

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS DE ACERO CON UNIONES SEMIRRÍGIDAS NO LINEALES

G. Sánchez y P. Martí

Departamento de Estructuras y Construcción

Universidad Politécnica de Cartagena

Campus de la Muralla del Mar

30202-Cartagena (Murcia), España

Email: gregorio.sanchez@upct.es,

web page: <http://www.upct.es/~deyc/>

Resumen. En el presente trabajo se presenta un método numérico para el diseño óptimo de estructuras de acero porticadas teniendo en cuenta el comportamiento no lineal por la presencia de grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y uniones semirrígidas no lineales. El algoritmo de optimización minimiza el costo de las uniones y miembros de la estructura, considerando restricciones de desplazamiento, flecha, resistencia, esbeltez, pandeo y estabilidad global. Se propone una función objetivo costo de la estructura ajustada a partir de las rigideces y costos de uniones semirrígidas reales. Se incluye la optimización de dos ejemplos reales, con el fin de comparar los diferentes valores que se obtienen en el caso de considerar elementos con uniones semirrígidas y con comportamiento lineal o no lineal.

Palabras clave: optimización, estructuras de acero, uniones semirrígidas, no lineal, estabilidad global.

1 INTRODUCCIÓN

Usualmente se aborda el diseño de elementos estructurales partiendo de la hipótesis de un comportamiento idealizado de las uniones: uniones articuladas o uniones rígidas. Estos modelos presentan la ventaja de simplificar el análisis y el diseño, pero su inconveniente es que no reflejan adecuadamente el comportamiento real de algunas estructuras. El término semirrígido se usa para definir la unión que tiene un comportamiento intermedio entre los dos casos idealizados. Las uniones semirrígidas modelan el comportamiento de las uniones reales que transmiten sólo una parte de los momentos flectores y presentan una capacidad de rotación que contribuye a los desplazamientos de toda la estructura¹. En la figura 1 pueden verse curvas típicas de comportamiento de diferentes uniones semirrígidas, obtenidas experimentalmente. El aumento de los desplazamientos que provocan las uniones semirrígidas obliga a considerar modelos de análisis que contemplen la no linealidad geométrica junto con la no linealidad de la unión, al estar sus efectos ligados.

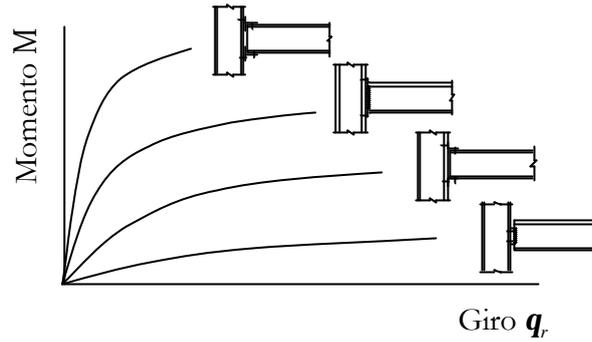


Figura 1 – Curvas momento-giro de uniones semirrígidas

Este trabajo presenta un método numérico sistemático implementable en el ordenador, para el diseño óptimo de estructuras metálicas porticadas planas con uniones semirrígidas no lineales. El diseño considera conjuntamente el costo de los elementos de la estructura y el costo de las uniones. Al mismo tiempo asegura que los desplazamientos de los nudos, las flechas en las vigas, las esbelteces de los elementos, las tensiones en los elementos, la estabilidad de los elementos y la estabilidad global de la estructura están dentro de los límites especificados por el código de diseño adoptado. Los elementos se definen considerando el área de la sección recta de los mismos como variable de diseño y las uniones semirrígidas se definen al utilizar un valor relacionado con su rigidez al giro como variable de diseño. El tipo de análisis es no lineal considerando grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y el comportamiento no lineal de las uniones. El método numérico empleado para el análisis no lineal es el de Newton-Raphson. Para la optimización se emplea un método de programación matemática no lineal (RQP).

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

El problema de diseño óptimo de estructuras se formula, en general, como el problema de programación matemática siguiente:

encontrar el vector de variables de diseño

$$\mathbf{X} (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1a)$$

que minimice la función objetivo

$$f(\mathbf{X}) \quad (1b)$$

sujeto a las restricciones

$$h_j(\mathbf{X}) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m_i \quad (1c)$$

$$g_j(\mathbf{X}) \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m_a \quad (1d)$$

$$X_i^I \leq X_i \leq X_i^S; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1e)$$

siendo: \mathbf{X} el vector de variables de diseño n-dimensional; $f(\mathbf{X})$ la función objetivo; $h_j(\mathbf{X})$ la restricción de igualdad j ; $g_j(\mathbf{X})$ la restricción de desigualdad; X_i^I el límite inferior de la variable i y X_i^S el límite superior de la variable i ; m_i el número de restricciones de igualdad; m_a el número de restricciones de desigualdad, n el número de variables de diseño.

En general, la función objetivo $f(\mathbf{X})$ y las restricciones $h_j(\mathbf{X})$ y $g_j(\mathbf{X})$ suelen ser funciones no lineales, denominándose el problema de programación matemática no lineal. El sistema de diseño utilizado emplea un método de programación cuadrática sucesiva (RQP) para resolver el anterior problema de optimización².

2.1 Variables de diseño

El vector de variables de diseño \mathbf{X} incluye variables de propiedades de la sección de los elementos que constituyen la estructura y variables relacionadas con las uniones semirrígidas de los elementos.

En cuanto a las variables de propiedades, se escoge el área de la sección recta del elemento como variable independiente. El resto de propiedades de la sección puede obtenerse a partir del área por procedimientos de ajuste, tal como se ve en la figura 2.

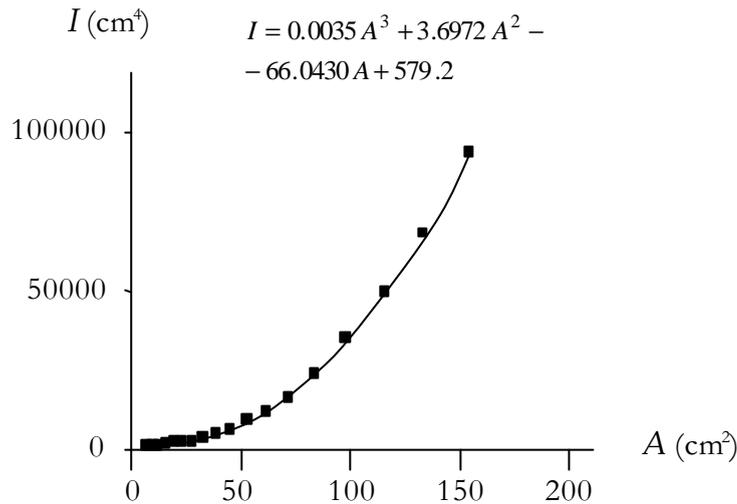


Figura 2 – Ajuste inercia-área para perfiles IPE

En cuanto a las variables relacionadas con las uniones se escoge el *grado de rigidez* p de la unión³. Esta variable se expresa como sigue

$$p = \frac{1}{1 + \frac{2EI}{LR_k}} \tag{2}$$

donde E es el módulo de elasticidad del material del elemento, I el momento de inercia del elemento, L la longitud del elemento y R_k la rigidez inicial al giro de la unión semirrígida en el extremo k del elemento. Para uniones semirrígidas lineales, y cuando existe simetría, el grado de rigidez p multiplicado por el momento de empotramiento perfecto en el extremo de un elemento con uniones rígidas nos proporciona el momento en el extremo de un elemento con uniones semirrígidas de rigidez R_k .

