

# Capítulo 4

## Modelo numérico

### 4.1 Introducción

En este capítulo se dará una pequeña aproximación a la disciplina conocida como Mecánica de Fluidos Computacional, en inglés CFD (Computational Fluid Dynamics), y se continuará describiendo el método de volúmenes finitos utilizado en este trabajo y el código de propósito general PHOENICS para la resolución de los problemas propuestos a lo largo de este trabajo.

En las siguientes líneas se hará un acercamiento a las distintas vías de estudio de los problemas de flujo de fluidos y transmisión de calor, posteriormente nos introduciremos en el estudio de la Mecánica de Fluidos Computacional con la formulación general de los métodos de discretización a partir del método de residuos ponderados. Tras esto, estaremos en condiciones de abordar el método de los volúmenes finitos en la siguiente sección.

El estudio de problemas de flujo de fluidos y transmisión de calor se puede abordar de dos formas distintas y frecuentemente complementarias:

- Investigación experimental
- Desarrollo teórico
  - Métodos analíticos
  - Métodos numéricos

#### INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

Es la forma más directa de obtener información sobre un proceso físico consiste en la toma de medidas de los distintos parámetros que definen el proceso. Complementariamente, pueden utilizarse técnicas de análisis dimensional y leyes de semejanza física para extrapolar resultados de unos problemas a otros. Pero estas técnicas no suministran resultados del todo satisfactorios cuando sólo se consigue semejanza física parcial. Se debe señalar que existen grandes dificultades (problemas de escala muy pequeña), y que los aparatos de medida siempre tienen errores.

#### DESARROLLO TEÓRICO

El primer paso para realizar una predicción teórica es establecer un modelo matemático que describa el proceso físico en estudio, de igual forma a como se ha hecho en el anterior apartado. Este modelo suele consistir, como hemos podido comprobar, en una serie de ecuaciones diferenciales, a menudo en derivadas parciales y fuertemente acopladas, con unas condiciones iniciales y de contorno. Sólo una pequeña proporción de los problemas prácticos se pueden resolver analíticamente con la suficiente aproximación.

El desarrollo de los métodos numéricos y el aumento progresivo de la capacidad de los ordenadores permiten resolver los modelos matemáticos en un gran número de problemas, cada vez más complejos. Estos métodos numéricos discretizan las ecuaciones diferenciales, o ecuaciones en derivadas parciales, en una malla de cálculo adaptada al dominio de interés, y se convierten en ecuaciones algebraicas. La solución de estas ecuaciones algebraicas para un número finito de localizaciones o nodos de la malla conduce a la solución numérica del problema. La resolución de estas ecuaciones algebraicas es mucho más sencilla que las ecuaciones diferenciales, por lo que los métodos numéricos se presentan como una potente herramienta, relativamente fácil de aplicar.

#### VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LA MODELIZACIÓN NUMÉRICA

Entre las ventajas se pueden citar las siguientes:

- Velocidad de cálculo. Pueden estudiarse configuraciones y variaciones distintas de un mismo problema con un tiempo de cálculo relativamente corto.
- Bajo coste. Es la principal ventaja sobre los métodos experimentales, un ordenador suele ser más barato que el equipamiento experimental necesario.
- Abundante información. La solución de los problemas por ordenador ofrece una información completa y detallada. Pueden obtenerse distribuciones de propiedades sobre el dominio de interés, mientras que en experimentación sólo es posible en unos pocos puntos.
- Facilidad de simulación. En una modelización numérica, las condiciones reales se simulan de una forma sencilla, así pueden simularse problemas complejos que en experimentación conllevarían una enorme simplificación para obtener resultados fiables.

Los inconvenientes de la modelización numérica se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Problemas en los que existe una adecuada descripción matemática (por ejemplo, en problemas de conducción pura de calor o capas límite sencillas). Los inconvenientes son:
  - o La existencia de errores de discretización y redondeo en la solución.
  - o Los problemas de establecimiento de las condiciones iniciales y de contorno (dificultad de aproximar una condición física a una condición numérica).
  - o Los costos computacionales, a veces del mismo orden que los costes experimentales en geometrías complejas.
- Problemas para los que no se ha desarrollado un modelo matemático fiable (por ejemplo, en flujos turbulentos complejos, flujos bifásicos, fluidos no newtonianos, etc.).
  - o Las mismas desventajas que antes junto con la posibilidad de estar simulando un problema que no ocurre en la realidad. En estos casos la comparación de estos resultados computacionales con unos experimentales del mismo problema o al menos de un problema semejante es determinante para validar o no la solución numérica.

Pasamos ahora a hablar de los métodos de discretización de las ecuaciones definidas en el modelo matemático. Se hará desde una formulación general, basándonos en el método de los residuos ponderados, demostrando a su vez que cada uno de los métodos de discretización más extendidos en la actualidad pueden considerarse casos particulares de este.

## 4.2 Método de los residuos ponderados

Uno de los aspectos más importantes del método de los residuos ponderados consiste en que se puede llegar a una formulación general de los métodos de discretización. La diferencia conceptual con el método de las diferencias finitas estriba en que se supone que la solución puede ser representada analíticamente a través de una cierta función. En diferencias finitas, cuya filosofía se basaba en aproximar las derivadas existentes en el modelo matemático mediante el truncamiento de series de Taylor, la solución se obtiene sólo en los puntos nodales de la malla.

Por ejemplo, supongamos que se quiere obtener la solución de la ecuación de la transmisión del calor por conducción unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

y para ello se propone la siguiente función

$$T = \sum_{j=1}^J a_j(t) \phi_j(x) \quad (4.2)$$

esta es la solución aproximada, siendo  $a_j(t)$  coeficientes desconocidos y  $\Phi_j(x)$  funciones analíticas conocidas. Si se pretende que la solución aproximada describa el comportamiento analítico de la solución de la ecuación, se introduce un error salvo que  $J$  sea arbitrariamente grande.

El objetivo de establecer una formulación general es mostrar las relaciones existentes entre los diversos métodos de discretización, algunos de los cuales parecen ser muy diferentes entre sí. La formulación general mediante residuos ponderados nos permitirá relacionar métodos tales como el método de los elementos finitos, los métodos espectrales, el método de los volúmenes finitos y el método de diferencias finitas.

Volvamos de nuevo a la ecuación de transmisión de calor por conducción, aunque ahora para el caso tridimensional; la solución aproximada debe ser de la forma

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t) + \sum_{j=1}^J a_j(t) \phi_j(x, y, z) \quad (4.3)$$

de manera que  $T_0(x, y, z, t)$  se elige para satisfacer las condiciones iniciales y de contorno (si es posible, de forma exacta). Las funciones de aproximación  $\Phi_j(x, y, z)$  son conocidas; por ejemplo, en problemas unidimensionales en el espacio pueden ser polinomios o funciones trigonométricas, tales como

$$\phi_j(x) = x^{j-1}, \quad \phi_j(x) = \text{sen}(j\pi x) \quad (4.4)$$

Los coeficientes  $a_j(t)$ , dependientes sólo del tiempo, se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones que se genera a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema. En problemas estacionarios, el sistema resultante es de ecuaciones algebraicas, puesto que los coeficientes son constantes. En problemas transitorios, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo.

Supóngase ahora que la ecuación de conservación para el problema en estudio puede ponerse en la forma

$$L(\bar{T}) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.5)$$

en la que la barra sobre la variable denota la solución exacta. Si la solución aproximada (4.3) se sustituye en (4.5), se obtendrá un residuo o error  $R$ ,

$$L(T) = R \quad (4.6)$$

siendo este residuo una función continua de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ .

Si  $J$  se hace lo suficientemente grande, en principio los coeficientes  $a_j(t)$  pueden elegirse de modo que  $R$  sea pequeño en el dominio de cálculo. Estos coeficientes se determinan igualando a cero la integral ponderada del residuo  $R$  sobre el dominio de cálculo,

$$\iiint W_m(x, y, z) R dx dy dz = 0 \quad (4.7)$$

Donde  $W_m$  es la función de pesado o ponderación. Haciendo  $m = 1, \dots, M$ , se van obteniendo diferentes ecuaciones que conforman un sistema para los coeficientes  $a_j$ .

La elección de diferentes tipos de funciones de pesado es lo que da lugar a los diferentes métodos de residuos ponderados, que se pueden agrupar en los siguientes:

- Método de los subdominios
- Método de colocación
- Método de mínimos cuadrados
- Método de Galerkin

El método de los volúmenes finitos puede considerarse como un caso particular del método de los subdominios. Al método de diferencias finitas se puede llegar a partir del método de colocación, mientras que al método de elementos finitos puede llegarse desde los métodos de mínimos cuadrados y de Galerkin. Por último, los métodos espectrales aparecen a partir de los métodos de colocación (pseudoespectral) y de Galerkin.

No trataremos todos estos métodos de una forma detenida, ya que esto se saldría de los límites de este proyecto, pero si estudiaremos brevemente el método de los subdominios del cual deriva el método de los volúmenes finitos como se ha señalado anteriormente, método que es adoptado para discretizar el campo fluido por el código PHOENICS.

#### MÉTODO DE LOS SUBDOMINIOS

En este método, el dominio de cálculo se divide en  $M$  subdominios  $D_m$  que pueden solaparse entre sí. La función de pesado o ponderación  $W_m = 1$  en el interior de cada dominio  $D_m$  e igual a cero fuera del dominio. Las ecuaciones que definen  $W_m$  y la integración ponderada del residuo en el dominio de cálculo deben asegurar las condiciones de conservación en la ecuación discretizada.

Este método aporta considerables ventajas para obtener soluciones con gran precisión en flujos internos o en flujos con ondas de choque, por ejemplo.

A partir de este método se desarrollará el método de los volúmenes finitos, método especialmente desarrollado en mecánica de fluidos computacional.

### 4.3 Método de los volúmenes finitos

En esta sección se tratará de forma individual al método de los volúmenes finitos. Como ya mencionamos en el anterior apartado, este método se puede entender como un caso particular del método de los subdominios con la diferencia principal de que no se introduce explícitamente una solución aproximada del tipo  $\Phi = \Phi_0 + \Sigma \dots$

En líneas generales el método consiste en dividir el dominio de cálculo en un número finito de volúmenes de control no solapados, de forma que cada nodo de la malla esté rodeado

por uno de estos volúmenes de control. La ecuación diferencial se integra sobre cada volumen de control. Para expresar la variación de la variable dependiente en las caras de los volúmenes de control y resolver las integrales, se elige una función local lineal. El resultado de la integración es la ecuación discretizada con los valores de  $\Phi$  para los nodos de la malla.

