

UNIVERSIDAD DE MURCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Conjuntos ω -límite y Entropía Topológica de
Aplicaciones Triangulares Bidimensionales.**

JUAN LUIS GARCÍA GUIRAO

TESIS DOCTORAL

MURCIA, 2004

A mi familia.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su apoyo me han ayudado a realizar este trabajo.

En primer lugar, mi reconocimiento al profesor Francisco Balibrea Gallego, director de la Tesis Doctoral, por su generosa y valiosa ayuda en la elaboración de la misma.

Quiero dar las gracias a todos mis compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha y de la Escuela Universitaria Politécnica de Cuenca por el estímulo y las facilidades que me han dispensado para conseguir este fin. En particular mostrar mi gratitud a Miguel Ángel López Guerrero y a Juan Remigio Coloma Santamaría por su compañerismo y apoyo incondicional. Por otra parte, agradecer la colaboración de todos los miembros del Grupo de Investigación en Sistemas Dinámicos y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia. En especial, gracias por vuestros consejos siempre acertados, a Víctor Jiménez López y a Antonio Linero Bas y por vuestra ayuda técnica a Antonio Mellado Romero y a Antonio Pallarés Ruiz. Mi reconocimiento también a todos los miembros del Departamento de Fundamentos del Análisis Económico de la Universidad de Alicante, institución a la que pertenezco en el pasado, y especialmente a Ricardo Martínez Rico por su amistad.

Me gustaría agradecer la ayuda y el apoyo de toda mi familia. Pero, en particular y con justicia, debe aparecer aquí un reconocimiento mayúsculo a la labor desarrollada por mis padres. Gracias por vuestro sacrificio, desvelo, ayuda constante y amor.

Para finalizar, mi más sincero agradecimiento a Yolanda. Sin tu comprensión, apoyo e inteligencia no hubiera sido posible.



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

D. Pascual Lucas Saorín, Profesor Titular de Universidad del Área de Geometría y Topología y Director del Departamento de Matemáticas,

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral titulada “*Conjuntos ω -límite y Entropía Topológica de Aplicaciones Triangulares Bidimensionales*”, ha sido realizada por D. Juan Luis García Guirao, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Francisco Balibrea Gallego, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

Murcia, a 21 de Abril de 2004

Fdo. Pascual Lucas Saorín

Director del Departamento de Matemáticas



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

D. Francisco Balibrea Gallego, Catedrático de Universidad del Área de Análisis Matemático en el Departamento de Matemáticas,

AUTORIZA:

La presentación de la Tesis Doctoral titulada “*Conjuntos ω -límite y Entropía Topológica de Aplicaciones Triangulares Bidimensionales*” realizada por D. Juan Luis García Guirao, bajo mi inmediata dirección y supervisión, en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del grado de Doctor por la Universidad de Murcia con mención de “Doctorado Europeo”.

En Murcia, a 21 de Abril de 2004

Fdo. Francisco Balibrea Gallego

“We have a habit in writing articles published in scientific journals to make the work as finished as possible, to cover up all the tracks, to not worry about the blind alleys or describe how you had the wrong idea first, and so on. So there isn’t any place to publish, in a dignified manner, what you actually did in order to get to do the work”.

Richard Philips Feynman (1918 - 1988), Nobel Lecture, 1966.

Índice general

Introduction (english version)	III
Introducción	XVII
1. Notación y resultados preliminares	1
1.1. Puntos especiales y medidas del caos en un S.D.D.	1
1.2. La clase de las aplicaciones triangulares $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$	4
1.3. Conjuntos ω -límite en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$	8
1.4. La familia de funciones base tipo Kolyada	11
1.5. Variedades, grafos y dendritas	12
1.6. La topología métrica de Hausdorff.	15
2. Describiendo la familia $\mathcal{W}(F)$	17
2.1. Solución de (P1) para la aplicación de Kolyada	17
2.1.1. La aplicación triangular de Kolyada	17
2.1.2. Análisis de la dinámica de la aplicación de Kolyada	22
2.1.3. Resolución de (P1) para la aplicación de Kolyada	28
2.2. Solución de ($\bar{P}1$) para un elemento de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^3)$	30
2.2.1. Construcción de la aplicación triangular en \mathbb{I}^3	30
2.2.2. Análisis de la dinámica	35
2.2.3. Resolución de ($\bar{P}1$)	45
3. Aplicaciones universales para $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$	49
3.1. Universalidad	50
3.2. Universalidad en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ para intervalos contenidos en fibras	51
3.2.1. Construcción del elemento universal	52
3.2.2. Análisis de la dinámica	55
3.2.3. Comprobación de la universalidad	62
3.3. D-universalidad	65
3.3.1. Inexistencia en variedades m -dimensionales. El caso $m \geq 2$. . .	66

3.3.2.	Inexistencia en grafos distintos de un arco	69
3.3.3.	Espacios finitos y problemas abiertos	72
4.	Clausura Hausdorff de $\mathcal{W}(\psi)$	75
4.1.	El caso bidimensional: $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$	75
4.2.	El caso triangular: $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$	76
4.2.1.	Construcción del elemento de $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$	76
4.2.2.	Análisis de la dinámica	80
4.2.3.	Resolución de (P3) en $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$	85
5.	Caracterizando $h(F) = 0$ en $\mathcal{C}_{\Delta}^*(\mathbb{I}^2)$	87
5.1.	Estado del problema en $\mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$	88
5.2.	La clase $\mathcal{C}_{\Delta}^*(\mathbb{I}^2)$	88
5.3.	Resultados parciales	89
5.4.	Prueba del resultado principal	91
	Apéndice	93
	Bibliografía	97
	Índice alfabético	106

Introduction

During the last quarter of the 19th century, while Peano and Picard closed the classical approach of finding solutions for Ordinary Differential Equations (O.D.E.), Liapunov and particularly Poincaré opened a new one: “*The qualitative study of the solutions*” . It is an approach to the problem completely new. The existence of solutions is assumed and, on the contrary, the topological properties of the space where we work and the analytical ones of the map which defines the equation are used for stating the asymptotic behavior of the solutions for large values of time.

While the qualitative theory of differential equations was growing, mathematicians gradually understood that the essential points of this theory live in a more general framework, the Dynamical Systems (D.S.).

Even though a lot of years were necessary for obtain an abstract formulation for this concept (at this point we quote the work of Birkhoff [Bi 27] in the twenties and Nemytskii and Stepanov [NS 49] between the forties and fifties), it is possible to say that its origins are as old as Science. Roughly speaking, we are able to define a D.S. as an evolutionary process on time which is deterministic, i.e., their future states are predicted using its current position and the rules which govern its evolution.

Scientific like Kepler (with his search for internal rules which governed the observations), Galileo (who taught us not to consider the time, the movement and the speed as mysterious qualities or essences, but as variables which are measured and mathematically counted), Descartes (with his perception of the countless of the space and his idea of the world as mechanism), Newton (who striped science of metaphysical arguments and established the mainstays of the modern scientific thought) or the own Malthus (with a pessimistic and wrong, but mathematically based, point of view concerning the evolution of the human population which advised us that not only the exact pieces of information are important, but too the tendencies) are fair pioneering members of the research team in the D.S. area.

From the point of view of the structure of the set of times, we consider two different kind of D.S, i.e, the continuous ones (the set of times is a continuous semigroup of \mathbb{R} , it is the case of systems of O.D.E.) and the discrete ones (the set of times is a discrete

semigroup of \mathbb{Z}). Now, we center our attention on Discrete Dynamical Systems (D.D.S.)

In the same way that for Continuous Dynamical Systems (C.D.S.), the father of D.D.S. is H. Poincaré, who studied them as a consequence of searching methods which simplify the qualitative study of the more difficult C.D.S. generated by systems of non linear O.D.E. . His idea of reducing the study of a C.D.S. to a discrete one was born in 1899, and it had a great importance because it allows to analyze the topology of a D.S. without solving complicated differential equations. When Poincaré disappeared, the topology flourished but D.S. degenerated.

Around the first quarter of the 20th century, C.D.S were studied from a physics point of view by Duffing [Du 18], Birkhoff [Bi 27] and Van der Pool [V 27]. But carried out this aim, involved to solve, in a rudimentary way, the complicated related systems of differential equations which in many cases were unsolved as a consequence of the computational complexity. Nevertheless and surprisingly, the easier D.D.S. (defined by continuous selfmaps of compact intervals of the real line) were essentially unexplored.

In the twenties and thirties the theory underwent considerable steps forward, particularly in systems related with the circle and the plane, as a result of the works due to Julia, Fatou, Birkhoff and Denjoy.

Between 1950-1960 and forced by the work of Moser [Mos 62], Myrberg [My 63], [My 65] and Smale [Sm 65], [Sm 67], the study of D.D.S re-emerges again. And it obtains its peak point in the seventies when appeared the works of Metropolis, M.L. Stein and P.R. Stein [MSS 73], Li and Yorke (who published in 1975 their well known paper “*Period three implies chaos*” [LY 75]) or R. May (who showed us in 1976 that simple and deterministic models, which are used in Biology, Economics and Social Sciences, are able to present complicated dynamical behavior [Ma 76]).

On other hand, the rediscovery on the same dates by Stefan [St 77] of the Sharkovskii’s theorem concerning periodic structure of continuous selfmaps on the interval, considered as one of the most outstanding mathematical results on the second part of the 20th century, was the fact which earned the theory recognition as a mathematical discipline. Therefore, the scientific pillars for the development of this study were established. And D.D.S. moved into a main position on the theory of D.S.

Generally speaking, a D.D.S. is a triple composed by the elements $(\mathbb{X}, \mathbb{Z}, \phi)$ where \mathbb{X} (phase space) is a nonempty topological space and $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ (flow of the system) is a continuous map holding the following properties:

- (a) $\phi(0, x) = x$ for each element $x \in \mathbb{X}$,
- (b) $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ for each $s, t \in \mathbb{Z}$ and $x \in \mathbb{X}$.

Along all the work, we use D.D.S. *associated* or *induced* by a continuous selfmap $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$). In this situation the system $(\mathbb{X}, \mathbb{Z}, \phi)$ is given by $\phi(n, x) = \psi^n(x)$ for each $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, where ψ^0 means the identity map defined on \mathbb{X} and $\psi^n(x) = \psi(\psi^{n-1}(x))$. We consider the negative iterate as an iteration of the map ψ^{-1} . For each point $x \in \mathbb{X}$, the sequence $(\psi^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ is called the trajectory of x by the map ψ . Note that the fact of using negative iterate of the map ψ , implies that ψ is an invertible map. Of course, this situation is not held when we consider an arbitrary continuous selfmap. So, in the most of cases we consider systems of the form $(\mathbb{X}, \mathbb{N}, \phi)$, where by \mathbb{N} we denote the set of all non negative integers. Under these conditions the trajectory of a point x by ψ is a sequence of the form $(\psi^n(x))_{n=0}^{\infty}$. From now, we denote by (\mathbb{X}, ψ) the D.D.S. generated by a map $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$.

It has been showed that the basic operation to understand the behavior of this kind of systems is the iteration of continuous maps. Thus, D.D.S. are a part of “*Iteration Theory*”, a more general theory which appears in a lot of areas of mathematics:

- (a) contractive transformations on Banach spaces,
- (b) functional equations,
- (c) numerical schemes for partial differential equations,
- (d) non-linear differences equations.

A lot of examples of D.D.S. could be presented. But, between them, we underline some related with *non linear finite differences equations* and we show some of them from [SP 83]:

- Guckenheimer, Oster and Ipaktchi’s equation:

$$\psi(x, y) = (y, r(y + x)e^{-0.1(x+y)}).$$

- $\psi(x, y) = (Ax f(x, y), By g(x, y))$, where $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous maps and $A, B \in \mathbb{R}$, in particular:

$$\psi(x, y) = (Axe^{\alpha x + \beta y}, Bye^{\gamma x + \delta y}).$$

- $\psi(x, y) = (Ax, xf(x) + yg(y))$ where $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous maps and $A \in \mathbb{R}$.

This sort of systems are very interesting as a consequence of their applications. They are the mathematical formulation of physical, chemical, ecological, economic and social processes.

In general, when a D.D.S. (\mathbb{X}, ψ) is given, we try to study its *dynamic*, i.e., we try to find out the asymptotic behavior of the trajectories of all points of the phase space. This behavior depends strongly on the topology of the space \mathbb{X} and, as a consequence of this relation, this type of study is known as the “*topological dynamic*” of the system.

Problems of the form (\mathbb{X}, ψ) where \mathbb{X} was a compact metric space and ψ was an homeomorphism were considered by a long time. The requirement of compactness is a hypothesis on finiteness, similar to the property required to the measures in the framework of the theory which studies them. On other hand, the metrizable in general is not a key point property for proofs. But, usually it shortens them and it is in coherence with the situations held for applications. As problems which were considered at that time, we have the study of minimality, the topological structure of the “wandering” sets, topological transitive and topological conjugation.

From the seventies, when the use of the computer became an essential tool for calculating trajectories of points and appeared the interest for D.D.S. associated to finite differences equations for modelling phenomena from population dynamics, economics and numerical methods from partial and ordinary differential equations, in general the map which defines the system is not considered an homeomorphism. Now, the systems studied have the form (\mathbb{X}, ψ) where the phase space is usually a euclidean space, or a compact manifold with or without border and the map ψ is a continuous map not necessarily invertible. In this new situation, the map ψ is more complicated but, on the contrary, the phase space \mathbb{X} has been simplified. In this stage, other problems were considered and new tools were necessary to develop for trying to understand phenomena such the existence of chaos, the dynamical complexity and the presence of strange attractors, between others.

In contrast to other points of view for studying situations concerning dynamical systems like the ergodic approach based in the measure theory, or the analytical one which uses the smooth properties of the system, this Memoir deals with problems of topological dynamics. Therefore, in this setting we analyze the asymptotic behavior of the points of the system under the action of the map through the notion of ω -*limit set* of an orbit (i.e., the set of limit points of the orbit). For this reason, our feeling is that it is not fortuitous that the first important result on the dynamical system theory, the Poincaré-Bendixson’s theorem (“if there are no critical points for the ω -limit set of a bounded orbit of an autonomous system of equations in the plane, then the orbit is periodic”), uses this concept. Therefore, and jointly with the notion of topological entropy (see Definition 1.1.1), we will center our research in this work about them.

D.D.S. related to selfmaps defined in one-dimensional spaces (at the first moment the interval and the circle) became to an area with importance in itself at middle of

seventies with the papers, previously quoted, by Li and Yorke [LY 75], May [Ma 76], and the proof on the West of the famous Sharkovskii's theorem by Stefan [St 77]. It is surprising that in that time there were results concerning two-dimensional D.D.S. and even for general ones. It was classically motivated by the connections with the theory of differential equations (the systems were seen as a execution of the corresponding Poincaré's maps), but the emphasis was looked at either under the local theory or under the global theory for homeomorphisms and/or diffeomorphisms, and in these cases one-dimensional dynamics is very easy. For this reason, it is not surprising that a lot of problems on this theory have been recently solved and other are still open. That is the case for ω -limit sets for continuous selfmap on the interval which were characterized in 1989 [ABCP 89/90], see also [BS 92].

At the same time, one-dimensional D.D.S. were evolving, and from the pioneering papers by Kloeden [Kl 79] in 1979 and mainly by Kolyada [Ko 92] in 1992, the interest of the mathematical community turned about two-dimensional systems (the typical case is the compact unit square in \mathbb{R}^2). The first results concerning ω -limit sets for such kind of systems (some of them work for more dimensional spaces) were obtained by Agronsky and Ceder [ABCP 89/90], [AC1 91/92] and by Kolyada and Snoha [KS 92/93], in [JS 01] some of them were partially completed. Nevertheless, in dimension higher than one there exist a lot of difficulties and that kind of problems are studied in this Memoir. For systems related to homeomorphisms (particularly diffeomorphisms) the problem must be easier, even by the existence of the Thurston's work [Thu 88]. On the contrary, the research lines have been focused on other ways and today the characterization of the ω -limit sets for such kind of special systems is still open.

Since the increase of the dimension of the phase space introduces heavy additional difficulties, the strategy for studying this kind of systems is to consider some classes of special maps which, in some sense, simplify the process. So, we fix a phase space \mathbb{X} , we consider a class of maps $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$ and we will study dynamical systems of the form (\mathbb{X}, ψ) where $\psi \in \mathcal{F}$. In this situation we state a list of problems, some concerning ω -limit sets and another about the property of having zero topological entropy. In general, if $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ and $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$ we introduce:

$$\mathcal{W}(\psi) := \{\omega_\psi(x) : x \in \mathbb{X}\}$$

and

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} := \{\omega_\psi(x) : \psi \in \mathcal{F} \text{ and } x \in \mathbb{X}\}.$$

Under the previous conditions we establish and study the following problems:

- (P1) given a map $\psi \in \mathcal{F}$, describe completely the family $\mathcal{W}(\psi)$ of all ω -limit sets generated by the map ψ ;

- (P1) given a subfamily of sets $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, define explicitly a map ψ belongs to \mathcal{F} such that $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{A}$;
- (P2) to analyze the existence of universal and w-universal elements (universal in a weak sense) in the class of maps \mathcal{F} for the family of sets $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ (see respectively Definitions 3.0.15 and 3.0.14);
- (P3) to study the property of closure of the family of all ω -limit sets generated by a map $\psi \in \mathcal{F}$, $\mathcal{W}(\psi)$, in the space of all compact and nonempty subsets of \mathbb{X} , $\mathcal{K}(\mathbb{X})$, endowed with the Hausdorff metric topology d_H .

For the analysis of a D.D.S. (\mathbb{X}, ψ) , in many occasions it is useful to have a tool which measures, in some sense, the dynamical complexity of the system. So, the topological entropy of the systems plays for us this role. Thus, when the topological entropy of the system is positive, and we denote this by $h(\psi) > 0$, complicated and strange phenomena could appear. On the contrary, if the systems has zero topological entropy, then the system has a simple dynamical behavior, in certain sense, non chaotic. In this setting, the problem of finding topological characterizations of the property of having zero topological entropy is stated. Therefore we can state a new problem:

- (P4) given an element $\psi \in \mathcal{F}$, find characterizations of the property: ψ has zero topological entropy.

When the phase space \mathbb{X} is the compact unit interval \mathbb{I} and the family of maps \mathcal{F} is composed of all continuous selfmaps defined on \mathbb{I} , the problems previously established have been well analyzed and there exist a lot information concernig their solutions in the literature. It is clear that obtaining a full solution for the problem (P1) is not possible, because it will imply to describe $\mathcal{W}(f)$ for all elements $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. However nowadays, one-dimensional dynamics is enough developed and it has tools for doing non trivial analysis about the composition of $\mathcal{W}(f)$ for most of the continuous selfmaps on the interval \mathbb{I} . Previously, we remarked that the elements of $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ were characterized (see Theorem 1.3.3). Therefore, we know exactly the possible subfamilies \mathcal{A} belong to $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ which allowed, in [BS 92], that Bruckner and Smítal were able to solve the poble (P1) for $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$. Concerning the problem (P2), for systems of the form (\mathbb{I}, f) there is only one result by Pokluda and Smítal [SP 00], where they proved that there exists a w-universal map on $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ for the elements of $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$. So, they proved that there exists a map $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ such that for every set $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ there exists another set \tilde{A} , homeomorphic copy of A , belonging to $\mathcal{W}(f)$. Given a map $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, in [BBHS 96] A. Blokh et al., studied the closure properties in the Hausdorff metric topology, d_H , of the family of sets $\mathcal{W}(f)$ in the space $\mathcal{K}(\mathbb{I})$ of all nonempty compact subsets of the unit interval \mathbb{I} . They obtained

that $(\mathcal{W}(f), d_H)$ is a compact set for each map $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. So, they solved the problem (P3) for $\mathbb{X} = \mathbb{I}$ and $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\mathbb{I})$.