La rigidez inicial de la unión R_k es dependiente del grado de rigidez p y del área del elemento, ya que el momento de inercia I se obtiene a partir de ésta. La utilización de esta variable p es conveniente porque aporta un valor aproximado del momento en el extremo del elemento con uniones semirrígidas en función del momento en el extremo del elemento con uniones rígidas y la posibilidad de establecer, de forma sencilla, límites para esta variable.

En relación con esto último, el Eurocódigo 3 establece unos límites de rigidez para las uniones semirrígidas. En cuanto a la rigidez al giro, en una estructura sin arriostrar, estos límites son

$$R_k^L = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} \quad (3a)$$

$$R_k^U = 25 \frac{EI}{L} \quad (3b)$$

Si sustituimos estas expresiones en la expresión anterior (2), obtenemos

$$p^L = \frac{1}{1 + \frac{2EI}{L \left(\frac{1}{2} \frac{EI}{L} \right)}} = 0.2 \quad (4a)$$

$$p^U = \frac{1}{1 + \frac{2EI}{L \left(25 \frac{EI}{L} \right)}} = 0.926 \quad (4b)$$

Estos límites para la variable p son muy similares a los aceptados tradicionalmente de común acuerdo entre los diseñadores de estructuras de acero³.

$$p^L = 0.25 \quad (5a)$$

$$p^U = 0.9 \quad (5b)$$

Para mejorar la eficiencia numérica del proceso de optimización cuando trabajamos con programación matemática, es conveniente trabajar con variables normalizadas, obtenidas dividiendo el valor de las variables de diseño por el valor adoptado en la primera iteración (valor inicial). A estas variables normalizadas las llamaremos variables de optimización y serán las que se utilicen en el algoritmo durante todo el proceso de diseño. Obtenidos, al final del proceso, los valores de las variables de optimización, basta multiplicarlos por el valor inicial adoptado para las variables de diseño, obteniéndose así los valores de las variables de diseño en el óptimo.

2.2 Función objetivo

El costo de la unión usualmente se relaciona con su rigidez^{4,5}. La función objetivo que se ha considerado en este trabajo es el costo de la estructura, expresado de la siguiente forma

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^n \left[C_l \mathbf{g}_l A_l L_l + \sum_{k=1,2} (\mathbf{b}_{lk}^0 + \mathbf{b}_{lk}^l R_{lk}) \right] \quad (6)$$

donde \mathbf{b}_{lk}^0 y \mathbf{b}_{lk}^l son los parámetros de costo de la unión semirrígida del elemento l y extremo k , R_{lk} la rigidez inicial al giro de la unión semirrígida del elemento l y extremo k , C_l el costo del material por unidad de peso del elemento l , \mathbf{g}_l el peso específico del material del elemento l , A_l el área de la sección recta del elemento l y L_l la longitud del elemento l .

Los parámetros de costo \mathbf{b}^0 y \mathbf{b}^I dependen del tipo de unión, pudiéndose calcular mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los costos de una serie de uniones, de un tipo concreto, con diferentes rigideces. Los costos de las uniones en función de su rigidez inicial al giro son los de la tabla 1.

Para mejorar la eficiencia numérica del proceso de optimización es conveniente utilizar un valor normalizado de la función objetivo. Esto puede hacerse fácilmente dividiendo el valor de la función objetivo por el valor alcanzado en la primera iteración.

Tipo de unión	\mathbf{b}^0 (€)	\mathbf{b}^I (€kN·m)
Unión con dos angulares en el alma de la viga	36.109	0.003125
Unión con angulares en las alas de la viga	34.402	0.000841
Unión con angulares en las alas y en el alma de la viga	68.660	0.000841
Unión con placa de testa extendida	51.903	0.000361
Unión con placa de testa extendida y con columna rigidizada	54.151	0.000721

Tabla 1 : Parámetros de costo \mathbf{b}^0 y \mathbf{b}^I para uniones semirrígidas

2.3 Restricciones

Para mejorar la eficiencia numérica del proceso de optimización es conveniente normalizar las restricciones. Las restricciones que se han considerado en este trabajo son: de desplazamiento, de flecha, de esbeltez, de resistencia, de pandeo de elementos y de estabilidad global⁶. El código de diseño empleado para definir las restricciones ha sido la norma española NBE EA-95.

2.3.1 Restricciones de desplazamiento

$$g_m^D = 1 - \frac{D_m}{D_{lim}} \geq 0 \quad (7)$$

donde D_m es el desplazamiento en valor absoluto del grado de libertad m y D_{lim} es el desplazamiento máximo permitido para el grado de libertad m .

2.3.2 Restricciones de flecha

$$g_l^v = 1 - \frac{v_l}{v_{lim}} \geq 0 \quad (8)$$

donde v_l es la flecha en valor absoluto en el elemento l y v_{lim} es la flecha máxima permitida para el elemento l .

2.3.3 Restricciones de esbeltez

$$g_l^s = 1 - \frac{s_l}{s_{lim}} \geq 0 \quad (9a)$$

donde s_l es la esbeltez máxima del elemento l y s_{lim} es la esbeltez máxima permitida para el elemento l .

El *coeficiente de esbeltez* \mathbf{b} , para estructuras traslacionales, se calcula conforme al apartado 3.2.4 de la norma NBE EA-95, con la siguiente expresión:

$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{1.6 + 2.4(k_1 + k_2) + 1.1k_1k_2}{(k_1 + k_2) + 5.5k_1k_2}} \quad (9b)$$

donde k_1 y k_2 son los *grados de empotramiento* de los soportes en sus extremos 1 y 2, respectivamente, definidos como:

$$k = \frac{\sum I_g / L_g}{\sum I_g / L_g + \sum I_c / L_c} \quad (9c)$$

siendo I_g la inercia de las vigas correspondientes al plano de pandeo, L_g la longitud de las vigas, I_c la inercia de los soportes correspondientes al plano de pandeo y L_c la longitud de los soportes. La suma se efectúa sobre todos los elementos que concurren al nudo.

La expresión (9c) se basa en la hipótesis de nudos rígidos. Si la estructura es traslacional y los nudos son semirrígidos, las inercias I_g de las vigas en la expresión (9c) se deben multiplicar por el grado de rigidez p calculado según (2).

2.3.4 Restricciones de resistencia

$$g_l^s = 1 - \frac{\mathbf{s}_l}{\mathbf{s}_{ul}} \geq 0 \quad (10a)$$

donde \mathbf{s}_l es la tensión normal en el elemento l y \mathbf{s}_{ul} es la resistencia del elemento l .

La tensión normal \mathbf{s}_l en soportes y en vigas sometidos a flexión compuesta se obtiene, al ser las tensiones normales generalmente mayores que las tangenciales, con la expresión:

$$\mathbf{s}_l = \frac{P_l}{A_g} + \frac{M_l}{W} \quad (10b)$$

donde P_l y M_l son, en valor absoluto, el esfuerzo axial y el momento flector, respectivamente, obtenidos en la sección más solicitada del elemento, al analizar la estructura bajo acciones ponderadas; A_g y W son el área bruta y el módulo resistente a flexión elástico, respectivamente, en la sección del elemento.