La principal ventaja de este método con respecto al de diferencias finitas se basa en que la solución obtenida asegura implícitamente que magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento y la energía se conservan para cualquier grupo de volúmenes de control, y por supuesto, para todo el dominio del problema. Incluso si la malla es basta, se cumplen los balances exactamente.

Cuando las ecuaciones discretizadas se resuelven para obtener los valores de la variable dependiente en los nodos de la red, el resultado admite dos enfoques. En el método de los elementos finitos, y en la mayor parte de los métodos de residuos ponderados, la variación supuesta para la variable dependiente (compuesta por los valores en los nodos y las funciones de interpolación entre estos) se toma como la solución aproximada. En cambio, en los métodos de diferencias finitas, se considera como solución tan sólo los valores de la variable dependiente en los nodos de la malla, sin hacer referencia a los valores de esta variable entre los distintos nodos. En el método de los volúmenes finitos también se adopta este enfoque. Las fórmulas de interpolación sólo se toman como funciones auxiliares necesarias para evaluar las integrales aparecidas en la formulación. Por tanto, una vez que se ha obtenido la ecuación discretizada, puede prescindirse de la función de interpolación impuesta.

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de este método en la discretización de una ecuación en derivadas primeras. Las ecuaciones encontradas en la mecánica de fluidos pueden ser más complejas pero este ejemplo es lo suficientemente descriptivo.

### 4.3.1 Ecuaciones con derivadas primeras

Supóngase que se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = 0 \quad (4.8)$$

En esta ecuación, si  $\bar{q} = \bar{\rho}$ ,  $\bar{F} = \bar{\rho}u$  y  $\bar{G} = \bar{\rho}v$ , se obtiene la ecuación de continuidad en forma bidimensional.

Vamos a aplicar el método de los subdominios para la discretización de la ecuación anterior. Se parte de la ecuación que proporciona la solución exacta; se utilizará el dominio que aparece en la Figura 4.1, integrando obtendremos

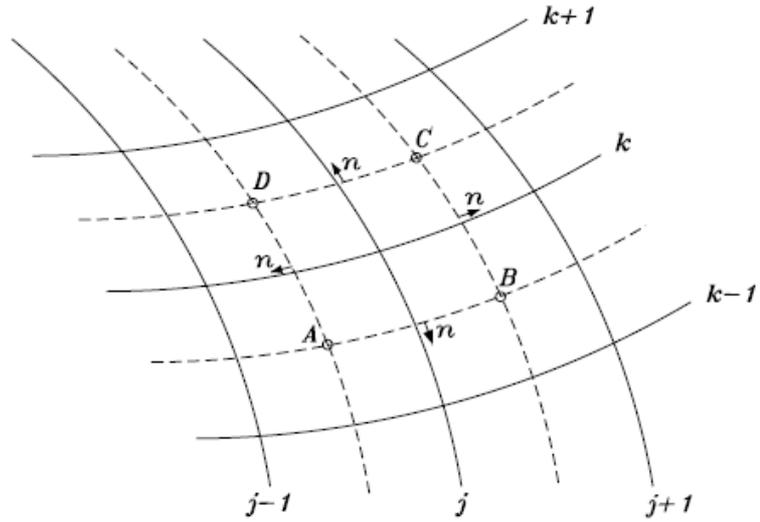


Figura 4.1. Dominio de aplicación del método de los volúmenes finitos.

$$\int_{ABCD} \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (4.9)$$

o bien aplicando el teorema de Green,

$$\frac{d}{dt} \int \bar{q} dV + \int_{ABCD} \vec{H} \cdot \vec{n} ds, \quad (4.10)$$

siendo  $ds$  el elemento diferencial de línea, y  $\vec{H}$  función en general de  $\bar{F}$  y  $\bar{G}$ . Obsérvese que la función de pesado elegida es la unidad. En coordenadas cartesianas,

$$\vec{H} \cdot \vec{n} ds = \bar{F} dy - \bar{G} dx. \quad (4.11)$$

Las Ecuaciones (4.9) y (4.10) expresan una condición de conservación (por ejemplo, de conservación de la masa). Mientras que el método de diferencias finitas discretiza las ecuaciones en forma diferencial, el método de volúmenes finitos lo hace en forma integral. La evaluación aproximada de la Ecuación (4.9) puede ponerse por

$$\frac{d}{dt} (A q_{j,k}) + \sum_{AB} \frac{DA}{AB} (F \Delta y - G \Delta x) = 0 \quad (4.12)$$

siendo  $A$  el área del cuadrilátero  $ABCD$ . Como incrementos en  $x$  y en  $y$  a lo largo del lado  $AB$  del cuadrilátero pueden tomarse los siguientes:

$$\Delta y_{AB} = y_B - y_A, \quad \Delta x_{AB} = x_B - x_A, \quad (4.13)$$

y como valores de las variables  $F$  y  $G$  sobre el mismo lado,

$$F_{AB} = \frac{1}{2} (F_{j,k-1} + F_{j,k}), \quad G_{AB} = \frac{1}{2} (G_{j,k-1} + G_{j,k}), \quad (4.14)$$

y del mismo modo se efectuaría con los restantes lados del cuadrilátero.

Si  $A$  no fuera función del tiempo, entonces la ecuación discretizada quedaría del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & A \frac{dq_{j,k}}{dt} + \frac{1}{2}(F_{j,k-1} + F_{j,k})\Delta y_{AB} - \frac{1}{2}(G_{j,k-1} + G_{j,k})\Delta x_{AB} \\
 & + \frac{1}{2}(F_{j,k} + F_{j+1,k})\Delta y_{BC} - \frac{1}{2}(G_{j,k} + G_{j+1,k})\Delta x_{BC} \\
 & + \frac{1}{2}(F_{j,k} + F_{j,k+1})\Delta y_{CD} - \frac{1}{2}(G_{j,k} + G_{j,k+1})\Delta x_{CD} \\
 & + \frac{1}{2}(F_{j-1,k} + F_{j,k})\Delta y_{DA} - \frac{1}{2}(G_{j-1,k} + G_{j,k})\Delta x_{DA} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Se ha obtenido entonces una ecuación en volúmenes finitos. Si la malla  $(j,k)$  es irregular, esta ecuación proporciona una discretización en coordenadas cartesianas, sin necesidad de introducir coordenadas generalizadas. Si la malla es uniforme, y las direcciones  $j$  y  $k$  coinciden con las  $x$  e  $y$ , la ecuación anterior se puede poner

$$\begin{aligned}
 & \Delta x \Delta y \frac{dq_{j,k}}{dt} - \frac{1}{2}(G_{j,k-1} + G_{j,k})\Delta x + \frac{1}{2}(F_{j,k} + F_{j+1,k})\Delta y \\
 & + \frac{1}{2}(G_{j,k} + G_{j,k+1})\Delta x - \frac{1}{2}(F_{j-1,k} + F_{j,k})\Delta y = 0,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

o bien de forma más compacta

$$\frac{d}{dt} q_{j,k} + \frac{F_{j+1,k} - F_{j-1,k}}{2\Delta x} + \frac{G_{j,k+1} - G_{j,k-1}}{2\Delta y} = 0, \tag{4.17}$$

expresión que coincide con la representación en diferencias centrales de los términos espaciales.

El método permite además la discretización de dominios de cálculo relativamente complicados.

Cuando nos enfrentamos a una ecuación con derivadas de mayor orden el procedimiento es análogo al descrito en esta sección.

### 4.3.2 Técnicas de discretización

Teóricamente, la solución numérica del problema de interés debe coincidir con la solución exacta si el procedimiento numérico elegido es correcto y el número de nodos de la malla es infinito. En la práctica, sólo es posible trabajar con mallas finitas, con un número de nodos relativamente pequeño. Para que el procedimiento numérico proporcione una solución próxima a la real, es preciso que la técnica de discretización (o interpolación) elegida tenga una serie de propiedades. Estas propiedades fueron enunciadas por Patankar (1980) y se muestran a continuación:

- Consistencia en las caras de los volúmenes de control: Cuando una cara es común a dos volúmenes de control adyacentes, el flujo a través de la misma debe representarse mediante la misma expresión para los dos volúmenes de control. Evidentemente, el flujo de calor que sale de un volumen de control, por ejemplo, a través de una determinada cara debe ser el mismo que el flujo que entra en el volumen de control adyacente a través de la misma cara.
- Coefficientes positivos: En la mayoría de los problemas de interés, el valor de la variable dependiente en un punto de la malla esta influenciado por los valores en los puntos adyacentes debido a los procesos de convección y de difusión. La ecuación (4.18) representa una ecuación discretizada en forma general.

$$a_p \phi_p = \sum a_{ady} \phi_{ady} + b_p \tag{4.18}$$

es decir, el valor de la variable dependiente  $\Phi$  en el nodo  $P$ ,  $\Phi_P$ , multiplicado por el coeficiente correspondiente,  $a_P$ , es igual a la suma de los valores de las variables en los nodos adyacentes,  $\Phi_{ady}$ , multiplicados por sus correspondientes coeficientes,  $a_{ady}$ , más la posible fuente o sumidero que pueda existir en el nodo en cuestión,  $b_p$ . Se puede deducir de lo dicho anteriormente que un incremento de la propiedad en el nodo adyacente debe producir un incremento en el nodo en estudio, por lo que los coeficientes de los nodos en cuestión deben ser del mismo signo.

- Linealización del término fuente con pendiente negativa: Supóngase que se desea linealizar la ecuación de conducción pura de calor para un problema unidimensional y estacionario,

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.19)$$

donde  $S$  es el término fuente que recoge, si existe, la generación de calor por unidad de tiempo y volumen. Si integramos y discretizamos esta ecuación en el volumen de control de la Figura 4.2, de dimensiones  $(\Delta x) \times 1 \times 1$ , cuyo nodo central es  $P$ , y los adyacentes en la dirección  $x$  son  $W$  y  $E$ .

