COMUNICACIÓN

El efecto de la función de demanda en modelos de competencia espacial a la Cournot

Ruiz Marín, Manuel

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: manuel.ruiz@upct.es

García Córdoba, Jose Antonio

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: josea.garcia@upct.es

Cobacho Tornel, Mª Belén

Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos

Universidad Politécnica de Cartagena

E-mail: belen.cobacho@upct.es

Dirección de correo de los autores

Facultad de Ciencias de la Empresa

Paseo Alfonso XIII, 50

30203 Cartagena (Murcia)

Resumen

En este trabajo se estudia el efecto que produce, en las tendencias de localización de las empresas, un cambio en la función de demanda en un mercado duopolista. Cuando se considera que la función de demanda es una función hiperbólica en cada punto del mercado, las localizaciones que eran equilibrio con una demanda lineal dejan de serlo, la tendencia a reducir los costes de transporte parece debilitarse y las empresas tienden a alejarse la una de la otra.

1. Introducción

Hotelling (1929) había establecido con su *principio de mínima diferenciación* que las empresas que compiten en un mercado tienden a localizarse en un mismo punto, siendo este punto el centro del mercado cuando éste tiene forma de segmento. Aunque la intuición parece indicar que es así como ocurre en la realidad, D'Aspremont et al. (1979) probaron que los resultados de Hotelling tal y como él los planteó no eran correctos, debido a que la competencia en precios de empresas que comparten la misma ubicación lleva a éstas a obtener beneficios nulos. En el mismo artículo se probaba además que, con costes de transporte cuadráticos en función de la distancia, las empresas tienden a alejarse lo máximo posible la una de la otra.

En el artículo de D'Aspremont y en gran cantidad de estudios sobre localización estratégica posteriores al de Hotelling se ha mantenido la suposición de competencia en precios (a la Bertrand), y el resultado general ha sido una tendencia a la dispersión como una forma de diferenciación de productos y por tanto de aumento de su poder de mercado [Neven (1985), Martínez-Giralt y Neven (1988)]. Sólo podría tener lugar una aglomeración en el caso de que las diferencias no espaciales de los productos fuesen lo suficientemente grandes.

A pesar de que en muchos casos la consideración de los precios como variable estratégica parece ser más realista frente a la de competencia en cantidades, el uso de las hipótesis de Cournot es respaldado por los resultados de Kresp y Scheinkman (1983) en los que una competencia en precios con restricciones de capacidad llevaba a los mismos resultados que una competencia a la Cournot. Además, Anderson y Neven (1991) apuntan que la presencia de unos costes de transporte hace que las decisiones sobre la asignación de output a las diferentes localizaciones deban tomarse de forma inflexible y que resulte más fácil ajustar los precios que las cantidades. La consideración de una competencia en cantidades aparece en la competencia espacial en otros trabajos como Anderson y Neven (1991), Gupta et al. (1997), Mayer (2000), Chamorro (2000a), Chamorro (2000b).

En un intento por rescatar el principio de mínima diferenciación, Anderson y Neven (1991) presentaron un modelo de competencia localización-cantidad entre dos empresas que producen el mismo bien en un mercado lineal y bajo la suposición de discriminación espacial de precios. Con demanda lineal y una función de costes de transporte convexa, Anderson y Neven (1991) prueban que existe un único equilibrio, en el que las empresas tienden a la mínima diferenciación colocándose ambas en el centro del mercado. En las conclusiones del artículo se conjetura que los resultados no cambiarían al considerar otra clase más amplia de funciones de demanda.

Los resultados de Anderson y Neven (1991) han sido cuestionados bajo otros puntos de vista. Así, Gupta et al. (1997) presta atención a la distribución de los consumidores en el mercado, y se ha comprobado que los resultados de Anderson y Neven (1991) permanecen únicamente cuando los consumidores están distribuidos uniformemente en el mercado. Chamorro (2000a) tiene en cuenta un precio de reserva para los consumidores; cuando éste es lo suficientemente grande tiene lugar la aglomeración. Además, Mayer (2000) prueba que tiene lugar una aglomeración en el centro del mercado cuando dicho punto conlleva costes de producción mínimos.