La resistencia \mathbf{s}_u para el acero se obtiene con la expresión:

$$\mathbf{s}_u = \mathbf{s}_y / \mathbf{g}_m \quad (10c)$$

donde \mathbf{s}_y es el límite elástico del acero y \mathbf{g}_m es el coeficiente de minoración de la resistencia del acero.

2.3.5 Restricciones de pandeo

$$g_l^w = 1 - \frac{\mathbf{s}_l^w}{\mathbf{s}_{lu}} \geq 0 \quad (11a)$$

donde \mathbf{s}^w se obtiene con la expresión

$$\mathbf{s}_l^w = \mathbf{w} \frac{P_l}{A_g} + \frac{M_l^w}{W} \quad (11b)$$

donde M_l^0 es el momento flector máximo, en valor absoluto, en la zona central (de longitud $0.4 L$) del elemento, obtenido al analizar la estructura bajo acciones ponderadas y \mathbf{w} es el *coeficiente de pandeo* función de la esbeltez del elemento y del tipo de material, obtenido con la expresión:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{s}_u}{\mathbf{s}_{cr}} \quad (11c)$$

siendo \mathbf{s}_{cr} la *tensión crítica de Dutheil*.

2.3.6 Restricciones de estabilidad global

Cuando se considera no lineal el comportamiento de la estructura, puede aparecer durante el análisis una situación de inestabilidad antes de alcanzar la carga máxima. En este caso es conveniente incluir restricciones de estabilidad global como las siguientes

$$g^\Lambda = 1 - \frac{(1-e)}{\Lambda^b} \geq 0 \quad (12a)$$

$$g^\Gamma = 1 - \frac{\Gamma_{\min}}{\Gamma} \geq 0 \quad (12b)$$

donde Λ es la fracción de la carga total bajo la que la estructura presenta un comportamiento inestable, es una constante de valor muy pequeño; b es un exponente entero que debe cumplir $b \geq 1$; Γ es el cociente entre el determinante de la matriz de rigidez tangente de la estructura y el determinante de la matriz de rigidez lineal de la estructura y Γ_{\min} es el valor mínimo permitido para Γ .

3 ANÁLISIS

El método de análisis no lineal utilizado ha sido el de Newton-Raphson. Las no linealidades que se han considerado son la debida a grandes cargas axiales (efecto $P-d$), la debida a grandes desplazamientos (efecto $P-D$), y la debida al comportamiento no lineal de las uniones semirrígidas.

3.1 Modelado del comportamiento de las uniones semirrígidas

Para tener en cuenta la no linealidad de las uniones se modelan mediante muelles situados en los extremos del elemento con rigidez al giro variable en función del momento flector en la unión⁷. Existen varios modelos propuestos, de los que se ha elegido el modelo polinomial de Frye-Morris⁸, que se expresa como sigue

$$\mathbf{q}_r = C_1(KM)^1 + C_2(KM)^3 + C_3(KM)^5 \quad (13)$$

donde \mathbf{q}_r es el giro relativo en la unión, M es el momento flector en la unión, K es el parámetro del modelo, o de normalización, que depende del tipo de unión y de la geometría de los elementos que la forman, C_1 , C_2 y C_3 son constantes obtenidas por procedimientos de ajuste.

La razón de la elección de este modelo es su sencillez, ya que tiene un único parámetro K y la rigidez inicial R_k depende de éste y del tipo de unión. En efecto, la rigidez inicial al giro de la unión es

$$R_k = \left. \frac{dM}{d\mathbf{q}_r} \right|_{M=0} = \frac{1}{\left. \frac{d\mathbf{q}_r}{dM} \right|_{M=0}} \quad (14)$$

en la que sustituyendo la expresión (13), obtenemos

$$R_k = \frac{1}{\left. \frac{d}{dM} (C_1 KM + C_2 K^3 M^3 + C_3 K^5 M^5) \right|_{M=0}} = \frac{1}{C_1 K} \quad (15)$$

Al obtener el valor óptimo de la variable φ podemos calcular el valor óptimo de la rigidez inicial R_k de la unión, utilizando la expresión (2), y el valor óptimo de K , utilizando la expresión (15). Finalmente, como este parámetro K depende de la geometría de la unión, podemos definir ésta.

3.2 Matrices de rigidez de un elemento viga-columna con uniones semirrígidas

El procedimiento de obtención y la expresión de la matriz de rigidez de un elemento viga-columna plano con uniones semirrígidas no lineales, se detallan en la referencia⁷.

3.3 Momentos de empotramiento perfecto y esfuerzos

Siguiendo el procedimiento detallado en la referencia⁷ para obtener los esfuerzos en un elemento viga-columna plano con uniones rígidas, que experimenta grandes desplazamientos, podemos obtener los esfuerzos en un elemento viga-columna plano con uniones semirrígidas, que experimenta grandes desplazamientos.

El elemento viga-columna con uniones semirrígidas de la figura 3, se muestra en su posición inicial y en su posición final. Las relaciones entre los giros totales de los extremos del elemento \mathbf{q}_A y \mathbf{q}_B , medidos con respecto a la cuerda del elemento, y los desplazamientos y giros de los nudos, en el sistema de referencia global D_1, D_2, \dots, D_6 , están dadas por

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{a} + D_3 - \mathbf{b} \quad (16a)$$

$$\mathbf{q}_B = \mathbf{a} + D_6 - \mathbf{b} \quad (16b)$$

$$\mathbf{b} = \tan^{-1} \left(\frac{D_5 - D_2 + L_0 \sin \mathbf{a}}{D_4 - D_1 + L_0 \cos \mathbf{a}} \right) \quad (16c)$$

donde L_0 es la longitud inicial del elemento, L_f es la longitud final del elemento, \mathbf{a} es el ángulo que forma el eje local de coordenadas x del elemento con respecto al eje global de coordenadas X , en su posición final.

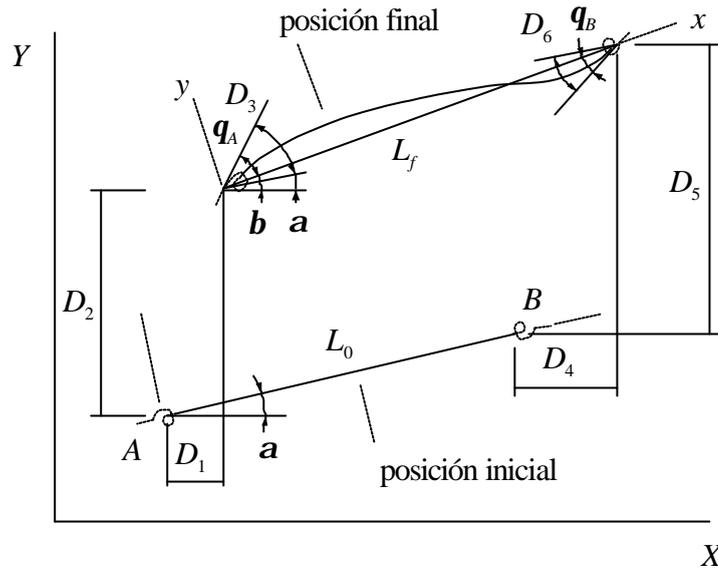


Fig. 3 – Compatibilidad de desplazamientos y giros en un elemento viga-columna sometido a grandes desplazamientos

