

# DISEÑO ÓPTIMO DE PARÁMETROS DINÁMICOS DE CONTORNOS ACTIVOS EN SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES

Rafael Verdú Monedero, Juan Morales Sánchez  
Dep. Tecnologías de la Información y Comunicaciones  
Universidad Politécnica de Cartagena  
e-mail: {rafael.verdu, juan.morales}@upct.es

**Abstract**—Active contours are useful tools for segmenting images. The classical formulation is given in the spatial domain and is based on a second order system. The formulation based on a frequency-domain analysis leads to a simple formulation and design, offering an important computational saving in comparison to the original one. The frequency-based formulation also offers a new perspective for studying the convergence of the snake. This paper addresses an analysis and optimization for a snake-based segmentation algorithm. The study allows us to choose optimum values of the system dynamic parameters in the design of the active contour for improving its speed of convergence in a segmentation problem.

## I. INTRODUCCIÓN

La efectividad de los contornos activos en la segmentación de imágenes es bien conocida. La formulación clásica [1], [2] viene dada en el dominio espacial y está basada en un sistema de segundo orden. La rigidez y la elasticidad son los parámetros estáticos y la masa y el rozamiento son los parámetros dinámicos para su caracterización. Además de la formulación original, se han propuesto distintas variantes de modelos deformables [3], [4], [5], [6]. En [7] la formulación original es trasladada al dominio de la frecuencia con lo que se consigue una formulación y diseño más sencillo, ofreciendo además un importante ahorro computacional en comparación con la original.

El principio básico detrás de los contornos activos es la habilidad para trazar una curva paramétrica suave compelida por requerimientos internos y externos, de modo adaptativo y mediante un mecanismo iterativo [8]. Como cualquier sistema adaptativo, es de gran importancia las iteraciones requeridas por el contorno para delinear el objeto de interés [9], [10], [11], [12]. La velocidad de convergencia depende especialmente en los parámetros dinámicos del sistema de segundo orden y en la distancia entre los nodos atraídos [13]. Este artículo utiliza la formulación basada en la frecuencia para estudiar la convergencia de la *snake* en el ajuste iterativo de este contorno hasta que perfila el objeto de interés. También muestra el análisis para la elección de los valores óptimos de los parámetros dinámicos en el diseño del contorno activo para mejorar su velocidad de convergencia en un problema de segmentación de imágenes.

## II. FORMULACIÓN FRECUENCIAL

Una *snake* es un contorno variante en el tiempo  $\mathbf{v} = v(s, t)$  cuya forma está gobernada por un funcional de energía con fuerzas internas y externas,

$$E(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + P(\mathbf{v}). \quad (1)$$

La energía interna de deformación se define como

$$S(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_0^L \alpha(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds. \quad (2)$$

El término de energía externa  $P(\mathbf{v})$  comprende el efecto de las fuerzas externas como el gradiente de la imagen o las fuerzas internas no lineales como las que mantienen la longitud del contorno constante. En una implementación práctica de la minimización del funcional de energía, el dominio paramétrico  $0 < s < L$  se divide en subdominios y  $\mathbf{v}$  se divide en elementos de *snake*  $v_i(s, t)$  que se construyen mediante una función de forma  $f(s)$  y un vector  $\mathbf{u}(t)$  con los parámetros de la función de forma, de forma que:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i(s, t) \quad v_i(s, t) = f(s) * u_i(s, t) \quad (3)$$

La minimización se consigue mediante las ecuaciones de Lagrange y llevan a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d \mathbf{u}(t)}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{u}(t)), \quad (4)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  son respectivamente la matriz de masa y amortiguamiento, y  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas externas, determinado por la posición del contorno en el instante  $t$  [2]. La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se ensambla de acuerdo a la función de forma  $f(s)$  y según los valores de los parámetros de rigidez y elasticidad. Todos estos elementos confieren a la *snake* su dinámica y sus características de forma.

Aunque desde un punto de vista general  $\mathbf{K}$  es una matriz cuadrada, simétrica y a bandas, en muchas aplicaciones, la tensión y la rigidez ( $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$ ) son constantes y toman el mismo valor para todos los elementos de la *snake*. Esta simplificación abre la posibilidad de formular la minimización del funcional de energía (2) en el dominio de la frecuencia [7].