On other hand, given a D.D.S. of the form (\mathbb{I}, f) where $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, there exists a long list of mutually equivalent properties and in turn equivalent to the fact: the map f has zero topological entropy. The most part of these properties were proved by Sharkovskii in the sixties [SKSF 97], but recently has been showed that one of them was false [S 02]. In particular, the following properties are mutually equivalent for the elements of $\mathcal{C}(\mathbb{I})$:

- (1) the topological entropy of f is zero ($h(f) = 0$);
- (2) the topological entropy of $f|_{\text{Rec}(f)}$ is zero ($h(f|_{\text{Rec}(f)}) = 0$);
- (3) $f|_{\text{Rec}(f)}$ is non chaotic;
- (4) every recurrent point of f is uniformly recurrent ($\text{Rec}(f) = \text{UR}(f)$);
- (5) the periods of all periodic points are a power of two ($f \leq 2^\infty$).

In general, given a D.D.S. (\mathbb{X}, ψ) , there exist some class of points, in some sense *special*, which have properties of dynamical regularity and such that from their study it is possible to obtain information about the dynamic of all the system. Between these kind of points are such called recurrent and denoted by $\text{Rec}(\psi)$. A point $x \in \mathbb{X}$, is a recurrent point of the system if it belongs to its own ω -limit set. In the same way, we called uniformly recurrent points, denoted by $\text{UR}(\psi)$, to the set all recurrent points of the system which have a minimal ω -limit set, i.e., nonempty, closed, invariant by ψ ($\psi(M) \subseteq M$) and without subsets holding the same properties. The most regular dynamical behavior of a point under the iteration of a map is called periodic. A point $x \in \mathbb{X}$ is periodic of period $n \in \mathbb{N}$ if $\psi^n(x) = x$ and $\psi^j(x) \neq x$ for all $0 \leq j < n$. By $\text{Per}(\psi)$ we denote the set of all periodic points.

Related to the terminology “dynamical complexity” usually appears the notion of *chaos*. This idea arrives to D.D.S. from the paper by Li and Yorke [LY 75] where, in a non very precise way, the main lines of the present definition of *chaos in the sense of Li and Yorke* are established. We note that all the information from [LY 75] is referred to D.D.S. of the form (\mathbb{I}, f) where $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. Subsequently, all these ideas have been applied to general systems of the form (\mathbb{X}, ψ) . In this setting, a couple of different points $\{x, y\} \subset \mathbb{X}$ is called a Li-Yorke pair if simultaneously holds the following to properties:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) = 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) > 0.$$

In this situation, given a subset $A \subseteq \mathbb{X}$, we say that $\psi|_A$ is *chaotic* (in the sense of Li and Yorke) if A contains at least one Li-Yorke pair of ψ .

Thus, it is proved that the list of problems previously stated has been, more or less, good studied for discrete systems linked to continuous selfmaps defined on compact intervals of the real line.

The main aim of this work is to study that list of problems in the two-dimensional setting. So, we consider the compact unit square \mathbb{I}^2 as a phase space. The difficulties in dimension two for studying topological dynamic are bigger than in dimension one, thus the strategy used by us to avoid this is to consider a special class of two-dimensional transformations which, in some sense, simplify our task. So, we will work with $\mathcal{F} = \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, the class of two-dimensional triangular maps defined on \mathbb{I}^2 . A continuous map $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$ is called triangular if it is of the form $F : (x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$. The maps f and g are respectively called the basis and the fiber maps of the triangular map F . Observe that, as a consequence of their special morphology, triangular maps have some dynamical behaviors coincident with ones held by interval transformations. So, for instance, the Sharkovskii's theorem works for the elements of the class $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ [Kl 79] but it is not true, in general, for systems related to maps belonging to $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$. On other hand, there exist big differences between the class of triangular maps, which is composed by two-dimensional elements, and the class of interval ones. This is showed, for example, at the topological structure of their ω -limit sets.

Under these conditions we will study the problems previously stated for systems of the form (\mathbb{I}^2, F) where $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, even though some of them will be studied for general systems, e.g., (P2).

In the following, we will set out in details the contents of each chapter, the results which have been obtained and the publication places for them, if they exist.

Chapter 1. The aim of this chapter is to introduce the notation, terminology and preliminary results which are necessary in the rest of the Memoir. The chapter is divided into six sections. The first one is devoted to the set of special points and to introduce some measures of chaos in D.D.S. . Along this Introduction has been stated that there exist classes of points possessing some properties which help us to understand the dynamics of all the system. In this section we introduce precisely those classes necessary to solve problems we have stated previously. It is introduced and analysed also the notion of the topological entropy, its properties and if it is applicable in our setting.

In the same section are introduced the notions of Li-Yorke chaos and scrambled set. Li-Yorke chaos was initially considered in the setting of dynamical systems associated to continuous maps on the interval and the corresponding scrambled sets needed to be uncountable. If the phase space has a countable number of points this definition of chaos is not possible to use or if we restrict to invariant sets of the phase space of finite or countable number of points we have the same problem. To avoid it the notion of Li-Yorke chaos has been extended in the sense of asking in the definition only the existence

of at least a pair of Li-Yorke.

Recently it has had a great interest to consider the number of Li-Yorke pairs generated by systems. At the end the section and as result of the former considerations we state the following question: what are the compact metric spaces which admit continuous maps generating only two points scrambled sets?. Since that question is not in the main line of the Memoir, we give a partial answer in the Appendix.

The second section is devoted to the class of triangular maps. We comment their properties and state the analogies and differences with the continuous maps on the interval.

Then we study their ω -limit sets, concentrating our attention in the class $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. General results are presented and a historical introduction is given for the cases $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, $\mathcal{C}(\mathbb{I}^n)$, $n > 1$ and $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$.

In 1992, Kolyada in [Ko 92] constructed a triangular map F with zero topological entropy and having an infinite ω -limit set containing fixed points which is impossible to find in the interval case. From now we will call it, Kolyada's triangular map or simple Kolyda's map. As a base map it is taken an interval continuous map holding that the orbit of each point is converging to zero, which means that the map F crushed the fibers to the left. Since in most of the examples considered in the rest of Memoir these base maps will be used, it is necessary to define precisely their properties.

In the next section we recall the definition of m -dimensional compact manifold, graph and dendrite. We define some notions such that numerical component and point order, final points and retractions on spaces. All these notions will be used in Chapter 3 to consider the problem (P2) of universality of systems on compact manifolds and graphs.

The last section is devoted to recall the Hausdorff metric topology d_H . Given a compact metric space \mathbb{X} , let $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ be the family of all closed and nonempty subsets of \mathbb{X} . The Hausdorff metric d_H allows to have a criterium which does not depend on arbitrary parametrizations and state a convergence on sets. In Chapter 4, we will study the properties of closure of the family $\mathcal{W}(\psi)$ ($\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$) in the space $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ endowed with the Hausdorff metric topology d_H .

Chapter 2. The aim of this chapter is the consideration of problems (P1) and ($\bar{P}1$). It is known that Kolyada's map has a complicated definition and exhibits some dynamical behaviors not found in the one-dimensional case. In the first part of the chapter we solve the problem (P1) for that map describing the family the family $\mathcal{W}(F)$ of all ω -limit sets produced by F (see [BGM 01]). We proved also that, contrary to what was supposed, the dynamical behavior of the map is extremely regular and satisfies the following property of dynamical uniformity:

Theorem 2.1.7. *The triangular map F defined on \mathbb{I}^2 and introduced at Definition 2.1.1*

holds the property:

$$\omega_F(a, b) = I_0 \text{ for every } (a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0, \text{ where } I_0 = \text{Per}(F) = \text{Fix}(F).$$

Therefore, we describe exactly the family of sets $\mathcal{W}(F)$:

$$\mathcal{W}(F) = I_0 \cup \{(0, c)\}_{c \in \mathbb{I}}.$$

Since we have been able to describe the dynamics of the map, at the same time we have understood the mechanisms of its behavior and therefore we have modified the map obtaining examples of triangular maps which solve part of the stated problems.

Balibrea, Reich and Smítal, in 2003 and knowing the property of Kolyada's map stated the problem of how to construct a map F in $\mathcal{C}(\mathbb{I}^3)$ holding the property that the ω -limit sets of all its points would be one of the faces of the cube \mathbb{I}^3 and this face would be composed by fixed points of the map. In the second part of the chapter, we solve the problem (P1) (see [BGM 03]) for such sets. It is constructed a triangular map on \mathbb{I}^3 (that is a map of the form $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(x, y), h(x, y, z))$) using a modification of the Kolyada's map.

Theorem 2.2.12. *The triangular map F on \mathbb{I}^3 , introduced at Definition 2.2.1 holds the following properties of dynamical uniformity:*

- (A) if $(a, b, c) \in I_0^2$, then $\omega_F(a, b, c) = \{(a, b, c)\}$ and $\text{Per}(F) = \text{Fix}(F) = I_0^2$,
- (B) if $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$, then $\omega_F(a, b, c) = I_0^2$.

Therefore, for such a map it is held:

$$\mathcal{W}(F) = I_0^2 \cup \{(0, b, c)\}_{(b,c) \in \mathbb{I}^2}.$$

It has to be said that problems (P1) and ($\bar{P}1$) are difficult to solve in general settings and depend strongly on the map we are considering in the case of (P1) and on the phase space and the map in the case of ($\bar{P}1$). It is an open line of work to solve both types of problems for another kind of maps and different families of sets.

Chapter 3. It is devoted to study the problem (P2) concerning the existence of universal maps. In 1993, A.M. Bruckner stated the following question: given a general compact metric space \mathbb{X} and $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$, are there universal maps in the family \mathcal{F} with respect to the sets of $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$? A map $\psi \in \mathcal{F}$ is called universal for $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ if generates as ω -limit sets all the elements of $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, that is, if $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. By other hand, we say that $\psi \in \mathcal{F}$ is a w-universal map (weak universal) for $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, if up to homeomorphisms ψ generates as ω -limit sets all the elements of $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. Up to homeomorphism means that for each set $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, there exists a set \tilde{A} , homeomorphic copy of A , in $\mathcal{W}(\psi)$.

The situation of this problem is that for the universal case there are no results and for the w -universal one there exists a result by Pokluda and Smítal [SP 00] for all continuous interval maps, proving that at least there is a w -universal map on $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ for the sets of $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$.

In this chapter we analyze the problems of universality for general systems (see [BGM 02], [CGSS 04]). We prove that for some part of compact metric spaces \mathbb{X} (for all except those in which the continuous endomorphisms generate only as ω -limit sets singletons, this spaces are called ω -degenerate spaces) does not exist a universal map for $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$.

Theorem 3.1.3. *Let \mathbb{X} be a non ω -degenerate compact metric space. Then, there are no universal maps with respect to the ω -limit sets generated by the elements of $\mathcal{C}(\mathbb{X})$.*

Considering this negative result, if it is reduced the family of sets, for example taking in the class of triangular maps on \mathbb{I}^2 the family of ω -limit sets contained in a fiber (a set of the form $I_x = \{x\} \times \mathbb{I}$), it is possible to construct a map $F \in \mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ universal with respect to those sets.

Theorem 3.2.5. *The triangular map F on \mathbb{I}^2 introduced at Definition 3.2.1 holds the following conditions:*

(A) *For every $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$, $a \leq b$, there exists a point $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ such that*

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times [a, b].$$

(B) *Given $(p, q) \in \mathbb{I}^2$, there exists a compact interval $J \subseteq \mathbb{I}$, degenerate or not, such that*

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times J.$$

The former result shows that it is possible to obtain universal elements in non ω -degenerate spaces if we reduce the family of ω -limit sets with respect to which we consider such universality. The example presented in Definition 3.2.1 was constructed using similar techniques to those of the Kolyada's map. Also for this map (see part (B) of the former theorem), the problem (P1) is solved.

The second part of the chapter is devoted to the existence of w -universal maps. To this aim we consider m -dimensional compact manifolds and graphs. Recall that an arc is any space homeomorphic to the unit interval \mathbb{I} :

Corollary 3.3.7.1. *Let \mathbb{M} be a m -dimensional compact manifold ($m \geq 1$). Then, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{M})}$ admits a w -universal map if and only if \mathbb{M} is an arc (and thus $m = 1$).*

To prove this result we use strongly the fact that there exist an uncountable number of plane non homeomorphic dendrites.

Theorem 3.3.10. *Let \mathbb{X} be a graph. Then, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ admits a w -universal map if and only if the space \mathbb{X} is an arc.*

Thinking on these results, it is evident that the positive result of Pokluda-Smítal is the unique we could obtain. As a future line of work we will continue considering the same problem for the case of dendrites and zero-dimensional spaces, as Cantor like sets.

Chapter 4. In this chapter we consider the problem (P3). In [BBHS 96], A. Blokh et al. proved that the family of all ω -limit sets $\mathcal{W}(f)$ generated by a continuous map f was a compact subset of the space $(\mathcal{K}(\mathbb{I}), d_H)$.

We prove that in general the same result is not true in $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, presenting some counterexamples in the class $\mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ [BGM1 04]. By other hand, inside the class of triangular maps generating only ω -limit sets contained in a fiber, we have tested that the property of d_H -closure works. Since the dynamics of these type of maps seems to be close to that of the elements of $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, it is reasonable to think that in this class the property will work. But it is not the case since it is possible to construct a triangular map with ω -limit sets contained in the fiber I_0 and such that $\mathcal{W}(F)$ is not d_H -closed. This is contained in our main result.

Theorem 4.2.8. *The continuous map F introduced at Definition 4.2.1 holds the following properties:*

(A) *There exists a sequence of points $\{(p_i, q_i)\}_{i \in 2\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ such that:*

$$(A_1) \quad \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [a_i, b_i] \text{ with } b_i - a_i = 1 - \frac{1}{2^{i0}}.$$

$$(A_2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [\frac{1}{2^{i0}}, 1] \text{ in the Hausdorff metric topology of } \mathbb{I}^2.$$

(B) $\omega_F(p, q) \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{i0}}, 1]$ for each $(p, q) \in \mathbb{I}^2$.

Therefore F does not satisfy the d_H -closure property and $\mathcal{W}(F) \subset I_0$.

This problem can be continued in the future. By one hand, we have to find hypothesis under which the d_H -closure property can work on $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$. By other hand, it would be interesting to analyse the validity of the property for two dimensional permutations maps, that is, maps of the form $(x, y) \rightarrow (g(y), f(x))$.

Chapter 5. The problem (P4) of obtaining characterizations to the property of having zero topological entropy is held in this chapter. More precisely we try to prove the equivalence of the properties (1)-(5) (the statement of them can be seen in the chapter and in the first part of this introduction) in the case of general triangular maps. It is known that in $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ those properties are equivalent, but in general in $\mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ they are not (it can be seen considering examples presented throughout the chapter) even under strong additionally hypothesis, for example considering triangular maps non decreasing

on fibers, that is, maps of the form $(f(x), g(x, y))$ where $g_x(\cdot)$ is non decreasing for all $x \in \mathbb{I}$ (note that $g_x(y) = g(x, y)$).

With such additional conditions (1), (2) and (5) are equivalent but can be constructed counterexamples showing that (2) and (3) are not equivalent, neither (2) and (4). The implication (4) to (3) has been recently solve in a negative way.

Let $\mathcal{C}_\Delta^*(\mathbb{I}^2)$ be the class of triangular maps which have basis maps with set of periodic points closed. In this case well known results establish for interval maps that $\text{Per}(f)$ closed is equivalent to have $\text{Rec}(f) = \text{UR}(f) = \text{Per}(f)$ and also to the fact that for every $x \in \mathbb{I}$, $\omega_f(x)$ is finite, that is, the orbit of x is periodic. Nevertheless if $\text{Per}(f)$ is closed then $h(f) = 0$ but the converse is not true, since there are maps f holding $h(f) = 0$ but with $\text{Per}(f)$ not closed.

With this facts in mind, we obtain the main result of the chapter

Theorem 5.4.1. *Let $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ with basis map f . Then, conditions (1) – (5) are mutually equivalent properties for F .*

We have proved here the equivalence for maps on $\mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ of the five conditions considered. A work for the future will consist on try to prove or disprove the equivalence on $\mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ of the long list of conditions which work for interval maps. We guess that for the most of them the equivalence will be true.

In the space $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ an interesting problem remains open. Is it true that $\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$ implies $h(F) = 0$?. If the answer is positive a definition of simplicity for triangular maps is obtained in terms of sets of “recurrent points”. Note that our results allows to consider the problem in the case of triangular maps with basis maps having non closed periodic point sets.

Appendix. The aim of the appendix is to introduce two examples of spaces and selfmaps defined on them holding the property that the maximal cardinality of their scrambled sets is two, i.e., are presented maps which only generate scrambled sets with two points (Li-Yorke pairs) [GL 04].

Theorem 5.4.2. *There exist a continuous selfmap defined on a Cantor set space, such that every scrambled sets has exactly two points.*

Theorem 5.4.4. *There exist a continuum $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ (nonempty compact and connected space) with empty interior and an homeomorphism h on \mathbb{X} , such that every scrambled sets has exactly two points.*

Introducción

Durante el último cuarto del siglo XIX, mientras Peano y Picard cerraban el capítulo del enfoque clásico de encontrar soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), Liapunov y especialmente Poincaré abrían uno nuevo: “ *El estudio cualitativo de las soluciones* ”. Se trata de una aproximación al problema radicalmente nueva en la que se presupone la existencia de soluciones y en su lugar se desean explotar las propiedades topológicas del espacio en que trabajamos y las analíticas de la función que define la ecuación para determinar el comportamiento asintótico de las soluciones para valores grandes del tiempo.

Mientras la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales iba desarrollándose, los matemáticos comprendieron gradualmente que lo esencial de esta teoría encajaba en un marco mucho más general, el de los Sistemas Dinámicos (S.D.).

Aunque llevó algunos años dar con una formulación abstracta de este concepto (cabe citar al respecto el trabajo de Birkhoff [Bi 27] en la década de los 20 y Nemytskii y Stepanov [NS 49] en los 40 y 50) bien podría decirse que el origen de la idea de Sistema Dinámico es casi tan antiguo como el de la propia Ciencia. Sin mucha precisión, podríamos definir un S.D. como aquél que evoluciona con el tiempo y cuya característica principal es la de ser determinista, esto es, su estado futuro se puede predecir si se conocen su estado actual y las leyes que gobiernan su evolución.

Científicos como Kepler (con su búsqueda de leyes internas que gobernarán las observaciones), Galileo (que nos enseñó a considerar el tiempo, el movimiento y la velocidad no como misteriosas cualidades o esencias, sino como meras variables susceptibles de ser medidas externamente y computadas matemáticamente), Descartes (con su percepción de la infinitud del espacio y su concepción del mundo como un mecanismo), Newton (que despojó a la Ciencia de los argumentos metafísicos y sentó las bases del moderno pensamiento científico) o el propio Malthus (cuya pesimista y errónea, pero matemáticamente fundada, visión de la evolución de la población humana nos advirtió de que no sólo los datos exactos cuentan sino también las tendencias) merecen con justicia figurar entre los pioneros de los S.D.