En la figura 4 pueden verse los giros que se producen en los extremos de un elemento viga -columna plano con uniones semirrígidas. Si q_i es el giro del extremo i del elemento viga -columna con uniones semirrígidas respecto a la cuerda que une los extremos y y_i es el giro del extremo i de la viga-columna respecto a la cuerda que une los extremos, entonces el giro relativo q_{ri} de la unión en el extremo i puede obtenerse como

$$q_{ri} = q_i - y_i \quad (17)$$

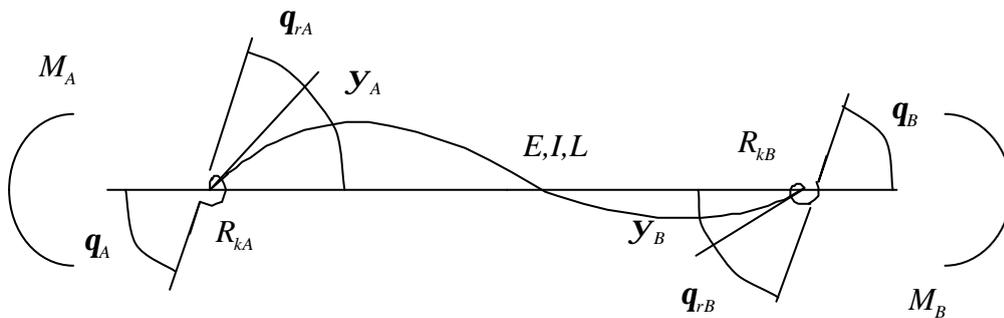


Fig. 4 – Giros y momentos flectores en los extremos de un elemento viga-columna plano con uniones semirrígidas

Si los giros q_A y q_B están impedidos, entonces

$$q_A = 0 = q_{rA} + y_A; \quad q_{rA} = -y_A \quad (18a)$$

$$q_B = 0 = q_{rB} + y_B; \quad q_{rB} = -y_B \quad (18b)$$

Las ecuaciones que definen el comportamiento del elemento viga-columna elástico plano son

$$M_A = \frac{EI}{L} (\mathbf{f}_2 \mathbf{y}_A + \mathbf{f}_3 \mathbf{y}_B) + M_{FA} \quad (19a)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} (\mathbf{f}_3 \mathbf{y}_A + \mathbf{f}_2 \mathbf{y}_B) + M_{FB} \quad (19b)$$

donde M_{FA} y M_{FB} son los momentos de empotramiento perfecto en sus extremos A y B , respectivamente y \mathbf{f}_2 y \mathbf{f}_3 son las llamadas *funciones de estabilidad* de Livesley⁹.

Además, considerando (18a), (18b) y la ecuación de comportamiento de una unión semirrígida

$$M = R_k \mathbf{q}_r \quad (20)$$

donde M es el momento en la unión semirrígida, tenemos

$$\mathbf{y}_A = -\mathbf{q}_{rA} = -\frac{M_A}{R_{kA}} \quad (21a)$$

$$\mathbf{y}_B = -\mathbf{q}_{rB} = -\frac{M_B}{R_{kB}} \quad (21b)$$

Si sustituimos (21a) y (21b) en (19a) y en (19b), podemos poner

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[\mathbf{f}_2 \left(-\frac{M_A}{R_{kA}} \right) + \mathbf{f}_3 \left(-\frac{M_B}{R_{kB}} \right) \right] + M_{FA} \quad (22a)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[\mathbf{f}_3 \left(-\frac{M_A}{R_{kA}} \right) + \mathbf{f}_2 \left(-\frac{M_B}{R_{kB}} \right) \right] + M_{FB} \quad (22b)$$

Reordenando términos y expresando las ecuaciones (22a) y (22b) en forma matricial, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2 EI}{R_{kA} L} & \frac{\mathbf{f}_3 EI}{R_{kB} L} \\ \frac{\mathbf{f}_3 EI}{R_{kA} L} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2 EI}{R_{kB} L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{FA} \\ M_{FB} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Resolviendo el sistema (23), los momentos M_A y M_B son

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2 EI}{R_{kB} L} & -\frac{\mathbf{f}_3 EI}{R_{kB} L} \\ -\frac{\mathbf{f}_3 EI}{R_{kA} L} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2 EI}{R_{kA} L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{FA} \\ M_{FB} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

con

$$S = \left(1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \frac{EI}{L}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} \frac{EI}{L}\right) - \frac{1}{R_{kA}} \frac{1}{R_{kB}} \left(\mathbf{f}_3 \frac{EI}{L}\right)^2 \quad (25)$$

Finalmente, llamando $M_{FA_{sr}}$ y $M_{FB_{sr}}$ a los momentos M_A y M_B , respectivamente, tenemos

$$\begin{Bmatrix} M_{FA_{sr}} \\ M_{FB_{sr}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} \frac{EI}{L} & -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kB}} \frac{EI}{L} \\ -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kA}} \frac{EI}{L} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{FA} \\ M_{FB} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

La expresión (26) sirve para calcular los momentos de empotramiento perfecto $M_{FA_{sr}}$ y $M_{FB_{sr}}$ en un elemento viga-columna plano con uniones semirrígidas en sus extremos a partir de los momentos de empotramiento perfecto M_{FA} y M_{FB} .

Si los giros \mathbf{q}_A y \mathbf{q}_B no están impedidos, teniendo en cuenta (17) y (20), tenemos

$$\mathbf{y}_A = \mathbf{q}_A - \mathbf{q}_{rA} = \mathbf{q}_A - \frac{M_A}{R_{kA}} \quad (27a)$$

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{q}_B - \mathbf{q}_{rB} = \mathbf{q}_B - \frac{M_B}{R_{kB}} \quad (27b)$$

Las ecuaciones de comportamiento (19a) y (19b), considerando las relaciones (27a) y (27b) y con $M_{FA} = M_{FB} = 0$, quedan como sigue

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[\mathbf{f}_2 \left(\mathbf{q}_A - \frac{M_A}{R_{kA}} \right) + \mathbf{f}_3 \left(\mathbf{q}_B - \frac{M_B}{R_{kB}} \right) \right] \quad (28a)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[\mathbf{f}_3 \left(\mathbf{q}_A - \frac{M_A}{R_{kA}} \right) + \mathbf{f}_2 \left(\mathbf{q}_B - \frac{M_B}{R_{kB}} \right) \right] \quad (28b)$$

Reordenando términos, tenemos

$$M_A \left(1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \frac{EI}{L} \right) + M_B \left(\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kB}} \frac{EI}{L} \right) = \frac{EI}{L} (\mathbf{f}_2 \mathbf{q}_A + \mathbf{f}_3 \mathbf{q}_B) \quad (29a)$$

$$M_A \left(\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kA}} \frac{EI}{L} \right) + M_B \left(1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} \frac{EI}{L} \right) = \frac{EI}{L} (\mathbf{f}_3 \mathbf{q}_A + \mathbf{f}_2 \mathbf{q}_B) \quad (29b)$$

Podemos expresar estas dos últimas ecuaciones en forma matricial, de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \frac{EI}{L} & \frac{\mathbf{f}_3}{R_{kB}} \frac{EI}{L} \\ \frac{\mathbf{f}_3}{R_{kA}} \frac{EI}{L} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \quad (30a)$$

o, lo que es lo mismo

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{1}{S} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} & -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kB}} \\ -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kA}} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \right) \quad (30b)$$

con S definido ya en (25).