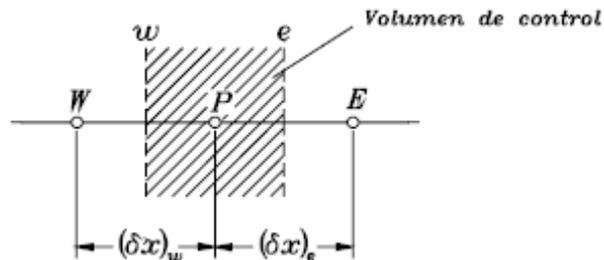


Figura 4.2. Esquema de tres puntos nodales adyacentes para un problema unidimensional.

Tras integrar y discretizar la ecuación (4.19), ordenamos los términos llegando a la expresión (4.20):

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + b_p \quad (4.20)$$

donde

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, \quad a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, \quad a_p = a_E + a_w - S_p \Delta x, \quad b_p = S_c \Delta x. \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta que el término fuente suele tratarse en forma linealizada,

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p, \quad (4.22)$$

se puede observar en la expresión (4.21) que el coeficiente  $a_p$  puede llegar a ser negativo, aunque los coeficientes circundantes sean positivos. Este inconveniente puede solucionarse haciendo que  $S_p$  (ecuación (4.22)) sea siempre negativo.

- Suma de los coeficientes adyacentes.: A menudo, la ecuación de conservación contiene sólo las derivadas de la variable dependiente. Entonces, las dos funciones  $\Phi$  y  $\Phi+C$ , siendo  $C$  una constante arbitraria, satisfacen la ecuación diferencial. Esta propiedad de la ecuación diferencial debe reflejarse también en la ecuación discretizada, que según esto, debe ser válida si se suma a los coeficientes  $a_E$  y  $a_W$  una misma constante  $C$ . Como se

deduce de la ecuación discretizada cuando no existe término fuente, expresión (4.18), debe cumplirse que el coeficiente  $a_P$  sea igual a la suma de los coeficientes  $a_{ady}$  para cumplir lo anterior.

Posteriormente Versteeg & Malalasekera (1995) volvieron a enunciar las propiedades que una técnica de discretización debe cumplir para que esta arroje soluciones lo más cercanas a la realidad posible. Estos autores enunciaron tres propiedades: ‘*conservativeness*’, ‘*boundedness*’ y ‘*transportiveness*’. Las dos primeras recogen de forma explícita o implícita las propiedades dadas por Patankar (1980), pero la última de ellas llega algo más lejos en el análisis de estas técnicas y es necesario tratarla con más detalle, para la posterior comprensión de las ventajas e inconvenientes de cada uno de las técnicas de discretización utilizadas en la actualidad y que describiremos seguidamente.

- Capacidad de identificación del sentido de flujo (*transportiveness*): Esta propiedad consiste en la capacidad del esquema numérico de identificar el sentido en el que tiene lugar el flujo, con el fin de poder alterar el esquema de interpolación según el flujo se mueva en un sentido o en otro.

La propiedad de la capacidad de un esquema numérico para identificar el sentido del flujo de una corriente fluida (Roache, 1976) se puede ilustrar considerando una fuente constante de  $\Phi$  en el punto P como se muestra en la Figura 4.3.

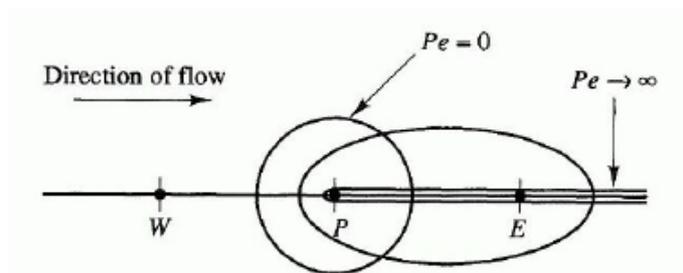


Figura 4.3. Distribución de  $\Phi$  en las proximidades de la fuente para distintos valores de  $Pe$ .

Se define el número de Peclet en el volumen de control como una medida de las fuerzas relativas de convección y difusión (4.23), donde  $\Gamma_\phi$  es el coeficiente de intercambio por difusión de la propiedad fluida  $\Phi$  y  $\delta x$  es una longitud característica (anchura de la celda). Si el problema está gobernado por un número de Peclet que tiende a cero tendremos un problema de difusión pura, en cambio si el problema presenta un Peclet muy grande (en valor absoluto, dependiendo del sentido del flujo) estaremos ante un problema gobernado por la convección.

$$Pe = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma_\phi} \quad (4.23)$$

En el caso de difusión pura el fluido se queda sin flujo de convección, es decir, sin movimiento ( $0 = Pe$ ) y los contornos de la constante  $\Phi$  serán círculos concéntricos con P en el centro ya que el proceso de difusión tiende a difundir  $\Phi$  equitativamente en todas las direcciones. Las condiciones en el nodo este E estarán influenciadas por aquellas otras aguas arriba en el nodo P y además por las condiciones más aguas abajo. A medida que aumenta los contornos cambian su forma de circular a elíptica y lo hacen en la dirección del flujo como se indica en la Figura 4.3. La influencia se incrementa tímidamente en dirección aguas arriba a elevados valores de  $Pe$  para que el nodo E quede fuertemente influenciado por las condiciones en P, mientras que las condiciones en P experimentarán

una débil o nula influencia procedente de  $E$ . En el caso de convección pura ( $Pe \rightarrow \infty$ ) los contornos elípticos están completamente extendidos en la dirección del flujo. La totalidad de la propiedad que procede de la fuente en  $P$  se transporta inmediatamente aguas abajo hacia  $E$ . De este modo el valor de  $\Phi$  en  $E$  se ve afectado solamente por las condiciones aguas arriba y puesto que allí no existe difusión  $\Phi_P$  es igual a  $\Phi_E$ . Para que un esquema de interpolación sea fiable, es importante que cumpla con la *capacidad de identificación del sentido del flujo* ('*transportiveness*'), se confirme en el esquema de discretización.

#### TIPOS DE ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN

Entre los esquemas de discretización más utilizados en el método de los volúmenes finitos se encuentran:

- Esquema de diferencias centrales: Para la mejor comprensión de este método se va a estudiar su aplicación a un problema unidimensional (Figura 4.2). Si se supone un flujo estacionario unidimensional en el que sólo existen efectos de convección y difusión, la ecuación de conservación en forma general resulta

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right), \quad (4.24)$$

de modo que la ecuación de continuidad, haciendo  $\Phi = 1$  y  $\Gamma = 0$  en la expresión anterior, puede ponerse

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \quad (4.25)$$

pudiendo expresarse esta última en la forma

$$\rho u = \text{constante}. \quad (4.26)$$

Para discretizar la ecuación diferencial (4.24), se empleará un grupo de tres puntos de la malla, tal como se muestra en la Figura 4.2. Aunque la localización de las caras del volumen de control  $e$  y  $w$  no tiene ninguna influencia sobre la formulación final, es conveniente suponer que la cara  $e$  está situada en el punto medio entre  $P$  y  $E$ , y la cara  $w$  entre  $W$  y  $P$ .

Integrando la Ecuación (4.24) sobre el volumen de control de la Figura 4.2, se obtiene

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w. \quad (4.27)$$

Suponiendo que las caras del volumen de control están en el punto medio, resulta por interpolación lineal,

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \text{ y } \phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad (4.28)$$

La ecuación (4.27) puede escribirse ahora de la forma

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w}. \quad (4.29)$$

Para escribir esta ecuación de forma más compacta, se define

$$F \equiv \rho u \text{ y } D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)}. \quad (4.30)$$

Las cantidades  $F$  y  $D$  tienen las mismas dimensiones. Mientras que  $D$  siempre es positivo,  $F$  puede ser positivo o negativo, dependiendo de la dirección del flujo fluido.

Aplicando (4.30), la ecuación discretizada queda

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W, \quad (4.31)$$

siendo

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad (4.32)$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}, \quad (4.33)$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w). \quad (4.34)$$

Por continuidad,  $F_e = F_w$  (4.26), por lo que  $a_P = a_E + a_W$ .

Este esquema cumple con las propiedades 'conservativeness' y 'boundedness', antes mencionadas, pero no cumple con la tercera propiedad fundamental la llamada 'transportiveness'. La interpolación por diferencias centrales se realiza de modo independiente al sentido del flujo, lo que puede dar lugar a problemas en la obtención de una solución realista.

● Esquema 'upwind': Según este esquema el valor de  $\Phi$  en la entrecara es igual al valor de  $\Phi$  en el nodo de la malla situado inmediatamente aguas arriba de la cara, dependiendo de cual sea la dirección del flujo. De este modo,

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si} \quad F_e > 0 \quad (4.35)$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si} \quad F_e < 0 \quad (4.36)$$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{si} \quad F_w > 0 \quad (4.37)$$

$$\phi_w = \phi_E \quad \text{si} \quad F_w < 0 \quad (4.38)$$

Operando de forma similar que en el esquema de diferencias centrales, partiendo de la misma ecuación diferencial (4.24) y llegando a una expresión similar a (4.31). Tomando como premisa un flujo hacia la derecha ( $F_e > 0$  y  $F_w > 0$ ), en esta ocasión obtenemos los coeficientes

$$a_E = D_e, \quad (4.39)$$

$$a_W = D_w + F_w, \quad (4.40)$$

$$a_P = D_e + D_w + F_e. \quad (4.41)$$

Supongamos ahora un flujo hacia la izquierda ( $F_e < 0$  y  $F_w < 0$ ), en este caso los coeficientes de la ecuación son

$$a_E = D_e - F_e, \quad (4.42)$$

$$a_W = D_w, \quad (4.43)$$

$$a_P = D_e + D_w - F_w. \quad (4.44)$$

Si definimos ahora un operador  $[[A, B]]$  para denotar el valor de dos magnitudes  $A$  y  $B$ ;  $[[A, B]] = A$  si  $A > B$  y  $[[A, B]] = B$  si  $A < B$ . Aplicando este operador los coeficientes se pueden definir como sigue

$$a_E = D_e + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket, \quad (4.45)$$

$$a_W = D_w + \llbracket +F_w, 0 \rrbracket, \quad (4.46)$$

$$a_P = D_e + \llbracket F_e, 0 \rrbracket + D_w + \llbracket -F_w, 0 \rrbracket = a_E + a_W + (F_e - F_w). \quad (4.47)$$

Para explicar la razón de ser de este esquema en la práctica se va a estudiar la solución exacta del problema mostrado en la Figura 4.2, cuya ecuación de definición para el problema se mostraba en (4.24). Se supondrá que  $\Gamma_\phi$  es constante (teniendo en cuenta que  $\rho u$  es constante, debido a la ecuación de continuidad). Si se utiliza el dominio  $0 \leq x \leq L$ , con las condiciones de contorno

$$\phi = \phi_0, \text{ para } x = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ para } x = L, \quad (4.48)$$

la solución exacta del problema es

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{Pe(x/L)} - 1}{e^{Pe} - 1}, \quad (4.49)$$

donde  $Pe$  es el número de Peclet, definido en la sección anterior.