### A. Contornos cerrados

La formulación basada en la frecuencia es aplicable inicialmente a contornos cerrados, que pueden considerarse como señales periódicas, siendo el periodo la longitud del contorno. Definamos las siguientes señales:  $\hat{v}(s)$  es una señal periódica de periodo  $L$  definida por  $\hat{v}(s) = \mathbf{v}$ ,  $0 \leq s < L$ ;  $\hat{u}(s)$  es la versión periódica de  $u(s)$ , definida a continuación como

$$u(s) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \delta(s - s_n), \quad (5)$$

donde  $N$  es el número de nodos de la *snake*,  $u_n$  es el valor del nodo  $n$ -ésimo, y  $s_n$  son sus posiciones (en una *snake* cerrada  $s_n = nL/N$ ).  $\mathcal{U}(\Omega)$  es la transformada de Fourier de  $u(s)$ .

La *snake* es cerrada y puede representarse por una señal periódica definida por  $\hat{v}(s) = \hat{u}(s) * f(s)$ , donde  $*$  denota convolución lineal en el dominio  $s$  y  $f(s)$  es la función de forma, que determina el tipo de interpolación entre los nodos de la *snake*.

Dado que se ha asumido que  $\alpha$  y  $\beta$  son independientes de  $s$ , el funcional de energía (2) puede escribirse como

$$S = \frac{\alpha}{2} \int_0^L |\hat{y}_1(s)|^2 ds + \frac{\beta}{2} \int_0^L |\hat{y}_2(s)|^2 ds, \quad (6)$$

donde  $\hat{y}_a(s) = \partial^a \hat{v}(s) / \partial s^a$ . Usando la regla de Parseval, la ecuación (6) puede expresarse en el dominio frecuencial

$$S = \frac{L}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha |d_1(k)|^2 + \beta |d_2(k)|^2. \quad (7)$$

donde  $d_a(k)$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de  $\hat{y}_a(s)$ . Entonces (7) puede simplificarse como

$$S = \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{U}(\Omega)|^2 |\mathcal{K}_s(\Omega)| \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (8)$$

donde

$$\mathcal{K}_s(\Omega) = (\alpha |\Omega|^2 + \beta |\Omega|^4) |\mathcal{F}(\Omega)|^2. \quad (9)$$

siendo  $\mathcal{F}(\Omega)$  la transformada de Fourier de la función de forma  $f(s)$ . De acuerdo a (5),  $\mathcal{U}(\Omega)$  es un espectro periódico cuyo periodo se define en el intervalo de frecuencias  $[0, 2\pi\frac{N}{L}]$ , y entonces (8) puede ser aun más simplificado como

$$S = \frac{1}{2L} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathcal{U}(\Omega)|^2 |\mathcal{K}(\Omega)| \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (10)$$

donde

$$\mathcal{K}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_s(\Omega - k\frac{N}{L}2\pi). \quad (11)$$

De la afirmación anterior queda claro que el funcional de energía ha sido trasladado a un dominio frecuencial y también discreto, y la información relevante está contenida en  $N$  valores frecuenciales. Dado este escenario discreto tanto en el dominio espacial como frecuencial, traslademos (10) al espacio discreto, esto es,  $s_n \rightarrow n$ , lo que implica  $\Omega \rightarrow \omega$ ,

siendo  $\omega$  el homólogo frecuencial de  $n$ . La ecuación (10) se convierte en

$$S = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} |U(\omega)|^2 |K(\omega)| \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{L}}, \quad (12)$$

donde  $K(\omega)$  se es el espectro frecuencial de rigidez

$$K(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha |\Omega|^2 + \beta |\Omega|^4) |\mathcal{F}(\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\omega-2\pi k}. \quad (13)$$