Los valores de \mathbf{q}_A y \mathbf{q}_B se pueden obtener con (16a) y (16b). Si tenemos cargas en el vano del elemento, los momentos en los extremos de la expresión (26) los podemos incluir en la expresión (30b), quedando

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{1}{S} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kB}} & -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kB}} \\ -\frac{\mathbf{f}_3}{R_{kA}} & 1 + \frac{\mathbf{f}_2}{R_{kA}} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} M_{FA} \\ M_{FB} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \right) \quad (31)$$

Hay que hacer notar que los valores de \mathbf{q}_A y \mathbf{q}_B calculados, considerando grandes desplazamientos, con respecto al eje local x del elemento, en su posición final, son cantidades totales de giros, acumuladas tras un número de iteraciones. En el cálculo de esfuerzos, es conveniente hacer una serie de iteraciones para cada elemento, con el fin de actualizar los valores de R_{kA} y R_{kB} en (31), al nivel de sollicitación actual en la posición final.

4 EJEMPLOS

4.1 Pórtico de un vano y dos plantas

La estructura a optimizar se representa en la figura 5. Se han considerado uniones semirrígidas de las vigas a los pilares. El ejemplo puede encontrarse en las referencias ⁴⁻⁵⁻¹⁰.

El código de diseño adoptado es la norma española NBE EA-95. Se ha considerado un coeficiente de ponderación de cargas medio de 1.44 para las cargas verticales y de 1.5 para las cargas horizontales. El acero tiene un módulo de Young de 206020 MPa y un límite elástico de 255.060 MPa. Se ha considerado un coeficiente de minoración de la resistencia del acero de $\mathbf{g}_m = 1.0$. Se han considerado restricciones de desplazamiento, flecha, resistencia, esbeltez, pandeo y estabilidad global. Los pilares son perfiles HEB y las vigas son perfiles IPE. El coeficiente de esbeltez \mathbf{b} para los pilares, en el plano vertical perpendicular al de

la estructura, se ha adoptado la unidad. Las vigas tienen impedido el movimiento de el ala superior en el plano de las plantas. La relación flecha/luz máxima para las vigas es $1/400$. Los desplazamientos máximos de los nudos son los de la tabla 2, donde h_4 es la distancia entre los nudos 2 y 4, h_6 es la distancia entre los nudos 2 y 6.

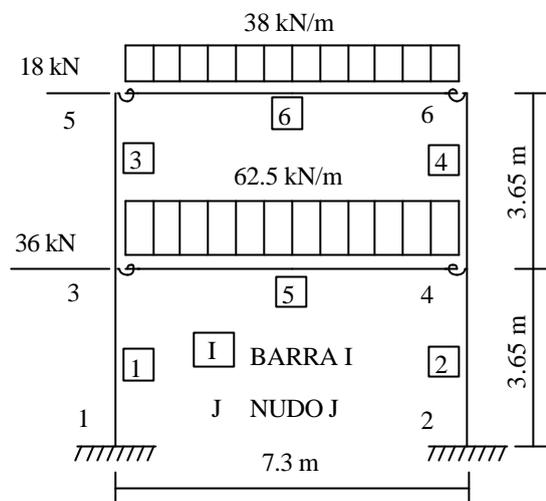


Fig. 5 – Pórtico de un vano y dos plantas. Geometría y cargas

Nudo	Desplazamiento horizontal máximo
4	0.0122 m ($h_4/300$)
6	0.0146 m ($h_6/500$)

Tabla 2 : Pórtico de un vano y dos plantas. Desplazamientos máximos en los nudos

El comportamiento de las uniones, de angulares en las alas y dos angulares en el alma de la viga, se define con un modelo polinomial Frye-Morris⁸. Los valores iniciales máximos y mínimos de las variables de diseño son los de la tabla 3. Las variables son:

- (1) área de pilares inferiores (X_1), (2) área de pilares superiores (X_2),
 (3) área de viga inferior (X_3), (4) área de viga superior (X_4),
 (5) grado de rigidez uniones viga inferior (X_5) y (6) grado de rigidez de viga superior (X_6).

Elementos	Variable	Límite inferior	Valor inicial	Límite superior
1 y 2	X_1 (m^2)	0.00340	0.02	0.0270
3 y 4	X_2 (m^2)	0.00340	0.02	0.0270
5	X_3 (m^2)	0.00132	0.01	0.0155
6	X_4 (m^2)	0.00132	0.01	0.0155
5	X_5	0.20000	0.60	0.9900
6	X_6	0.20000	0.60	0.9900

Tabla 3 : Pórtico de un vano y dos plantas. Valores de las variables de diseño

En la figura 6 pueden verse las evoluciones de las funciones objetivo cuando se considera el análisis lineal o no lineal. Se han considerado tres tipos de análisis:

- (1) lineal (L),
 (2) no lineal con grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y uniones semirrígidas lineales (NLG) y
 (3) no lineal con grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y uniones semirrígidas no lineales (NLGU).

Puede observarse la estabilidad del modelo de diseño propuesto. También pueden observarse las iteraciones que han sido necesarias, en cada caso, para alcanzar la solución.

Los resultados de la optimización (variables, función objetivo, peso de los elementos y restricciones activas) se resumen en las tablas 4 y 5.

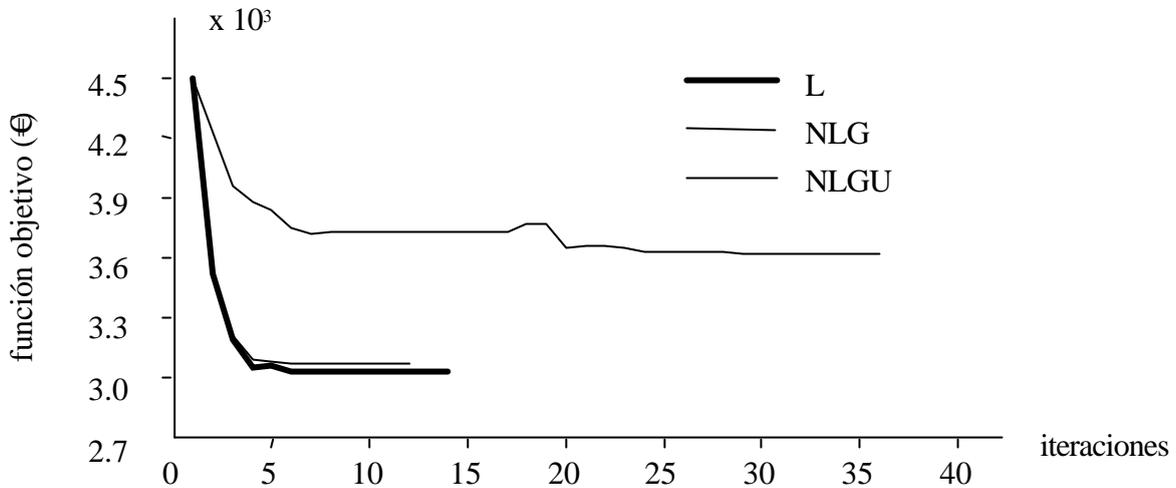


Fig. 6 – Pórtico de un vano y dos plantas. Evoluciones de las funciones objetivo

Variable	Valor inicial			Valor óptimo		
	L	NLG	NLGU	L	NLG	NLGU
X1	0.02	0.02	0.02	0.01123	0.01159	0.01188
X2	0.02	0.02	0.02	0.00884	0.00890	0.00829
X3	0.01	0.01	0.01	0.00924	0.00930	0.01073
X4	0.01	0.01	0.01	0.00798	0.00800	0.00803
X5	0.60	0.60	0.60	0.82847	0.82720	0.92373
X6	0.60	0.60	0.60	0.73660	0.73789	0.90403
Fun. Obj. (€)	4508	4508	4508	3034	3070	3621
Peso elementos (kN)	33.7	33.7	33.7	21.0	21.2	21.9

