric series,* Vol. II, 2ª ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1959).