En la Figura 4.4 podemos observar la representación gráfica de la solución exacta de este problema unidimensional.

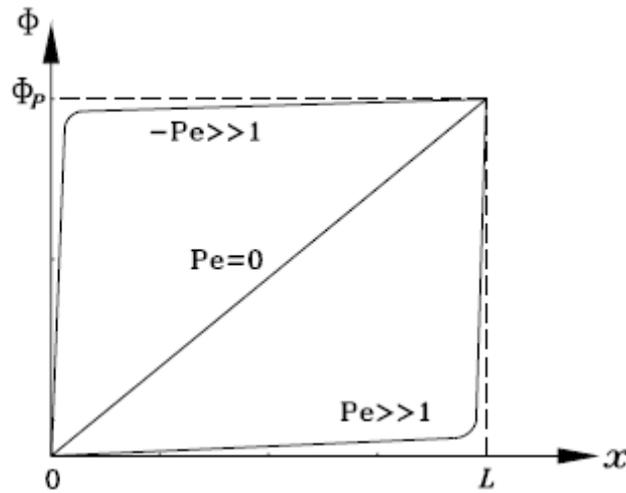


Figura 4.4. Solución exacta para el problema unidimensional con convección y difusión

En la Figura 4.5 podemos ver una representación de la solución dada por los métodos 'upwind' y diferencias centrales en función del número de Peclet junto con la solución exacta, también en función de este número adimensional. En esta representación se aprecian los problemas de convergencia que puede llegar a ocasionar el esquema de diferencias centrales para valores pequeños del número de Peclet, mostrándose el esquema 'upwind' como una seria alternativa en estas circunstancias.

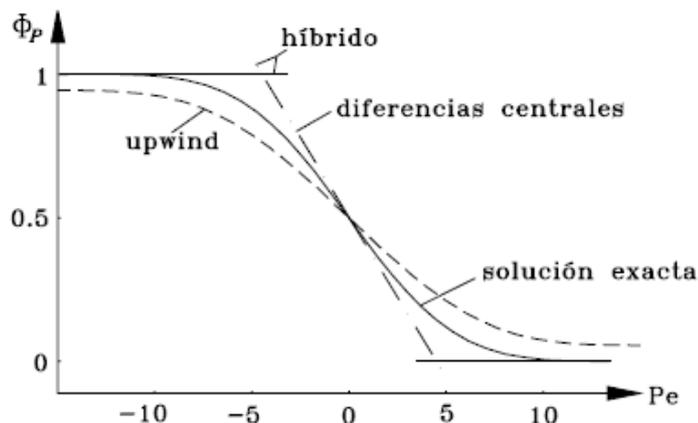


Figura 4.5. Predicción de  $\Phi_P$  por varios esquemas para un rango de números de Peclet.

#### EL PROBLEMA DE LA DIFUSIÓN NUMÉRICA

Los esquemas numéricos derivados del 'upwind', y otros esquemas de primer orden pueden fallar cuando el flujo incide de modo diagonal a las direcciones principales de la malla. En estas condiciones, el esquema 'upwind' altera las distribuciones de las propiedades transportadas. El error resultante tiene una apariencia de origen difusivo y se denomina '*difusión numérica*' (*false diffusion*). Este fenómeno depende de la densidad del mallado, podemos ver un ejemplo que demuestra este hecho en la Figura 4.6 junto con la solución exacta para un problema en particular. Los resultados numéricos muestran perfiles ligeramente alterados.

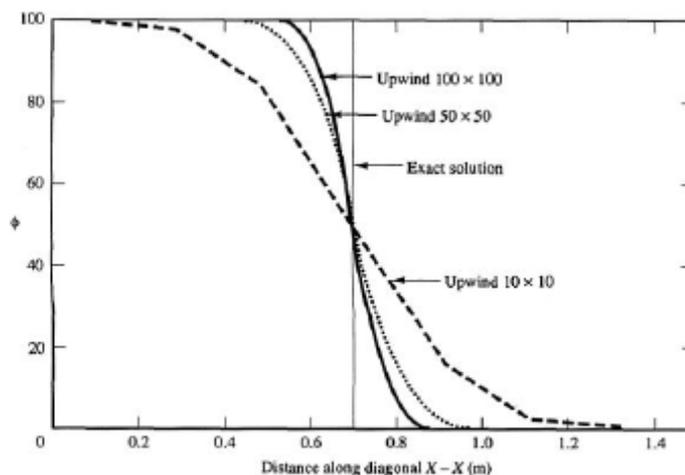


Figura 4.6. Influencia de la densidad de malla en la difusión numérica.

La exactitud aumenta al utilizar mallas cada vez más finas, esto puede inducir que una malla muy densa podría eliminar los problemas derivados de la difusión numérica pero las mallas que podrían anular este problema pueden no resultar factibles. Además se ha demostrado que para números de Reynolds altos, la difusión numérica puede llevar a soluciones irreales. Por esta razón se han desarrollado métodos de orden superior para solventar este problema, métodos que serán tratados posteriormente.

- **Esquema híbrido:** Este esquema, desarrollado por Spalding (1972), trata de acercarse a la solución exacta del problema, eliminando los problemas ocasionales del esquema 'upwind' para números de Peclet suficientemente pequeños. Para un rango de números de Peclet  $-2 \leq Pe \leq 2$ , se utiliza el esquema de diferencias centrales. Para valores de  $Pe$  fuera de este rango, se emplea el esquema 'upwind'. El esquema híbrido tiene dificultades en problemas en los que los efectos

combinados de convección y difusión son importantes en la mayor parte del campo fluido, y la dirección principal del flujo es oblicua respecto de las direcciones principales de la malla de cálculo, en cuyo caso la difusión numérica es importante. Al igual que el esquema ‘upwind’ cumple con las tres propiedades básicas expuestas por Veerstedt & Malalasekera (1995).

En la formulación introducida con el esquema ‘upwind’, los coeficientes de la ecuación discretizada (4.31) quedan para este método,

$$a_E = \llbracket -F_e, D_e - F_e/2, 0 \rrbracket, \quad (4.50)$$

$$a_W = \llbracket F_w, D_w + F_w/2, 0 \rrbracket, \quad (4.51)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w). \quad (4.52)$$

- **Esquema exponencial:** Este esquema parte de suponer que la variación de  $\Phi_P$  a  $\Phi_E$  a lo largo de una distancia  $(\delta x)_e$  es del mismo tipo que la solución analítica expuesta anteriormente en (4.49). Este esquema da buenos resultados en flujos estacionarios y unidimensionales, pero puede resultar problemático para otros flujos bidimensionales y tridimensionales. Por tanto, debido a su costosa computación su uso no suele estar justificado en la mayoría de las ocasiones.

- **Esquema potencial:** Este esquema fue propuesto por Patankar (1980) y propone utilizar una aproximación de tipo potencial (‘powerlaw scheme’), ampliando el límite del número de Peclet del 2 usado en el esquema híbrido a 10, de modo que ofrece exactamente la misma solución para  $|Pe| > 10$ .

El esquema potencial es más complejo que el esquema híbrido, aunque es más fácil de computar que el esquema exponencial, así que en determinados casos es recomendable ya que se acerca más a la solución exacta que el esquema híbrido.

- **Esquemas de alto orden:** Como se ha señalado anteriormente, esquemas como el ‘upwind’ o el híbrido dan resultados satisfactorios para muchas simulaciones numéricas. Aún así, deben considerarse como esquemas de primer orden que pueden presentar problemas de difusión numérica. Ante esto se deben plantear esquemas de orden dos o superior, basados en la filosofía ‘upwind’ (o en otras alternativas), que cumplan las propiedades ‘conservativeness’, ‘boundedness’ y ‘transportiveness’.

El código de propósito general PHOENICS en su versión 3.1 presenta una formulación general para este tipo de métodos, basada a su vez en la propuesta por Waterson & Deconinck (1995), que mostramos a continuación. Suponiendo que el flujo va de izquierda a derecha y haciendo referencia el subíndice  $WW$  al lado ‘upwind’ de  $W$ ,

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2} B(\phi_W - \phi_{WW}) \quad (4.53)$$

$$B = B(r), \text{ siendo } r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_W - \phi_{WW}} \quad (4.54)$$

Ante esta formulación, los esquemas lineales antes descritos se pueden formular como casos particulares escogiendo debidamente la función  $B(r)$ . En el esquema ‘upwind’,

$$B(r) = 0. \quad (4.55)$$

En el esquema de diferencias centrales,

$$B(r) = r. \quad (4.56)$$

Haciendo ahora,

$$B(r) = \frac{1}{2}[(1+k)r + (1-k)], \quad (4.57)$$

el esquema 'linear-upwind' es para  $K = -1$ , el esquema 'quadratic upwind' cumple  $K = 0.5$ , mientras que el 'cubic upwind',  $K = 1/3$ . El esquema 'quadratic upwind' recibe el nombre de QUICK ('Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics').