Tabla 4 : Pórtico de un vano y dos plantas. Resultados de la optimización: variables, función objetivo y peso de los elementos

	Desplazamiento	Flecha	Resistencia	Esbeltez	Pandeo	Est. global
L	nudo 6	viga 2ª planta	pilar 2ª planta viga 1ª planta	-	-	-
NLG	nudo 6	viga 2ª planta	pilar 2ª planta viga 1ª planta	-	-	-
NLGU	nudo 6	viga 2ª planta	pilar 2ª planta	-	-	-

Tabla 5 : Pórtico de un vano y dos plantas. Resultados de la optimización: restricciones activas

4.2 Pórtico de tres vanos y diez plantas

La estructura a optimizar se representa en la figura 7. Se han considerado uniones semirrígidas de las vigas a los pilares. El ejemplo puede encontrarse en las referencias⁴⁻¹⁰.

El código de diseño adoptado es la norma española NBE EA-95. Se ha considerado un coeficiente de ponderación de cargas medio de 1.44 para las cargas verticales y de 1.5 para las cargas horizontales. El acero tiene un módulo de Young de 206020 MPa y un límite elástico de 255.060 MPa. Se ha considerado un coeficiente de minoración de la resistencia del acero de $g_m = 1.0$. Se han considerado restricciones de desplazamiento, flecha, resistencia, esbeltez, pandeo y estabilidad global. Los pilares son perfiles HEB y la vigas son perfiles IPE. El coeficiente de esbeltez b para los pilares, en el plano vertical perpendicular al de la estructura, se ha adoptado la unidad. Las vigas tienen impedido el movimiento del ala superior en el plano de las plantas. La relación flecha/luz máxima para las vigas es 1/400. Los desplazamientos máximos de los nudos son los de la tabla 6, donde h_{44} es la distancia entre los nudos 4 y 44.

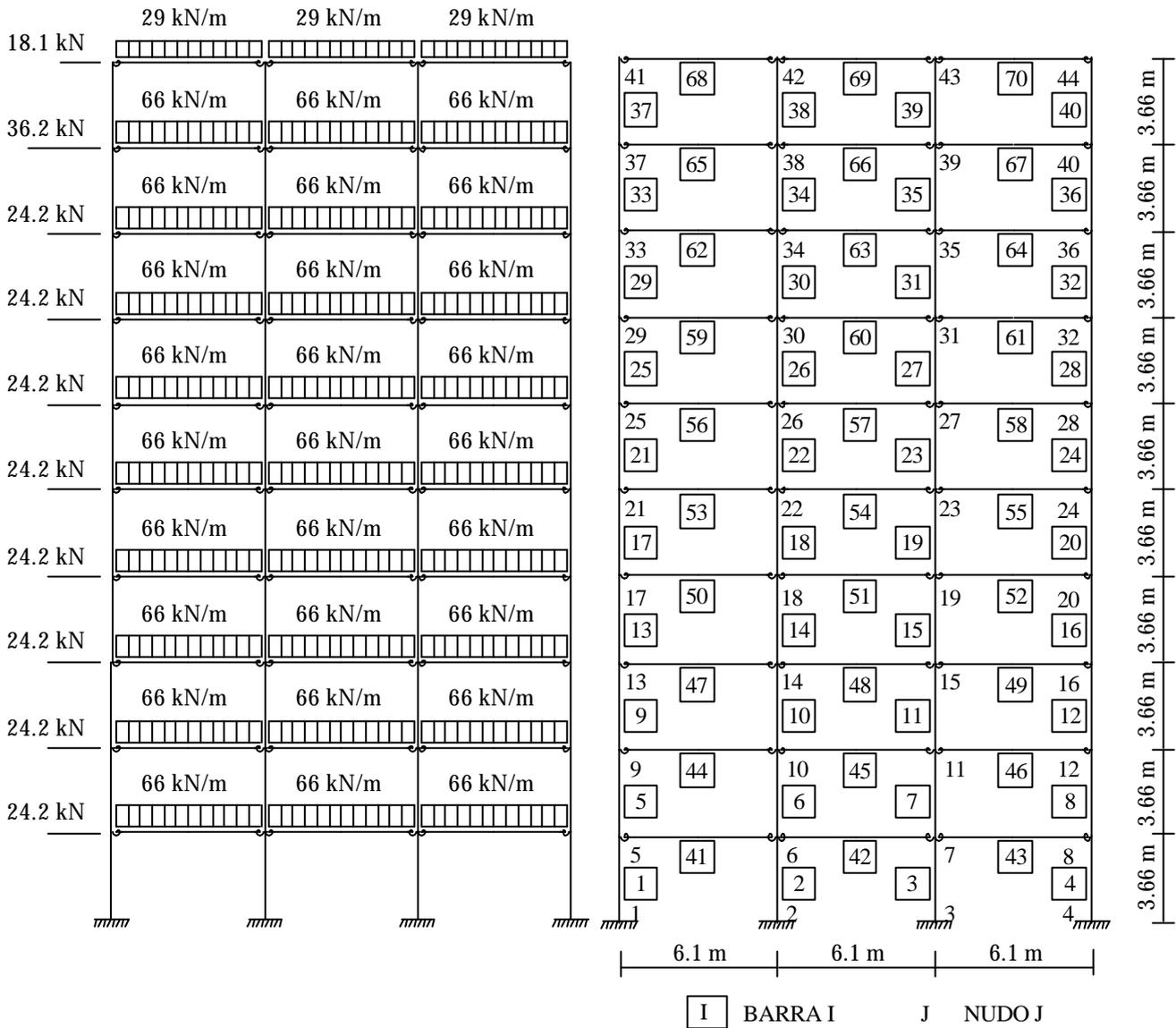


Fig. 7 – Pórtico de tres vanos y diez plantas. Geometría y cargas

Nudo	Desplazamiento horizontal máximo
44	0.0732 m ($h_{44}/500$)

Tabla 6 : Pórtico de tres vanos y diez plantas. Desplazamientos máximos en los nudos

El comportamiento de las uniones, del mismo tipo que el ejemplo anterior, se define con un modelo polinomial Frye-Morris⁸. Los valores iniciales, máximos y mínimos de las variables de diseño son los de la tabla 7. Las variables son:

- | | |
|---|---|
| (1) área de pilares exteriores 1ª y 2ª plantas (X1), | (2) área de pilares interiores 1ª y 2ª plantas (X2), |
| (3) área de pilares exteriores 3ª y 4ª plantas (X3), | (4) área de pilares interiores 3ª y 4ª plantas (X4), |
| (5) área de pilares exteriores 5ª y 6ª plantas (X5), | (6) área de pilares interiores 5ª y 6ª plantas (X6), |
| (7) área de pilares exteriores 7ª y 8ª plantas (X7), | (8) área de pilares interiores 7ª y 8ª plantas (X8), |
| (9) área de pilares exteriores 9ª y 10ª plantas (X9), | (10) área de pilares interiores 9ª y 10ª plantas (X10), |
| (11) área de vigas 1ª planta (X11), | (12) área de vigas 2ª planta (X12), |
| (13) área de vigas 3ª planta (X13), | (14) área de vigas 4ª planta (X14), |
| (15) área de vigas 5ª planta (X15), | (16) área de vigas 6ª planta (X16), |
| (17) área de vigas 7ª planta (X17), | (18) área de vigas 8ª planta (X18), |
| (19) área de vigas 9ª planta (X19), | (20) área de vigas 10ª planta (X20), |
| (21) grado de rigidez uniones 1ª planta (X21), | (22) grado de rigidez uniones 2ª planta (X22), |
| (23) grado de rigidez uniones 3ª planta (X23), | (24) grado de rigidez uniones 4ª planta (X24), |
| (25) grado de rigidez uniones 5ª planta (X25), | (26) grado de rigidez uniones 6ª planta (X26), |
| (27) grado de rigidez uniones 7ª planta (X27), | (28) grado de rigidez uniones 8ª planta (X28), |
| (29) grado de rigidez uniones 9ª planta (X29) y | (30) grado de rigidez uniones 10ª planta (X30). |

Elementos	Variable	Límite inferior	Valor inicial	Límite superior
1, 4, 5 y 8	X1 (m ²)	0.0034	0.0270	0.0270
2, 3, 6 y 7	X2 (m ²)	0.0034	0.0270	0.0270
9, 12, 13 y 16	X3 (m ²)	0.0034	0.0270	0.0270
10, 11, 14 y 15	X4 (m ²)	0.0034	0.0270	0.0270
17, 20, 21 y 24	X5 (m ²)	0.0034	0.0270	0.0270
18, 19, 22 y 23	X6 (m ²)	0.0034	0.0200	0.0270
25, 28, 29 y 32	X7 (m ²)	0.0034	0.0200	0.0270
26, 27, 30 y 31	X8 (m ²)	0.0034	0.0200	0.0270
33, 36, 37 y 40	X9 (m ²)	0.0034	0.0200	0.0270
34, 35, 38 y 39	X10 (m ²)	0.0034	0.0200	0.0270
41, 42 y 43	X11 (m ²)	0.0013	0.0155	0.0155
44, 45 y 46	X12 (m ²)	0.0013	0.0155	0.0155
47, 48 y 49	X13 (m ²)	0.0013	0.0155	0.0155
50, 51 y 52	X14 (m ²)	0.0013	0.0155	0.0155
53, 54 y 55	X15 (m ²)	0.0013	0.0155	0.0155
56, 57 y 58	X16 (m ²)	0.0013	0.0100	0.0155
59, 60 y 61	X17 (m ²)	0.0013	0.0100	0.0155
62, 63 y 64	X18 (m ²)	0.0013	0.0100	0.0155
65, 66 y 67	X19 (m ²)	0.0013	0.0100	0.0155
68, 69 y 70	X20 (m ²)	0.0013	0.0100	0.0155
41, 42 y 43	X21	0.2000	0.9000	0.9900
44, 45 y 46	X22	0.2000	0.9000	0.9900
47, 48 y 49	X23	0.2000	0.9000	0.9900
50, 51 y 52	X24	0.2000	0.9000	0.9900
53, 54 y 55	X25	0.2000	0.9000	0.9900
56, 57 y 58	X26	0.2000	0.9000	0.9900
59, 60 y 61	X27	0.2000	0.9000	0.9900
62, 63 y 64	X28	0.2000	0.9000	0.9900
65, 66 y 67	X29	0.2000	0.9000	0.9900
68, 69 y 70	X30	0.2000	0.9000	0.9900

Tabla 7 : Pórtico de tres vanos y diez plantas. Valores de las variables de diseño

En la figura 8 pueden verse las evoluciones de las funciones objetivo cuando se considera el análisis lineal o no lineal. Se han considerado tres tipos de análisis:

- (1) lineal (L),
- (2) no lineal con grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y uniones semirrígidas lineales (NLG), y
- (3) no lineal con grandes cargas axiales, grandes desplazamientos y uniones semirrígidas no lineales (NLGU).

Puede observarse la estabilidad del modelo de diseño propuesto. También pueden observarse las iteraciones que han sido necesarias, en cada caso, para alcanzar la solución.

Los resultados de la optimización (variables, función objetivo, peso de los elementos y restricciones activas) se resumen en las tablas 8 y 9.

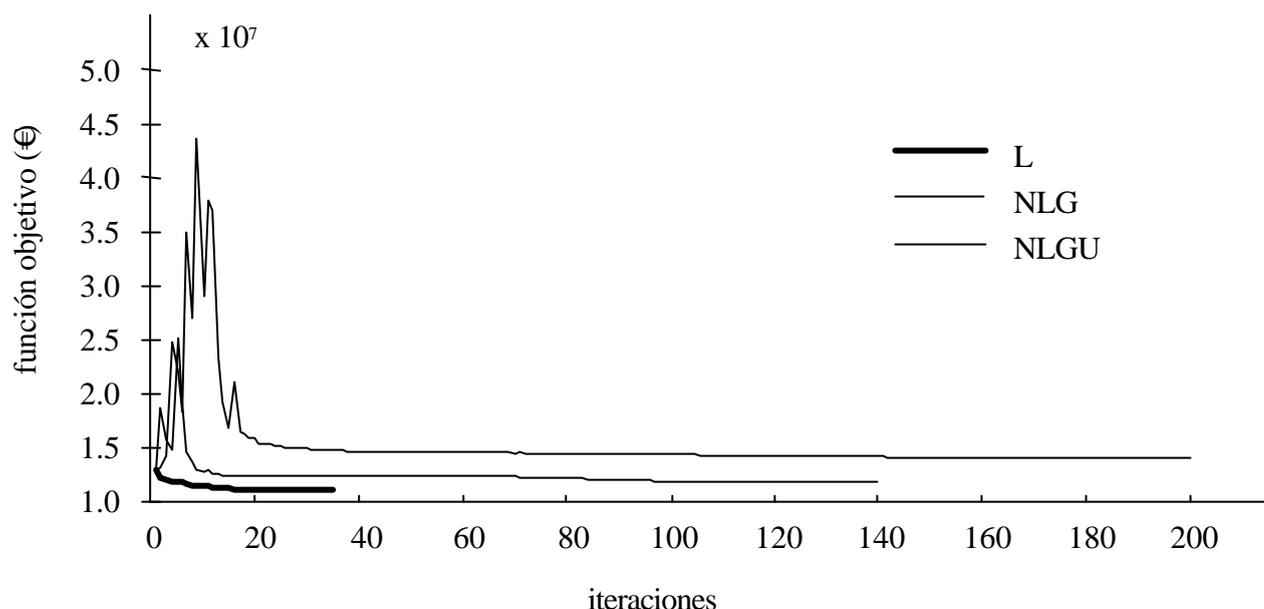


Fig. 6 – Pórtico de tres vanos y diez plantas. Evoluciones de las funciones objetivo.