Atendiendo al conjunto de tiempos considerados podemos distinguir dos tipos de

S.D., a saber, los continuos (en los que el mencionado conjunto es un semigrupo de \mathbb{R} , como es el caso de los sistemas de E.D.O.) y los discretos (en los que el mencionado conjunto es un semigrupo de \mathbb{Z}). Centremos ahora nuestra atención en los Sistemas Dinámicos Discretos (S.D.D.).

Al igual que para los Sistemas Dinámicos Continuos (S.D.C.), el padre de los S.D.D. es H. Poincaré, quien se vio abocado a ellos en la búsqueda de métodos que simplificasen el estudio cualitativo de los, en principio más difíciles, S.D.C. generados por sistemas de E.D.O. no lineales. Su idea de reducir el estudio de un S.D.C. al de un discreto nace en 1899, idea ésta de gran interés ya que permitía estudiar algo muy complicado a través de las propiedades topológicas de las órbitas de un S.D.C. . Desaparecido Poincaré, floreció la topología pero no siguieron un camino paralelo los S.D. .

Hacia el primer cuarto del siglo XX, los S.D.C. se comenzaron a estudiar desde el punto de vista físico por Duffing [Du 18], Birkhoff [Bi 27] y Van der Pool [V 27]. Pero para estudiarlos había que resolver con lápiz y papel lo que casi nunca era posible: los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales. Curiosamente, los S.D.D. más sencillos (los definidos a través de endomorfismos continuos en intervalos compactos de la recta real) permanecieron esencialmente inexplorados.

En los años veinte y treinta la teoría experimentó avances sustanciales, especialmente en sistemas asociados a la circunferencia y al plano, gracias a los trabajos de Julia, Fatou, Birkhoff y Denjoy.

Es ya en la década de los cincuenta y gracias a los trabajos de Moser [Mos 62], Myrberg [My 63], [My 65] y Smale [Sm 65], [Sm 67], cuando resurge de nuevo el estudio de los S.D.D., que alcanzan su punto álgido en la década de los 70 con la aparición de los trabajos de Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein [MSS 73], de Li y Yorke (que en 1.975 publicaron su bien conocido artículo “*Period three implies chaos*” [LY 75]) o de R. May (quien en 1.976, estudiando las ecuaciones en diferencias finitas de primer orden que aparecen en ciertos modelos utilizados en las C.C. Biológicas, Económicas y Sociales demostró que, aunque simples y deterministas, pueden exhibir un complicado comportamiento [Ma 76]).

Además el redescubrimiento por estas mismas fechas, por parte de Stefan [St 77], del teorema de Sharkovskii, considerado por muchos uno de los resultados más relevantes de la segunda mitad del siglo XX, sobre la estructura periódica de las funciones continuas del intervalo, supuso el espaldarazo definitivo a la teoría.

Así pues, las condiciones científicas para el florecimiento de este estudio estaban ya establecidas. Los S.D.D. pasaban así a ejercer un papel relevante y terminaron consolidándose como una disciplina con interés en sí misma.

De forma general, un S.D.D. es una terna $(\mathbb{X}, \mathbb{Z}, \phi)$ donde \mathbb{X} (espacio de fases) es un espacio topológico no vacío y $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ (flujo del sistema) es una aplicación continua verificando las propiedades:

- (a) $\phi(0, x) = x$ para todo elemento $x \in \mathbb{X}$,
- (b) $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ para todo $s, t \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{X}$.

A lo largo del trabajo, los S.D.D. que usaremos serán los llamados *asociados* o *inducidos* por una aplicación continua $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ($\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$), en cuyo caso el flujo del sistema $(\mathbb{X}, \mathbb{Z}, \phi)$ vendrá dado por $\phi(n, x) = \psi^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ donde mediante ψ^0 denotamos a la aplicación identidad definida sobre \mathbb{X} y $\psi^n(x) = \psi(\psi^{n-1}(x))$, entendiendo que las iteradas negativas se corresponden a iteraciones de la aplicación ψ^{-1} . Para cada punto $x \in \mathbb{X}$, la sucesión $(\psi^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ se llama la trayectoria de x por la aplicación ψ . Notemos que el hecho de considerar iteradas negativas de la función ψ , trae implícito la invertibilidad de la misma. Sin embargo, esto no siempre ocurre cuando consideramos una aplicación continua ψ arbitraria. En tal caso, el sistema vendrá dado en la forma $(\mathbb{X}, \mathbb{N}, \phi)$, donde mediante \mathbb{N} denotamos al conjunto de los enteros no negativos. En esta situación la trayectoria de un punto x la conformará la sucesión $(\psi^n(x))_{n=0}^{\infty}$. Al S.D.D. asociado a un endomorfismo $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ lo denotaremos con (\mathbb{X}, ψ) .

Hemos visto que la operación fundamental para entender la evolución de dichos sistemas resulta ser la iteración de funciones continuas. De esta forma, los S.D.D. son una parte de la “*Teoría de la Iteración*”, teoría más general que se presenta en campos diversos de las Matemáticas, como por ejemplo:

- (a) transformaciones contractivas en espacios de Banach,
- (b) ecuaciones funcionales,
- (c) esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,
- (d) ecuaciones en diferencias finitas no lineales.

Múltiples ejemplos pueden darse de S.D.D. . De entre ellos destacamos los que provienen de las *ecuaciones en diferencias finitas no lineales* y presentamos algunos extraídos de [SP 83]:

- Ecuación de Guckenheimer, Oster e Ipaktchi:

$$\psi(x, y) = (y, r(y + x)e^{-0,1(x+y)}).$$

- $\psi(x, y) = (Ax f(x, y), By g(x, y))$, donde $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $A, B \in \mathbb{R}$, en particular:

$$\psi(x, y) = (Axe^{\alpha x + \beta y}, Bye^{\gamma x + \delta y}).$$

- $\psi(x, y) = (Ax, xf(x) + yg(y))$ donde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $A \in \mathbb{R}$.

Este tipo de sistemas son una muestra muy interesante por sus aplicaciones, ya que, las ecuaciones de las que proceden se corresponden con modelos físicos, químicos, ecológicos, económicos y sociales.

En general, dado un S.D.D. (\mathbb{X}, ψ) , tratamos de estudiar su *dinámica*, es decir, averiguar el comportamiento asintótico de las trayectorias de todos los puntos del espacio de fases. Este comportamiento depende fuertemente de la topología existente en el espacio \mathbb{X} y, como consecuencia de esta dependencia, a este tipo de estudio se le conoce como análisis de la “*dinámica topológica*” del sistema.

Durante mucho tiempo se consideraron problemas (\mathbb{X}, ψ) donde \mathbb{X} era un espacio métrico compacto y ψ un homeomorfismo. La exigencia de compacidad es un requerimiento de finitud, semejante al que se le exige a las medidas en el marco de la teoría de S.D.D. con medidas invariantes con relación a una transformación. Por otra parte, la metrizabilidad es una propiedad que, en general, no se necesita para la mayor parte de los resultados, pero a menudo acorta las pruebas y está en coherencia con lo que ocurre en la mayoría de las aplicaciones. Como problemas que se consideraron inicialmente tenemos los de minimalidad, estructura topológica de los conjuntos “errantes”, transitividad y conjugación topológica.

A partir de los años setenta, cuando el uso de la computadora se convierte en una herramienta fundamental a la hora de calcular trayectorias de puntos y aparece el interés por los S.D.D. que provienen de ecuaciones en diferencias finitas que a su vez modelan fenómenos de la dinámica de poblaciones, de la economía y de los métodos numéricos de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, la aplicación ψ deja de ser un homeomorfismo. Se tienden a estudiar sistemas (\mathbb{X}, ψ) donde el espacio de fases \mathbb{X} suele ser un subconjunto compacto de un espacio euclídeo, o una variedad compacta con o sin borde, mientras que ψ es un endomorfismo continuo no necesariamente invertible. En esta situación, la aplicación ψ ha aumentado su complejidad al no ser un homeomorfismo, pero por contra el espacio \mathbb{X} se ha simplificado. En esta etapa, otros problemas surgen y nuevas herramientas es preciso desarrollar para abordar fenómenos tales como la existencia de caos, la complejidad dinámica y los atractores extraños entre otros.

Frente a otros posibles e igualmente válidos enfoques de la dinámica, como el ergódico -basado en la teoría de la medida-, o el analítico -que se apoya fuertemente en las

propiedades de regularidad (diferenciabilidad) del sistema- , esta Memoria se enmarca principalmente en el contexto general de la dinámica topológica, y desde esta perspectiva pocos conceptos cabe definir que aprehendan de manera más natural la idea de “comportamiento asintótico” como el de *conjunto ω -límite* de una órbita (el conjunto de sus puntos de acumulación). No es casualidad, pensamos, que el primer gran resultado de la teoría de Sistemas Dinámicos moderna en el contexto de los S.D.C., el teorema de Poincaré-Bendixson (“si el ω -límite de una órbita acotada de un sistema autónomo de ecuaciones en el plano no tiene puntos críticos entonces es una órbita periódica”), verse precisamente acerca de ellos. Por tanto nos ha parecido adecuado elegir este concepto, junto con el de la entropía topológica (véase Definición 1.1.1) que ya comentaremos, como hilo conductor en el que engarzar nuestro trabajo.

Los S.D.D. inducidos por funciones continuas en espacios unidimensionales (en primera instancia el intervalo y la circunferencia) se manifiestan como una disciplina con entidad propia a mediados de los setenta, con la publicación de los artículos, anteriormente citados, de Li y Yorke [LY 75], de May [Ma 76], y el redescubrimiento en Occidente del ya clásico teorema de Sharkovskiĭ [St 77]. Aunque pueda parecer paradójico, ya existía por entonces un gran acervo de conocimientos en el ámbito de los S.D.D. bidimensionales e incluso generales, pero al haber estado motivado históricamente su estudio por sus conexiones con la teoría de ecuaciones diferenciales (vistos como realizaciones de las correspondientes aplicaciones de Poincaré), el énfasis se había puesto por lo general, o bien sobre la teoría local, o bien sobre la teoría global para homeomorfismos y/o difeomorfismos, y en estos casos la dinámica unidimensional es muy sencilla. No debe extrañar, por tanto, que muchas de las cuestiones más básicas de esta aun joven teoría no hayan sido dilucidadas hasta relativamente tarde, y que otras estén todavía pendientes. Así, los conjuntos ω -límite para funciones continuas en el intervalo no fueron caracterizados hasta 1989 [ABCP 89/90], véase también [BS 92].

A la vez que los S.D.D. unidimensionales iban desarrollándose, y a partir de los artículos pioneros de Kloeden [Kl 79] en 1979 y sobre todo de Kolyada [Ko 92] en 1992, la atención de los investigadores comenzó a dirigirse hacia los sistemas bidimensionales (el caso típico es el cuadrado unidad en \mathbb{R}^2). Los primeros resultados sobre conjuntos ω -límite para tales funciones (a veces válidos para más dimensiones) se deben a Agronsky y Ceder [ABCP 89/90], [AC1 91/92] y a Kolyada y Snoha [KS 92/93], en [JS 01] fueron parcialmente completados. Sin embargo, en dimensión mayor que uno las dificultades son muy notables y en esta línea se desarrolla el presente trabajo. Para homeomorfismos (especialmente difeomorfismos) el problema debería ser más fácilmente abordable, máxime teniendo en cuenta la ingente cantidad de trabajo que se ha realizado en este ámbito desde que Thurston sentó las bases de su estudio en [Thu 88]. Sin embargo, las circunstancias han dirigido las principales líneas de investigación por derroteros bien distintos, y a día de hoy el problema no parece haber sido abordado.

Dado el aumento de la complejidad dinámica que lleva aparejada la subida de la dimensión del espacio de fases, la estrategia usada para estudiar estos sistemas es considerar ciertas clases de endomorfismos continuos que, de algún modo, simplifiquen este estudio. Así, fijado un espacio de fases \mathbb{X} , consideramos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y estudiaremos la dinámica de los sistemas de la forma (\mathbb{X}, ψ) donde $\psi \in \mathcal{F}$. En esta situación planteamos ciertos problemas relacionados con los conjuntos ω -límite y con la propiedad de poseer entropía topológica cero. En general, si $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$ consideraremos:

$$\mathcal{W}(\psi) := \{\omega_\psi(x) : x \in \mathbb{X}\}$$

y

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} := \{\omega_\psi(x) : \psi \in \mathcal{F} \text{ y } x \in \mathbb{X}\}.$$

En las anteriores condiciones planteamos y tratamos los siguientes problemas:

- (P1) dado un elemento $\psi \in \mathcal{F}$, describir completamente la familia $\mathcal{W}(\psi)$ de todos los conjuntos ω -límite producidos por la aplicación ψ ;
- (P1̄) dada una subfamilia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, definir explícitamente un elemento ψ de \mathcal{F} tal que $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{A}$;
- (P2) analizar la existencia de elementos universales y d-universales (universales en sentido débil) en la clase de aplicaciones \mathcal{F} para la familia de conjuntos $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ (véanse respectivamente Definiciones 3.0.15 y 3.0.14);
- (P3) estudiar las propiedades de clausura en el espacio de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de \mathbb{X} , $\mathcal{K}(\mathbb{X})$, dotado con la topología métrica de Hausdorff, d_H , de la familia de conjuntos ω -límite generados por un elemento $\psi \in \mathcal{F}$.

Cuando estudiamos un S.D.D. (\mathbb{X}, ψ) , en muchas ocasiones es útil tener una herramienta que nos sirva de criterio para decidir la complejidad dinámica del mismo. En este sentido, la entropía topológica del sistema proporciona una medida de la complejidad dinámica de éste. Así, cuando la entropía del sistema es cero, que se denotará mediante $h(\psi) = 0$, puede decirse que el sistema tendrá un comportamiento sencillo, en algún sentido, no caótico. Por el contrario, si la entropía es positiva, fenómenos complejos y poco predecibles pueden ocurrir. De tal modo, se plantea como un problema relevante, el hecho de encontrar caracterizaciones útiles de la propiedad de poseer entropía topológica cero. Por tanto, podemos establecer un nuevo problema:

- (P4) dado un elemento $\psi \in \mathcal{F}$, encontrar caracterizaciones de la propiedad $h(\psi) = 0$.

Si el espacio de fases \mathbb{X} es el intervalo compacto unidad \mathbb{I} y la familia \mathcal{F} está compuesta por todas las funciones continuas definidas en \mathbb{I} sobre sí mismo, los problemas planteados en la enumeración anterior han sido bien estudiados en la literatura y mucha información se conoce acerca de sus soluciones. Está claro que obtener una solución completa para el problema (P1) no es posible, pues pasaría por describir $\mathcal{W}(f)$ para todo elemento $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. Sin embargo hoy día, la dinámica unidimensional está suficientemente bien desarrollada y equipada como para poder realizar estudios rigurosos y no triviales sobre la composición de $\mathcal{W}(f)$ para la mayor parte de los endomorfismos continuos de \mathbb{I} . Anteriormente se comentó que los elementos de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ habían sido caracterizados (véase Teorema 1.3.3), por tanto, sabemos con exactitud cuáles son las posibles subfamilias \mathcal{A} de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$. En [BS 92], Bruckner y Smítal resuelven el problema (P1) para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$. En relación con el problema (P2), para sistemas de la forma (\mathbb{I}, f) , tan sólo existe un reciente resultado de Pokluda y Smítal [SP 00], donde prueban que para los elementos de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ existe una función d-universal. Es decir, prueban que existe una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ verificando que para cada conjunto $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$ existe \tilde{A} , copia homeomorfa a A , en $\mathcal{W}(f)$. Dada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, en [BBHS 96] se estudian las propiedades de clausura en la métrica de Hausdorff, d_H , de $\mathcal{W}(f)$ en el espacio $\mathcal{K}(\mathbb{I})$ de todos los subconjuntos compactos y no vacíos del intervalo. Concluyen, que para cada función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, $(\mathcal{W}(f), d_H)$ es un conjunto compacto, resolviendo así el problema (P3) para $\mathbb{X} = \mathbb{I}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\mathbb{I})$.

Por otro lado, dado un S.D.D. de la forma (\mathbb{I}, f) donde $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, existe una larga lista de propiedades equivalentes a que la función f posea entropía topológica cero. La mayor parte de estas propiedades fueron probadas por Sharkovskiĭ en los sesenta [SKSF 97], con alguna corrección reciente [S 02]. En particular, se satisface la equivalencia mutua en $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ entre las siguientes propiedades:

- (1) la entropía topológica de f es cero ($h(f) = 0$);
- (2) la entropía topológica de $f|_{\text{Rec}(f)}$ es cero ($h(f|_{\text{Rec}(f)}) = 0$);
- (3) $f|_{\text{Rec}(f)}$ es no caótica;
- (4) cada punto recurrente de f es uniformemente recurrente ($\text{Rec}(f) = \text{UR}(f)$);
- (5) los periodos de todos los puntos periódicos son una potencia de dos ($f \leq 2^\infty$).

En general, dado un S.D.D. (\mathbb{X}, ψ) , existen unas clases de puntos, en algún sentido *especiales*, que poseen ciertas propiedades de regularidad dinámica y que de su estudio puede deducirse información acerca del comportamiento de todo el sistema. Entre este tipo de puntos se hayan los llamados recurrentes, que denotaremos mediante $\text{Rec}(\psi)$. Un punto $x \in \mathbb{X}$, es un punto recurrente del sistema si pertenece a su propio conjunto ω -límite. Del mismo modo a los puntos recurrentes que posean conjunto ω -límite

minimal, es decir, no vacío, cerrado, invariante por ψ ($\psi(M) \subseteq M$) y que no contenga subconjuntos satisfaciendo las mismas propiedades, los llamaremos puntos uniformemente recurrentes del sistema y los denotaremos mediante $UR(\psi)$. El comportamiento dinámico más regular para un punto bajo la iteración de una aplicación es el llamado periódico. Un punto $x \in \mathbb{X}$ diremos que es periódico de periodo $n \in \mathbb{N}$ si $\psi^n(x) = x$ y $\psi^j(x) \neq x$ para todo $0 \leq j < n$. Al conjunto de los puntos periódicos lo denotaremos mediante $Per(\psi)$.

Asociada a la terminología “complejidad dinámica” aparece de forma muy habitual la noción de *caos*. Ésta arriva a los S.D.D. de la mano del artículo seminal de Li y Yorke [LY 75] en donde, de manera poco precisa, se sientan las bases de lo que actualmente conocemos como *caos en el sentido de Li-Yorke*. Hemos de notar que lo introducido en [LY 75], se refiere a S.D.D. de la forma (\mathbb{I}, f) en donde $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. Posteriormente, todo ello se ha aplicado a sistemas generales de la forma (\mathbb{X}, ψ) . De este modo, un par de puntos distintos $\{x, y\} \subset \mathbb{X}$, diremos que son un par de Li-Yorke si simultaneamente satisfacen:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) > 0.$$

En esta situación, dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$, diremos que $\psi|_A$ es *caótica* (en el sentido de Li y Yorke) si A contiene al menos un par de Li y Yorke de ψ .

Queda puesto de manifiesto que la lista de problemas anteriormente planteada está, más o menos, bien estudiada para los sistemas dinámicos asociados a funciones continuas definidas en un intervalo compacto de la recta real.