Con esto podemos hablar de una tendencia general a la aglomeración en los modelos de competencia espacial en cantidades, aunque se ha comprobado en estos mismos trabajos que las características de las funciones del modelo pueden conducir a resultados distintos.

La posibilidad de proliferación de plantas en un juego en dos etapas localización-precio fue considerada por Martínez-Giralt y Neven (1988). Sus resultados muestran que los incentivos para relajar la competencia de forma que ninguna de las empresas preferirá abrir más de una planta de producción. Sin embargo, Chamorro (2000b) muestra que una competencia en cantidades hace que la tendencia a la reducción de los costes de transporte predomine frente a la reducción de la competencia, de forma que las empresas abrirán el mayor número de plantas posible y se situarán equidistantes las unas de las otras.

En nuestro trabajo nos preguntamos sobre el papel que juega la función de demanda en las tendencias de localización de las empresas en modelos en dos etapas localización-cantidades. Con una función de demanda elástica, a la que llamamos *demanda hiperbólica*, $p = b/Q$, hemos podido comprobar que las tendencias de las empresas difieren de los resultados obtenidos cuando se considera una demanda lineal.

Este trabajo está estructurado como sigue: en las secciones 2 y 3 estudiamos dos modelos de mercado lineal y circular respectivamente, y en la sección 4 presentamos las conclusiones.

2. Mercado lineal

Estudiamos un equilibrio perfecto en un juego en dos etapas localización-cantidades, en el que dos empresas 1 y 2 producen un bien homogéneo para un mercado lineal de longitud 1, y siguiendo las consideraciones de Anderson y Neven (1991), se mantiene el supuesto de discriminación espacial de precios y ausencia de arbitraje por parte de los consumidores.

En una primera etapa las empresas eligen sus localizaciones. Después, deben elegir las cantidades a producir para cada punto $x \in I = [0, 1]$ del mercado, el cual suponemos que genera una función de demanda inversa $P(x) = b/Q(x)$, siendo $P(x)$ el precio al que las empresas venden en dicho punto, $Q(x)$ la cantidad total demandada, y b es un número real positivo[1]. En esta segunda etapa en las que las empresas eligen las cantidades, el equilibrio perfecto puede ser caracterizado por un conjunto de equilibrios de Nash-Cournot independientes, uno en cada punto $x \in I$, suponiendo que las cantidades situadas en puntos diferentes son estratégicamente independientes.

Suponemos dadas las localizaciones de las empresas en x_1 y x_2 respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 \leq x_2$ con

[1]Esta función de demanda presenta el problema de que cuando el precio tiende a infinito, $Q(x) = 0$. Tal caso es puramente formal y la función no presenta problema alguno en los demás casos.

$x_i \in I = [0, 1]$ para $i = 1, 2$ (Figura 1).

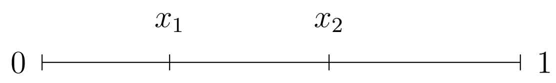

Figura 1: Mercado lineal

Supondremos que los costes marginales de producción para las empresas son constantes e iguales a α, y que las empresas pagan unos costes de transporte lineales $t|x - x_i|$, $i = 1, 2$, al transportar una unidad del producto desde su localización x_i al punto $x \in I$.

Bajo las condiciones anteriores, la función de beneficios en cada punto $x \in I$ para la empresa i viene dada por

$$\pi_i(x) = \left[\frac{b}{Q(x)} - t|x - x_i|) - \alpha \right] q_i(x)$$

donde $q_i(x)$ es la cantidad demandada en el punto x del mercado a la empresa i, y $Q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ la cantidad total demandada a ambas empresas. De las condiciones de maximización de beneficios de ambas empresas en cada punto se obtienen las cantidades, precios y demanda total de equilibrio para cada $x \in I$:

$$q_i(x) = \frac{b \cdot [t|x - x_j| + \alpha]}{[t|x - x_i| + t|x - x_j| + 2\alpha]^2}$$

$$P(x) = t|x - x_i| + t|x - x_j| + 2\alpha$$

$$Q(x) = \frac{b}{t|x - x_i| + t|x - x_j| + 2\alpha}$$

Y el beneficio que obtiene la empresa i en el equilibrio en cualquier punto $x \in I$ viene dado por:

$$\pi_i(x) = \frac{b \cdot [t|x - x_j| + \alpha]^2}{[t|x - x_i| + t|x - x_j| + 2\alpha]^2}$$

para $i, j \in \{1, 2\}$, con $i \neq j$.

A la vista de las expresiones anteriores, podemos ver que en cada punto del mercado las cantidades que suministran las empresas dependen de las localizaciones de éstas. A cualquier punto $x \in I$ la empresa más cercana suministrará una mayor cantidad de output, la cual decrece al aumentar la distancia entre la empresa suministradora y el punto x. Ambas empresas producen para todos los puntos del mercado excepto para el punto donde se localiza la empresa rival.

La función de beneficio total para la empresa i, cuando las empresas se sitúan en x_1 y x_2 respectivamente, viene dada por

$$\Delta_i(x_1, x_2) = \int_0^1 \pi_i(x)\ dx \quad i = 1, 2.$$

Es decir,

$$\Delta_1(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \frac{b\cdot[t(x_2-x)+\alpha]^2}{[t(x_1-x)+t(x_2-x)+2\alpha]^2}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{b\cdot[t(x_2-x)+\alpha]^2}{[t(x-x_1)+t(x_2-x)+2\alpha]^2}\,dx + \int_{x_2}^{1} \frac{b\cdot[t(x-x_2)+\alpha]^2}{[t(x-x_1)+t(x-x_2)+2\alpha]^2}\,dx$$

$$\Delta_2(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \frac{b\cdot[t(x_1-x)+\alpha]^2}{[t(x_2-x)+t(x_1-x)+2\alpha]^2}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{b\cdot[t(x-x_1)+\alpha]^2}{[t(x_2-x)+t(x-x_1)+2\alpha]^2}\,dx + \int_{x_2}^{1} \frac{b\cdot[t(x-x_1)+\alpha]^2}{[t(x-x_2)+t(x-x_1)+2\alpha]^2}\,dx$$

Para la maximización del beneficio total de las empresas 1 y 2, las derivadas parciales de primer orden de las funciones de beneficio respecto de las localizaciones de las empresas deben anularse. Estas derivadas vienen dadas por

$$\frac{1}{b}\frac{\partial\Delta_1}{\partial x_1} = -\int_0^{x_1} \frac{2t\,[t(x_2-x)+\alpha]^2}{[t(x_1-x)+t(x_2-x)+2\alpha]^3}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{2t\,[t(x_2-x)+\alpha]^2}{[t(x-x_1)+t(x_2-x)+2\alpha]^3}\,dx + \int_{x_2}^{1} \frac{2t\,[t(x-x_2)+\alpha]^2}{[t(x-x_1)+t(x-x_2)+2\alpha]^3}\,dx \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b}\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} = & -\int_0^{x_1} \frac{2t\left[t(x_1-x)+\alpha\right]^2}{\left[t(x_1-x)+t(x_2-x)+2\alpha\right]^3}\, dx \\
& -\int_{x_1}^{x_2} \frac{2t\left[t(x-x_1)+\alpha\right]^2}{\left[t(x-x_1)+t(x_2-x)+2\alpha\right]^3}\, dx \\
& +\int_{x_2}^{1} \frac{2t\left[t(x-x_1)+\alpha\right]^2}{\left[t(x-x_1)+t(x-x_2)+2\alpha\right]^3}\, dx
\end{aligned} \tag{2}
$$

Proposición 2.1. *Una condición necesaria para el equilibrio es que las empresas ocupen posiciones simétricas en el mercado.*

Demostración:

Aplicando el cambio de variable $y = x_1 + x_2 - x$ en la expresión (2) podemos reescribir $\partial\Delta_2/\partial x_2$ como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b}\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} = & -\int_{x_2}^{x_1+x_2} \frac{2t\left[t(x_2-x)+\alpha\right]^2}{\left[t(x-x_1)+t(x_2-x)+2\alpha\right]^3}\, dx \\
& -\int_{x_1}^{x_2} \frac{2t\left[t(x_2-x)+\alpha\right]^2}{\left[t(x_2-x)+t(x-x_1)+2\alpha\right]^3}\, dx \\
& +\int_{x_1+x_2-1}^{x_1} \frac{2t\left[t(x_2-x)+\alpha\right]^2}{\left[t(x_1-x)+t(x_2-x)+2\alpha\right]^3}\, dx
\end{aligned} \tag{3}
$$

Y sumando las expresiones (1) y (3) nos queda

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b}\left[\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2}\right] = & -\int_0^{x_1+x_2-1} \frac{2t\left[t(x_2-x)+\alpha\right]^2}{\left[t(x_1-x)+t(x_2-x)+2\alpha\right]^3}\, dx \\
& -\int_1^{x_1+x_2} \frac{2t\left[t(x-x_2)+\alpha\right]^2}{\left[t(x-x_1)+t(x-x_2)+2\alpha\right]^3}\, dx
\end{aligned} \tag{4}
$$

Los integrandos de ambos sumandos son positivos y en consecuencia, tanto si es $x_1 + x_2 \geq 1$, como si es $x_1 + x_2 \leq 1$, la expresión (4) sólo se anula en caso de que coincidan los límites de integración de ambas integrales, es decir, cuando $x_1 = 1 - x_2$. Cualquier punto de equilibrio ha de anular ambas derivadas parciales y por tanto también anularía la expresión (4), por lo que, en caso de existir, dicho equilibrio tendrá lugar cuando $x_1 = 1 - x_2$.

$\square$

Cuando $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, las dos derivadas de (1) y de (2) se anulan, ya que, en ambos casos, el segundo sumando se anula por coincidir en la integral sus límites de integración, y el primer sumando se anula con el tercero, como es fácil comprobar aplicando el cambio de variable $x = 1 - y$ en la integral del tercer sumando. Esto nos lleva a pensar que, una vez más, una aglomeración de las empresas en el centro del mercado conduce al equilibrio. Sin embargo no ocurre así, como comprobamos a continuación.

Proposición 2.2. *Bajo las condiciones del modelo propuesto, la aglomeración de las empresas en un mismo punto no es un punto de equilibrio, debido a que existe una desviación beneficiosa cuando tienden a colocarse en extremos opuestos del mercado.*

Demostración:

Un cálculo simple demuestra que el beneficio que obtienen las empresas cuando comparten la misma posición en cualquier punto (a, a) es el mismo para ambas y toma el valor

$$\Delta_i(a, a) = \frac{b}{4}$$

para todo $a \in I$, $i = 1, 2$, de modo que si Δ_1 fuese mayor en $(1/2, 1/2)$

que en $(0,1)$, también lo sería Δ_2. De esta forma obtendríamos que

$$\begin{array}{ccccc} \frac{b}{4} & = & \Delta_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \geq & \Delta_1(0,1) \\ \frac{b}{4} & = & \Delta_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \geq & \Delta_2(0,1) \end{array}$$

y sumando ambas igualdades en la expresión anterior obtenemos que

$$\frac{b}{2} \geq \Delta_1(0,1) + \Delta_2(0,1) = \int_0^1 \frac{b\left[[t(1-x)+\alpha]^2 + [tx+\alpha]^2\right]}{[t(1-x)+tx+2\alpha]^2}\, dx$$

Veamos ahora que

$$\frac{\left[[t(1-x)+\alpha]^2 + [tx+\alpha]^2\right]}{[t(1-x)+tx+2\alpha]^2} > \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in I,\ x \neq \frac{1}{2}\,.$$

En efecto,

$$\frac{\left[[t(1-x)+\alpha]^2 + [tx+\alpha]^2\right]}{[t(1-x)+tx+2\alpha]^2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\,[t(1-x)+\alpha]^2 + 2\,[tx+\alpha]^2 > [t(1-x)+\alpha]^2 + [tx+\alpha]^2 + 2\,[t(1-x)+\alpha]\,[tx+\alpha] \Leftrightarrow$$

$$[t(1-x)-tx]^2 > 0\,,$$

que lo es para todo $x \neq \frac{1}{2}$.