Los esquemas no lineales se caracterizan por ser más complejos que los anteriores. En cada caso de los que se exponen a continuación es preciso definir individualmente el factor  $B(r)$ . Al esquema 'bounded quick' se puede llegar haciendo,

$$B(r) = \max[0, \min(2r, 0.75r + 0.25, 4)], \quad (4.58)$$

mientras que al 'bounded cubic TVD',

$$B(r) = \max[0, \min(2r, (2r+1)/3, 2)]. \quad (4.59)$$

Este esquema se basa en la filosofía TVD ('Total Variation Diminishing'), según esta la variación total de una variable  $u$  con  $x$ ,

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx, \quad (4.60)$$

Puede aproximarse por

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|, \quad (4.61)$$

Cumpléndose la condición TVD si

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (4.62)$$

Con lo que el esquema es efectivamente de alto orden, pero impone una variación monótona. Al esquema MUSCL propuesto por Van Leer se puede llegar imponiendo,

$$B(r) = \max[0, \min(2r, 0.5 + 0.5r, 2)]. \quad (4.63)$$

MUSCL es la abreviatura de 'Monotone Upstream - Centered Schemes for Conservation Laws'. Este será el esquema numérico utilizado en todas las simulaciones llevadas a cabo, utilizando el código comercial PHOENICS, en este proyecto. Existen otros muchos esquemas no lineales, los cuales son continuamente propuestos o modificados en la literatura sobre el tema de los que sólo señalaremos el HQUICK que se define por la función  $B(r)$  mostrada en la expresión (4.61).

$$B(r) = 2 \frac{r + |r|}{r + 3} \quad (4.64)$$

### 4.3.3 Algoritmos de solución del acoplamiento presión - velocidad

En esta sección se tratará el procedimiento de resolución del campo de velocidad para un campo de presión desconocido. El gradiente de presión forma parte del término fuente de las ecuaciones de cantidad de movimiento de modo que, para un campo de presión dado, no existiría dificultad en resolver la ecuación de cantidad de movimiento haciendo uso de las ecuaciones discretizadas planteadas anteriormente.

El campo de presión se especifica indirectamente mediante la ecuación de continuidad de forma que cuando el campo de presión correcto se sustituye en la ecuación de cantidad de movimiento el campo de velocidad resultante satisface la ecuación de continuidad. Por tanto, puesto que inicialmente el campo de presiones es desconocido, se tiene que emplear un

procedimiento iterativo, mediante el que, haciendo uso de las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad, se vaya convergiendo hacia un campo de presión cada vez más próximo al real.

#### MALLA ALTERNADA

Por el modo de discretización de la ecuación de cantidad de movimiento, si no se utiliza una malla alternada, pueden originarse campos de presión alternados debido a que la diferencia de presión se toma entre dos puntos alternados, y no entre dos puntos adyacentes

De este modo, el campo de presión alternado, no real, sería tratado entonces como un campo uniforme de presión por la ecuación de cantidad de movimiento. Análogamente, del proceso de discretización de la ecuación de continuidad, se deduce que están relacionadas las velocidades entre dos puntos alternados y no entre dos adyacentes; como consecuencia de esto, puede obtenerse un campo de velocidad igualmente alternado, el cual tampoco correspondería a la solución real del problema.

Todas estas dificultades se superan fácilmente utilizando una malla alternada donde las componentes de velocidad se calculan en los puntos que se sitúan sobre las caras de los volúmenes de control. Esto es, la componente  $x$  de la velocidad se calcula en las caras que son normales a la dirección  $x$ . Las localizaciones para  $u$  (y para  $v$ ) se señalan en la Figura 4.7 mediante flechas pequeñas, mientras que los nodos, donde están almacenadas el resto de las variables escalares  $\Phi$  (como la presión), están representados por círculos; las líneas discontinuas indican las caras de los volúmenes de control.

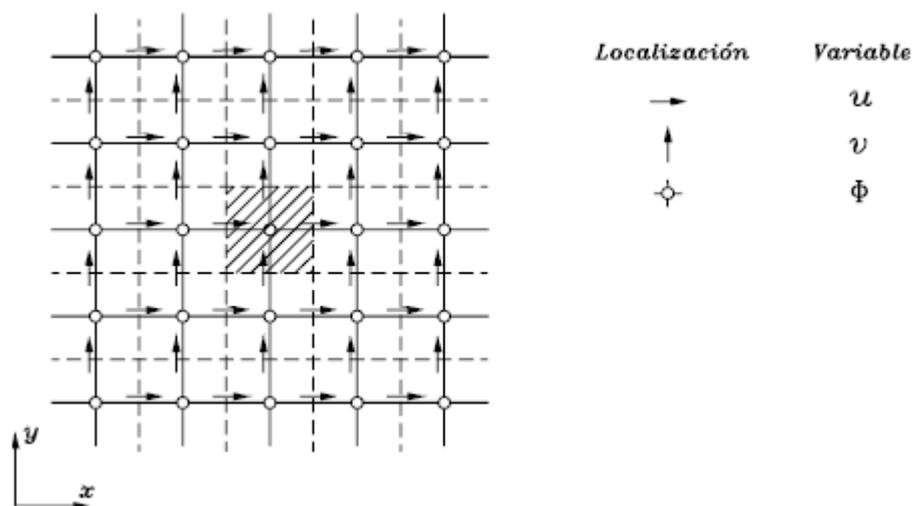


Figura 4.7. Almacenamiento de las variables en posiciones alternadas en un problema bidimensional.

#### ALGORITMOS 'SIMPLER' Y 'SIMPLEST'

La solución al problema de acoplamiento entre las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento, a través de la presión, consiste en que en cada punto la presión debe ser tal que, una vez sustituida en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, el campo de velocidad calculado satisfaga la ecuación de continuidad. Este acoplamiento entre ecuaciones se intenta resolver de forma eficiente mediante el algoritmo SIMPLER (SIMPLE – Revised), perteneciente a la familia del SIMPLE (Semi - Implicit Method for Pressure – Linked Equations), propuesto por Patankar y Spalding.

No se entrará en este proyecto en la descripción de este algoritmo de forma detallada, la cual se puede encontrar en varios de las referencias bibliográficas de este trabajo. Debido a la

complejidad que esto entrañaría, nos centraremos en aspectos más básicos de la utilización de este algoritmo.

La forma discretizada de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para una componente determinada de velocidad, por ejemplo  $u$ , se puede expresar,

$$a_e u_e = \sum a_{ady} u_{ady} + b + (p_P - p_E) A_e, \quad (4.65)$$

donde el subíndice  $e$  indica el punto que define el volumen de control considerado, y el subíndice  $ady$ , los correspondientes puntos adyacentes en el plano  $xy$ . Los coeficientes  $a_{ady}$  cuantifican el efecto combinado de la convección y de la difusión en las caras del volumen de control; el término  $b$  engloba los términos fuente, excepto el correspondiente al gradiente de presión; el término  $(p_P - p_E) A_e$  representa la fuerza actuante debida al gradiente de presión, siendo  $A_e$  el área sobre la que actúa dicho gradiente.

Las expresiones anteriores sólo pueden resolverse cuando está dada la distribución de presión, o cuando se supone de alguna manera. Si no se emplea una distribución de presión adecuada, la distribución de velocidad resultante no satisfará la ecuación de continuidad.

El objetivo es encontrar un método de obtención de la distribución supuesta de presión  $p^*$ , de forma que la distribución de la componentes de velocidad  $v_i^*$  satisfaga la ecuación de conservación de la masa. Puede suponerse que la distribución correcta de la presión viene dada por (4.66).

$$p = p^* + p', \quad (4.66)$$

donde  $p'$  se denomina corrección de presión. Las correcciones correspondientes para la distribución de velocidad,  $v_i'$ , pueden introducirse de forma similar:

$$v_i = v_i^* + v_i'. \quad (4.67)$$

El siguiente paso es convertir la ecuación de continuidad en una ecuación para la corrección de la presión. Con este propósito, se supone que la densidad no depende directamente de la presión. Hasta aquí se podría decir que estamos aplicando el algoritmo SIMPLE, pero al utilizar una ecuación de corrección de la presión sólo para la corrección de las componentes de la velocidad y proporcionar otro medio para obtener un campo de presión más exacto, se estará aplicando el algoritmo SIMPLER.

Por último, el SIMPLEST ('Simple Shor - Tened'), propuesto por Spalding, consiste básicamente en el SIMPLER, pero considerando que en los coeficientes adyacentes se recogen únicamente los efectos difusivos en las caras del volumen de control, mientras que los efectos convectivos se incluyen en el término fuente. Con esto, se intenta solucionar las dificultades de convergencia provocadas por los términos convectivos de la ecuación de cantidad de movimiento.

## 4.4 Mallado del campo fluido

La estructura o topología de una malla consiste en la forma de disponer los puntos nodales en el dominio considerado. Cuando se utiliza el método de los volúmenes finitos, el método particular de discretización de las ecuaciones puede determinar el método del mallado. En cualquier caso, atendiendo a la topología de la malla se puede efectuar la siguiente clasificación:

- Regulares: Los puntos de la malla están dispuestos regularmente sobre un volumen prismático que puede ser rectilíneo o curvilíneo. Estas mallas también se denominan

mallas estructuradas, o también mallas mapeadas, en el caso de que deriven de otra geometría distinta.

- Irregulares: Los puntos de la malla se disponen de un modo irregular sobre una malla que se ajusta a un dominio de cálculo de forma arbitraria, y admitiendo además refinamientos locales en las zonas de interés. Estas mallas también se conocen como mallas no estructuradas, o libres.

Los mayores desarrollos conseguidos en el método de los volúmenes finitos han tenido lugar utilizando mallas regulares. Cuando el dominio de interés es complejo, es preciso utilizar en ocasiones mallas no ortogonales. El tratamiento y discretización de las derivadas parciales cuando la malla es ortogonal, esto es, cuando las líneas de la malla confluyen formando ángulos rectos, aunque las líneas sean curvilíneas, puede ser relativamente sencillo. Cuando la malla no es ortogonal, se requiere un mayor número de términos para la discretización de las derivadas, por lo que los cálculos numéricos son más pesados, y a menudo la solución obtenida es menos aproximada.

#### TIPOS DE MALLAS ESTRUCTURADAS EMPLEADAS EN CFD

En general se puede decir que existen tres tipos de mallas empleadas comúnmente en CFD: mallas cartesianas, mallas polares y mallas ajustadas al cuerpo ó BFC (*Body Fitted Coordinates*).

La malla cartesiana es la más extendida de las tres, debido a su simplicidad y generalización de la geometría, por seguir, los volúmenes de control que la definen, las direcciones dadas por los ejes cartesianos. Es la más indicada cuando la geometría (bidimensional o tridimensional) esta influenciada por configuraciones cúbicas o paralelepípedas.

Las mallas polares sólo tienen aplicación cuando existe una simetría acimutal en la configuración geométrica.

Por último, el uso de las mallas ajustadas al cuerpo (BFC) se justifica cuando interesa tener una malla más fina en ciertas regiones del dominio de cálculo, en las que pueden existir problemas de convergencia o exactitud en los resultados. En otras regiones, sin embargo, la convergencia es rápida, y el tiempo de cálculo necesario es menor; por ello, no es acertado mantener una malla tan fina en estas zonas.