5 CONCLUSIONES

En relación con el primer ejemplo, en la tabla 4 se ve que la estructura óptima caso NLGU tiene un costo un 19 % superior a la estructura óptima caso L. Las diferencias de coste entre los casos L y NLG son del 1 %. En la figura 3 se ve que el número de iteraciones necesarias hasta lograr la convergencia es 2.5 veces mayor para la estructura caso NLGU con respecto a los otros casos. La diferencia de peso entre el diseño caso NLGU y los otros casos, es de un 4 %. La diferencia de peso entre los casos L y NLG es del 1 %.

En relación con el segundo ejemplo, en la tabla 8 se ve que la estructura óptima caso NLGU tiene un costo un 26 % superior a la estructura óptima caso L. Las diferencias de coste entre los casos L y NLG son del 5 %. En la figura 8 se ve que el número de iteraciones necesarias hasta lograr la convergencia es 6.25 veces mayor para la estructura caso NLGU con respecto al caso L y es 4.4 veces mayor para la estructura caso NLG con respecto al caso L. La diferencia de peso entre el diseño caso NLGU y el caso L, es de un 4.4 %. La diferencia de peso entre los casos NLG y NLGU es del 0.1 %.

La unión semirrígida no lineal experimenta un descenso acusado de su rigidez bajo carga produciéndose un aumento de los desplazamientos de la estructura y un efecto de redistribución de esfuerzos importante. En el caso NLGU, la rigidez inicial de las uniones en el óptimo es alta, aumentando algo el tamaño de los elementos que más contribuyen a la rigidez lateral de la estructura, lo cual produce diseños con un coste mayor y un peso similar. Estos resultados sugieren que en el caso de utilizar uniones semirrígidas debe tenerse en cuenta el comportamiento no lineal de las mismas.

Variable	Valor inicial			Valor óptimo		
	L	NLG	NLGU	L	NLG	NLGU
X1	0.0270	0.0270	0.0270	0.02700	0.02700	0.02700
X2	0.0270	0.0270	0.0270	0.02700	0.02700	0.02700
X3	0.0270	0.0270	0.0270	0.02093	0.02199	0.02236
X4	0.0270	0.0270	0.0270	0.02141	0.02155	0.02188
X5	0.0270	0.0270	0.0270	0.02179	0.02330	0.02502
X6	0.0200	0.0200	0.0200	0.01551	0.01600	0.01614
X7	0.0200	0.0200	0.0200	0.02129	0.02667	0.02516
X8	0.0200	0.0200	0.0200	0.01026	0.00989	0.00964
X9	0.0200	0.0200	0.0200	0.02700	0.02700	0.02700
X10	0.0200	0.0200	0.0200	0.02299	0.02519	0.02669
X11	0.0155	0.0155	0.0155	0.01550	0.01550	0.01550
X12	0.0155	0.0155	0.0155	0.01550	0.01550	0.01550
X13	0.0155	0.0155	0.0155	0.01550	0.01550	0.01550
X14	0.0155	0.0155	0.0155	0.00934	0.01019	0.00962
X15	0.0155	0.0155	0.0155	0.00959	0.01025	0.01004
X16	0.0100	0.0100	0.0100	0.00912	0.00970	0.00929
X17	0.0100	0.0100	0.0100	0.00785	0.00780	0.00750
X18	0.0100	0.0100	0.0100	0.01550	0.01550	0.01550
X19	0.0100	0.0100	0.0100	0.01550	0.01550	0.01550
X20	0.0100	0.0100	0.0100	0.01550	0.01550	0.01550
X21	0.9000	0.9000	0.9000	0.91955	0.92662	0.95026
X22	0.9000	0.9000	0.9000	0.86784	0.88226	0.93219
X23	0.9000	0.9000	0.9000	0.75613	0.78754	0.90404
X24	0.9000	0.9000	0.9000	0.73644	0.77946	0.93025
X25	0.9000	0.9000	0.9000	0.71354	0.74438	0.92621
X26	0.9000	0.9000	0.9000	0.69111	0.72030	0.92592
X27	0.9000	0.9000	0.9000	0.63107	0.62898	0.92787
X28	0.9000	0.9000	0.9000	0.76782	0.79354	0.89941
X29	0.9000	0.9000	0.9000	0.81997	0.83686	0.91410
X30	0.9000	0.9000	0.9000	0.77264	0.79354	0.86886
Fun. Obj. (€)	13060923	13060923	13060923	11211509	11791201	14140491
Peso elementos (kN)	45323	45323	45323	424.2	438.9	439.4

Tabla 8 : Pórtico de tres vanos y diez plantas. Resultados de la optimización: variables, función objetivo y peso de los elementos

	Desplazamiento	Flecha	Resistencia	Esbeltez	Pandeo	Est. global
L	-	-	pilar int. 3ª planta pilar int. 5ª planta pilar int. 7ª planta vigas 4ª planta vigas 5ª planta vigas 6ª planta vigas 7ª planta	-	pilar int. 1ª planta pilar int. 5ª planta pilar int. 7ª planta	-
NLG	-	-	pilar int. 3ª planta pilar int. 5ª planta pilar int. 7ª planta vigas 4ª planta vigas 5ª planta vigas 6ª planta vigas 7ª planta	-	pilar int. 1ª planta	-
NLGU	-	-	pilar int. 3ª planta pilar int. 5ª planta vigas 4ª planta vigas 5ª planta vigas 6ª planta vigas 7ª planta	-	pilar int. 1ª planta pilar int. 7ª planta	-

Tabla 9 : Pórtico de un vano y dos plantas. Resultados de la optimización: restricciones activas

6 REFERENCIAS

- [1] Chen, W.F., Toma S. *Advanced Analysis of Steel Frames*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, (1994).
- [2] Schittkowski, K., "On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function", *Math. Operationsforsch u Statist. Ser. Optimization*, 14(2): 197-216, (1983).
- [3] McGuire, W., *Steel Structures*, Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall, (1968).
- [4] Xu, L., Grierson, D.E., "Computer-Automated Design of Semirigid Steel Frameworks", *Journal of Structural Engineering* 119(6): 1740-1760, (1993).
- [5] Simoes, L.M.C., "Optimization of Frames with Semi -Rigid Connections", *Computers & Structures*, 60(4): 531 -539, (1996).
- [6] Sánchez, G., Martí, P., "Diseño óptimo de estructuras metálicas con uniones semirrígidas", *Anales de Ingeniería Mecánica*, 12(3): 566-573, (1998).
- [7] Chen, W.F., Lui, E.M., *Stability Design of Steel Frames*, Boca Raton, Fla.: CRC Press, (1991).
- [8] Frye MJ, Morris GA. "Analysis of Flexibly Connected Steel Frames", *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2: 280-291, (1975).
- [9] Livesley, R.K., Chandler, D.B., *Stability Functions for Structural Frameworks*, Manchester, UK: Manchester University Press, (1956).
- [10] Sánchez, G., *Diseño óptimo de estructuras metálicas con uniones semirrígidas y comportamiento no lineal*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y Energética, Universidad de Murcia, Murcia, España, (1999).