Luego tenemos la cadena de desigualdades

$$\frac{b}{2} \geq \int_0^1 \frac{b\left[[t(1-x)+\alpha]^2 + [tx+\alpha]^2\right]}{[t(1-x)+tx+2\alpha]^2}\, dx > \frac{b}{2}$$

lo cual es una contradicción y por tanto el beneficio de ambas empresas es mayor cuando éstas se localizan en extremos opuestos del mercado que cuando se aglomeran en un mismo punto. La aglomeración no es, por tanto, un equilibrio.

$\square$

3. Mercado circular

Consideramos dos empresas A y B que producen un bien homogéneo en un mercado circular, a lo largo del cual los consumidores se distribuyen uniformemente. Cada empresa puede abrir a lo sumo dos plantas de producción y no hay empresas en el interior del círculo.

Denotamos por (j, i) a la planta i de la empresa j, con $j = A, B$ e $i = 1, 2$, y por x_i^j a la localización en el mercado de la planta (j, i). Llamamos $q_i^j(x)$ a la cantidad que (j, i) suministra a cada punto x del mercado, $x \in [0, 2\pi]$. Denotamos además por $q^j(x) = q_1^j(x) + q_2^j(x)$ a la cantidad que la empresa j suministra en en punto x, y por $Q(x) = q^A(x) + q^B(x)$ a la cantidad total suministrada por ambas empresas en dicho punto.

El resto de las hipótesis coinciden con las del mercado lineal: suponemos que la demanda es una función hiperbólica $P(x) = b/Q(x)$ en cada punto x del mercado. Las empresas compiten en cantidades en cada punto x, el coste marginal de producción es constante e igual a α, y las empresas transportan el producto desde las plantas de producción a los consumidores. El coste que conlleva a la empresa j transportar una unidad de producto desde la planta i a la localización x es $T_i^j(x) = t|x - x_i^j|$.

Bajo las hipótesis anteriores, el beneficio que la empresa j obtiene de producir en cada punto $x \in [0, 2\pi]$ viene dado por:

$$\Pi^j(x) = \frac{b}{Q(x)}\, q^j(x) - \left[T_1^j(x) + \alpha\right] q_1^j(x) - \left[T_2^j(x) + \alpha\right] q_2^j(x) \qquad (5)$$

La cantidad que la planta (j, i) suministra en el equilibrio para cada punto x, dado que i es la planta de j más cercana a x viene dada por la expresión:

$$q_i^j(x) = \frac{b \cdot \left[T_{min}^{rival}(x) + \alpha\right]}{\left[T_{min}^{rival}(x) + T_i^j(x) + 2\alpha\right]^2} \tag{6}$$

donde el subíndice *min* indica la planta más cercana al punto x, y el superíndice *rival* indica la empresa rival. Cuando la planta (j, i) no es la más cercana al punto x la cantidad de equilibrio suministrada es $q_i^j(x) = 0$.