El objetivo de este trabajo es estudiar tales problemas en el ámbito bidimensional. Por tanto, como espacio de fases consideraremos el cuadrado unidad \mathbb{I}^2 . Comentamos anteriormente que el aumento de la dimensión del espacio en el que están definidos los sistemas complica sobremanera el estudio. Intentando superar este hecho, consideraremos una clase de endomorfismos continuos en \mathbb{I}^2 , que nos ayude en esta tarea. Así pues, trabajaremos con $\mathcal{F} = \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, la clase de las aplicaciones triangulares bidimensionales definidas en \mathbb{I}^2 . Una aplicación continua $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, diremos que pertenece a la clase $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ si es de la forma $F : (x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$. A las funciones f y g las llamaremos respectivamente funciones base y fibra de la aplicación F . Nótese que, como consecuencia de su especial morfología, las aplicaciones triangulares poseen ciertas propiedades dinámicas que se asemejan a las existentes en sistemas generados por funciones continuas del intervalo. Así, por ejemplo, el teorema de Sharkovskiĭ es válido para los elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ [Kl 79] y no, en general, para sistemas asociados a aplicaciones en $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$. Por otro lado existen grandes diferencias entre la clase de las aplicaciones triangulares, integrada por elementos del mundo bidimensional, y las funciones continuas del intervalo. Esto se pone de manifiesto, por ejemplo, en relación a la estructura de sus conjuntos ω -límite.

En las anteriores condiciones, estudiaremos los problemas previamente planteados para sistemas de la forma (\mathbb{I}^2, F) donde $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, si bien es cierto que algunos de ellos los abordaremos en un ámbito general, por ejemplo, (P2). En lo que sigue, pasamos a describir detalladamente el contenido de cada capítulo, así como los resultados obtenidos y los lugares de publicación de los mismos, si los hubiere.

Capítulo 1. En este primer capítulo se pretende introducir la notación, terminología y resultados preliminares que serán usados a lo largo del desarrollo de todo el trabajo. El capítulo se divide en seis secciones. La primera de ellas está destinada a los conjuntos de puntos especiales y a las medidas del caos en un S.D.D. . Como se comentó anteriormente, existen ciertas clases de puntos que poseen propiedades que nos ayudan a comprender la dinámica de todo el sistema. En esta sección se presentan con precisión aquellas clases de puntos que nos serán de utilidad para la resolución de los problemas que pretendemos estudiar. Por otra parte, se introduce y analiza el concepto de entropía topológica. Sus propiedades y la aplicabilidad a la resolución de los problemas que nos ocupan, se ponen de manifiesto.

En este mismo punto se presentan las nociones de caoticidad Li-Yorke y conjunto scrambled. La definición habitual de caos en el sentido de Li y Yorke, usada primegeniamente para sistemas asociados a funciones continuas del intervalo, exigía la existencia en el espacio de un conjunto scrambled infinito no numerable. La necesidad de poder aplicar esta noción a espacios con cardinalidad contable y poder restringirse a subconjuntos invariantes, llevó a considerar como requisito de caoticidad la existencia de al menos un par de Li-Yorke. Recientemente, se ha suscitado un gran interés por estudiar la cantidad de pares de Li-Yorke que genera un sistema dado. Como fruto de las reflexiones presentadas en esta primera sección sobre la noción de caos Li-Yorke, nos planteamos de manera natural la siguiente pregunta: ¿qué tipos de espacios métricos compactos admiten aplicaciones continuas que sólo generan conjuntos scrambled bi-puntuales?. Que duda cabe, que esta pregunta no estaba dentro de los problemas que *a priori* nos marcamos para la realización de este trabajo, pero en el Apéndice presentamos una respuesta parcial a la misma.

La segunda sección está destinada a la clase de las aplicaciones triangulares. En este punto se comentan sus propiedades y se remarcan las semejanzas y diferencias existentes con las funciones continuas del intervalo.

A continuación estudiamos los conjuntos ω -límite, centrando nuestra atención en la clase $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. Se presentan resultados generales y se hace un recorrido por la historia de los mismos para $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, $\mathcal{C}(\mathbb{I}^n)$, $n > 1$ y $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$.

En el año 1992, Kolyada en [Ko 92] construye una aplicación triangular F que posee entropía topológica cero y un conjunto ω -límite infinito conteniendo puntos fijos. Este ejemplo, supuso una sorpresa ya que tal situación no es posible en el ámbito unidi-

mensional. A dicha aplicación la llamaremos aplicación triangular de Kolyada. Una de las características de esta aplicación es que su función base verifica una propiedad de aplastamiento hacia la izquierda. Como en los capítulos venideros, para la construcción de aplicaciones que resuelvan los problemas que nos planteamos, usaremos este tipo de funciones base definimos una clase de funciones unidimensionales en las que vive la base de la aplicación triangular de Kolyada que nos será de utilidad en el futuro.

La siguiente sección la dedicamos a la presentación de los conceptos de variedad compacta m -dimensional, grafo y dendrita. Se definen la componente numérica y el orden de un punto, los puntos finales y la noción de retracción de un espacio. Todos estos conceptos se usarán en el Capítulo 3 para estudiar el problema (P2) de la universalidad para sistemas definidos en variedades compactas y en grafos.

La última sección de este primer capítulo se dedica a la presentación de la topología métrica de Hausdorff d_H . Dado un espacio métrico compacto \mathbb{X} , si consideramos $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ la familia de todos los subconjuntos del espacio \mathbb{X} cerrados y no vacíos, d_H define una métrica que permite tener un criterio que no depende de parametrizaciones arbitrarias y que nos permite hablar de convergencia de conjuntos. En el espacio $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ dotado con la topología métrica d_H estudiaremos, en el Capítulo 4, las propiedades de clausura de $\mathcal{W}(\psi)$ donde $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$.

Capítulo 2. El segundo capítulo, está destinado al estudio de los problemas (P1) y (P1). Sabemos que la aplicación triangular de Kolyada F , exhibe un comportamiento que no puede ocurrir en el ámbito unidimensional. Por tanto, y junto con su aparatosa definición, a veces ha sido tildada de poseer una dinámica compleja. En la primera parte del capítulo resolvemos el problema (P1) para dicha aplicación describiendo la familia $\mathcal{W}(F)$ de todos los conjuntos ω -límite producidos por F (véase [BGM 01]). Por contra, comprobamos que el comportamiento dinámico de la aplicación es extremadamente regular satisfaciendo la siguiente propiedad de uniformidad dinámica:

Teorema 2.1.7. *La aplicación triangular F definida en \mathbb{I}^2 e introducida en la Definición 2.1.1, satisface la siguiente propiedad:*

$$\omega_F(a, b) = I_0 \text{ para todo } (a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0, \text{ donde } I_0 = \text{Per}(F) = \text{Fix}(F).$$

Por tanto, describimos exactamente la familia $\mathcal{W}(F)$:

$$\mathcal{W}(F) = I_0 \cup \{(0, c)\}_{c \in \mathbb{I}}.$$

El hecho de poder describir la dinámica de la aplicación de Kolyada, además del interés que tiene en sí mismo, significa comprender los mecanismos que rigen su comportamiento dinámico. Esto nos ha permitido modificar la definición de las funciones consiguiendo ejemplos de aplicaciones triangulares que resuelven varios de los problemas planteados.

Balibrea, Reich y Smítal, en 2003 a la luz de la propiedad satisfecha por la aplicación de Kolyada, plantearon el problema de la construcción de un elemento F en $\mathcal{C}(\mathbb{I}^3)$ tal que los conjuntos ω -límite de todos sus puntos fuesen iguales a una de las caras del cubo que estaría compuesta por puntos fijos. En la segunda parte del capítulo, resolvemos el problema ($\bar{P}1$) planteado anteriormente (véase [BGM 03]). Se construye una aplicación triangular en \mathbb{I}^3 (es decir, una aplicación de la forma $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(x, y), h(x, y, z))$) usando alteraciones adecuadas de la aplicación triangular de Kolyada.

Teorema 2.2.12. *La aplicación triangular F en \mathbb{I}^3 , introducida en la Definición 2.2.1, satisface las siguientes propiedades de uniformidad dinámica:*

- (A) si $(a, b, c) \in I_0^2$, entonces $\omega_F(a, b, c) = \{(a, b, c)\}$ y $Per(F) = Fix(F) = I_0^2$,
- (B) si $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$, entonces $\omega_F(a, b, c) = I_0^2$.

De tal manera para dicha aplicación F se satisface:

$$\mathcal{W}(F) = I_0^2 \cup \{(0, b, c)\}_{(b,c) \in \mathbb{I}^2}.$$

Los problemas (P1) y ($\bar{P}1$), en general son difíciles y dependen sobremanera del la aplicación que estemos estudiando, en el caso de (P1), y del espacio de fases y de funciones, en el caso de ($\bar{P}1$). En el futuro, hemos de intentar resolver ambos problemas para otro tipo de aplicaciones y familias de conjuntos, respectivamente.

Capítulo 3. El tercer capítulo está destinado al estudio del problema (P2) relativo a la existencia de aplicaciones universales. En 1993, A.M. Bruckner propuso, fijado \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$, analizar la existencia de aplicaciones universales en la familia \mathcal{F} respecto de los conjuntos ω -límite de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. Una aplicación $\psi \in \mathcal{F}$ se dirá que es universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ si genera como conjuntos ω -límite a todos los elementos de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, es decir, si $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. Por otra parte, y de manera algo menos restrictiva, diremos que $\psi \in \mathcal{F}$ es una aplicación d-universal (universal en sentido débil) para $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, si salvo homeomorfismos ψ genera como conjuntos ω -límite a todos los elementos de $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$. Es decir, si para cada conjunto $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, existe \tilde{A} , copia homeomorfa de A , en $\mathcal{W}(\psi)$.

La situación de este problema es la siguiente, para el caso de universalidad no existían resultados al respecto y para la situación de d-universalidad sólo había un resultado obra de Pokluda y Smítal [SP 00] relativo a sistemas en el intervalo. Demostraron que en $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ existe una aplicación d-universal para los conjuntos $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$.

En este capítulo analizaremos estos problemas de universalidad para sistemas generales [BGM 02], [CGSS 04]. Probaremos que para la mayor parte de los espacios métricos compactos \mathbb{X} (para todos excepto aquellos que sus endomorfismos continuos

sólo generan como conjuntos ω -límite conjuntos unipuntuales, a los que llamaremos espacios ω -degenerados) no existe aplicación universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$.

Teorema 3.1.3. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto no ω -degenerado. Entonces, no existe ninguna aplicación universal con respecto a los conjuntos ω -límite generados por los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{X})$.*

Ante este resultado de negatividad, si reducimos la familia de conjuntos respecto de la que se tiene la universalidad, por ejemplo, si consideramos en la clase de las aplicaciones triangulares de \mathbb{I}^2 conjuntos ω -límite tipo intervalo contenidos en una fibra, es posible contruir un elemento $F \in \mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ universal respecto de dichos conjuntos.

Teorema 3.2.5. *La aplicación triangular F en \mathbb{I}^2 introducida en la Definición 3.2.1 satisface la siguientes condiciones:*

(A) *Para cada $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$, $a \leq b$, existe un punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ tal que*

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times [a, b].$$

(B) *Dado $(p, q) \in \mathbb{I}^2$, existe un intervalo compacto $J \subseteq \mathbb{I}$, degenerado o no, verificando que*

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times J.$$

Observemos que el anterior resultado muestra que es posible obtener elementos universales en espacios no ω -degenerados si reducimos la familia de conjuntos ω -límite respecto de la que se tiene la universalidad.

El ejemplo presentado en la Definición 3.2.1, esta construido usando técnicas similares a las de la aplicación de Kolyada y para él (véase parte (B) Teorema 3.2.5) también se resuelve el problema (P1).

La segunda parte del capítulo esta destinada al estudio de la existencia de aplicaciones d -universales. Estudiaremos los casos relativos variedades compactas de dimensión m y a grafos. Los resultados obtenidos son los siguientes, teniendo en cuenta que un arco es un cualquier espacio homeomorfo al intervalo unidad \mathbb{I} :

Corolario 3.3.7.1. *Sea \mathbb{M} una variedad compacta m -dimensional ($m \geq 1$). Entonces, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{M})}$ admite una aplicación d -universal si y sólo si \mathbb{M} es un arco (y por ende $m = 1$).*

Para probar este resultado su usa fuertemente el hecho de que existen una cantidad no numerable de dendritas planas no homeomorfas.

Teorema 3.3.10. *Sea \mathbb{X} un grafo. Entonces, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ admite aplicación d -universal si y sólo si \mathbb{X} es un arco.*

Tras estos resultados, queda puesto de manifiesto que el resultado positivo obtenido por Pokluda y Smítal es el único que se podía obtener. Como problemas a pensar en

el futuro tenemos el caso general de los espacios que sean dendritas y espacios cero dimensionales, como conjuntos tipo Cantor.

Capítulo 4. El cuarto capítulo está dedicado al estudio del problema (P3). A. Blokh et al. en [BBHS 96], probaron que la familia de todos los posibles conjuntos ω -límite $\mathcal{W}(f)$ generados por una función continua f era un conjunto compacto en el espacio $(\mathcal{K}(\mathbb{I}), d_H)$ de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de \mathbb{I} dotado con la topología métrica de Hausdorff. A lo largo del capítulo comprobamos que este resultado no es extensible a $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, presentado varios contraejemplos sencillos incluso en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ [BGM1 04]. Por otro lado, dentro de la clase de las aplicaciones triangulares que generan sólo conjuntos ω -límite contenidos en una fibra, hemos comprobado que la propiedad de d_H -clausura funciona. Así, para la aplicación triangular de Kolyada y para la aplicación presentada en la Definición 3.2.1 se satisface la propiedad. Entonces, parece razonable, y dado que este tipo de aplicaciones poseen una dinámica cercana a la de los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, conjeturar que en tal clase de aplicaciones triangulares la propiedad funciona.

Sorprendentemente, es posible construir una aplicación triangular F con conjuntos ω -límite contenidos en la fibra I_0 y tal que $\mathcal{W}(F)$ no es d_H -cerrado.

Teorema 4.2.8. *La aplicación continua F introducida en la Definición 4.2.1 satisface las siguientes propiedades:*

(A) *Existe una sucesión de puntos $\{(p_i, q_i)\}_{i \in 2\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ tal que:*

$$(\mathcal{A}_1) \quad \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [a_i, b_i] \text{ con } b_i - a_i = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

$$(\mathcal{A}_2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1] \text{ en la topología de Hausdorff de } \mathbb{I}^2.$$

(B) $\omega_F(p, q) \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1]$ para cada $(p, q) \in \mathbb{I}^2$.

Así, F no satisface la propiedad de d_H clausura y $\mathcal{W}(F) \subset I_0$. Como problemas para pensar en el futuro, tenemos por un lado tratar de encontrar hipótesis bajo las que la propiedad de d_H clausura funcione en $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$. Por otra parte, sería interesante analizar la validez de la propiedad para las transformaciones bidimensionales de tipo producto en \mathbb{I}^2 , es decir, aplicaciones de la forma $(x, y) \rightarrow (g(y), f(x))$.

Capítulo 5. El quinto capítulo trata sobre el problema (P4). Se pretenden obtener caracterizaciones de la propiedad de poseer entropía topológica cero. Como ya comentamos anteriormente, analizamos el problema de la equivalencia mutua entre las propiedades (1)-(5) en la clase de las aplicaciones triangulares. Como es sabido en $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ las propiedades son equivalentes. En $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ no lo son (véanse contraejemplos presentados en el Capítulo 5) incluso bajo la adopción de fuertes hipótesis adicionales. Nosotros comprobamos la equivalencia mutua bajo la hipótesis de que la aplicación triangular

posea conjunto de puntos periódicos para su función base cerrado [GC 04]. La caracterización presentada soluciona el problema en la clase $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ y proporciona información para estudiar el problema abierto de la implicación entre $\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$ y $h(F) = 0$ en la clase $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. Mediante $\mathcal{C}_\Delta^*(\mathbb{I}^2)$ denotamos a la clase de las aplicaciones triangulares que poseen función base con conjunto de puntos periódicos cerrado.

Teorema 5.4.1. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ con función base f . Entonces, las condiciones (1)–(5) son mutuamente equivalentes.*

Apéndice. El objetivo del apéndice es introducir dos ejemplos de espacios y aplicaciones continuas definidas sobre ellos que sólo generan conjuntos scrambled bipuntuales [GL 04].

Teorema 5.4.2. *Existe una aplicación continua definida en un espacio tipo Cantor, tal que cada conjunto scrambled tiene exactamente dos puntos.*

Teorema 5.4.4. *Existe un continuo $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ (espacio compacto y conexo) con interior vacío y un homeomorfismo h en \mathbb{X} , tal que, cada conjunto scrambled tiene exactamente dos puntos.*

Capítulo 1

Notación y resultados preliminares

Los objetivos que este capítulo tiene son, por una parte, establecer la notación básica y la terminología que se usará a lo largo de todo el trabajo. Por otro lado, se presentarán ciertos resultados que satisfacen algunos de los elementos anteriormente definidos y que serán usados de forma auxiliar en el transcurso de la memoria.

1.1. Puntos especiales y medidas del caos en un S.D.D.

Consideremos (\mathbb{X}, d) un espacio métrico compacto y ψ una aplicación continua definida sobre el espacio \mathbb{X} en sí mismo ($\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$). Para cada punto $x \in \mathbb{X}$ y cada entero $n \geq 0$, definimos inductivamente las *iteradas* de x a través de la aplicación ψ como $\psi^n = \psi^{n-1} \circ \psi$ si $n > 0$ y $\psi^0 = \text{Id}_{\mathbb{X}}$ donde $\text{Id}_{\mathbb{X}}$ es la aplicación identidad en el espacio \mathbb{X} . La *órbita* de x por ψ es el conjunto $\{\psi^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y se denotará con $\text{Orb}_{\psi}(x)$, mientras que la *trayectoria* de x por ψ es la sucesión $\{\psi^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que será denotada mediante $\text{Tra}_{\psi}(x)$. Conocer la dinámica del sistema (\mathbb{X}, ψ) consiste en averiguar cuál es el comportamiento asintótico de las trayectorias de los puntos del espacio \mathbb{X} por la acción de la aplicación ψ . En este contexto, el comportamiento más regular posible es el periódico, en el sentido de que tras un número finito de iteraciones el punto vuelve a su estado inicial. Pero la “vuelta al estado inicial” puede hacerse de formas más débiles. Para precisarlas introducimos lo que denominamos conjuntos de *puntos especiales*.

Un punto $x \in \mathbb{X}$ se dice *periódico* para la aplicación ψ si existe un entero positivo n tal que $\psi^n(x) = x$. Al más pequeño de los valores m satisfaciendo la condición anterior se le llama el *periodo* de x . Con $\text{Per}(\psi)$ denotaremos al conjunto de todos los

puntos periódicos de ψ . Si $x \in \text{Per}(\psi)$ y su periodo es uno, entonces el punto periódico se denomina *punto fijo* y con el símbolo $\text{Fix}(\psi)$ denotaremos al conjunto de todos los puntos fijos de ψ . Mediante $\text{Rec}(\psi)$ denotamos al conjunto de los puntos conocidos en la literatura como *recurrentes* de ψ , esto es, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{X}$ tales que x es un punto de acumulación de su propia trayectoria $\{\psi^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Un conjunto $M \subseteq \mathbb{X}$ se dirá *minimal* para la aplicación ψ si es no vacío, cerrado, invariante ($\psi(M) \subseteq M$) y no contiene subconjuntos satisfaciendo las mismas propiedades. Con $\text{UR}(\psi)$ denotamos al conjunto de los puntos denominados *uniformemente recurrentes* de ψ , es decir, todos los puntos recurrentes cuyo conjunto ω -límite es minimal. Para más detalles sobre estas clases de puntos, véase por ejemplo [BC 92], en donde los puntos uniformemente recurrentes son llamados *fuertemente* recurrentes. Como las órbitas de los puntos que pertenecen a los conjuntos anteriormente descritos poseen ciertas propiedades de retorno, de las definiciones de los mismos se derivan las relaciones de inclusión:

$$\text{Per}(\psi) \subseteq \text{UR}(\psi) \subseteq \text{Rec}(\psi).$$

Además de la información deducida del análisis de las clases de puntos especiales, para medir la complejidad dinámica de un sistema se suelen usar como herramientas la *entropía topológica* y varias definiciones de la noción de *caos*.

