

# El Problema de Markus-Yamabe en el Duopolio de Cournot

**M<sup>a</sup> Belén Cobacho Tornel**

Dpto. Métodos Cuantitativos e Informáticos. Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: belen.cobacho@upct.es

**José S. Cánovas Peña**

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: jose.canovas@upct.es

**Roberto J. Cañavate Bernal**

Dpto. Métodos Cuantitativos e Informáticos. Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: r.canavate@upct.es

**Palabras clave:** Duopolio de Cournot, Equilibrio, Atractor Global.

## Resumen

La dinámica de un duopolio de Cournot puede ser modelizada mediante una función antitriangular en dos dimensiones, es decir, una función de la forma  $F(x, y) = (f(y), g(x))$ , donde  $f$  y  $g$ , (las funciones de reacción), son funciones unidimensionales continuas, y  $x$  e  $y$  son las cantidades que producen dos empresas rivales. Las propiedades dinámicas de estas funciones de Cournot están relacionadas con la dinámica de funciones unidimensionales. En este trabajo probamos que el problema de Markus-Yamabe tiene respuesta afirmativa para funciones antitriangulares (o de Cournot), esto es, si  $(x_0, y_0)$  es un punto de equilibrio del juego duopolista, y los valores propios de la matriz  $DF(x, y)$  tienen valor absoluto menor que 1 para cualquier par  $(x, y)$ , entonces se alcanza  $(x_0, y_0)$  mediante iteraciones de la función  $F$ , cualesquiera que sean las cantidades  $x$  e  $y$  de partida.

# 1 Introducción

El *Duopolio de Cournot* consiste en dos empresas que compiten produciendo un mismo bien, o bienes sustitutivos perfectos. Cada empresa debe decidir cuál ha de ser la cantidad producida, teniendo en cuenta la producción de la empresa rival, y con el objetivo de maximizar sus beneficios. Este modelo puede ser ajustado mediante una función antitriangular, es decir, una función de la forma

$$F(x, y) = (f(y), g(x)),$$

donde  $x$  e  $y$  son las cantidades de producto que lanzan al mercado las empresas 1 y 2 respectivamente, y  $f$  y  $g$  son funciones continuas, llamadas funciones de reacción de las empresas. Dichas funciones se obtienen al plantear un sistema de ecuaciones para maximizar los beneficios.

El sistema de ecuaciones que surge al plantear el problema de maximización de beneficios para las dos empresas, en el caso de demanda lineal y costes lineales, es sencillo de resolver y se puede calcular el punto de equilibrio sin dificultad alguna. Sin embargo, este caso se ajusta bien poco a los casos reales. Algunos autores (véase [2, 10, 11]), proponen ejemplos de funciones de reacción no lineales. Entre los casos no lineales puede suceder que el sistema no pueda ser resuelto directamente, o que los duopolistas desconozcan la función de reacción de su rival, necesitando entonces experimentar para obtener información acerca de la respuesta del mercado ante sus decisiones.

Por otro lado, hemos de hacer la consideración de que las funciones de reacción no son mediciones exactas del comportamiento real de las empresas, sino meras aproximaciones de éste, y lo mismo ocurre con el punto de equilibrio que se alcanza mediante estas funciones. De este modo, cobra sentido el estudio del carácter dinámico del juego, el cual puede ser modelizado mediante iteraciones sucesivas de la función  $F$  (bidimensional), cuyas propiedades dinámicas están altamente relacionadas con las de las funciones de reacción (unidimensionales) (véase [1, 2, 3, 8]).

Nosotros vamos a ocuparnos de determinar cuándo el punto de equilibrio del juego se alcanza mediante iteraciones de la función  $F$ , independientemente de las cantidades producidas inicialmente por las empresas. El resultado se obtiene como aplicación del Problema de Markus-Yamabe a las funciones antitriangulares.

El problema discreto de Markus-Yamabe en dimensión  $m$  ( $PDMY(m)$ ) es el siguiente:

Dada una función  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $F(0) = 0$ , y tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  los autovalores de la matriz jacobiana  $DF(x)$  tienen módulo menor o igual que 1, determinar si 0 es un atractor global del sistema dinámico discreto generado por  $F$ .