Tomando derivadas en (12) respecto cada uno de los  $N$  valores relevantes de  $U(\omega)$ , obtenemos la ecuación de movimiento de Lagrange formulada en el dominio de la frecuencia

$$M \frac{\partial^2 U(\omega, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} + U(\omega, t) K(\omega) = G(\omega), \quad (14)$$

donde  $M$  y  $C$  son la masa y el rozamiento del sistema espacio temporal de ecuaciones diferenciales de segundo orden, y se consideran invariantes a lo largo de la *snake*.  $G(\omega)$  es la transformada de Fourier de las fuerzas externas. Hay que destacar que en la ecuación (14) solamente los valores de  $\omega$  que son múltiplos de  $2\pi/N$  son relevantes. La implementación de (14) factible asumiendo un paso de discretización temporal  $\Delta t$ , lo que conduce a la implementación en tiempo discreto donde  $\xi$  denota la variable temporal discreta,  $b = 2M/\Delta t^2 + C/\Delta t$  y  $c = -M/\Delta t^2$ . La ecuación explícita del movimiento de la *snake* es

$$(b + c + K(\omega)) U_\xi(\omega) = b U_{\xi-1}(\omega) + c U_{\xi-2}(\omega) + G_\xi(\omega), \quad (15)$$

Esta ecuación puede trasladarse al dominio espacial como

$$\eta^{-1}(\eta + k[n]) \otimes u_\xi[n] = b u_{\xi-1}[n] + c u_{\xi-2}[n] + \eta^{-1} g_\xi[n], \quad (16)$$

donde  $\eta = M + C$  es la masa global,  $b = 1 + (1 + \gamma)^{-1}$  y  $c = -(1 + \gamma)^{-1}$  son los parámetros dinámicos del sistema de segundo orden,  $\gamma = C/M$  es la relación entre el rozamiento y la masa, y  $\otimes$  denota convolución circular entre secuencias discretas de la misma longitud.

El espectro  $K(\omega)$  es el núcleo frecuencial del modelo deformable, y su homólogo en el espacio discreto  $k[n]$  se corresponde con la primera columna (o fila) de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de la formulación original de las *snakes* [2].

Advierta que (16) es equivalente a la ecuación de movimiento de la formulación original: allí, la matriz pseudo inversa de la matriz de rigidez es el núcleo del proceso, y si los parámetros de rigidez y elasticidad se asumen constantes a lo largo de la *snake*, la matriz resultante es circulante, esto es, cada columna se construye mediante el desplazamiento cíclico de un elemento de la columna anterior. Una matriz circulante es la representación algebraica de la convolución circular discreta.

### III. PROCESO DE SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES

En un problema clásico de segmentación con contornos activos, en un cierto instante del proceso, algunos nodos están 'atraídos' hacia regiones de alta energía y el resto de los nodos están libres. Este escenario puede expresarse como un problema de interpolación no uniforme [14] mediante la reestructuración de (16) en

$$z_\xi[n] = b u_{\xi-1}[n] + c u_{\xi-2}[n], \quad (17)$$

$$y_\xi[n] = z_\xi[n] + (x_\xi[n] - z_\xi[n]) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - N_k], \quad (18)$$

$$u_\xi[n] = h[n] * y_\xi[n], \quad (19)$$

donde  $x_\xi[n] = \eta^{-1} g_\xi[n]$ ,  $N_k$  son las posiciones de los nodos atraídos por las fuerzas externas y  $h[n]$  es el núcleo pseudo inverso de  $k[n]$ , por lo que su transformada de Fourier es

$$H(\omega) = \frac{\eta}{\eta + K(\omega)}. \quad (20)$$

Asumiendo inicialmente para el análisis reposo inicial y que  $N_k = kN$ , entonces  $X_\xi(\omega) = X_\xi(\omega - k\omega_0)$  con  $\omega_0 = 2\pi/N$ ,  $U_\xi(\omega) = Q_\xi(\omega)X_\xi(\omega)$ , y las ecuaciones (17)-(19) pueden trasladarse al dominio de la frecuencia como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} Q_\xi(\omega) &= bH(\omega)Q_{\xi-1}(\omega) + cH(\omega)Q_{\xi-2}(\omega) \\ &\quad - H(\omega) \frac{b}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q_{\xi-1}(\omega - k\omega_0) \\ &\quad - H(\omega) \frac{c}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q_{\xi-2}(\omega - k\omega_0) + H(\omega). \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación (21) deja ver que para una frecuencia  $\omega$  dada, el filtro equivalente  $Q_\xi(\omega)$  depende de sus propios valores a frecuencias iguales a  $\omega + k\omega_0$ . Considerando frecuencias  $\omega = i\omega_0 + \Delta\omega$  ( $i = 0, \dots, N-1$ , y  $|\Delta\omega| \leq \omega_0/2$ ), (21) produce