El concepto de entropía topológica fue introducido en 1965 por Adler, Konheim y McAndrew para sistemas definidos sobre espacios compactos (véase [AKM 65]). Más adelante, en 1971, R. Bowen extendió dicha noción al caso de espacios no compactos (véase [Bo 71]), de modo que, ambas nociones coincidieran para S.D.D. definidos sobre espacios métricos compactos que serán, como se comentó anteriormente, los objetos de estudio a lo largo de este trabajo. En lo que sigue, usaremos la definición de entropía topológica introducida por Bowen debido a que es más sencilla de manejar desde el punto de vista computacional.

Definición 1.1.1. Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico compacto y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$. Consideremos $\varepsilon > 0$ y n un entero positivo. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{X}$ se dice (n, ε) -separado para ψ , si para cada $x \neq y \in E$ existe $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $d(\psi^j(x), \psi^j(y)) > \varepsilon$. Entonces, la entropía topológica del sistema (\mathbb{X}, ψ) , denotada mediante $h(\psi)$, es

$$h(\psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log \left(\sup_E \text{card}(E) \right)$$

donde el supremo se toma con relación a todos los subconjuntos (n, ε) -separados E de \mathbb{X} .

Habitualmente usaremos la terminología de *entropía topológica de una aplicación*. La afirmación debe entenderse como un abuso de notación, y se refiere a la entropía

topológica del sistema formado por el espacio métrico compacto, dominio de tal aplicación, y la propia aplicación.

La definición del concepto de caos que usaremos, está basada en las ideas recogidas en el trabajo de Li y Yorke sobre sistemas dinámicos de la forma (\mathbb{I}, f) donde $\mathbb{I} = [0, 1]$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ (véase [LY 75]). Otras definiciones de caos son por ejemplo, caos en el sentido de Devaney ([D 89]), ω -caos ([Li 93]) o caos distribucional ([SS 94]).

Definición 1.1.2. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$. Un par de puntos $\{x, y\} \subset \mathbb{X}$ se dice que son un par de Li-Yorke para la aplicación ψ , si simultáneamente se satisfacen:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(y)) > 0.$$

La primigenia definición de par de Li-Yorke exigía, además de las dos anteriores propiedades, que se satisficiera $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(p), \psi^n(\alpha)) = 0$ para todo punto periódico p de ψ y para todo $\alpha \in \{x, y\}$. Posteriormente se probó que esta tercera propiedad era redundante al ser implicada por las otras dos propiedades (véase [J 92]).

La definición de caoticidad (en el sentido de Li y Yorke) que se dio para un sistema generado por una función continua f definida en el intervalo compacto unidad \mathbb{I} fue:

f es caótica si existe un conjunto $S \subseteq \mathbb{I}$ infinito no numerable tal que, para todo par de puntos distintos $\{x, y\}$ en S , $\{x, y\}$ es un par de Li-Yorke. A un conjunto S , independientemente de su cardinalidad, satisfaciendo la anterior propiedad relativa a los pares de Li-Yorke se le llama conjunto “scrambled”.

Observación 1.1.2.1. La anterior definición de caoticidad exige la existencia de un conjunto infinito no numerable en el espacio, por tanto, si en general pretendiésemos usar tal definición habríamos de excluir a todos los espacios contables, es decir, espacios finitos o infinitos numerables. En [KuS 91], para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ se prueba que si existe un par de Li-Yorke, entonces f posee un conjunto scrambled no numerable. Por tanto, para $\mathbb{X} = \mathbb{I}$ la definición de caoticidad se reduce a la existencia de un par de Li-Yorke.

Con el fin de poder restringirnos a conjuntos con cualquier número de elementos y tener una definición lo más general posible, en lo que sigue usaremos la siguiente definición de caos introducida en [SKSF 97].

Definición 1.1.3. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$. Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{X}$, diremos que $\psi|_A$ es caótica (en el sentido de Li y Yorke) si A contiene al menos un par de Li y Yorke de ψ .*

A la luz de esta definición de caoticidad, surge inmediatamente la pregunta: Si \mathbb{X} es un espacio infinito no numerable y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ es caótica, ¿existe en \mathbb{X} un conjunto scrambled S no numerable?

La respuesta a esta pregunta en general es negativa. En [FPS 95], se muestra un ejemplo de una aplicación $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$ que sólo posee pares de Li-Yorke, es decir, los únicos conjuntos scrambled que genera son bipuntuales. Actualmente, existe gran interés en estudiar la cardinalidad del conjunto de pares de Li-Yorke existentes en un espacio \mathbb{X} para una aplicación $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$. Así en [BGKM 02] se estudian las propiedades dinámicas de los sistemas (\mathbb{X}, ψ) que carecen de pares de Li-Yorke. Por otro lado en [HY 01], se prueba que existen espacios \mathbb{X} que admiten funciones continuas tales que todo el espacio \mathbb{X} es un conjunto scrambled. En [BDM 04] se construyen dos espacios que admiten aplicaciones generando a lo sumo conjuntos scrambled numerables. En esta línea de trabajo parece razonable hacerse la siguiente pregunta:

¿Qué tipos de espacios \mathbb{X} admiten aplicaciones continuas ψ verificando que el cardinal máximo de todos sus conjuntos scrambled es dos?, es decir, ¿qué espacios admiten aplicaciones que sólo poseen pares de Li-Yorke?

El ejemplo propuesto en [FPS 95] muestra que \mathbb{I}^2 es uno de tales espacios. Podría pensarse que esta propiedad de minimalidad en la cardinalidad de los conjuntos scrambled se consigue debido a la libertad de movimientos que, en lo que respecta a las construcciones, permite \mathbb{I}^2 al ser un espacio compacto, conexo y con interior no vacío en el espacio euclideo \mathbb{R}^2 que lo contiene. En el Apéndice (véase [GL 04]) mostramos que los conjuntos tipo Cantor (es decir, espacios cerrados, sin puntos aislados y totalmente desconectados) admiten endomorfismos continuos que generan sólo conjuntos scrambled bipuntuales y que existe un espacio bidimensional compacto, conexo y con interior vacío en \mathbb{R}^2 con la topología relativa cumpliendo la misma propiedad.

1.2. La clase de las aplicaciones triangulares $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$

Aunque ciertos problemas relativos a la *dinámica-topológica* permanecen aún abiertos, en las últimas décadas los sistemas asociados a funciones continuas del intervalo (es decir, funciones pertenecientes a $\mathcal{C}(\mathbb{I}_{a,b})$, donde $\mathbb{I}_{a,b} = [a, b]$ es un intervalo compacto de la recta real) han sido ampliamente estudiados en la literatura.

Como consecuencia de la existencia de fenómenos biológicos, económicos, sociales y de la ingeniería que encuentran su formulación matemática en modelos dinámicos discretos basados en transformaciones de espacios de dimensión mayor que uno, se plantea el problema de investigar tales sistemas, intentando entender el comportamiento de los mismos. Para alcanzar este objetivo y como primer paso, dado el enorme aumento de la complejidad dinámica que lleva asociada el incremento de la dimensión, parece natural iniciar este estudio en el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$ de las aplicaciones continuas del cuadrado unidad ($\mathbb{I}^2 = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$). Sin embargo, la dinámica de tales aplicaciones resulta extremadamente complicada. Se desconoce, por ejemplo, en el caso del comportamiento dinámico más

sencillo (la periodicidad), si cualquier sistema tiene una *estructura periódica* semejante o no, a la descrita por el teorema de Sharkovskii para los sistemas dinámicos (\mathbb{R}, ψ) o (\mathbb{I}, ψ) , o por los resultados sobre el mismo problema en otros espacios de dimensión finita (véase Nota 1.2.2).

Hagamos un poco de historia sobre el teorema de estructura periódica de Sharkovskii. En el año 1964, aparece publicado por vez primera un resultado del matemático ucraniano A. N. Sharkovskii, relativo a la existencia de puntos periódicos de endomorfismos continuos en \mathbb{R} o $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (véase [Sh 64]). Hasta ese momento, sólo se conocían algunos resultados aislados sobre periodicidad ligados a la iteración de funciones continuas del intervalo y la recta. Por ejemplo, se sabía que si una función f no posee puntos periódicos de periodo dos, la trayectoria $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ (véanse [Sh1 65] o [BC 92]), e idéntica conclusión se logra suponiendo que la función sólo posee puntos fijos (véase [Ot 57]). Como consecuencia se sigue que si la función sólo posee puntos periódicos de periodos $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}$, entonces para cada $x \in \mathbb{I}$, $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ converge a algún punto periódico de f . Asimismo, en [ML 57] se daban condiciones para la existencia de puntos de periodo 2.

Sharkovskii probó que la existencia de un punto periódico de periodo mayor que dos implica la existencia de otro punto con periodo dos (véase [Sh 60]), así como también comprobó que la existencia de puntos periódicos con periodo distinto de una potencia de dos implica la aparición de puntos periódicos con periodos de todas las potencias de dos. Finalmente, extiende los hechos anteriores a cualquier tipo de periodo apareciendo el enunciado que se conoce como teorema de Sharkovskii. Recordemos que a lo largo de todo el trabajo, mediante \mathbb{N} denotaremos al conjunto de los números enteros no negativos.

Teorema 1.2.1 (Sharkovskii). *Consideremos en $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ el siguiente orden al que llamaremos ordenamiento de Sharkovskii :*

$$3 >_s 5 >_s 7 >_s \dots >_s 2 \cdot 3 >_s 2 \cdot 5 >_s 2 \cdot 7 >_s \dots >_s 2^2 \cdot 3 >_s 2^2 \cdot 5 >_s 2^2 \cdot 7 >_s \dots \\ \dots >_s 2^m \cdot 3 >_s 2^m \cdot 5 >_s \dots >_s \{2^\infty\} >_s \dots >_s 2^j >_s 2^{j-1} > \dots >_s 2^2 >_s 2 >_s 1.$$

Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$. Si f tiene un punto periódico de período m , entonces f posee puntos periódicos de todos los periodos menores que m en el anterior orden.

Recíprocamente, dado cualquier elemento m de la ordenación anterior existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ con al menos un punto periódico de periodo m y ningún punto periódico de periodo mayor que m en el orden de Sharkovskii.

Nota 1.2.2. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, el teorema sigue siendo cierto aunque puede ocurrir además que el conjunto de puntos periódicos de f sea vacío, como sucede por ejemplo para la función $f(x) = x + 1$. Para otros tipos de espacios unidimensionales (como \mathbb{S}^1 ,

árboles, grafos,...) el resultado anterior se ha completado con otros órdenes diferentes al de Sharkovskii, obteniéndose estructuras periódicas más complejas (por ejemplo véanse [Be 81], [Be 82], [ALM 89], [Bl 92], [ALM 93], [AM 93], [LIM 93], [AY 95], [B 95], [Bl1 95], [LL1 95], [LIPR 95]), [B 91] o [APR 97]).

El interés y la sencillez de este teorema que describe completamente la estructura periódica únicamente bajo la hipótesis de la continuidad, indujo a pensar en una extensión para el caso de aplicaciones n -dimensionales con $n > 1$. Pero como se anunció anteriormente en dimensión dos, en general, deja de ser válido. Basta considerar, por ejemplo en \mathbb{R}^2 , un giro de centro $(0, 0)$ y ángulo $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Esta aplicación continua posee todos sus puntos periódicos de periodo tres excepto el $(0, 0)$ que es fijo. Por tanto, a la vista de lo que ocurre con la estructura periódica, el estudio general de la dinámica se presenta muy complicado.

Como consecuencia de la complejidad dinámica que poseen las aplicaciones de $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, debido al hecho de que las órbitas de los puntos tienen “mayor libertad” para moverse que en \mathbb{I} , la estrategia utilizada para inferir la información que nos interesa es usar ciertas familias especiales de elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$ que nos simplifiquen, de alguna manera, el trabajo. De este modo aparece, de manera natural, la clase de las *aplicaciones triangulares* o “*skew product maps*”, llamada así por la especial morfología de los elementos que la integran.

Definición 1.2.3. Una aplicación $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$ se llama triangular si es de la forma $F : (x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$.

En este contexto, las funciones f y g se denominan respectivamente la función *base* y la función *fibra* de la aplicación F . Para cada $x \in \mathbb{I}$, llamaremos *fibra* sobre x al conjunto $I_x = \{x\} \times \mathbb{I}$. Las funciones g_x definidas como $g_x(y) = g(x, y)$ actúan en I_x y constituyen un sistema de funciones unidimensionales que dependen continuamente de la variable x . Mediante $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares en el cuadrado unidad.

El uso de esta familia especial de aplicaciones no es caprichoso. Como consecuencia de su especial morfología (la función base es una aplicación unidimensional), las aplicaciones triangulares poseen ciertas similitudes dinámicas con las funciones continuas del intervalo sin dejar de ser referentes del mundo bidimensional objeto de nuestro estudio (véase [G 01] para un estudio comparativo de similitudes y diferencias entre las aplicaciones triangulares y las funciones continuas del intervalo). Buena muestra de ello es que el orden de Sharkovskii para la coexistencia de ciclos es válido para este tipo de aplicaciones (véase [K1 79]). En el año 1992, Kolyada publica un extenso artículo (véase [Ko 92]) donde realiza un estudio profundo de las propiedades dinámicas de los elementos del espacio $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. Entre otros, obtiene un resultado de proyección muy útil

a la hora de relacionar los conjuntos de puntos especiales, introducidos en la Sección 1.1, de la aplicación triangular y de su función base. Para $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ sea $A(F, \mathbb{I}^2)$ uno cualquiera de los conjuntos descritos en la Sección 1.1, al mismo conjunto para la función base lo denotaremos con $A(f, \mathbb{I})$.

Teorema 1.2.4. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ Entonces se verifica*

$$\pi(A(F, \mathbb{I}^2)) = A(f, \mathbb{I})$$

donde $\pi : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ es la proyección en la primera coordenada.

Nota 1.2.5. El Teorema 1.2.4 es una versión débil del resultado presentado en [Ko 92]. El resultado general es válido para una mayor cantidad de conjuntos de puntos especiales que no han sido presentados en la Sección 1.1 al no ser objeto de nuestro estudio en este trabajo.

En relación a la entropía topológica (véase Definición 1.1.1), si F es un elemento de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ existen ciertas cotas obtenidas por Bowen para $h(F)$ (véanse [Bo 71] y [W 82]):

$$\max\{h(f), h_{\text{fib}}(F)\} \leq h(F) \leq h(f) + h_{\text{fib}}(F), \quad (1.1)$$

donde $h_{\text{fib}}(F) = \sup_{x \in \mathbb{I}} h(F|_{I_x})$.

Observación 1.2.5.1. La noción de entropía topológica fue introducida, como ya se comentó, para sistemas generados por una aplicación continua definida de un espacio en sí mismo. En la fórmula contenida en la expresión (1.1) se hace referencia a $h(F|_{I_x})$. Obsérvese que $h(F|_{I_x})$ está bien definida tan sólo en el caso en que la fibra I_x sea fuertemente invariante por la aplicación F (es decir, $F(I_x) = I_x$). Para el resto de los casos hemos de extender el concepto de entropía topológica. La manera de solucionar el problema es considerar $F|_{I_x}$ como un sistema no autónomo (es decir, un sistema de la forma $(\mathbb{X}, f_{1,\infty})$ donde \mathbb{X} es un espacio métrico compacto y $f_{1,\infty} := (f_i)_{i=1}^\infty$ con $f_i : A_i \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ continua, para más información sobre esta clase de sistemas véase [KS 96] o [KST 04]) y usar los resultados contenidos en [KS 96]. Formalmente, en lo que a la entropía se refiere, trabajaremos como si el sistema fuese convencional.

En caso de tener una aplicación triangular F con una función base f tal que sólo posee puntos periódicos de periodo potencia de dos (a esta situación la denotaremos mediante el símbolo $f \leq 2^\infty$), entonces $h(f) = 0$ (véase [MS 80]) y se tiene una fórmula para el cálculo de la entropía de la forma (véase [Bo 71]),

$$h(F) = \sup_{x \in \overline{\text{Per}}(f)} h(F|_{I_x}).$$

De tal modo, si $\text{Per}(f)$ es cerrado, para calcular $h(F)$ podemos centrar nuestra atención únicamente en $h(F|_{I_x})$, donde $x \in \text{Per}(f)$. Por otro lado, si en el sistema inicial todas las funciones g_x son monótonas, entonces para cada $x \in \mathbb{I}$ es $h(F|_{I_x}) = 0$ y consecuentemente $h(F) = h(f)$ (véase [KS 96]).

Queda puesto de manifiesto que en la clase de las aplicaciones triangulares contamos con ciertas herramientas topológicas y ciertas similitudes dinámicas con el caso unidimensional que nos ayudarán a la hora de analizar el comportamiento de transformaciones bidimensionales más generales. Por otro lado, los elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ presentan propiedades que no satisfacen las funciones del intervalo (véase [Ko 92] para una amplia enumeración de las mismas). Uno de los puntos donde se ponen de manifiesto estas diferencias es, como comentaremos detalladamente en la siguiente sección, en relación a la estructura topológica de los conjuntos ω -límite.

1.3. Conjuntos ω -límite en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$

Conocer la dinámica del sistema (\mathbb{X}, ψ) consiste en tener conocimiento en términos de descripción explícita y de caracterización topológica de lo que ocurre asintóticamente con las trayectorias de todos sus puntos. Este análisis se puede realizar a través del estudio de los conjuntos ω -límite de los puntos del espacio \mathbb{X} (véase [BG 04]). A continuación, describiremos ciertos resultados generales que satisfacen dichos conjuntos, cuyas pruebas pueden ser consultadas en [BC 92].

Definimos el conjunto ω -límite de un punto $x \in \mathbb{X}$ a través de una aplicación continua ψ como el conjunto:

$$\omega_\psi(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} \psi^n(x)},$$

o equivalentemente, como se comentó en la introducción, como el conjunto de los puntos de acumulación de $\text{Tra}_\psi(x)$:

$$\omega_\psi(x) = \{y \in \mathbb{X} : \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{n_k \rightarrow \infty} \psi^{n_k}(x) = y\}.$$

Definición 1.3.1. *Un punto $x \in \mathbb{X}$ se dice asintóticamente periódico por una aplicación $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$, si existe un punto periódico z de ψ satisfaciendo $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\psi^n(x), \psi^n(z)) = 0$.*

En caso de tener un punto x asintóticamente periódico, $\omega_\psi(x)$ es exactamente la órbita del punto periódico z . El siguiente resultado resume algunas de las propiedades de los conjuntos ω -límite:

Teorema 1.3.2. *Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico compacto y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) para cada entero positivo m , se verifica $\omega_\psi(x) = \bigcup_{j=0}^{m-1} \omega_{\psi^m}(\psi^j(x))$,
- (b) para cada $x \in \mathbb{X}$, $\omega_\psi(x)$ es distinto de vacío, cerrado y fuertemente invariante,
- (c) si $M = \omega_\psi(x)$ y $N \subsetneq M$ es un conjunto cerrado y no vacío, entonces $N \cap \overline{\psi(M \setminus N)} \neq \emptyset$,
- (d) el conjunto $\omega_\psi(x)$ es finito, si y sólo si, el punto x es asintóticamente periódico; además, si $\omega_\psi(x)$ es infinito ningún punto aislado de $\omega_\psi(x)$ es periódico.