En las secciones 2 y 3 planteamos el modelo y estudiamos algunas propiedades de su dinámica. En la sección 4 repasamos los resultados obtenidos para el problema discreto de Markus-Yamabe, y probamos que se tiene respuesta afirmativa para funciones antitriangulares.

## 2 Planteamiento del modelo

Se consideran dos empresas que compiten produciendo un mismo bien, o bienes sustitutivos perfectos. Cada empresa se enfrenta al problema de determinar qué cantidad producir, teniendo en cuenta la producción de la empresa rival, y con el objetivo de maximizar sus beneficios.

Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}$  los *espacios de estrategia* (conjuntos de las posibles cantidades que pueden producir) de las empresas 1 y 2 respectivamente, los cuales supondremos intervalos.

Sean  $C_1(x)$  y  $C_2(y)$  las funciones de costes de las empresas 1 y 2 cuando éstas producen cantidades  $x \in X$  e  $y \in Y$  respectivamente, y sea  $p = d(Q)$  la función de demanda inversa, que expresa el precio en función de la cantidad total de producto,  $Q = x + y$ . Entonces, la función de beneficio para cada empresa será

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= d(Q)x - C_1(x) \\ B_2(x, y) &= d(Q)y - C_2(y) \end{aligned}$$

entendiendo que la única variable de decisión para la empresa 1 es la cantidad  $x$ , mientras que para la empresa 2 es la cantidad  $y$ .

Llamamos  $x_n \in X$  e  $y_n \in Y$  a las cantidades que producen las empresas 1 y 2 respectivamente en el periodo de tiempo  $n \geq 0$ . Suponemos que, en el periodo  $n + 1$ , la empresa 1 decide producir una cantidad  $x_{n+1}$ , con el objetivo maximizar su función de beneficios. Simultáneamente y con el mismo objetivo para sus beneficios, la empresa 2 decide producir una cantidad  $y_{n+1}$ , que la empresa 1 desconoce. Así,  $x_{n+1}$  deberá verificar:

$$B_1(x_{n+1}, y_n) = \max_{x \in X} B_1(x, y_n) \quad (1)$$

donde la empresa 1 espera que la empresa 2 produzca la cantidad  $y_n$  que produjo en el periodo anterior. Análogamente,  $y_{n+1}$  deberá verificar:

$$B_2(x_n, y_{n+1}) = \max_{y \in Y} B_2(x_n, y). \quad (2)$$

**Definición 2.1.** Decimos que las funciones  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : X \rightarrow Y$  son funciones de reacción del modelo expuesto si

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} B_1(x, y) &= B_1(f(y), y), \quad \forall y \in Y \\ \max_{y \in Y} B_2(x, y) &= B_2(x, g(x)), \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Supuesto que las funciones consideradas son derivables, para obtener el máximo beneficio deberán encontrarse los puntos que anulen la primera derivada de cada una de las funciones de beneficio:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}(x, y) = d'(Q)x - C'_1(x) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial y}(x, y) = d'(Q)y - C'_2(y) = 0$$

Bajo la suposición de que las funciones de beneficios son estrictamente cóncavas, por el Teorema de la Función Implícita, los problemas (1) y (2) tienen solución única (véase [6]), y existirán, por tanto, dos funciones de reacción  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : X \rightarrow Y$  únicas y continuas, tales que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(y_n) \text{ es solución al problema (1) } \forall n \geq 0 \\ y_{n+1} &= g(x_n) \text{ es solución al problema (2) } \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Así pues, la cantidad que decide producir una empresa en un momento determinado es una función de la cantidad que produjo su rival en el momento anterior.

**Definición 2.2.** Dadas dos funciones de reacción  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : X \rightarrow Y$ , se define el Cournot Tâtonnement con condición inicial  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ , como la trayectoria

$$\{(x_n, y_n) = F^n(x_0, y_0), \quad \forall n \geq 0\},$$

siendo  $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$  la función

$$F(x, y) = (f(y), g(x)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

que llamaremos función de Cournot.