$$\mathbf{q}_\xi = \mathbf{h} + \mathbf{H} (b \mathbf{q}_{\xi-1} + c \mathbf{q}_{\xi-2}), \quad (22)$$

donde  $\mathbf{q}_\xi = [Q_\xi(\Delta\omega), Q_\xi(\omega_0 + \Delta\omega), \dots, Q_\xi((N-1)\omega_0 + \Delta\omega)]^T$ ,  $\mathbf{h}$  definida de manera acorde, y la matriz  $\mathbf{H}$  es

$$\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{h}) - \frac{1}{N} \mathbf{h} [1 \ \dots \ 1]. \quad (23)$$

En una situación final y estable ( $\xi = \infty$ ), la ecuación (22) conduce a  $\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1} \mathbf{h}$ , que describe el núcleo equivalente en la situación final. El proceso inverso, esto es, trazar el núcleo  $H(\omega)$  a partir de una situación final deseada  $Q(\omega)$  no tiene una formulación explícita sencilla. Por lo general,  $Q(\omega)$  depende de los parámetros de rigidez, y de la masa total  $\eta$  (20). Esto significa que para un valor constante de  $\eta$ , la solución alcanzada es la misma independientemente de la relación rozamiento-masa  $\gamma$ , no obstante, la velocidad de la *snake* hacia la situación final depende del valor del parámetro dinámico  $\gamma$  [13].

#### A. Análisis de la convergencia

La substracción del valor final en la recursión (22), esto es,  $\mathbf{r}_\xi = \mathbf{q}_\xi - \mathbf{q}_\infty$ , da lugar a la ecuación en diferencias lineal que describe la evolución residual del contorno activo

$$\mathbf{r}_\xi = b \mathbf{H} \mathbf{r}_{\xi-1} + c \mathbf{H} \mathbf{r}_{\xi-2}. \quad (24)$$

La matriz  $\mathbf{H}$  puede expresarse como  $\mathbf{H} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^{-1}$ , siendo  $\mathbf{D}$  una matriz diagonal conteniendo los autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , y  $\mathbf{L}$  una matriz cuyas columnas son los correspondientes autovectores ortogonales y unitarios  $\mathbf{v}_i$ . Entonces, (24) se convierte en

$$\mathbf{c}_\xi = b \mathbf{D} \mathbf{c}_{\xi-1} + c \mathbf{D} \mathbf{c}_{\xi-2}, \quad (25)$$

donde  $\mathbf{c}_\xi = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{r}_\xi$ . La ecuación en diferencias desacoplada (25) puede analizarse en el dominio del plano  $Z$ . Entonces, al resolver las ecuaciones cuadráticas desacopladas obtenemos los polos de los modos de vibración

$$z_i^{1,2} = \frac{b\lambda_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 \lambda_i^2 + 4c\lambda_i}, \quad (26)$$

Según el signo del discriminante,  $\Delta_i = b^2 \lambda_i^2 + 4c\lambda_i$ , el modo ortogonal resultante puede ser subamortiguado ( $\Delta < 0$ ), críticamente amortiguado ( $\Delta = 0$ ) o sobreamortiguado ( $\Delta > 0$ ).

La velocidad más rápida del modo más lento se alcanza cuando los polos asociados al mayor autovalor cumplen la condición de amortiguamiento crítico y entonces

$$\gamma_0 = 2\lambda_{max}^{-1} \left( 1 - \lambda_{max} + \sqrt{1 - \lambda_{max}} \right). \quad (27)$$

La figura 1 describe el comportamiento de los autovalores y los polos asociados. Note que cuando el autovalor es mayor que el umbral, los correspondientes polos complejos evolucionan a dos polos reales. Los parámetros de simulación son  $N = 4$ ,  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  y diferencias finitas.