Observación 1.3.2.1. La propiedad (c) del Teorema anterior es llamada usualmente en la literatura como *incompresibilidad débil* (véase [SKSF 97]) o propiedad del *transporte* (véase [BBHS 96]) y puede ser reformulada del siguiente modo:

si $M = \omega_\psi(x)$ y $U \subsetneq M$ es un conjunto abierto y no vacío, entonces $\psi(\overline{U}) \not\subset U$.

Un importante y difícil problema es conocer, en general, cuáles son los conjuntos ω -límite generados por un S.D.D. (\mathbb{X}, ψ) . Si el espacio \mathbb{X} es el intervalo unidad, los posibles conjuntos ω -límite se encuentran totalmente caracterizados (véanse [Sh2 65], [ABCP 89/90] y [BS 92]).

Teorema 1.3.3. *Un conjunto $C \subset \mathbb{I}$ es un conjunto ω -límite de una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$, si y sólo si, C es o un conjunto compacto y denso en ninguna parte, o una unión finita disjunta de intervalos (no degenerados) compactos.*

Cuando el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{I}^n$ donde $n > 1$ es un entero, sólo poseemos ciertos resultados parciales contenidos en [AC1 91/92] y [AC2 91/92].

Teorema 1.3.4. *Sea $n > 1$. Entonces, un conjunto compacto $C \subset \mathbb{I}^n$ es un conjunto ω -límite de una aplicación continua F de \mathbb{I}^n siempre que se verifique una de las siguientes condiciones:*

- (i) C es totalmente desconectado;
- (ii) C es un continuo con interior vacío;
- (iii) C es una colección finita de continuos no degenerados de Peano.

Recordemos que un *continuo* es cualquier conjunto compacto y conexo, y un *continuo de Peano* es cualquier continuo localmente conexo, o equivalentemente, cualquier imagen continua del intervalo unidad \mathbb{I} (véase, por ejemplo, [Ku 68, pág. 256]).

Cuando $n = 2$ y tratamos con la clase de las aplicaciones triangulares $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, se conoce cierta información extra. Concerniente al problema de la caracterización topológica de los conjuntos ω -límite, para los elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ existen dos resultados que

complementan el Teorema 1.3.4 válido para endomorfismos continuos arbitrarios en \mathbb{I}^2 . El primero de ellos está destinado a la caracterización de los conjuntos ω -límite que se hayan contenidos en una fibra (véase [KS 92/93]).

Teorema 1.3.5. *Sean $a \in \mathbb{I}$ y $M \subset \mathbb{I}$. Las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(i) *existe una aplicación triangular F en \mathbb{I}^2 y un punto $x \in \mathbb{I}^2$ tales que*

$$\omega_F(x) = \{a\} \times M;$$

(ii) *M es un conjunto cerrado y no vacío de \mathbb{I} que no es de la forma*

$$M = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_r \cup C \tag{1.2}$$

donde r es un entero positivo; J_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, son intervalos cerrados no degenerados; C es un conjunto no vacío contable (finito o infinito numerable); todos los conjuntos J_i y C son disjuntos dos a dos y $d(C, J_i) > 0$ para al menos un índice $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Observemos que, usando el Teorema 1.3.5, es fácil mostrar que si B es un conjunto finito no vacío, entonces $B \times M$ es un conjunto ω -límite de una aplicación en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, si y sólo si, M es un subconjunto cerrado y no vacío de \mathbb{I} que no es de la forma (1.2). Además, de la prueba del Teorema 1.3.5 se sigue que un subconjunto no vacío M contenido en una recta del plano es un conjunto ω -límite para una aplicación continua definida en dicha recta, si y sólo si, M (considerado como conjunto unidimensional) no es de la forma (1.2).

Los otros resultados que tenemos van dirigidos a analizar qué tipo de conjuntos no contenidos en una fibra son conjuntos ω -límite en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. En [KS 92/93] se da el siguiente resultado que muestra que tales conjuntos poseen una estructura complicada.

Teorema 1.3.6. *Sean $a \in \mathbb{I}$ y M cualquier subconjunto cerrado de \mathbb{I} . Entonces existe una aplicación triangular F en \mathbb{I}^2 y un punto $(x, y) \in \mathbb{I}^2$ tal que*

$$\omega_F(x, y) \cap I_a = \{a\} \times M.$$

Por otro lado, en [JS 01] se muestra que el resultado de Agronsky y Ceder (cf. (iii) Teorema 1.3.4), con ciertas restricciones, es válido para aplicaciones triangulares en el cuadrado. Además, se dan ciertos ejemplos de continuos no de Peano que cumplen y que no cumplen la propiedad de ser conjuntos ω -límite para la clase de las aplicaciones triangulares. Por tanto, una caracterización de los continuos que son conjuntos ω -límite en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ parece lejos de poder ser obtenida. Otros resultados parciales en esta línea pueden verse en [Ba 97/98] o [Si 95].

1.4. La familia de funciones base tipo Kolyada

En el resto de capítulos se realizarán varias construcciones de aplicaciones triangulares. La mayor parte de ellas poseen una característica común desde el punto de vista de su comportamiento dinámico. De sus funciones base se dice coloquialmente que “aplastan hacia la izquierda”. Más formalmente, si f es una de tales funciones base, para todo punto $x \in \mathbb{I}$ se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0. \quad (1.3)$$

En esta sección introduciremos una familia de endomorfismos continuos definidos en el intervalo \mathbb{I} y a la que llamaremos *familia de funciones base tipo Kolyada*. Los elementos de esta clase de funciones satisfacen la propiedad (1.3) y se usarán como funciones base de aplicaciones triangulares que construiremos en el futuro.

Definición 1.4.1. Consideremos $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\varepsilon_i < \frac{1}{2^i}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$ verificando que $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} = c < 1$. Entonces definimos la función $f_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ como

$$f_{\tilde{\varepsilon}}(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_i & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}], i \in \{1, 2, \dots\} \\ \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + (\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}) & \text{si } x \in [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i], i \in \{1, 2, \dots\} \end{cases}$$

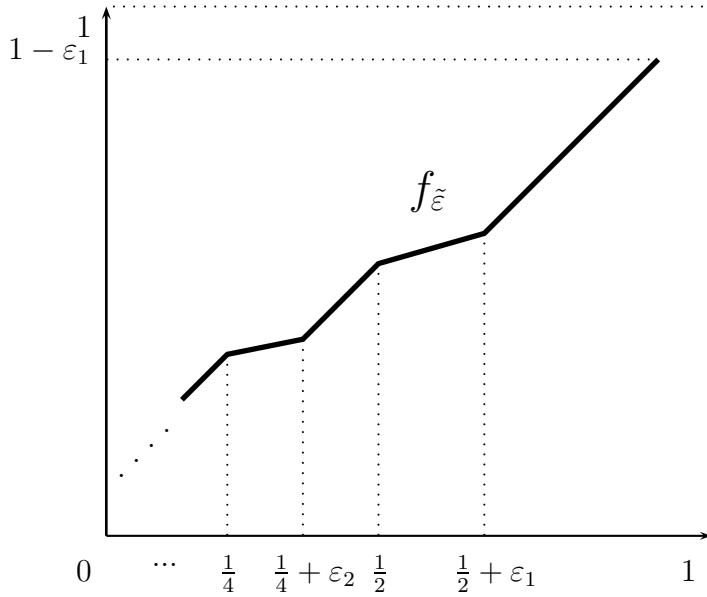
A la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f_{\tilde{\varepsilon}} : \tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, \varepsilon_i < \frac{1}{2^i} \text{ y } \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} = c < 1 \forall i\},$$

la llamaremos *familia de funciones base tipo Kolyada*.

La nomenclatura para esta clase de funciones base, deriva de la similitud de sus elementos con la función base de una aplicación triangular introducida por Kolyada en [Ko 92] (véase Definición 2.1.1). Esta aplicación triangular ha sido ampliamente estudiada por sus propiedades dinámicas y será objeto de nuestra atención en el siguiente capítulo (véase Capítulo 2, Sección 2.1.1).

Para $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2^{2i+10}}\}_{i=1}^{\infty}$ y $c = \frac{1}{4}$ tenemos la función base de la aplicación triangular de Kolyada. Gráficamente $f_{\tilde{\varepsilon}}$ es de la forma:



1.5. Variedades, grafos y dendritas

En esta sección introduciremos la notación y conceptos necesarios para desarrollar los resultados contenidos en las Secciones 3.3.1 y 3.3.2 del Capítulo 3. A lo largo de la misma, adoptaremos básicamente la terminología de [N 92].

Definición 1.5.1. Una variedad compacta m -dimensional (con borde) ($m \geq 1$) es cualquier espacio compacto y Hausdorff \mathbb{M} tal que para cada punto $x \in \mathbb{M}$ existe un entorno $\mathcal{U}(x)$ que es homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$.

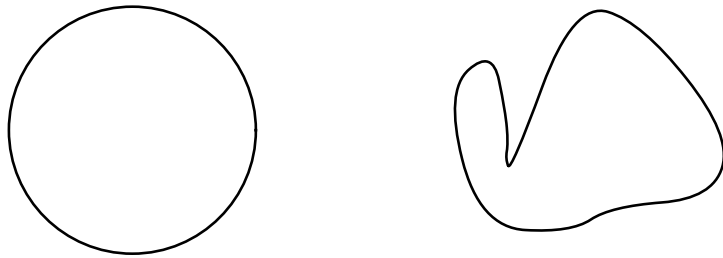
Por otro lado, un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo unidad \mathbb{I} . Los puntos finales de un arco \mathbb{A} serán respectivamente las imágenes, mediante el homeomorfismo existente con el intervalo \mathbb{I} , de los puntos 0 y 1.

Definición 1.5.2. Un grafo es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos que dos a dos, o bien son disjuntos, o bien se intersecan en un punto final común (es decir, es un poliedro compacto y conexo unidimensional).

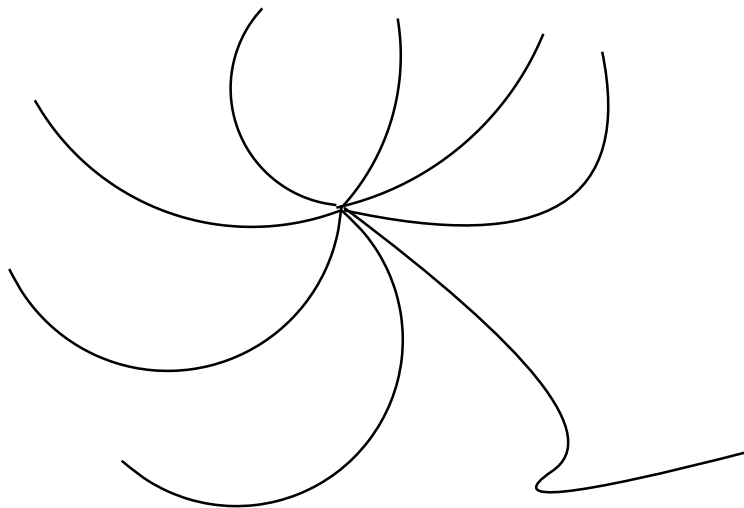
Análogamente, un grafo también puede ser definido de la siguiente forma.

Definición 1.5.3. Un grafo conexo (o simplemente un grafo) es un par (\mathbb{G}, V) donde \mathbb{G} es un continuo y $V \subset \mathbb{G}$ es un conjunto finito, cuyos puntos se llaman vértices, tal que $\mathbb{G} \setminus V$ es la unión disjunta de un número finito de conjuntos abiertos e_1, \dots, e_k de \mathbb{G} , llamados ramas, con la propiedad de que cada e_i es homeomorfo a un intervalo abierto de la recta real tal que su frontera consiste a lo sumo en dos puntos que son vértices. Mediante $B(\mathbb{G})$ denotaremos al conjunto de los vértices del grafo \mathbb{G} .

Ejemplos simples de grafos son las curvas cerradas simples y las n -estrellas con $n \geq 3$. Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo al círculo unidad. Una *n -estrella* es un espacio homeomorfo a la unión de n arcos que poseen únicamente un punto final en común.



Curvas cerradas simples



8-estrella

Figura 1.1: Ejemplos de curvas cerradas simples y 8-estrella.

Definición 1.5.4. *Un árbol es un grafo que no contiene curvas cerradas simples.*

Definición 1.5.5. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{X}$. La componente numérica de p en \mathbb{X} , denotada con $c(p, \mathbb{X})$, es la cardinalidad del conjunto de todas las componentes (conexas) de $\mathbb{X} \setminus \{p\}$.*

Sea β un número cardinal. Diremos que el orden de p en \mathbb{X} es menor o igual que β , y lo denotaremos con $\text{ord}(p, \mathbb{X}) \leq \beta$, si para cada entorno de \mathcal{U} de p , existe un abierto \mathcal{V} tal que $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $\text{card}(\mathcal{V}) \leq \beta$. Diremos que el orden de p en \mathbb{X} es β , $\text{ord}(p, \mathbb{X}) = \beta$, si $\text{ord}(p, \mathbb{X}) \leq \beta$ y $\text{ord}(p, \mathbb{X}) \not\leq \alpha$ para cualquier cardinal $\alpha < \beta$.

Definición 1.5.6. Sea \mathbb{X} un continuo. Un punto p en \mathbb{X} se llamará punto final de \mathbb{X} si $\text{ord}(p, \mathbb{X}) = 1$. Mediante $\text{End}(\mathbb{X})$ denotaremos al conjunto de los puntos finales del espacio \mathbb{X} .

Definición 1.5.7. Una dendrita es un espacio continuo de Peano que no contiene curvas cerradas simples. Un punto $p \in \mathbb{D}$ se llama vértice de \mathbb{D} si $\text{ord}(p, \mathbb{D}) > 2$. Análogamente, mediante $\text{B}(\mathbb{D})$ denotaremos al conjunto de los vértices de la dendrita \mathbb{D} .

Para tener una imagen visual de una dendrita véase la Figura 3.2 presentada en el Lema 3.3.3 del Capítulo 3. Para cualquier punto de una dendrita \mathbb{D} su componente numérica y su orden coinciden (véase [N 92, 10.13]) y además estas nociones se conservan por homeomorfismos.

El interés en estudiar aplicaciones definidas en grafos se debe al hecho de que para aplicaciones definidas en variedades con una foliación invariante de codimensión uno, la citada aplicación se transforma en general en una aplicación definida en un grafo. Además, la dinámica de homeomorfismos pseudo-Anosov en una superficie puede ser reducida esencialmente al análisis de ciertas aplicaciones definidas en grafos (véase por ejemplo [FM 93]). Finalmente, a veces las aplicaciones definidas en los grafos imitan el comportamiento de una aplicación diferenciable (flujo) en el entorno de un atractor hiperbólico (véase por ejemplo [Wi 77]).

El reciente interés en la dinámica de sistemas discretos definidos sobre dendritas está motivado por el hecho de que las dendritas pueden aparecer como conjuntos de Julia en dinámica compleja (véase [RP 86], [Bea 91] o [Mo 98]).

Definición 1.5.8. Sea \mathbb{X} un espacio métrico y A un subconjunto. Diremos que A es una retracción de \mathbb{X} si existe una aplicación continua $r : \mathbb{X} \rightarrow A$ (llamada una retracción de \mathbb{X} sobre A) tal que su restricción sobre A es la identidad en A .

Un espacio métrico \mathbb{Y} se llama una retracción absoluta si para cualquier espacio topológico \mathbb{X} cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{X}$ homeomorfo a \mathbb{Y} es una retracción de \mathbb{X} .

Las retracciones y las retracciones absolutas están relacionadas con propiedades dinámicas de las funciones continuas sobre los espacios en los que están definidas. Por ejemplo, si un espacio métrico \mathbb{X} tiene la propiedad del punto fijo (cada elemento de $\mathcal{C}(\mathbb{X})$ tiene un punto fijo), entonces cada retracción de \mathbb{X} tiene también dicha propiedad. Las retracciones absolutas están relacionadas con la existencia de aplicaciones universales (véase [N 92]).

1.6. La topología métrica de Hausdorff.

Felix Hausdorff ideó un modo de describir la convergencia de conjuntos que es, para ciertos propósitos, mejor que los métodos usuales al no requerir encontrar un espacio adecuado de parámetros y una parametrización para los conjuntos. Se trata simplemente de la definición de una métrica que se aplica a los conjuntos.

Sea (\mathbb{X}, d) un espacio métrico y consideremos A y B dos subconjuntos de \mathbb{X} . Diremos que los conjuntos A y B están a *distancia Hausdorff* r el uno del otro, si y sólo si, cada punto de A está a distancia r de algún punto de B , y cada punto de B está a distancia r de algún punto de A . Esta idea puede materializarse en la definición de una métrica, llamada métrica de Hausdorff y que denotaremos por d_H .

Definición 1.6.1. *En las condiciones anteriores si A es un conjunto y $r > 0$, se define la bola abierta de radio r de A como,*

$$B_r(A) = \{y : d(x, y) < r \text{ para algún } x \in A\}.$$

Si A y B son dos conjuntos, la métrica de Hausdorff d_H , entre ambos es,

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subseteq B_r(B) \text{ y } B \subseteq B_r(A)\},$$

por convenio $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Si consideramos a d_H actuando sobre todos los subconjuntos del espacio métrico \mathbb{X} , ocurre que no define una métrica. De hecho, existen varios problemas que ponemos de manifiesto a continuación. Por ejemplo, en \mathbb{R} , la distancia entre $\{0\}$ y $[0, \infty)$ es infinita. Por tanto, hemos de restringir el uso de d_H a conjuntos acotados. Por otro lado, la distancia entre $\{0\}$ y \emptyset es de nuevo infinita, con lo que tenemos que restringirnos a usar conjuntos distintos de vacío. Nótemos ahora que la distancia d_H entre $(0, 1)$ y $[0, 1]$ es cero y ambos conjuntos son diferentes. Esto fuerza a restringir su uso a conjuntos cerrados. De hecho, y para los objetivos de esta memoria, aplicaremos d_H sobre todos los subconjuntos compactos y no vacíos de \mathbb{X} que denotaremos mediante $\mathcal{K}(\mathbb{X})$. Todo lo anterior y el siguiente resultado pueden verse, por ejemplo, en [E 90].

Teorema 1.6.2. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico (completo). La función de Hausdorff, d_H , es una métrica (completa) sobre el conjunto $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.*

Capítulo 2

Describiendo la familia $\mathcal{W}(F)$

En este capítulo resolveremos el problema (P1), es decir describiremos todos los conjuntos ω -límite, para una aplicación introducida por Kolyada en [Ko 92]. De la comprensión de los mecanismos que rigen la dinámica de tal aplicación, por un lado resolveremos el problema (P1) propuesto por Balibrea, Reich y Smítal para una familia concreta de conjuntos en \mathbb{I}^3 (véase [BRS 03]) y por otro, en los capítulos siguientes podremos realizar construcciones que sirven para la resolución de otros problemas. En concreto, en el Capítulo 3 presentamos un ejemplo que resuelve (P2) en un caso particular y para el que el problema (P1) también es solucionado.