Una función de Cournot,  $F(x, y) = (f(y), g(x))$ , con  $f : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas, se denomina en Matemáticas función antitriangular bidimensional (véase [1]). A lo largo del texto emplearemos uno u otro término indistintamente.

**Definición 2.3.** *En las condiciones anteriores, se dice que  $(x_0^*, y_0^*)$  es un punto de equilibrio del juego si*

$$\begin{aligned}x_0^* &= f(y_0^*) \\ y_0^* &= g(x_0^*)\end{aligned}$$

*es decir, si las funciones de reacción se cortan en el punto  $(x_0^*, y_0^*)$ .*

El objetivo del juego es buscar los puntos de equilibrio, ya que éstos son solución del sistema de ecuaciones (3), y por tanto es en éstos donde ambas empresas alcanzan simultáneamente su máximo beneficio. Esto no siempre se puede conseguir de forma sencilla. Estudiamos, por tanto, condiciones bajo las cuales queda garantizado que se alcanza el punto de equilibrio mediante iteraciones sucesivas de la función  $F$ , cualesquiera que sean las cantidades de producción iniciales.

### 3 Propiedades de la dinámica de Cournot

**Definición 3.1.** *Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua, siendo  $A$  un subconjunto cualquiera de  $\mathbb{R}^m$ . Se dice que un punto  $p \in A$  es un punto fijo de  $F$  si  $F(p) = p$ .*

El punto de equilibrio de Cournot es un punto fijo de la función de Cournot,  $F(x, y) = (f(y), g(x))$ . En efecto, sea  $p = (x_0^*, y_0^*)$  un punto de equilibrio de Cournot, es decir,

$$\begin{aligned}x_0^* &= f(y_0^*) \\ y_0^* &= g(x_0^*),\end{aligned}$$

Entonces  $F(p) = F(x_0^*, y_0^*) = (f(y_0^*), g(x_0^*)) = (x_0^*, y_0^*) = p$ .

Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua. Denotamos por  $F^k$  a la composición de  $F$  con ella misma  $k$  veces, es decir  $F^k = F \circ F \circ \dots \circ F$ , entendiéndose que  $F^0$  es la función identidad. Dado un punto cualquiera  $p \in A$ , la *trayectoria* u *órbita* de  $p$  es la sucesión  $\{F^n(p)\}_{n \geq 0}$ .

Llamamos sistema dinámico discreto generado por  $F$  al conjunto de las trayectorias de todos los puntos  $p \in A$ .

**Definición 3.2.** Sea  $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua, y sea  $p_0$  un punto fijo de  $F$ . Se dice que  $p_0$  es un punto atractor si existe un entorno  $U$  de  $p_0$  tal que, para todo  $p \in U$ , la trayectoria de  $p$  converge a  $p_0$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p) = p_0.$$

Decimos que un punto fijo  $p_0$  es atractor global del sistema dinámico discreto generado por  $F$  si para todo  $p \in A$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p) = p_0.$$

Un punto fijo  $p_0$  de la función  $F$  se dice que es un repulsor si existe un entorno  $U$  de  $p_0$  tal que para todo  $p \in U$ ,  $p \neq p_0$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $F^n(p) \notin U$ .

Puesto que la función de Cournot  $F$  actúa de la forma

$$F(x, y) = (f(y), g(x)), \text{ para todo } (x, y) \in X \times Y,$$

las iteradas sucesivas de orden par  $n = 2k$  de la función en un punto  $(x, y)$  vienen dadas por:

$$F^{2k}(x, y) = (h_1^k(x), h_2^k(y)), \quad (4)$$

y las iteradas de orden impar  $n = 2k + 1$ :

$$F^{2k+1}(x, y) = (f(h_2^k(y)), g(h_1^k(x))), \quad (5)$$

siendo

$$\begin{aligned} h_1 &= f \circ g : X \rightarrow X \\ h_2 &= g \circ f : Y \rightarrow Y \end{aligned}$$

funciones continuas unidimensionales. Por tanto, existe una estrecha conexión entre las propiedades dinámicas de la función  $F$  y las de las funciones  $h_1$  y  $h_2$ . Algunas de ellas se estudian con detalle en [2]. En particular, cuando los conjuntos de estrategia  $X$  e  $Y$  coincidan y sean intervalos, podremos asegurar la existencia de un punto fijo para cada una de las funciones  $h_1$  y  $h_2$ , y por tanto también la existencia de un punto de equilibrio en el juego.