De las cantidades de equilibrio obtenemos que el precio de equilibrio en la localización x está dado por $P(x) = T_{min}^A(x) + T_{min}^B(x) + 2\alpha$. Y el beneficio que la empresa j obtiene en el equilibrio de su producción para el punto x es:

$$\Pi^j(x) = \frac{b\left[T_{min}^{rival}(x) + \alpha\right]^2}{\left[T_{min}^{rival}(x) + T_{min}^j(x) + 2\alpha\right]^2} \tag{7}$$

Si S_i^j es el sector donde suministra la planta (j, i), el beneficio total que la empresa j obtiene en dicho sector es:

$$\Delta_i^j(x_{min}^j, x_{min}^{rival}) = \int_{S_i^j} \Pi^j(x)\ dx = \int_{S_i^j} \frac{b\left[T_{min}^{rival}(x) + \alpha\right]^2}{\left[T_{min}^{rival}(x) + T_{min}^j(x) + 2\alpha\right]^2}\ dx \tag{8}$$

Basándonos en los trabajos de Martínez-Giralt y Neven (1988), y de Chamorro (2000b), hemos estimado oportuno suponer cierta simetría o cuasi-simetría en las localizaciones de las plantas, y consideramos que las plantas de producción están situadas en extremos opuestos de un mismo diámetro del mercado. Dada la simetría del modelo, parece que la eliminación de dicha hipótesis no conduciría a resultados distintos, aunque no quiere decir esto que quede excluida la posibilidad del equilibrio en disposiciones asimétricas.

Dentro de este modelo de localizaciones simétricas, podemos encontrar a su vez, dos tipos de distribución de las plantas:

- *Plantas de producción vecinas:* corresponde al caso en que las dos plantas de la misma empresa están en posiciones consecutivas en el mercado.
- *Plantas de producción intercaladas:* entre las dos plantas de la misma empresa hay una planta de la empresa rival.

En el artículo de Chamorro (2000b) se demuestra que el único equilibrio tiene lugar cuando las empresas sitúan sus plantas de forma intercalada en los extremos de dos diámetros perpendiculares, quedando además excluida la opción de abrir únicamente una planta de producción (Figura 2).

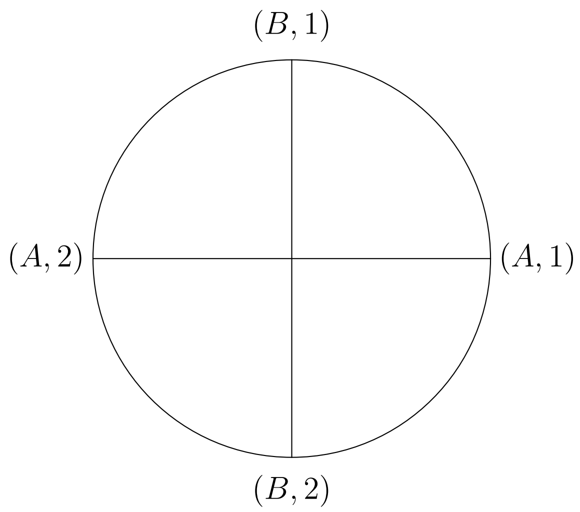

Figura 2: Equilibrio en el modelo de Chamorro (2000b)

Sin embargo, cuando se considera una demanda hiperbólica encontramos que existe un incremento de beneficio precisamente cuando las empresas rechazan la proliferación de plantas, abriendo cada una de ellas una única planta de producción y localizándolas en los extremos de un mismo diámetro, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *En el conjunto de todas las posibles localizaciones cuasi-simétricas, una disposición de plantas intercaladas en extremos opuestos de dos diámetros perpendiculares no es equilibrio, debido a que existe una desviación beneficiosa cuando las empresas prescinden de la proliferación de plantas y se sitúan en extremos opuestos de un diámetro.*

Demostración:

Por comodidad en los cálculos, supondremos que 0 es el punto medio entre las plantas $(A, 1)$ y $(A, 2)$, y que por tanto π es el punto medio entre las plantas $(B, 1)$ y $(B, 2)$, de forma que las plantas $(A, 1)$ y $(B, 1)$ compiten en el hemisferio norte del mercado, y las plantas $(A, 2)$ y $(B, 2)$ en el hemisferio sur. Llamaremos x_A y x_B a las localizaciones de $(A, 1)$ y de $(B, 1)$ respectivamente, con $0 \leq x_A \leq x_B \leq \pi$, lo cual no supone pérdida de generalidad (Figura 3).