2.1. Solución de (P1) para la aplicación de Kolyada

La sección se divide en tres apartados, en el primero de ellos introducimos la aplicación triangular que Kolyada presentó en [Ko 92] y comprobamos que la propiedad (ii) del Teorema 2.1.2 es extensible a puntos que pertenecen a fibras de la forma $I_{\frac{1}{2^n}}$, a continuación describimos completamente la dinámica de cualquier punto del cuadrado bajo la iteración de la aplicación, para terminar demostrando que el conjunto ω -límite de cualquier punto de $\mathbb{I}^2 \setminus I_0$ es exactamente la fibra I_0 .

2.1.1. La aplicación triangular de Kolyada

Se ha comentado anteriormente que en 1992, S.F. Kolyada publica un extenso artículo donde por vez primera se describen de una manera sistemática las propiedades

dinámico-topológicas de los elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. Por su especial morfología aparecen comportamientos comunes para $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ y $\mathcal{C}(\mathbb{I})$. Sin embargo, se ponen de manifiesto las diferencias generadas por la naturaleza bidimensional de las aplicaciones del espacio $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$. Una de tales diferencias se presenta introduciendo una aplicación triangular con entropía topológica cero y tal que posee un punto cuyo conjunto ω -límite es infinito y formado por puntos fijos de la aplicación (véase [Ko 92]). Esta situación no puede darse para las funciones del intervalo, en donde se cumple bajo la anterior premisa que la entropía topológica es positiva (véase [BC 92]).

Para cada entero $i \in \{1, 2, \dots\}$ consideremos

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}} \quad \text{y} \quad \delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}.$$

En estas condiciones, podemos observar que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \frac{1}{4}\varepsilon_i, & \delta_{i+1} &= \frac{1}{2}\delta_i, \\ \varepsilon_i \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i + \delta_{i+1}} &= \frac{1}{3}\varepsilon_i, & \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} &= 3 \cdot 2^{i-1}. \end{aligned}$$

Para cada i , consideremos las siguientes tres zonas del cuadrado unidad \mathbb{I}^2 :

- (a) Zona (*) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}}] \times \mathbb{I}$,
- (b) Zona (**) $\equiv [\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i] \times \mathbb{I}$,
- (c) Zona (***) $\equiv [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i] \times \mathbb{I}$.

Definición 2.1.1. *La aplicación triangular de Kolyada, es el elemento $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ que posee como función base f al elemento $f_{\tilde{\varepsilon}}$ de la familia de funciones base tipo Kolyada donde $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty = \{\frac{1}{2^{2i+10}}\}_{i=1}^\infty$, y como función fibra $g : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ a la función definida del siguiente modo:*

- Si i es impar:

- Si $(x, y) \in \text{Zona (*)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \delta_i & \text{si } y \in [\delta_i, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, \delta_i]. \end{cases}$$

- Si $(x, y) \in \text{Zona (**)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1}.$$

- Si $(x, y) \in \text{Zona (***)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \delta_{i+1}.$$

- Si i es par:

- Si $(x, y) \in \text{Zona (*)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \delta_i & \text{si } y \in [0, 1 - \delta_i], \\ 1 & \text{si } y \in [1 - \delta_i, 1]. \end{cases}$$

- Si $(x, y) \in \text{Zona (**)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \delta_{i+1}.$$

- Si $(x, y) \in \text{Zona (***)}$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \delta_{i+1}.$$

Observación 2.1.1.1. Del análisis de la definición, se deduce que el comportamiento dinámico de las iteradas de un punto $(a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ en $\text{Zona (*)} \cup \text{Zona (**)} \cup \text{Zona (***)}$ para $i \in \{1, 2, \dots\}$ es el siguiente:

- En Zona (*) para i hay un decrecimiento fijo entre las iteradas de valor δ_i si i es impar y respectivamente un crecimiento fijo si i es par.
- En Zona (**) para i hay una disminución gradual del decrecimiento entre las iteradas de δ_i a 0 si i es impar y respectivamente un aumento gradual si i es par.
- En Zona (***) para i hay un aumento gradual del crecimiento entre las iteradas de 0 a δ_{i+1} si i es impar y respectivamente una disminución si i es par.

Como se notó anteriormente, esta aplicación posee ciertas peculiaridades dinámicas, incompatibles con lo que ocurre en el caso unidimensional, que se recogen en el siguiente resultado (véase [Ko 92]).

Teorema 2.1.2. *Sea F la aplicación triangular de Kolyada. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\text{Per}(F) = \text{Fix}(F) = I_0,$

(ii) $\omega_F(1, 1) = I_0.$ *Por tanto $\omega_F(1, 1)$ es infinito y consecuentemente no un ciclo.*

Observación 2.1.2.1. A la luz del resultado descrito en el Teorema 2.1.2 y profundizando un poco más en este ejemplo, ponemos de manifiesto que I_0 es el ω -límite de cualquier punto de la fibra I_1 , así como de cualquier punto de la fibra $I_{\frac{1}{2^n}}$, para $n \in \{1, 2, \dots\}$.

En efecto, si tomamos el punto $(1, \frac{1}{2}) \in I_1$ estaremos en la Zona impar mientras se cumplan

$$\frac{1}{2} + \varepsilon_1 = \frac{2^{11} + 1}{2^{12}} \leq \frac{2^{12} - k}{2^{12}}$$

y

$$\delta_1 = \frac{1}{2^{11}} \leq \frac{2^{10} - k}{2^{11}},$$

lo que se traduce en que $k \leq 2^{10} - 1$. En esta situación las iteradas son:

$$F^k \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2^{12} - k}{2^{12}}, \frac{2^{10} - k}{2^{10}}\right), F^{2^{10}-1} \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2^{12} - 2^{10} + 1}{2^{12}}, \delta_1\right),$$

y

$$F^{2^{10}} \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2^{12} - 2^{10}}{2^{12}}, 0\right).$$

Pasamos ahora a Zona (*) para i par y estaremos aquí mientras que $k \leq 2^{11} - 1$ siendo

$$F^{2^{11}-1} \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1, 0\right)$$

y

$$F^{2^{11}} \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Como $(\frac{1}{2}, 0) \in \text{Orb}_F(1, 1)$ es claro que

$$\omega_F \left(1, \frac{1}{2} \right) = \omega_F \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = \omega_F(1, 1) = I_0.$$

Consideremos ahora un punto de la forma $(1, \frac{1}{2^n})$ con n un entero positivo. Si $n \geq 11$ entonces se tiene $\frac{1}{2^n} < \delta_1$ y así

$$F^k \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = \left(\frac{2^{12} - k}{2^{12}}, 0 \right)$$

con $k \leq 2^{11}$, con lo que la última iterada en esa Zona es

$$F^{2^{11}} \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right).$$

De tal modo,

$$\omega_F \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = \omega_F \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = I_0.$$

Por el contrario, si fuese $n \leq 11$ las iteradas del punto se mantienen en Zona (*) para i impar mientras se tenga

$$\frac{1}{2^n} - k\delta_1 \geq \delta_1$$

y

$$k \leq 2^{11-n} - 1$$

obteniéndose

$$F^k \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = \left(\frac{2^{12} - k}{2^{12}}, \frac{1}{2^n} - k \frac{1}{2^{11}} \right),$$

$$F^{2^{11-n}} \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 0 \right)$$

y por lo tanto

$$\omega_F \left(1, \frac{1}{2^n} \right) = I_0.$$

Sea ahora $(1, y) \in I_1$. En este caso $F^k(1, y) = \left(\frac{2^{12}-k}{2^{12}}, \frac{y2^{11}-k}{2^{11}} \right)$ mientras se verifique $k \leq 2^{11} - 1$, permaneciendo así en la Zona (*). De esta forma, como $y^{2^{11}-1} < 2^{11} - 1$ y puesto que $y \in [0, 1)$, tenemos $F^{2^{11}-1}(1, y) = (\frac{1}{2} + \varepsilon_1, 0)$ y por tanto $F^{2^{11}}(1, y) = (\frac{1}{2}, 0)$, de donde $\omega_F(1, y) = I_0$ para cualquier $y \in \mathbb{I}$.

Podemos decir más todavía:

$$\omega_F \left(\frac{1}{2^n}, y \right) = I_0 \text{ para cada entero positivo } n \text{ y para cada } y \in \mathbb{I}.$$

En efecto, consideremos la fibra $I_{\frac{1}{2}}$. Estamos en la Zona (*) y en este caso las iteraciones acaban en el punto $(\frac{1}{4}, 1)$ tras 2^{12} iteradas. Como $(\frac{1}{2^2}, 1) \in \text{Orb}_F(1, 1)$ es claro que $\omega_F(\frac{1}{2}, y) = \omega_F(1, 1) = I_0$ para todos los $y \in \mathbb{I}$. Para la fibra $I_{\frac{1}{2^2}}$ tenemos que

$$F^{2^{13}} \left(\frac{1}{2^2}, y \right) = \left(\frac{1}{2^3}, 0 \right) \in \text{Orb}_F(1, 1)$$

y de nuevo $\omega_F(\frac{1}{2^2}, y) = \omega_F(1, 1) = I_0$. En general, se puede calcular fácilmente que

$$\begin{aligned} F^{2^{10}+n+1} \left(\frac{1}{2^n}, y \right) &= \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 1 \right) && \text{para } n \text{ impar,} \\ F^{2^{10}+n+1} \left(\frac{1}{2^n}, y \right) &= \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 0 \right) && \text{para } n \text{ par,} \end{aligned}$$

con lo que es claro que $\omega_F(\frac{1}{2^n}, y) = I_0$ para todo $y \in \mathbb{I}$. Además se tiene, como consecuencia inmediata de los hechos $f(\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i) = \frac{1}{2^i}$ y $\omega_F(I_{\frac{1}{2^i}}) = I_0$ para cada $i \geq 1$, que $\omega_F(I_{\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i}) = I_0$ para cada $i \geq 1$.

Tras lo antes visto en el Teorema 2.1.2 y en la Observación 2.1.2.1, parece lógico plantearse ahora la siguiente pregunta: ¿Se verificará la igualdad

$$\omega_F(x, y) = I_0,$$

para cualquier $(x, y) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$?

2.1.2. Análisis de la dinámica de la aplicación de Kolyada

En esta sección presentamos una serie de resultados que describen completamente la dinámica de la aplicación de Kolyada y que nos permitirán contestar afirmativamente a la cuestión suscitada en la observación anterior (véase [BGM 01]). A lo largo de ella, mediante F seguimos denotando a la aplicación triangular de Kolyada presentada en la Definición 2.1.1. Además, $\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}$, $\delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}$ y por $E(\cdot)$ denotamos a la función parte entera.

Lema 2.1.3. *Sea $(a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Existen n_0 , entero no negativo, e $i_0 \geq 1$ tales que $F^{n_0}(a, b) \in \text{Zona } (***) \cup (***)$ para i_0 .*

Demostración. Sea i_0 el entero positivo tal que (a, b) pertenece a la unión de las Zonas (*), (***) y (***) para i_0 . Entonces, tenemos varias situaciones:

- (a) Si $(a, b) \in \text{Zona } (***) \cup (***)$ para i_0 el resultado es obvio tomando $n_0 = 0$.

(b) Si $(a, b) \in \text{Zona } (*)$ para i_0 , se considera $l = a - \left(\frac{1}{2^{i_0}} - \varepsilon_{i_0}\right)$ la distancia del punto a al final de la Zona $(*)$ para i_0 . Así $l > 0$, ya que el punto $(a, b) \notin \text{Zona } (**) \cup (***)$ para i_0 .

Sea $n_1 = E\left(\frac{a - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right)}{\varepsilon_{i_0}}\right)$. Como $f(x) = x - \varepsilon_{i_0}$ si $x \in \text{Zona } (*)$ para i_0 , iterando n_1 veces tenemos

$$0 \leq f^{n_1}(a) - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right) < \varepsilon_{i_0},$$

luego tomando $n_0 := n_1 + 1$ obtenemos

$$f^{n_0}(a) - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right) = f^{n_1}(a) - \varepsilon_{i_0} - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right) < \varepsilon_{i_0} - \varepsilon_{i_0} = 0. \quad (2.1)$$

Por otro lado,

$$f^{n_0}(a) - \frac{1}{2^{i_0}} = f^{n_1}(a) - \varepsilon_{i_0} - \frac{1}{2^{i_0}} = f^{n_1}(a) - \left(\frac{a - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right)}{\varepsilon_{i_0}}\right) \geq 0. \quad (2.2)$$

De (2.1) y (2.2) se sigue

$$f^{n_0}(a) \in \left[\frac{1}{2^{i_0}}, \frac{1}{2^{i_0}} + \varepsilon_{i_0}\right) \Rightarrow F^{n_0}(a, b) \in \text{Zona } (**) \cup (***) \text{ para } i_0,$$

finalizando así la prueba. □

Lema 2.1.4. Para cada entero positivo i , si $(a, b) \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i\right) \times \mathbb{I}$, entonces

$$F(a, b) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i}\right) \times \mathbb{I}.$$

Demostración. Para probar el resultado es suficiente garantizar la pertenencia de $f(a)$ a $\left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i}\right)$. En efecto, como $a \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i\right)$, entonces parametrizamos el punto a de la forma $a = \frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i$ con $0 \leq t < 1$. Por la definición de la función base f (véase Definición 2.1.1), deducimos que

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i\right) = (t-1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2^i} = \begin{cases} \frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1} & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2^i} & \text{si } t \rightarrow 1, \end{cases}$$

lo que nos da $f(a) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i}\right)$, finalizando la prueba. □

Para cada entero $i \geq 1$ introducimos los siguientes dos conjuntos:

$$(i) \ A_i^1 = \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i\right) \times [0, \delta_i],$$

$$(ii) A_i^2 = \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i \right] \times [1 - \delta_i, 1].$$

Observación 2.1.4.1. En lo que sigue y cuando el espacio sea \mathbb{I}^n , con n entero positivo, se usará $d(\cdot, \cdot)$ en dos sentidos. Por un lado, como la distancia euclídea en \mathbb{I}^n , esto es, $d((a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$. Por otro lado, como la distancia euclídea en \mathbb{I}^n entre puntos y conjuntos, esto es, $d((a_i)_{i=1}^n, B) = \inf\{d((a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n) : (b_i)_{i=1}^n \in B\}$, $B \subset \mathbb{I}^n$.

Lema 2.1.5. Para cada entero positivo i , si $(a, b) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right] \times \mathbb{I}$, entonces

$$F^{2^{i+1}-1}(a, b) \in \begin{cases} A_{i+1}^1 & \text{si } i \text{ es par,} \\ A_{i+1}^2 & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que i es impar. El caso i par es análogo. Sea (a, b) un punto en el conjunto $\left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right] \times \mathbb{I}$. Entonces $a = \frac{1}{2^i} - t\varepsilon_{i+1}$ con $0 < t \leq 1$. Sea $m = E\left(\frac{b}{\delta_{i+1}}\right)$. Entonces $b = (m + s)\delta_{i+1}$ con $0 \leq s < 1$ y $0 \leq m \leq 2^{i+1}$. Por tanto, (a, b) es:

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2^i} - t\varepsilon_{i+1}, (m + s)\delta_{i+1} \right), \text{ donde } \begin{cases} 0 < t \leq 1, \\ 0 \leq s < 1, \\ 0 \leq m \leq 2^{i+1}. \end{cases}$$

Estudiemos cada coordenada por separado.

(a) Primera coordenada. Calculamos

$$d\left(\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1}\right) = \frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1} - \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1}\right) = (2^{i+1} - 2)\varepsilon_{i+1}.$$

Como $a \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right]$, entonces

$$d\left(a, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_{i+1}\right) \geq d\left(\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1}\right) = (2^{i+1} - 2)\varepsilon_{i+1}$$

y, por tanto, se sigue que $f^n(a) \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_{i+1} \right]$ para $n \in \{0, \dots, 2^{i+1} - 2\}$ (véase Definición 2.1.1).

En particular, $f^{2^{i+1}-2}(a) \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_{i+1} \right]$ y esto nos permite calcular

$$f^{2^{i+1}-1}(a) = f(f^{2^{i+1}-2}(a)) = \frac{1}{2^i} - (t + 2^{i+1} - 1)\varepsilon_{i+1}.$$

Ahora, investigamos dónde cae $f^{2^{i+1}-1}(a)$. Como $0 < t \leq 1$ obtenemos

$$\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^i} - (t + 2^{i+1} - 1)\varepsilon_{i+1} < \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1}.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{2^{i+1}} \leq f^{2^{i+1}-1}(a) < \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_i$$

y finalmente se concluye que

$$f^{2^{i+1}-1}(a) \in \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1} \right).$$

(b) Segunda coordenada. Supongamos que $m = 2^{i+1}$. En este caso $b = 1$ y

$$F^{2^{i+1}-1}(a, b) = F^{2^{i+1}-1}(a, 1) \in \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^{i+1}} + \varepsilon_{i+1} \right) \times \{1\} \subset A_{i+1}^2$$

ya que $g(x, 1) = 1$ si $(x, 1) \in \text{Zona } (*)$ para $i + 1$.

Teniendo esto en cuenta, en el resto de la prueba consideraremos que el entero $m \neq 2^{i+1}$. Probaremos que $\pi_2(F^{2^{i+1}-1}(a, b)) \in [1 - \delta_{i+1}, 1]$, donde $\pi_2 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ denota la proyección canónica en la segunda coordenada. En efecto, como $0 \leq s < 1$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$(2^{i+1} - m - 1)\delta_{i+1} < (2^{i+1} - m - s)\delta_{i+1} \leq (2^{i+1} - m)\delta_{i+1}. \quad (2.3)$$

Consideremos dos posibles situaciones:

(b₁) Si $m = 2^{i+1} - 1$, entonces

$$0 < d((a, b), \mathbb{I} \times \{1\}) = 1 - b = (1 - s)\delta_{i+1} \leq \delta_{i+1}.$$

Por tanto, $b \in [1 - \delta_{i+1}, 1) \subset [1 - \delta_{i+1}, 1]$.

En esta situación, por definición de g , sabemos que $\pi_2(F^n(a, b)) = 1$ cuando $n \in \{1, \dots, 2^{i+1} - 1\}$ y así, obtenemos

$$\pi_2(F^{2^{i+1}-1}(a, b)) = 1 \in [1 - \delta_{i+1}, 1].$$

(b₂) Si $0 \leq m < 2^{i+1} - 1$, entonces $1 - b = (2^{i+1} - m - s)\delta_{i+1}$, por lo que

$$b + (2^{i+1} - m - s)\delta_{i+1} = 1. \quad (2.4)$$

Por (2.3) y (2.4) deducimos

$$b + (2^{i+1} - m - 2)\delta_{i+1} < b + (2^{i+1} - m - s)\delta_{i+1} - \delta_{i+1} = 1 - \delta_{i+1},$$

de donde

$$b + n\delta_{i+1} < 1 - \delta_{i+1} \text{ para todo } n \in \{0, \dots, 2^{i+1} - m - 2\}. \quad (2.5)$$

En esta situación, como $m < 2^{i+1} - 1$ y m es entero, se tiene que $m \leq 2^{i+1} - 2$. Así, usando el hecho $2^{i+1} - 2 - m \geq 0$ y (2.5) sabemos, por la definición de la función g , que $\pi_2(F^n(a, b)) = b + n\delta_{i+1}$ cuando $n \in \{0, \dots, 2^{i+1} - m - 2\}$. En particular,

$$\pi_2(F^{2^{i+1}-m-2}(a, b)) = 1 - (2 - s)\delta_{i+1}.$$

Como $\pi_2(F^{2^{i+1}-m-2}(a, b)) < 1 - \delta_{i+1}$, podemos asegurar entonces que

$$\pi_2(F^{2^{i+1}-m-1}(a, b)) = \pi_2(F(F^{2^{i+1}-m-2}(a, b))) = 1 - (1 - s)\delta_{i+1}.$$

Observando que $0 \leq s < 1$, es $1 - \delta_{i+1} \leq 1 - (1 - s)\delta_{i+1} < 1$, y por tanto concluimos que $1 - \delta_{i+1} \leq \pi_2(F^{2^{i+1}-m-1}(a, b)) < 1$. Según la definición de la función g , obtenemos

$$\pi_2(F^{2^{i+1}-1}(a, b)) = \begin{cases} \alpha \in [1 - \delta_{i+1}, 1] & \text{si } m = 0, \\ 1 & \text{si } 0 < m < 2^{i+1} - 1. \end{cases}$$

Como consecuencia, de (a) y (b) se sigue $F^{2^{i+1}-1}(a, b) \in A_{i+1}^2$. \square

Corolario 2.1.5.1. Sean $(a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ e i_0 el entero positivo que proporciona el Lema 2.1.3. Entonces, para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$ existen iteradas de (a, b) por F en los conjuntos $A_{i_0+k}^1$ y $A_{i_0+k}^2$.