## 4 El problema discreto de Markus-Yamabe

En 1960, Markus y Yamabe [9] establecieron la siguiente conjetura:

*Sea  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $F(0) = 0$  y tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ , la matriz jacobiana  $DF(x)$  tiene todos sus autovalores con parte real negativa. Entonces 0 es un atractor global del sistema  $\dot{x} = F(x)$ , es decir, cualquier solución  $x(t)$  verifica  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

Posteriormente, en 1995, Cima, Gasull y Mañosas propusieron en [4] una versión de dicha conjetura para el caso discreto.

### Hipótesis de Markus-Yamabe (HMY)

*Sea  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Se dice que  $F$  verifica la hipótesis de Markus-Yamabe si, para todo  $p \in \mathbb{R}^m$ , la matriz  $DF(p)$  tiene todos sus autovalores con módulo menor que 1.*

### Problema discreto de Markus-Yamabe (PDMY)

*Sea  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  verificando la hipótesis HMB, y tal que  $F(0) = 0$ . ¿Es cierto que entonces el punto fijo 0 es un atractor global del sistema dinámico discreto generado por la función  $F$ ?*

En dimensión 1, la hipótesis HMY se reduce a suponer que  $|F'(p)| < 1$  para todo  $p \in \mathbb{R}$ , y el problema PDMY es cierto en este caso. En dimensión  $m \geq 2$ , la respuesta al problema PDMY es negativa en general, pero se han estudiado los siguientes casos.

El PDMY es cierto para cualquier función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. El resultado es consecuencia directa del Teorema de Liouville, que asegura que si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, tal que  $|f'(z)| < 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f'(z)$  es constante (véase [12]). Si  $f'(z) = c$ , entonces  $f(z) = cz$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . La hipótesis afirma que  $|f'(z)| = |c| < 1$ , por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |c|^n |z| = 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

La respuesta al problema es afirmativa en cualquier dimensión  $m \geq 1$  para funciones triangulares, esto es, funciones  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de la forma  $F(x) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_m))$  (véase [4]).

En [4] se prueba que, en dimensión  $m = 2$ , el PDMY se cumple para

funciones polinómicas (véase el Teorema 4.1). La demostración de este resultado se basa en el hecho de que una función polinómica de dos variables verificando la HMY puede ser transformada, mediante una transformación afín, en una función triangular (véase [7]).

**Teorema 4.1.** *Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función polinómica tal que, para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , los autovalores de la matriz  $DF(p)$  tienen módulo menor que 1. Entonces existe un único punto fijo de  $F$  que es un atractor global del sistema dinámico discreto generado por  $F$ .*

El siguiente teorema, establecido por Szlenk, demuestra que el problema PDMY no es cierto en el caso general en dimensión  $m = 2$ . La demostración aparece en [4], así como la extensión del resultado a cualquier dimensión  $m \geq 2$ .

**Teorema 4.2.** *La función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por*

$$F(x, y) = \left( -\frac{ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right),$$

con  $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$ , *satisface las siguientes propiedades:*

1. *Sea  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  un punto cualquiera, y sea  $\lambda$  un autovalor de  $DF(p)$ . Entonces  $\lambda = 0$  si  $xy = 0$ . En otro caso  $\lambda \notin \mathbb{R}$  y  $|\lambda| < \frac{\sqrt{3}}{2}k$ .*
2.  $F^4\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right)$ .
3.  *$F$  es inyectiva.*

La función  $F$  del teorema anterior es de clase  $C^1$ , y los autovalores de la matriz  $DF(p)$  tienen módulo menor que 1 para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ . Puesto que además  $F(0) = 0$ ,  $F$  verifica la hipótesis HMY. Sin embargo, el punto  $\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right)$  es un punto fijo de  $F^4$ , y por tanto su trayectoria no converge a 0, con lo que 0 no es un atractor global.