La demostración de esta proposición reside en los resultados obtenidos para el mercado lineal. Considerando el hemisferio norte del mercado, donde compiten $(A, 1)$ y $(B, 1)$, por los resultados del caso lineal podemos concluir que ambas empresas obtienen mayor beneficio situándose cada una en el extremo del mercado donde compiten, es decir, cuando $(A, 1)$ se sitúa en 0, y $(B, 1)$ lo hace en π. La misma situación tiene lugar en el hemisferio sur del mercado, donde compiten $(A, 2)$ y $(B, 2)$, situándose $(B, 2)$ en π, y $(A, 2)$ en 2π (Figura 4).

El beneficio que obtienen las empresas de su producción en el hemisferio norte del mercado cuando mantienen esta disposición es el

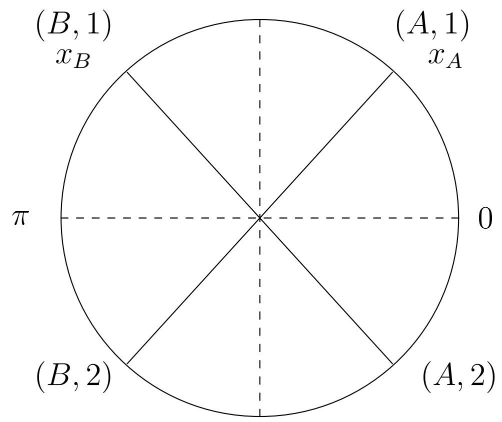

Figura 3: Plantas de producción vecinas

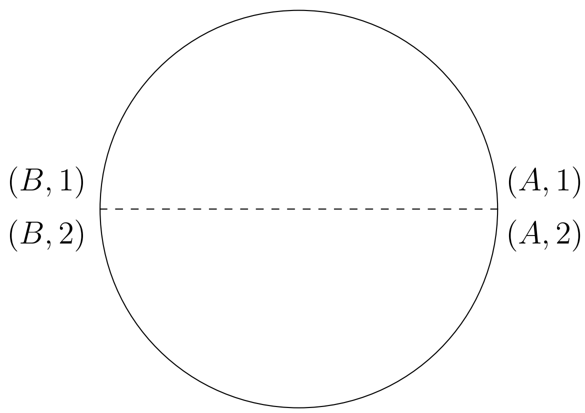

Figura 4: Plantas vecinas en extremos de un diámetro

siguiente:

$$\Delta^A(0,\pi) = \int_0^\pi \frac{b\,[T(\pi - x) + \alpha]^2}{[T(\pi - x) + T(x) + 2\alpha]^2}\, dx =$$

$$\int_0^\pi \frac{b\,[T(x) + \alpha]^2}{[T(x) + T(\pi - x) + 2\alpha]^2}\, dx = \Delta^B(0,\pi) \tag{9}$$

Mientras que el beneficio que obtendrían si se situaran siguiendo el resultado de Chamorro (2000b) sería:

$$\Delta^A(0,\frac{\pi}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\left[T(\frac{\pi}{2} - x) + \alpha\right]^2}{\left[T(\frac{\pi}{2} - x) + T(x) + 2\alpha\right]^2}\, dx =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b\,[T(x) + \alpha]^2}{\left[T(x) + T(\frac{\pi}{2} - x) + 2\alpha\right]^2}\, dx = \Delta^B(0,\frac{\pi}{2}) \tag{10}$$

Realizando los cálculos en las expresiones anteriores, se tiene que (9) y (10) son, respectivamente

$$\frac{b}{3t\,(t\pi + 2\alpha)^2}\left[(t\pi + \alpha)^3 - \alpha^3\right] \tag{11}$$

$$\frac{2b}{3t\,\left(t\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)^2}\left[\left(t\frac{\pi}{2} + \alpha\right)^3 - \alpha^3\right] \tag{12}$$

La diferencia entre (11) y (12) es positiva y por tanto podemos concluir que el beneficio es mayor cuando las empresas se sitúan en dos extremos diametralmente opuestos. $\square$

4. Conclusiones

El estudio de Anderson y Neven (1991) de un modelo mercado lineal en el que dos empresas compiten en dos etapas localización-cantidades, les llevó a concluir que se alcanza el equilibrio cuando ambas empresas se aglomeran en el centro del mercado. Anderson y Neven (1991) utilizan una función de demanda lineal, y conjeturan que la tendencia a la mínima diferenciación se mantendría para una clase más amplia de funciones de demanda.