#### 4.4.1 Modelización de la turbulencia junto a las paredes

Los flujos turbulentos se ven afectados significativamente por la presencia de paredes. El campo de velocidades medias está obligado a cumplir la condición de adherencia, pero la turbulencia también cambia de forma importante. Cerca de la pared, la viscosidad reduce las fluctuaciones de velocidad tangencial, mientras que la imposibilidad de avance del flujo en dirección normal a la pared reduce las fluctuaciones normales. Hacia la parte exterior de la región cercana a la pared, sin embargo, la turbulencia aumenta rápidamente por la producción de energía cinética turbulenta debido a los grandes gradientes de velocidad media.

El modelo empleado cerca de la pared influye sobre la exactitud de las soluciones numéricas, en el sentido de que las paredes son la principal fuente de vorticidad media y de turbulencia. Los dos modelos seguidos en CFD para la modelización de la región cercana a la pared son:

- Leyes de pared o *'wall function'*: Fórmulas semiempíricas para resolver la zona entre la pared y la región plenamente turbulenta de la capa límite. Estas leyes de pared introducen una distribución de velocidades predeterminada, conocida como 'ley de la pared' logarítmica, por lo que esta zona no se calculará. Esto nos permitirá que esta zona tenga un mallado más basto al no tener necesidad de establecer nodos en dicha región.

- La región interior donde influye la viscosidad se malla y se resuelve, junto con el resto del campo fluido. Los modelos de turbulencia empleados (modelos '*de proximidad a la pared*' o '*near – wall*') deben modificarse para permitir que la región se resuelva con un mallado hasta la pared, incluyendo la subcapa viscosa.

La última de las alternativas será la solución tomada para las simulaciones desarrolladas en este trabajo. El tratamiento por leyes de pared es acertado para altos números de Reynolds, en condiciones de turbulencia completamente desarrollada. En este proyecto, como ya se dijo en capítulos anteriores, se intentará simular la transición de flujo laminar a turbulento. Los flujos de transición, tienen la propiedad de que la producción de turbulencia no está en general en equilibrio con la disipación de la misma cerca de las paredes, de modo que el comportamiento universal de la velocidad en las paredes no se cumple. Por esta razón es conveniente calcular el flujo en todo el campo fluido.

#### 4.4.2 Estudio particular de las mallas empleadas

Se han empleado mallas estructuradas no uniformes siguiendo el procedimiento 'staggered-grid'. Este empleo de mallas no uniformes se justifica por el interés de tener una malla más fina en ciertas regiones del dominio de cálculo, para evitar problemas de convergencia o de exactitud en las soluciones. En otras zonas del dominio fluido no es necesario, ni acertado, mantener una malla excesivamente fina por tener una convergencia más rápida y necesitar un tiempo de cálculo mucho menor. Para tal fin, en todas las simulaciones llevadas a cabo, las mallas se han construido utilizando el sistema BFC de PHOENICS con mallas de 150 x 86 celdas. Ejemplos de mallas generada por el sistema BFC de PHOENICS los tenemos en la Figura 4.8., en la Figura 4.8 b) se muestra una malla similar a las utilizadas en este trabajo.

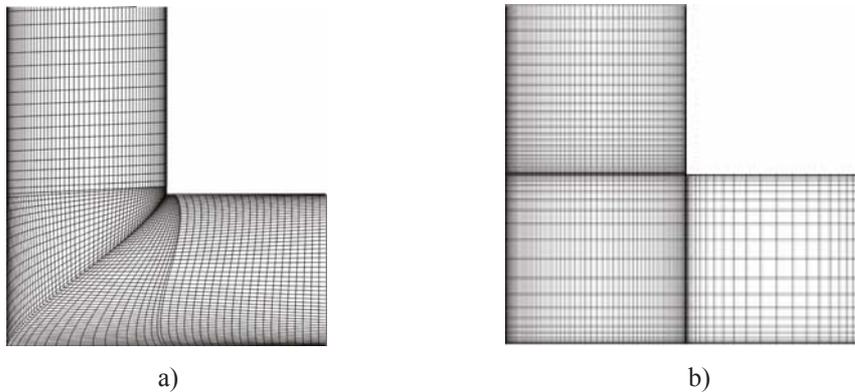


Figura 4.8. a) Malla ajustada al cuerpo. b) Malla cartesiana similar a las utilizadas en las simulaciones de este proyecto.

Se ha demostrado que el factor principal para conseguir la independencia de los resultados numéricos respecto de la densidad de la malla es el valor de  $y^+$ . (véase la Figura 4.10). Para valores de  $y^+$  por debajo de 1, los resultados llegan a ser independientes de este parámetro.

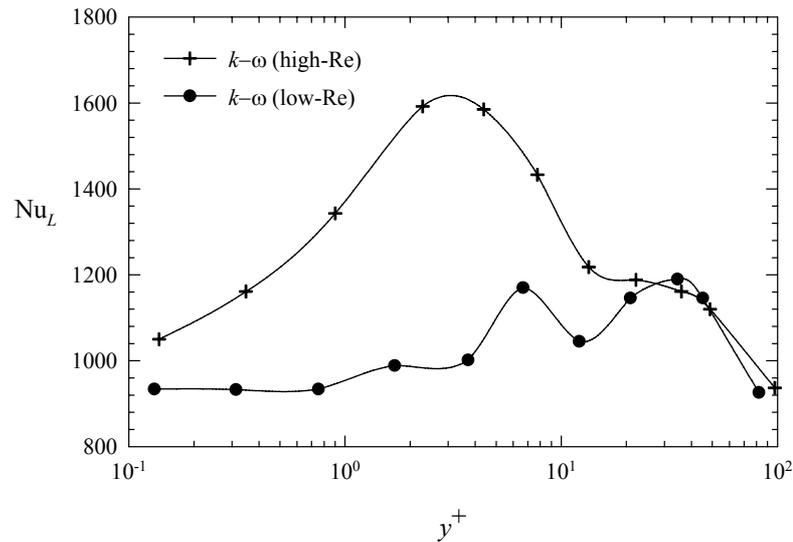


Figura 4.10. Influencia de  $y^+$  en los resultados numéricos para el número de Nusselt medio en la pared,  $Nu_L$ . Caso correspondiente a canal simple isoterma, con relación de aspecto  $b/L = 0,2$  y número de Rayleigh  $Ra_L$  igual a  $10^{12}$ . Malla de  $120 \times 61$  celdas.

Estos resultados se consiguieron para una configuración de pared ‘Trombe’ sin las regiones horizontales de entrada y salida del flujo, es decir, un canal simple vertical. Las propiedades de calentamiento aplicadas a este canal simple fueron de paredes isothermas y como podemos observar los modelos de turbulencia utilizado fue el  $k-\omega$  en sus versiones para altos y bajos números de Reynolds.

Tanto en los casos de la Figura 4.10 como en los casos de la Figura 4.11 que comentaremos seguidamente se ha conseguido la variación de  $y^+$  mediante la introducción de factores logarítmicos de afinamiento para las distintas mallas utilizadas.

En la Figura 4.11 se ha variado el  $y^+$  de 0.09 a 123 y se puede apreciar que para valores por debajo de 2 los resultados en el gasto másico  $m$  (kg/s) llegan a ser prácticamente independientes tanto del mismo  $y^+$ , como de la malla utilizada. Las conclusiones que se desprenden de este estudio han sido extrapoladas a configuraciones más complejas como paredes ‘Trombe’ o las chimeneas solares tratadas en este proyecto.

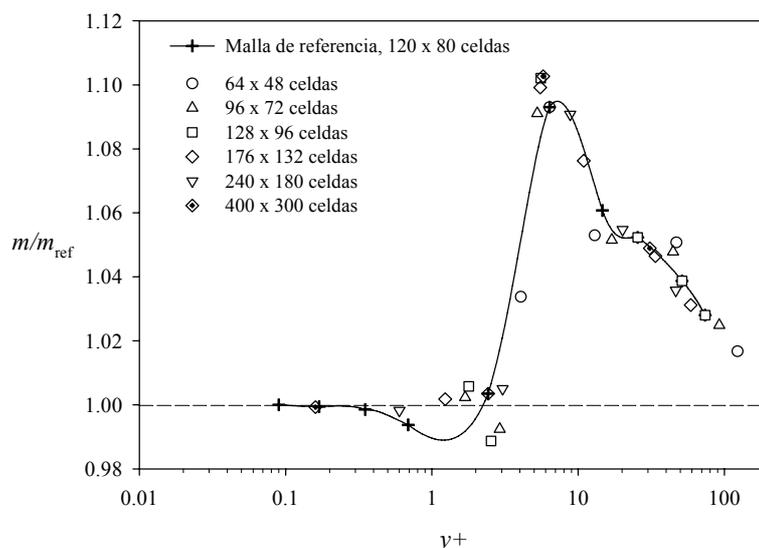


Figura 4.11. Influencia de  $y^+$  sobre el gasto másico  $m$ , para distintas mallas. Caso correspondiente a canal simple, con relación de aspecto  $b/L = 0,1$  y número de Rayleigh  $Ra_L = 10^{13}$ .  $m_{ref}$  es el gasto másico correspondiente a la malla de referencia de  $120 \times 80$  celdas, y valor más bajo de  $y^+$  ( $= 0.09$ ).

En las simulaciones realizadas en este trabajo, siguiendo las conclusiones arrojadas por el anterior estudio, se ha mantenido un valor de  $y^+$  en las paredes entre  $0.2-0.5$  para asegurarnos la independencia de los resultados respecto de la densidad de la malla utilizada. Estos valores de  $y^+$  fueron conseguidos, al igual que en el estudio, por los factores logarítmicos de afinamiento de malla. Se variaron estos factores con relaciones predeterminadas entre ellos para mantener la semejanza entre las distintas mallas.

Por último se debe señalar que durante la realización de el estudio de las mallas utilizadas en este proyecto se ha detectado un fallo en la versión 3.3 de PHOENICS, código de propósito general que se tratará con mayor detalle en la siguiente sección, instalada en el ordenador Neptuno del Servicio de Ayuda a la Investigación Tecnológica (SAIT). Esta versión del código comercial daba resultados totalmente irreales al tratar problemas con las mallas cartesianas ajustadas al cuerpo que se utilizaron en las simulaciones de este trabajo. Al detectar estos problemas, en un principio se creyó que derivaban del modelo de turbulencia, pero estos persistieron en flujo laminar. Las simulaciones numéricas se terminaron en la versión 3.6.1 de PHOENICS instalada en el ordenador Prometeo también situado en el SAIT y que arrojaba resultados de mayor credibilidad.