Para  $m \geq 3$ , existen incluso funciones polinómicas que dan respuesta negativa al problema PDMY (véase [5]).

**Teorema 4.3.** Para  $m \geq 3$ , sea  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  la función dada por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left( \frac{1}{2}x_1 + x_3d(x)^2, \frac{1}{2}x_2 - d(x)^2, \frac{1}{2}x_3, \dots, \frac{1}{2}x_m \right)$$

donde  $d(x) = x_1 + x_2x_3$ . Entonces el problema PDMY tiene respuesta negativa en este caso. Más concretamente, la trayectoria del punto  $p = (\frac{147}{32}, -\frac{63}{32}, 1, 0, 0, \dots, 0)$  verifica  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(p) = \infty$ .

## 5 Problema de Markus-Yamabe para funciones antitriangulares en dos dimensiones

Veamos a continuación que las funciones antitriangulares en dos dimensiones, es decir, las funciones de Cournot, verifican el problema PDMY. Como herramienta para la obtención de este resultado hacemos uso de la dinámica de funciones unidimensionales. El carácter atractor o repulsor de un punto fijo de una función unidimensional viene determinado por la derivada de la función en dicho punto. Puesto que la derivada de la función es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto, y la tangente es la mejor aproximación lineal de la función cerca del punto, la derivada determina la tasa de contracción de la función en un entorno del punto y nos lleva por tanto a conocer el comportamiento de la función alrededor del punto.

**Teorema 5.1.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x, y) = (f(y), g(x)), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

una función antitriangular de clase  $\mathcal{C}^1$ , tal que  $F(0) = 0$ , y verificando la hipótesis HMY, es decir, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la matriz  $DF(x, y)$  tiene todos sus autovalores con módulo menor que 1. Entonces  $F$  verifica el PDMY, es decir,  $0$  es un atractor global del sistema dinámico discreto generado por la función  $F$ .

*Demostración:*

La matriz Jacobiana de  $F$  en un punto cualquiera  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & f'(y) \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix}$$

y los autovalores de  $DF(x, y)$  son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +\sqrt{f'(y)g'(x)} \\ \lambda_2 &= -\sqrt{f'(y)g'(x)}.\end{aligned}$$

Por hipótesis,  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ , es decir,

$$|f'(y)g'(x)| < 1, \text{ para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Las funciones  $h_1 = f \circ g$  y  $h_2 = g \circ f$  son de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}$ , y sus derivadas tienen módulo menor que 1 en cualquier punto. En efecto, por la Regla de la Cadena, y teniendo en cuenta (6):

$$|h_1'(x)| = |f'(g(x))g'(x)| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|h_2'(y)| = |g'(f(y))f'(y)| < 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Además,  $h_1(0) = h_2(0) = 0$ . Puesto que el problema PDMY es cierto en dimensión 1, el punto 0 es atractor global para las funciones  $h_1$  y  $h_2$ , es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} h_1^k(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h_2^k(y) &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando límites en (4),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{2k}(x, y) = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} h_1^k(x), \lim_{k \rightarrow \infty} h_2^k(y) \right) = (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Veamos ahora que también las iteradas impares de  $F$  convergen a  $(0, 0)$ . Por la continuidad de las funciones  $f$  y  $g$ , si tomamos límites en (5):

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} F^{2k+1}(x, y) &= \left( \lim_{k \rightarrow \infty} f(h_2^k(y)), \lim_{k \rightarrow \infty} g(h_1^k(x)) \right) \\ &= \left( f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_2^k(y)\right), g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h_1^k(x)\right) \right) \\ &= (f(0), g(0)) = (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Luego, tanto las iteradas pares como las impares convergen al punto  $(0, 0)$ , y por tanto se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(x, y) = (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

□

El PDMY sigue siendo cierto cuando el punto fijo es un punto  $p_0 \neq 0$ . La existencia de un punto fijo queda garantizada cuando  $F$  está definida en un cuadrado  $I \times I$ , siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo, y toma valores en el mismo cuadrado.