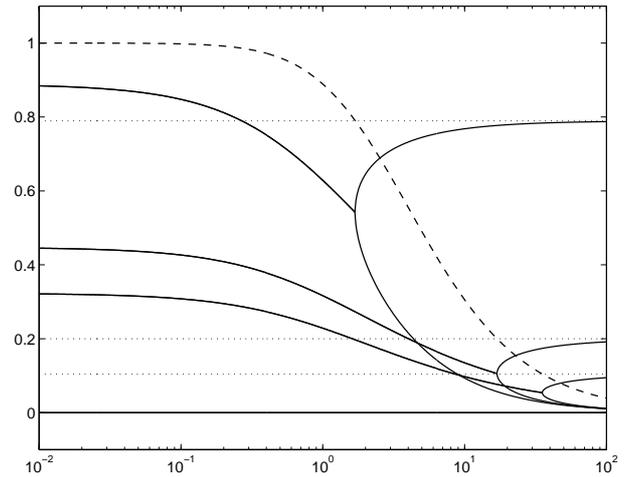


Fig. 1. Variación de  $|z_i^1|, |z_i^2|$  y  $|\lambda_i|$  con  $\gamma$ . El módulo de los polos de los modos de vibración se representa con línea continua, los autovalores de la matriz  $\mathbf{H}$  están trazados con líneas de puntos, y, en línea discontinua el umbral  $th = (1 + \gamma) / (1 + \frac{1}{2}\gamma)^2$ .

### B. Análisis de la complejidad y parámetros óptimos

Cuando los autovalores están cercanos a la unidad, es difícil apreciar diferencias entre las velocidades de sus sistemas. Otra forma de expresar la velocidad de convergencia es por medio de la complejidad del sistema, definida como

$$N_e = (1 - \lambda_{max})^{-1} \quad (28)$$

donde  $\lambda_{max}$  es el mayor autovalor de la matriz  $\mathbf{H}$  (23). La figura 2 contiene, en línea continua, la relación entre la masa  $\eta$  y la complejidad del sistema  $N_e$  para diferentes valores de la mayor distancia entre nodos atraídos  $N$ . Cada curva está confinada entre dos líneas asintóticas (en línea de puntos)

$$N_e = N \quad (29)$$

$$\log_{10}(N_e) = \log_{10}(\eta) + \sigma (\kappa_1 \log_{10}(N) + \kappa_2) \quad (30)$$

donde  $\kappa_1 = 1.97$ ,  $\kappa_2 = -0.95$  y  $\sigma$  es el orden de la derivada ( $\sigma = 2$  es equivalente a  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$  en la formulación original). La intersección entre ambas rectas viene descrito por

$$\log_{10}(\eta_0) = (1 - \sigma\kappa_1) \log_{10}(N) - \sigma\kappa_2 \quad (31)$$

Entonces, dado un conjunto de nodos atraídos no uniformemente distribuidos, el algoritmo empezaría detectando la mayor distancia entre estos nodos, entonces el valor de la masa óptima se calcula según (31), y a partir de ahí se obtiene  $N_e$  y los parámetros del sistema de segundo orden:  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $b$  y  $c$ . Este algoritmo óptimo está definido en la Tabla I.

$\eta = N^{(1-\sigma\kappa_1)} 10^{(-\sigma\kappa_2)}$
$N_e = \max\{N, \eta N^{(\sigma\kappa_1)} 10^{(\sigma\kappa_2)}\}$
$\lambda = 1 - 1/N_e$
$\gamma = 2\lambda^{-1}((1-\lambda) + \sqrt{1-\lambda})$
$b = 1 + (1+\gamma)^{-1}$
$c = -(1+\gamma)^{-1}$
$\mathbf{K} = \alpha \mathbf{K}_\alpha + \beta \mathbf{K}_\beta$
$\mathbf{H} = \eta(\eta + \mathbf{K})^{-1}$
<b>repeat</b>
$\mathbf{u} = DFT^{-1}\{\mathbf{H}(b\mathbf{U}_\xi + c\mathbf{U}_{\xi-1})\} + \eta^{-1}\mathbf{g}_\xi$
$\mathbf{U}_{\xi-1} = \mathbf{U}_\xi$
$\mathbf{U}_\xi = DFT\{\mathbf{u}\}$
<b>until</b> $\ \mathbf{U} - \mathbf{U}_\xi\  < tol$

TABLA I

DISEÑO ÓPTIMO DE PARÁMETROS DINÁMICOS

### IV. CONCLUSIONES

La forma final del contorno en la segmentación depende de la suma de la masa y la rigidez,  $\eta$ , y es independiente de la relación entre ellas,  $\gamma$ . El valor de masa  $\eta$  usado para conseguir un cierto grado de interpolación es teóricamente infinito, o al menos muy alto. Desde un punto de vista práctico, dado  $\eta$  y  $N$ , uno estaría interesado en ajustar  $\gamma$  de forma que la *snake* alcance su máxima velocidad de convergencia.