## 4.5 Descripción del código de propósito general PHOENICS

El código comercial utilizado en las simulaciones computacionales de este proyecto fin fue PHOENICS ('Parabolic, Hyperbolic Or Elliptic Numerical Integration Code Series') como se ha mencionado antes en capítulos anteriores. Este código está desarrollado en Fortran 77 por la empresa CHAM Ltd. ('Concentration, Heat and Momentum Limited'). PHOENICS simula distintos flujos de fluidos, que pueden incluir procesos de transmisión de calor (como los que aquí se desarrollan), reacciones químicas, etc. Tiene implementados diversos modelos de turbulencia, modelos para flujos bifásicos, o modelos de combustión, lo que lo convierte en un código muy completo para problemas de mecánica de fluidos y transmisión de calor computacional.

PHOENICS consta de dos códigos principales de ordenador: un preprocesador denominado 'SATELLITE', y un procesador llamado 'EARTH'. El primero es un intérprete que construye ficheros de datos a partir de las instrucciones dadas, por ejemplo, mediante un fichero de datos de entrada. El segundo contiene el principal 'software' de la simulación de flujos; este programa lee los datos proporcionados por 'SATELLITE', ejecuta los correspondientes cálculos y produce distintos tipos de ficheros de resultados. Tanto 'SATELLITE' como 'EARTH' poseen subrutinas a las que se puede acceder para introducir condiciones de contorno, implementar términos fuente y propiedades del fluido, y dar órdenes de control del procedimiento numérico y de la salida de resultados. En cuanto a la salida de resultados, en este trabajo se ha empleado el código auxiliar PHOTON.

SATELLITE es un intérprete; crea, a partir de las instrucciones dadas por el usuario. Las instrucciones del usuario pueden ser recibidas por SATELLITE de dos formas principales: leyendo un fichero de instrucciones llamado 'q1', que previamente debe haber construido el usuario o cargando un fichero de instrucciones pertenecientes a la biblioteca de ficheros 'q1'. EARTH, el cual contiene el principal 'software' de la simulación de flujos, lee los datos proporcionados por SATELLITE y ejecuta los correspondientes cálculos; produce un fichero de salida llamado 'result', que puede ser leído por el usuario, y también un fichero de resultados llamado 'phida', que puede ser leído por PHOTON o incluso por el mismo EARTH cuando comienza a ejecutarse un nuevo fichero 'q1'.

Tanto SATELLITE como EARTH poseen subrutinas en FORTRAN que son accesibles por el usuario. La principal es 'ground.f', una colección de subrutinas que pueden ser utilizadas para una gran variedad de propósitos. La función principal de 'ground' es completar condiciones de contorno necesarias, términos fuente, propiedades del fluido y órdenes de control de las salidas que no están incluidas en EARTH. En cualquier caso, si el usuario necesitara funciones especiales, que no quedaran proporcionadas por las subrutinas estándar de 'ground', es posible añadir subrutinas en FORTRAN e insertar secuencias propias, que se harían efectivas después de un recompilado y un reensamblado posteriores.

Por último destacar la existencia de una ayuda centralizada de PHOENICS, POLIS ('PHOENICS On - Line Information System'). Tecleando *polis* se tiene acceso a ayuda sobre diversos temas; resulta especialmente interesante la 'Encyclopaedia', en la que se pueden buscar los temas de interés por orden alfabético.

#### 4.5.1 Aspectos fundamentales del fichero de instrucciones 'q1'

A continuación se hará una breve introducción a las órdenes más importantes dentro del fichero de instrucciones 'q1', así como la forma en la que han sido tratadas en las simulaciones de este proyecto.

##### FUENTES Y CODICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno en PHOENICS son tratadas como un tipo de fuente de la magnitud en cuestión (masa, cantidad de movimiento, energía, especies químicas, energía turbulenta, etc.). Esto implica que no se introduzcan los valores de las condiciones de contorno, sino de forma indirecta, expresadas como fuentes. Estas fuentes se introducen en el centro de las celdas por lo que no se introducen realmente en los contornos. Sin embargo, las celdas cerca de los contornos se pueden hacer lo suficientemente pequeñas para que la diferencia en la localización sea despreciable. Las fuentes se introducen en forma de un coeficiente  $C_\Phi$  y un valor  $V_\Phi$  para la propiedad  $\Phi$ . La fuente para la variable  $\Phi$  está determinada por  $C_\Phi$  y  $V_\Phi$  de la forma  $S_\Phi = C_\Phi (V_\Phi - \Phi_P)$ , donde  $\Phi_P$  es el valor de la propiedad  $\Phi$  en el nodo  $P$ .

Para mostrar como esta filosofía se aplica en la práctica, veamos algunos ejemplos de ficheros 'q1' utilizados en este proyecto.

## PAREDES

Para la introducción de una condición de contorno, es preciso fijar en cualquier caso la localización de la región del dominio de cálculo sobre la que se sitúa la fuente o sumidero. Esto se consigue mediante la sentencia 'patch'. Tomamos el ejemplo de la definición de la pared de cristal de la chimenea solar en el caso de simulación laminar, llamada 'CRISCAN':

$$\text{PATCH}(\text{CRISCAN}, \text{NWALL}, 1, \text{NX}, \text{NY}, \text{NY}, 1, 1, 1, 1). \quad (4.68)$$

donde

- 'CRISCAN' es el nombre que recibe dicha pared.
- 'NWALL' indica que se fija la condición de contorno en la cara norte de las celdas que se especifican a continuación.
- Los dos términos siguientes '1,NX', indican el rango de celdas que ocupa el 'patch' en la dirección  $x$ .
- Las cantidades que aparecen seguidamente 'NY,NY,1,1', indican el rango que ocupa el 'patch' en las direcciones  $y$ , las dos primeras, y  $z$ , las dos últimas que por ser el problema bidimensional sólo ocupa una celda.
- Los dos últimos números '1,1', indica el rango de intervalos de tiempo que ocupa el 'patch'. Como el problema es estacionario sólo tiene un único intervalo de tiempo.

Ahora se han de definir el coeficiente y el valor que antes se han comentado. Estos se especifican con la instrucción 'coval'. Cada instrucción 'coval' debe figurar con su correspondiente orden 'patch', y ambas deben poseer el mismo nombre. Las instrucciones 'coval' para la pared CRISCAN son las que siguen,

$$\text{COVAL}(\text{CRISCAN}, \text{U1}, 1.0, 0.0), \quad (4.69)$$

$$\text{COVAL}(\text{CRISCAN}, \text{V1}, 1.0, 0.0), \quad (4.70)$$

$$\text{COVAL}(\text{CRISCAN}, \text{tem1}, \text{fixflu}, \text{qflu1}). \quad (4.71)$$

Tomamos, por ejemplo, la expresión (4.69). En ella, entre los paréntesis de la instrucción 'coval', podemos ver los siguientes términos:

- 'CRISCAN' hace referencia al correspondiente 'patch'.
- 'U1' expresa la propiedad sobre la que se fija un valor, en este caso la velocidad en el eje  $x$ .
- '1.0' es el coeficiente, que tiene este valor por ser este caso de flujo laminar.
- '0.0' es el valor de la propiedad en dicha pared.

Puede tener cierta relevancia la expresión para fijar la temperatura (4.71), ya que a la hora de fijar el coeficiente se ha de tener en cuenta que PHOENICS no calcula la temperatura sino la entalpía, en este caso 'fixflu' indica la existencia de un flujo de calor.

En caso de que el flujo sea turbulento, la definición de las condiciones de contorno, en este caso para la pared PAREDTR2 que es el muro de hormigón tras el cristal de la chimenea solar, serían:

$$\text{PATCH}(\text{PAREDTR2}, \text{SWALL}, \text{NX1}+1, \text{NX}, \text{NY1}+\text{NY2}+1, \text{NY1}+\text{NY2}+1, 1, 1, 1, 1), \quad (4.72)$$

$$\text{COVAL}(\text{PAREDTR2}, \text{U1}, \text{GRND2}, 0.0), \quad (4.73)$$

$$\text{COVAL}(\text{PAREDTR2}, \text{V1}, \text{GRND2}, 0.0), \quad (4.74)$$

$$\text{COVAL}(\text{PAREDTR2}, \text{tem1}, \text{fixflu}, \text{qflu2}), \quad (4.75)$$

$$\text{COVAL}(\text{PAREDTR2}, \text{OMEG}, \text{GRND2}, \text{GRND2}), \quad (4.76)$$

$$\text{COVAL}(\text{PAREDTR2}, \text{KE}, 1.0, 0.0). \quad (4.77)$$

Podemos observar en estas sentencias la existencia del coeficiente 'GRND2' que implica una ley de la pared logarítmica, característica del flujo turbulento.