Por otro lado, Chamorro (2000b) demostró, también con una función de demanda lineal, que en un mercado circular en el que dos empresas tienen la posibilidad de abrir dos plantas de producción, el equilibrio se alcanza cuando las empresas localizan sus plantas alternativamente en los extremos de dos diámetros perpendiculares.

Con nuestro estudio hemos podido comprobar que estas localizaciones dejan de ser localizaciones de equilibrio cuando se considera una función de demanda hiperbólica. En el caso del mercado lineal, ambas empresas obtienen mayor beneficio cuando se localizan en extremos opuestos del mercado en vez de compartir la misma ubicación, con lo que la aglomeración deja de ser un equilibrio. En el caso del mercado circular, la demanda hiperbólica atenúa la tendencia a reducir los costes de transporte existente en el modelo de Chamorro (2000b), y las empresas preferirán prescindir de la proliferación de plantas, localizándose en extremos opuestos de un mismo diámetro, por obtener con esta disposición mayor beneficio que con la que obtenía Chamorro (2000b).

Esto nos conduce a pensar que existe una estrecha relación entre la función de demanda y las localizaciones de equilibrio, lo cual puede producir cierta sensación de "caos", en el sentido de que un cambio en la función de demanda del mercado produciría un cambio en la localización de las empresas. Por lo tanto, un interesante problema a resolver sería clasificar las funciones de demanda para las que la aglomeración es un equilibrio y para las que no lo es.

En el desarrollo de nuestro estudio hemos utilizado una función de de demanda de elasticidad unitaria. Comprobar si las funciones de elasticidad constante en general rompen del mismo modo la tendencia a la aglomeración podría ser objeto de futuras investigaciones.

Referencias

Anderson, S.P., D.J. Neven (1991): "Cournot competition yields spatial agglomeration". *International Economic Review*, 32, 793-808.

Chamorro Rivas, J.M. (2000a): "Spatial dispersion in Cournot competition". *Spanish Economic Rewiew*, 2, 145-152.

Chamorro Rivas, J.M. (2000b): "Plant proliferation in a spatial model of Cournot competition". *Regional Science and Urban Economics*, 30, 507-518.

D'Aspremont, C., J. Jaskold Gabszewicz, J.F. Thisse (1979): "On Hotelling's Stability in Competition". *Econometrica*, Vol. 47, 1145-1150.

Gupta, B., D. Pal, J. Sarkar (1997): "Spatial Cournot competition and agglomeration in a model of location choice". *Regional Science and Urban Economics*, 27, 261-282.

Hotelling, H. (1929): "Stability in Competition". *Economic Journal*, 39, 41-57. Reimpreso en Thisse,J.F., G. Norman, eds. (1994): *The Economics of product differentiation.* Volumen 1. Elgar.

Kresp, D., J. Scheinkman (1983): “Quantity pecommitment and Bertrand competition yield Cournot outcome”. *Bell Journal of Economics*, 14 (2), 326-337.

Martínez-Giralt, X., D. J. Neven (1988): “Can price competition dominate market segmentation?”. *Journal of Industrial Economics*, 36, 431-442.

Mayer, T. (2000): “Spatial Cournot competition and heterogeneous production cost across locations”. *Regional Science and Urban Economics*, 30, 325-352.

Neven, D. (1985): “Two-Stage (Perfect) Equilibrium in Hotelling's Model”. *The Journal of Industrial Economics*, 33, 317-325.

Puu, T. (2000): *Attractors, Bifurcations & Chaos. Nonlinear Phenomena in Economics.* Springer.