Según los resultados anteriores, la *snake* interpoladora más rápida se basaría en un valor pequeño de masa  $\eta$  que se corresponde con un valor bajo de complejidad  $N_e = N$ . La masa del punto de inflexión (31),  $\eta_0$ , consigue una interpolación final aceptable, pero si se requiere una segmentación más fina,

se ha de incrementar el valor de la masa. Un aumento en un orden de magnitud en  $\eta$  implica el mismo incremento en  $N_e$  y esto puede dar lugar a una prohibitiva y lenta velocidad de convergencia.

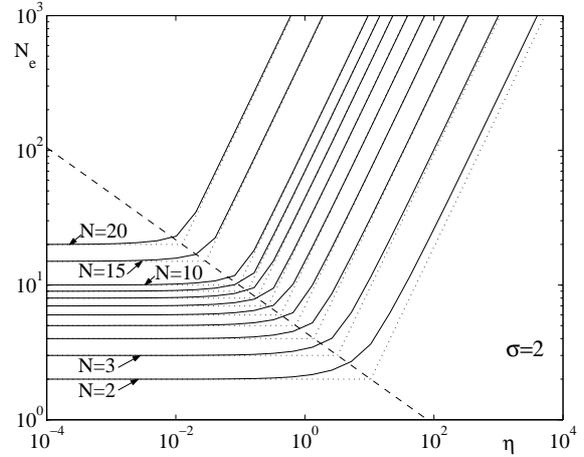


Fig. 2. Análisis numérico de la complejidad del sistema.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por el *Ministerio de Ciencia y Tecnología* mediante el proyecto TIC2002-03033.

### REFERENCIAS

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *Int. J. of Computer Vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [2] J. Liang, T. McInerney, and D. Terzopoulos, "United snakes," *Proc. Int. Conf. on Computer Vision*, pp. 933–940, 1999.
- [3] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro, "Geodesic active contours," *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pp. 694–699, 1995.
- [4] T. McInerney and D. Terzopoulos, "T-snakes: Topology adaptive snakes," *Medical Image Analysis*, vol. 4, pp. 73–91, 2000.
- [5] D. Cremers, C. Schnorr, and J. Weickert, "Diffusion-snakes: Combining statistical shape knowledge and image information in a variational framework," *Proc. of 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pp. 137–144, 2001.
- [6] D. Terzopoulos, "Deformable models: classic, topology-adaptive and generalized formulations," in *Geometric Level Set Methods*, S. Osher and N. Paragios, Eds., chapter 2, pp. 21–40. Springer-Verlag, 2003.
- [7] L. Weruaga, R. Verdú, and J. Morales, "Frequency domain formulation of active parametric deformable models," *IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell.*, vol. 26, no. 12, pp. 1568–1578, December 2004.
- [8] K.F. Lai and R.T. Chin, "Deformable contours: Modeling and extraction," *IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell.*, vol. 17, no. 11, pp. 1084–1090, 1995.
- [9] D. Terzopoulos and R. Szeliski, "Tracking with kalman snakes," in *Active Vision*, A. Blake and A. Yuille, Eds., pp. 3–20. MIT Press, 1992.
- [10] P. J. S. G. Ferreira, "Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 11, pp. 3278–3282, November 1994.
- [11] L. Weruaga, J. Morales, L. Núñez, and R. Verdú, "Estimating volumetric motion in human thorax with parametric matching constraints," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 22, no. 6, pp. 766–772, June 2003.
- [12] Luis Weruaga, Juan Morales, and Rafael Verdú, "Active training on the CMAC nonlinear adaptive system," *XII European Signal Processing Conference*, pp. 589–592, 2004.
- [13] R. Verdú, J. Morales, R. González, and L. Weruaga, "Convergence analysis of active contours in image segmentation," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, pp. 2749–2752, 2004.
- [14] F. Marvasti, *Nonuniform Sampling: Theory and Practice*, Information Technology: transmission, processing, and storage. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.