#### ENTRADAS Y SALIDAS

Pongamos como ejemplo las condiciones de contorno en la entrada del caso laminar:

$$\text{PATCH}(\text{ENTRADA}, \text{SOUTH}, 1, \text{NX1}, \text{NY1}+1, \text{NY1}+1, 1, 1, 1, 1), \quad (4.78)$$

$$\text{COVAL}(\text{ENTRADA}, \text{P1}, -2. * \text{RHO}, 0.0), \quad (4.79)$$

$$\text{COVAL}(\text{ENTRADA}, \text{U1}, \text{ONLYMS}, 0.0), \quad (4.80)$$

$$\text{COVAL}(\text{ENTRADA}, \text{V1}, \text{ONLYMS}, \text{SAME}), \quad (4.81)$$

$$\text{COVAL}(\text{ENTRADA}, \text{TEM1}, \text{ONLYMS}, \text{TREF}). \quad (4.82)$$

Aquí la presión de referencia es igual a cero, en la localización dada por el 'patch' correspondiente, y el coeficiente '-2.\*RHO' determina que el flujo de masa entrante sea proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones entre la ambiente y el interior del canal. Esto es equivalente a decir que las pérdidas de presión en la entrada responden a la expresión (4.83), que resulta equivalente a la aplicación de la ecuación de Bernoulli.

$$P_T = P + \rho(U_x^2 + U_y^2)/2 = 0 \quad (4.83)$$

El coeficiente 'onlyms' hace que únicamente exista flujo de masa convectivo y no difusivo, cumpliendo la expresión (4.84). La expresión 'same' indica a EARTH que el valor exterior de la velocidad en la dirección del flujo se toma igual al valor de la misma en la celda, lo que implica que la fuente correspondiente es nula.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (4.84)$$

#### CONSTRUCCIÓN DE MALLAS

Como se ha mencionado anteriormente, en las simulaciones que se expondrán en capítulos posteriores se han utilizado mallas ajustadas al cuerpo. Se consigue implementar este tipo de mallas con la orden:

$$\text{BFC}=\text{T} \quad (4.85)$$

El proceso de creación de una malla ajustada al cuerpo suele tener la siguiente secuencia:

1. Se definen algunos puntos del dominio computacional (límites exteriores); éstos son especificados en coordenadas cartesianas.
2. Los puntos se unen por líneas. Cada línea se dividirá según los deseos del usuario en un número determinado de celdas, las cuales podrán distribuirse de forma uniforme o variable.
3. Las líneas son enlazadas para crear un contorno bidimensional.
4. Una malla bidimensional es entonces fusionada al contorno formado por las líneas.
5. En casos tridimensionales, las mallas bidimensionales son enlazadas para formar un contorno tridimensional.

Para la creación de puntos, líneas, definir contornos donde adaptar la malla y acoplar una malla al mismo se utilizará el mismo comando 'gset'. Para distinguir por parte del programa que se está definiendo con esta orden, el primer término será  $P$ ,  $L$ ,  $F$  o  $M$  para un punto, línea, definir contornos o acoplar una malla al contorno respectivamente.

Veamos distintos ejemplos utilizados en ficheros 'q1' que se han desarrollado en este trabajo.

Un ejemplo para la definición de un punto es el siguiente:

$$\text{GSET}(\text{P}, \text{P15}, \text{ALT1}, \text{HAB}, 0.0) \quad (4.86)$$

donde

- 'P15' es el nombre del punto.
- 'ALT1,HAB,0.0' son las coordenadas del punto en el sistema cartesiano, que, como en este caso, pueden estar dadas por variables anteriormente definidas.

Para la definición de una línea:

$$\text{GSET}(\text{L}, \text{L5}, \text{P5}, \text{P6}, \text{NX2}, \text{S2.3}) \quad (4.87)$$

aquí

- 'L5' es el nombre de la línea.
- 'P5' nombre del punto donde empieza la línea.
- 'P6' nombre del punto donde finaliza la línea.
- 'NX2' número de segmentos en los que se quiere fragmentar la línea
- 'S2.3' función de distribución, que en este caso es una distribución simétrica de factor 2.3.

Para definir contornos donde adaptar una malla:

$$\text{GSET}(\text{F}, \text{F04}, \text{P11}, -, \text{P15}, \text{P13}, \text{P7}, -, \text{P8}, \text{P9}) \quad (4.88)$$

donde

- 'F04' es el nombre del contorno.
- 'P11' nombre del punto de la primera esquina del contorno.
- 'P15' nombre del punto de la segunda esquina del contorno.
- 'P7' nombre del punto de la tercera esquina del contorno.
- 'P8' nombre del punto de la cuarta esquina del contorno.
- Tras estos términos, se enumeran los puntos que hay entre esa esquina y la siguiente. Por ejemplo, entre la cuarta y la primera esquina se encuentra el punto 'P9' (último término del comando). Sin embargo, entre la primera y segunda esquina, segunda y tercera esquina, así como entre tercera y cuarta esquina no hay ningún punto definido, esto se representa con el término '-'.

Para acoplar una malla al contorno definido:

$$\text{GSET}(\text{M}, \text{F04}, +\text{I}+\text{J}, 1, \text{NY1}+1, 1, \text{TRANS}) \quad (4.89)$$

donde

- 'F04' nombre del contorno al que se quiere adaptar la malla.
- '+I+J' da la dirección de las líneas de la malla que ha de adaptarse al contorno.
- '1,NY1+1,1' índice para la esquina de la malla que ha de adaptarse al punto de la primera esquina del contorno.
- 'TRANS' método de interpolación para adaptar la malla, en este caso una traslación finita.

#### RESOLUCIÓN, DEFINICIÓN O INICIALIZACIÓN DE VARIABLES

PHOENICS necesita la especificación de las variables que deben resolverse durante el proceso de cálculo; la instrucción

$$\text{SOLVE}(P1, V1, u1, tem1) \quad (4.90)$$

indica que se resuelven las distribuciones de presión, dos componentes de velocidad, y la temperatura.

Mediante la orden ‘solutn’, pueden especificarse además particularidades del modo de solución elegido para cada una de las variables.

Las variables definidas por el usuario deben declararse en el fichero ‘q1’. Las variables reales se definen con el comando ‘real’, a continuación se muestran varios ejemplos encontrados en nuestros ‘q1’:

$$\text{REAL}(BETA, AGRAV, TDELTA, TREF, TWALL, TPLA, BOXL, BOXB) \quad (4.91)$$

$$\text{REAL}(RA, RELA, PRA, VISCO, RHO, TADI, LPLA, TP1, TP2, TP21, CP, GAMMAG) \quad (4.92)$$

$$\text{REAL}(QFLU, CONDOC) \quad (4.93)$$

$$\text{REAL}(congas, preref, denref, tempref) \quad (4.94)$$

Las variables enteras se definen con el comando ‘integer’, como ejemplo se presenta la definición del número de celdas en las diferentes direcciones:

$$\text{INTEGER}(NX1, NX2, NX3, NY1, NY2, NY3) \quad (4.95)$$

La inicialización de variables se consigue mediante el comando ‘fiinit’. Se impone el valor inicial que toma la variable en el comienzo del cálculo; sin embargo, si el valor impuesto no es adecuado, el tiempo de ordenador puede hacerse considerablemente más largo hasta alcanzar una solución óptima. Como ejemplos de nuestros ‘q1’ se presentan los siguientes:

$$\text{FIINIT}(U1) = \text{VELINI} \quad (4.96)$$

$$\text{FIINIT}(V1) = 0.0001 * \text{VELINI} \quad (4.97)$$

$$\text{fiinit}(tem1) = \text{tref} \quad (4.98)$$

La instrucción ‘restrt(all)’ ordena a EARTH leer el campo inicial de las variables que se especifiquen del fichero de resultados ‘phida’ obtenido en la computación anterior. La especificación ‘all’ impone que sean leídos los campos de todas las variables. También se pueden especificar las variables que se desea que sean leídas con este comando (4.99).

$$\text{RESTRT}(P1, U1, V1, TEM1, VISL, DEN1) \quad (4.99)$$

## SUBRELAJACIÓN

Algunas variables de PHOENICS necesitan frecuentemente subrelajación, en nuestro caso fueron la presión, temperatura, componentes de la velocidad y variables turbulentas ( $k$ ,  $\omega$ ). La subrelajación es más frecuente en flujos estacionarios como los que se tratan aquí; en flujos transitorios, si el intervalo de tiempo es más pequeño que el límite de Courant, la subrelajación es probablemente innecesaria.

La instrucción ‘relax’ es correspondiente para establecer subrelajación en las variables. En los ‘q1’ desarrollados se han utilizado las dos variantes de este comando que podemos ver a continuación. La primera de ellas la vemos en su aplicación a las componentes de la velocidad.

$$\text{RELAX}(V1, FALSDT, 0.001) \quad (4.100)$$

$$\text{RELAX}(u1, FALSDT, 0.001) \quad (4.101)$$

Esta variante añade una fuente de la variable en cuestión en cada celda igual a la masa en dicha celda dividida por el tamaño de un intervalo “ficticio” de tiempo ‘dtfals’. Este intervalo de tiempo viene especificado en el último término del paréntesis. El efecto de esta fuente es nulo una vez que ha convergido el problema. Esta opción es de empleo mayoritario en los flujos estacionarios, debido a que los flujos transitorios ya poseen de por sí una fuente de este tipo.

Para valores pequeños de este intervalo “ficticio” de tiempo (que debe ser siempre positivo), la variable dependiente cambiará muy poco durante cada ciclo de cálculo, consiguiendo eliminar problemas de convergencia a cambio de un mayor tiempo de computación.

La segunda variante de este comando es la siguiente:

$$\text{RELAX}(\text{P1}, \text{LINRLX}, 0.1) \quad (4.102)$$

$$\text{RELAX}(\text{tem1}, \text{LINRLX}, 0.1) \quad (4.103)$$

$$\text{RELAX}(\text{KE}, \text{LINRLX}, 0.0001) \quad (4.104)$$

$$\text{RELAX}(\text{OMEG}, \text{LINRLX}, 0.00001) \quad (4.105)$$

Esta variante nos proporciona una subrelajación lineal del siguiente tipo,

$$\text{Valor aceptado} = \text{valor 'old'} + \text{factor} \cdot (\text{valor 'new'} - \text{valor 'old'}). \quad (4.106)$$

El factor que se utiliza se especifica en el último término del paréntesis. El factor se elige habitualmente entre ‘0.0’ y ‘1.0’; para la presión y la velocidad, el valor recomendado se sitúa entre 0.1 - 0.3, los valores más bajos consiguen un mayor efecto de subrelajación. En el caso de las variables turbulentas, los valores recomendados son bastante inferiores a 0.1.

### OTROS COMANDOS DE INTERÉS

Para terminar esta breve introducción a los comandos utilizados en la creación del fichero ‘q1’, destacamos las siguientes órdenes que determinan el modelo de turbulencia y esquema de discretización utilizado, así como el número de iteraciones realizadas por el programa.

Para determinar el modelo de turbulencia utilizado se utiliza el comando ‘turmod’, en nuestro caso se utiliza un modelo  $k - \omega$  para bajos números de Reynolds que se especifica como sigue:

$$\text{TURMOD}(\text{KOMODL-LOWRE}) \quad (4.107)$$

En el caso del esquema de discretización utilizado, que en nuestro caso es el MUSCL, además de este se deben especificar las variables resueltas por este método. Esto se hace con la orden ‘scheme’ (4.111).

$$\text{SCHEME}(\text{MUSCL}, \text{omeg}, \text{KE}, \text{U1}, \text{V1}) \quad (4.108)$$