**Lema 5.2.** *Sea  $I$  un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ , y  $f : I \rightarrow I$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $I$ , tal que  $|f'(x)| \leq 1 \forall x \in I$ . Entonces  $f$  tiene un único punto fijo en  $I$ .*

Para la existencia del punto fijo basta con que la función  $f : I \rightarrow I$  sea continua (se obtiene aplicando el Teorema del Valor Medio). La unicidad viene dada por la acotación de  $f'$ .

**Corolario 5.3.** *Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función antitriangular tal que existe un intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$  tal que  $F(I \times I) \subset I \times I$ , y verificando la HMY. Entonces existe un único punto fijo de la función  $F$ , el cual es atractor global del sistema dinámico discreto generado por  $F$ .*

*Demostración:*

Sólo falta demostrar la existencia y unicidad del punto fijo. Para ello, basta aplicar el Lema 5.2 a las funciones  $h_1 = (f \circ g) : I \rightarrow I$  y  $h_2 = (g \circ f) : I \rightarrow I$ .  $\square$

El punto fijo de la función de Cournot no siempre es un atractor global. Se ha comprobado que el modelo de Cournot puede comportarse de forma cíclica, y Rand establece en [11] que, bajo ciertas condiciones, el comportamiento puede llegar a ser caótico, es decir, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a comportamientos imprevisibles de las órbitas. En [10] Puu presenta un ejemplo en el que tiene lugar este comportamiento, y que por tanto no verifica el problema PDMY. Dicho ejemplo parte de una función de demanda isoelástica

$$p = d(Q) = \frac{1}{Q}$$

y costes marginales constantes,

$$C'_1(x) = ax, \quad C'_2(x) = by \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Las funciones de reacción son

$$f(y) = \sqrt{\frac{y}{a}} - y$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{b}} - y$$

y vienen representadas en la figura 1. Cuando  $a/b$  ó  $b/a$  (el ratio de los costes marginales) toman un valor distinto de  $3 \pm 2\sqrt{2}$ , el punto donde se cortan las funciones de reacción no es un punto estable.

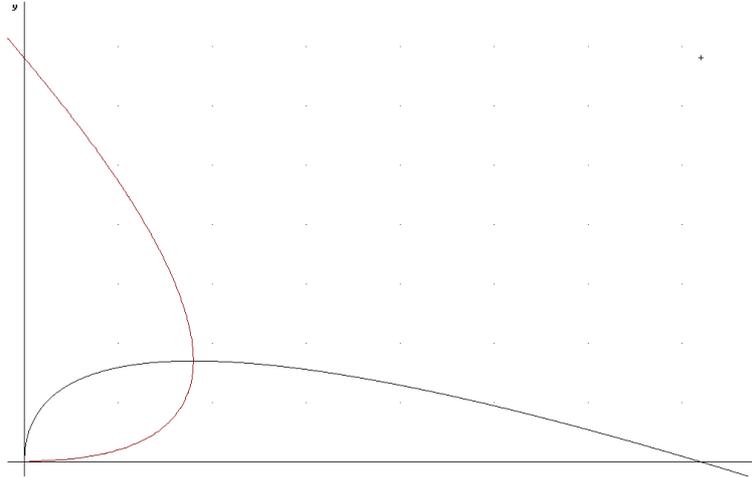


Figura 1: Curvas de reacción

Un ejemplo sencillo para el cual el PDMY se verifica, es el caso en que la función de demanda es lineal  $p(Q) = a - bQ$ , con  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , y los costes también son lineales,  $C_1(x) = h_1x + k_1$ ,  $C_2(y) = h_2y + k_2$  siendo  $h_i \in \mathbb{R}^+$  el coste unitario del producto, y  $k_i \in \mathbb{R}^+$  el coste fijo para la empresa  $i$ .

En este caso las funciones de reacción son (figura 2):

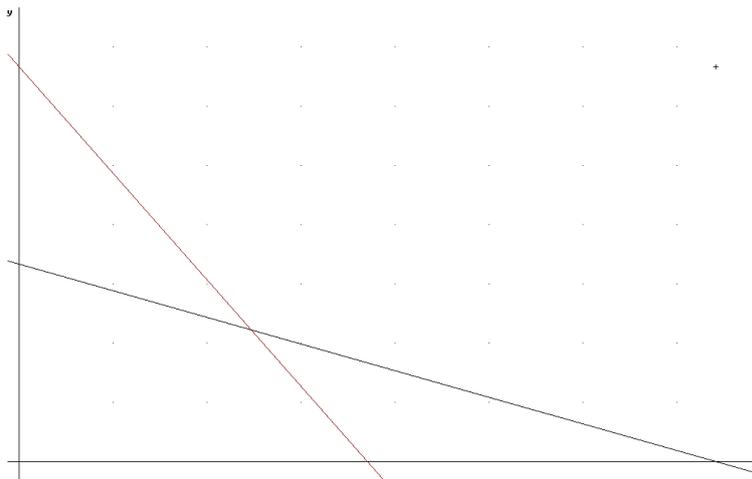


Figura 2: Curvas de reacción en el caso lineal

y la función de Cournot

$$F(x, y) = \left( \frac{a - h_1}{2b} - \frac{1}{2}y, \frac{a - h_2}{2b} - \frac{1}{2}x \right)$$

verifica claramente la hipótesis HMY, y por tanto el problema PDMY, siendo

$$\left( \frac{a - 2h_1 + h_2}{3b}, \frac{a - 2h_2 + h_1}{3b} \right)$$

el punto de equilibrio.

## 6 Conclusiones

El comportamiento del juego de Cournot en el que compiten dos empresas puede ser modelizado mediante una función antitriangular bidimensional, lo cual hace necesario estudiar la dinámica de este tipo de funciones, para así poder conocer si la reacción de las empresas a lo largo del tiempo las conduce al equilibrio, o si, por el contrario, las conduce a un comportamiento cíclico o a un comportamiento caótico.

El problema de Markus-Yamabe aplicado a funciones antitriangulares proporciona una condición suficiente, a partir de las funciones de reacción de las empresas, para que éstas lleguen a alcanzar el equilibrio, independientemente de las cantidades de producción iniciales.

## Referencias

- [1] F. Balibrea, A. Linero. *On the periodic structure of antitriangular maps on the unit square*. Ann. Math. Sil. 13, (1999), 39-50.
- [2] G. I. Bischi, C. Mammama, L. Gardini. *Multistability and cyclic attractors in duopoly games*. Chaos, Solitons & Fractals, 11, (2000), 543-564.
- [3] J. S. Cánovas, A. Linero. *On the topological dynamic classification of duopoly games*. Chaos, Solitons & Fractals, (to appear).
- [4] A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas. *The Discrete Markus-Yamabe Problem*. Nonlinear Analysis, 35, (1999), 343-354.

- [5] A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, F. Mañosas. *A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe Conjecture*. Advances in Mathematics, 131, (1997), 453-457.
- [6] R. A. Dana, L. Montrucchio. *Dynamic complexity in duopoly games*. Journal of Economic Theory, 40, (1986), 40-56.
- [7] F. Dillen. *Polynomials with constant Hessian determinant*. Journal of Pure and applied Algebra 71, (1991), 13-18.
- [8] A. Linero. *Cuestiones sobre dinámica topológica de algunos sistemas bidimensionales y medidas invariantes en sistemas unidimensionales asociados*. Tesis Doctoral, (1998), Universidad de Murcia.
- [9] L. Markus, H. Yamabe. *Global stability criteria for differential systems*. Osaka Math, 2, (1960), 305-317.
- [10] T. Puu. *Attractors, Bifurcations & Chaos*. Nonlinear Phenomena in Economics. Springer-Verlag. Heidelberg, (2000).
- [11] D. Rand. *Exotic phenomena in games and duopoly models*. Journal of Mathematics Economics, 5, (1978), 173-184.
- [12] W. Rudin. *Análisis real y complejo*. Alhambra. Madrid, (1979).