Demostración. Sea $(a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Por el Lema 2.1.3 existen $i_0 \geq 1$ y $n_0 \geq 0$ tales que $F^{n_0}(a, b) \in \text{Zona } (**) \cup (***)$ para i_0 . En esta situación, el Lema 2.1.4 garantiza que

$$F^{n_0+1}(a, b) \in \left[\frac{1}{2^{i_0}} - \varepsilon_{i_0+1}, \frac{1}{2^{i_0}} \right) \times \mathbb{I}.$$

Aplicamos ahora el Lema 2.1.5 al punto $F^{n_0+1}(a, b)$ y obtenemos que

$$F^{2^{i_0+1}+n_0}(a, b) \in A_{i_0+1}^2$$

si i_0 es impar, mientras que $F^{2^{i_0+1}+n_0}(a, b) \in A_{i_0+1}^1$ si i_0 es par.

Como $A_{i_0+1}^2$ y $A_{i_0+1}^1$ están contenidos en $\text{Zona } (**) \cup (***)$ para $i_0 + 1$, por el Lema 2.1.4 es

$$F^{2^{i_0+1}+n_0+1}(a, b) \in \left[\frac{1}{2^{i_0+1}} - \varepsilon_{i_0+2}, \frac{1}{2^{i_0+1}} \right) \times \mathbb{I}.$$

En este caso, aplicamos nuevamente el Lema 2.1.5 a $F^{2^{i_0+1}+n_0+1}(a, b)$ y obtenemos que $F^{2^{i_0+1}+2^{i_0+1}+n_0}(a, b) \in A_{i_0+2}^1$ si i_0 es impar. Procediendo análogamente, se obtiene $F^{2^{i_0+1}+2^{i_0+1}+n_0}(a, b) \in A_{i_0+2}^2$ si i_0 es par. Por tanto, usando recurrentemente el mismo argumento obtenemos iteradas de (a, b) en los conjuntos $A_{i_0+k}^1$ y $A_{i_0+k}^2$ para $k \in \{1, 2, \dots\}$. \square

Lema 2.1.6. Sean $\alpha \in A_i^2$ y $\beta \in A_i^1$. Entonces se verifica:

(i) $d(F(\alpha), \{(x, 1) : x \in \mathbb{I}\}) \leq \delta_i + \delta_{i+1}$ si i par.

(ii) $d(F(\beta), \{(x, 0) : x \in \mathbb{I}\}) \leq \delta_i + \delta_{i+1}$ si i impar.

Demostración. La prueba de las dos anteriores propiedades es análoga, por lo que nos centramos en establecer (i). Sea i un entero par y consideremos un elemento $\alpha = (a, b) \in A_i^2$. En tal caso, (a, b) se expresa de la forma

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i, 1 - s\delta_i \right) \text{ donde } \begin{cases} 0 \leq t < 1, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Distinguimos dos posibles situaciones:

(a) $\boxed{\frac{1}{3} \leq t < 1}$. Entonces (a, b) está en Zona (**) para i y por tanto es claro que $a - \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{3}\varepsilon_i$, de donde

$$\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_{i+1} \geq \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \frac{1}{3} \varepsilon_i - \delta_{i+1} = 0 \quad (2.6)$$

Ahora, por (2.6) establecemos que $b + \left(\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_{i+1} \right) \geq b$, de donde por la Definición 2.1.1 tenemos que

$$g(a, b) = \begin{cases} b + \left(\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_{i+1} \right) \geq b & \text{si } b \in [0, M], \\ 1 & \text{si } b \in [M, 1]. \end{cases}$$

Como $b \in [1 - \delta_i, 1]$, entonces $g(a, b) \geq 1 - \delta_i$ y podemos deducir que

$$d(F(a, b), \{(x, 1) : x \in \mathbb{I}\}) < \delta_i + \delta_{i+1}$$

para cada $(a, b) \in A_i^2$ que cumpla $a = \frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i$, donde $\frac{1}{3} \leq t < 1$.

(b) $\boxed{0 \leq t < \frac{1}{3}}$. Ahora, el punto (a, b) está en Zona (***) para i . Entonces

$$M = -\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i} \right) + \delta_{i+1} = (1 - 3t)\delta_{i+1}. \quad (2.7)$$

Por (2.7) y de $0 \leq t < \frac{1}{3}$ se sigue que $M \leq \delta_{i+1}$.

Por otro lado, como $(a, b) \in A_i^2$, es cierto que $b \geq 1 - \delta_i = 1 - 2\delta_{i+1}$. Es fácil notar que $1 - 2\delta_{i+1} = 1 - \frac{2}{2^{i+1}} = \frac{2^{i+1} - 2}{2^{i+1}} > \frac{1}{2^{i+1}} = \delta_{i+1}$ y por tanto $b \geq \delta_{i+1} \geq M$,

es decir, $b \in [M, 1]$. Usando la parte adecuada de la definición de g , obtenemos $g(a, b) = 1 - (2s + 1 - 3t)\delta_{i+1}$. Ahora, se verifica que

$$\left\{ 1 - (2s + 1 - 3t)\delta_{i+1} : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

es una expresión que alcanza su mínimo cuando la expresión

$$\left\{ (2s + 1 - 3t)\delta_{i+1} : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

alcanza su máximo, y tal valor se alcanza para $s = 1$ y $t = 0$. Así obtenemos, por la definición de g , que $g(a, b) = 1 - (2s + 1 - 3t)\delta_{i+1} \geq 1 - 3\delta_{i+1} = 1 - (\delta_i + \delta_{i+1})$ y como consecuencia $d(F(a, b), \{(x, 1) : x \in \mathbb{I}\}) \leq \delta_i + \delta_{i+1}$ para cada $(a, b) \in A_i^2$ tal que $a = \frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i$, con $0 \leq t < \frac{1}{3}$.

Combinando los resultados que hemos alcanzado en (a) y (b) se obtiene (i) y por lo dicho antes concluimos la prueba. \square

2.1.3. Resolución de (P1) para la aplicación de Kolyada

Tras de describir minuciosamente la dinámica de la aplicación de Kolyada, pasamos a contestar afirmativamente la cuestión antes planteada.

Teorema 2.1.7. *La aplicación triangular F definida en \mathbb{I}^2 e introducida en la Definición 2.1.1, satisface la siguiente propiedad:*

$$\omega_F(a, b) = I_0 \text{ para todo } (a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0, \text{ donde } I_0 = \text{Per}(F) = \text{Fix}(F). \quad (2.8)$$

Demostración. El hecho de que $I_0 = \text{Per}(F) = \text{Fix}(F)$ se sigue del apartado (i) del Teorema 2.1.2. Por otro lado, sea (a, b) un punto en $\mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Fijamos $(0, c) \in I_0$ y $\varepsilon > 0$. Sea i_0 el entero positivo tal que el punto $(a, b) \in \text{Zona} (*) \cup \text{Zona} (**) \cup \text{Zona} (***)$ para i_0 y supongamos, sin pérdida de generalidad, que i_0 es impar, el caso i_0 par es análogo.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $i_2 = \max\{i_0 + 2, i_1\}$ donde i_1 es un entero positivo impar verificando la propiedad $\sqrt{\frac{9+2^{22}}{2^{2i_1+20}}} < \varepsilon$. Según el Corolario 2.1.5.1, la elección de i_2 garantiza la existencia de una iterada del punto (a, b) en $A_{i_2-1}^2$. Entonces, por el Lema 2.1.6, la distancia entre el conjunto $\{(x, 1) : x \in \mathbb{I}\}$ y la primera iterada del punto (a, b) en $\text{Zona} (*) \cup \text{Zona} (**) \cup \text{Zona} (***)$ para i_2 es menor o igual que $\delta_{i_2} + \delta_{i_2-1}$.

Por otro lado, la distancia en altura entre dos iteradas consecutivas de (a, b) en $\text{Zona} (*) \cup \text{Zona} (**) \cup \text{Zona} (***)$ para i_2 es menor o igual que δ_{i_2} , y la última iterada de (a, b) en $\text{Zona} (*) \cup \text{Zona} (**) \cup \text{Zona} (***)$ para i_2 está en $A_{i_2}^1$, ya que el Lema 2.1.5

asegura la existencia de una iterada en $A_{i_2}^1 \subset \text{Zona (**)} \cup \text{Zona (***)}$ para i_2 y el Lema 2.1.4 garantiza que existe sólo una iterada (a, b) en $\text{Zona (**)} \cup \text{Zona (***)}$ para i_2 .

Sea (α, β) una iterada de (a, b) en $\text{Zona (*)} \cup \text{Zona (**)} \cup \text{Zona (***)}$ para i_2 tal que verifique $d(\beta, c) \leq \delta_{i_2} + \delta_{i_2-1}$. Como el punto (α, β) pertenece a $\text{Zona (*)} \cup \text{Zona (**)} \cup \text{Zona (***)}$ para i_2 , entonces $\alpha \leq \frac{1}{2^{i_2-1}}$. Calculamos la siguiente distancia:

$$\begin{aligned} 0 < d((\alpha, \beta), (0, c)) &= \sqrt{\alpha^2 + (\beta - c)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2^{i_2-1}}\right)^2 + (\delta_{i_2} + \delta_{i_2-1})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{2i_2-2}} + \left(\frac{1}{2^{i_2+10}} + \frac{1}{2^{i_2+9}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 + 2^{22}}{2^{2i_2+20}}} \\ &\leq \sqrt{\frac{9 + 2^{22}}{2^{2i_1+20}}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\omega_F(a, b) = I_0$ para cada punto $(a, b) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. □

Corolario 2.1.7.1. *Para la aplicación triangular F definida en \mathbb{I}^2 e introducida en la Definición 2.1.1, describimos exactamente la familia $\mathcal{W}(F)$:*

$$\mathcal{W}(F) = I_0 \cup \{(0, c)\}_{c \in \mathbb{I}}.$$

Esto resuelve el problema (P1), planteado en la Introducción, para la aplicación triangular de Kolyada definida en \mathbb{I}^2 .

Observación 2.1.7.1. Finalmente, no es difícil notar que con la propiedad (2.8) obtenida para la aplicación triangular de Kolyada, podemos construir aplicaciones en el cubo n -dimensional \mathbb{I}^n , usando la aplicación identidad en $(n-2)$ coordenadas, de tal forma que los conjuntos ω -límite de todos sus puntos, excepto los de una cara del hipercubo, son infinitos y formados por puntos fijos.

Nota 2.1.8. El resultado anterior obtenido para la aplicación de Kolyada, implica un comportamiento dinámico sencillo y regular. Esto es sorprendente ya que, por un lado, esta transformación bidimensional satisface una propiedad (posee un conjunto ω -límite infinito conteniendo un punto fijo) que en el caso unidimensional implica entropía topológica positiva, y por ende, complejidad. Y por otro, como consecuencia de su aparatosa definición la aplicación ha sido a veces calificada de “caótica”, en el sentido de poseer un comportamiento dinámico complejo. Por ejemplo, en [A 94] se afirma que el conjunto de los puntos *no-errantes*, $\Omega(F)$, de la aplicación F es diferente del conjunto de los puntos periódicos (se tiene que $x \in \Omega(F)$ si para cada entorno $\mathcal{U}(x)$, existe un entero positivo n tal que $F^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$). Es obvio, tras el análisis de la dinámica realizado en la Sección 2.1.2, que $\Omega(F) = \text{Per}(F) (= \text{Fix}(F))$.

Recientemente, véase [KST 04], como aplicación de las técnicas usadas para estudiar la minimalidad en sistemas dinámicos no autónomos se obtiene un ejemplo de una aplicación triangular cumpliendo la misma propiedad de uniformidad dinámica que hemos descrito para la aplicación de Kolyada.

2.2. Solución de $(\bar{P}1)$ para un elemento de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^3)$

A la luz de la interesante propiedad de uniformidad dinámica que presentan los puntos de \mathbb{I}^2 bajo la iteración de la aplicación de Kolyada, en el año 2003, Balibrea, Reich y Smítal (véase [BRS 03]) plantearon el siguiente problema:

Encontrar un elemento $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^3)$ satisfaciendo que todos los puntos del cubo, excepto aquellos de una de sus caras, que podemos suponer sin pérdida de generalidad $I_0^2 = \{0\} \times \mathbb{I}^2$, tienen como mismo conjunto ω -límite a I_0^2 , conjunto que está formado por puntos fijos.

Naturalmente, por $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^3)$ denotaremos a las aplicaciones triangulares definidas en el cubo unidad, es decir, transformaciones continuas del espacio \mathbb{I}^3 en sí mismo de la forma $(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(x, y), h(x, y, z))$.

Hemos de hacer hincapié en que este problema consiste en la resolución de la situación recíproca del problema (P1), al que llamaremos problema $(\bar{P}1)$. En este caso tenemos completamente descrito el conjunto \mathcal{W} y hemos de encontrar un endomorfismo F tal que $\mathcal{W}(F) = \mathcal{W}$. Se pretende encontrar en dimensión mayor de 2 un elemento con las mismas propiedades dinámicas que la aplicación triangular de Kolyada.

El modo de resolución del problema que presentaremos a continuación es constructivo, es decir, definiremos explícitamente la aplicación triangular de \mathbb{I}^3 que posee tal comportamiento dinámico (véase [BGM 03]). De manera independiente y con una aproximación completamente diferente, P. Šindelarova lo resuelve de manera no constructiva, es decir, no obtiene una definición explícita de la aplicación sino que la construye vía resultados generales de extensión de funciones continuas (véase [S 03]).

2.2.1. Construcción de la aplicación triangular en \mathbb{I}^3

Sea $i \geq 1$ un entero. Consideremos los siguientes valores,

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^{3i+10}}, \quad \delta_i = \frac{1}{2^{2i+10}}, \quad \beta_i = \frac{1}{2^{i+10}}$$

y el intervalo $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$. Ahora, dividamos el anterior intervalo en 2^i subintervalos de la misma longitud, $\frac{1}{2^{2i}} = 2^{i+10}\varepsilon_i$, que llamaremos respectivamente

$$B_{i,j} = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j + 1)2^{i+10}\varepsilon_i \right],$$

donde $j \in \{1, \dots, 2^i\}$. De nuevo, dividimos cada $B_{i,j}$ en tres nuevos subintervalos que llamaremos respectivamente $B_{i,j}^1$, $B_{i,j}^2$ and $B_{i,j}^3$:

$$(1) B_{i,j}^1 = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j + 1)2^{i+10}\varepsilon_i \right],$$

$$(2) B_{i,j}^2 = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i + \beta_{i+1}}, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i \right],$$

$$(3) B_{i,j}^3 = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i + \beta_{i+1}} \right].$$

En estas condiciones, consideremos las siguientes zonas de \mathbb{I}^3 :

$$(4) C_{i,j} = B_{i,j} \times \mathbb{I}^2,$$

$$(5) C_{i,j}^k = B_{i,j}^k \times \mathbb{I}^2 \text{ donde } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Es fácil notar que $C_{i,j} = C_{i,j}^1 \cup C_{i,j}^2 \cup C_{i,j}^3$.

Definición 2.2.1. *Introducimos la aplicación triangular de \mathbb{I}^3*

$$F(x, y, z) = (f(x), g(x, y), h(x, z)),$$

donde

(A) $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es la función base tipo Kolyada para los valores $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ \frac{1}{2^{3i+10}} \right\}_{i=1}^\infty$.

(B) $g : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ es la aplicación definida del siguiente modo:

(b₁) Si i es impar:

■ Si $(x, y, z) \in \left(\bigcup_{j=1}^{2^i-1} C_{i,j} \right) \cup C_{i,2^i}^1$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \delta_i & \text{si } y \in [\delta_i, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, \delta_i]. \end{cases}$$

■ Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^2$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_i}{\beta_i \varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \frac{\beta_{i+1}\delta_i}{\beta_i} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_i}{\beta_i \varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \frac{\beta_{i+1}\delta_i}{\beta_i}.$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^3$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_{i+1}}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_{i+1}}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \delta_{i+1}.$$

(b₂) Si i es par:

- Si $(x, y, z) \in \left(\bigcup_{j=1}^{2^i-1} C_{i,j}\right) \cup C_{i,2^i}^1$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \delta_i & \text{si } y \in [0, 1 - \delta_i], \\ 1 & \text{si } y \in [1 - \delta_i, 1]. \end{cases}$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^2$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_i}{\beta_i\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \frac{\beta_{i+1}\delta_i}{\beta_i} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_i}{\beta_i\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \frac{\beta_{i+1}\delta_i}{\beta_i}.$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^3$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_{i+1}}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{(\beta_i + \beta_{i+1})\delta_{i+1}}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i}\right) + \delta_{i+1}.$$

(C) $h : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$

(c₁) Si j es impar:

- Si $(x, y, z) \in C_{i,j}^1$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z - \beta_i & \text{si } z \in [\beta_i, 1], \\ 0 & \text{si } z \in [0, \beta_i]. \end{cases}$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,j}^2$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z - \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\right)\right) + \beta_{i+1} & \text{si } z \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } z \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\right)\right) - \beta_{i+1}.$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,j}^3$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z - \frac{\beta_i(\beta_i + \beta_{i+1})}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right) \right) + \beta_i & \text{si } z \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{\beta_i(\beta_i + \beta_{i+1})}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right) \right) - \beta_i.$$

(c₂) Si j es par:

(c_{2,1}) Si $j = 2^i$:

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^1$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + \beta_i & \text{si } z \in [0, 1 - \beta_i], \\ 1 & \text{si } z \in [1 - \beta_i, 1]. \end{cases}$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^2$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) - \beta_{i+1} & \text{si } z \in [0, M], \\ 1 & \text{si } z \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) + \beta_{i+1}.$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,2^i}^3$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) - \beta_{i+1} & \text{si } z \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } z \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) + \beta_{i+1}.$$

(c_{2,2}) Si $j \neq 2^i$:

- Si $(x, y, z) \in C_{i,j}^1$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + \beta_i & \text{si } z \in [0, 1 - \beta_i], \\ 1 & \text{si } z \in [1 - \beta_i, 1]. \end{cases}$$

- Si $(x, y, z) \in C_{i,j}^2$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + r_{i,j}(x) & \text{si } z \in [0, M], \\ 1 & \text{si } z \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } r_{i,j}(x) = \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right) \right) - \beta_{i+1} \text{ y } \\ M = 1 - r_{i,j}(x).$$

- Si $(x, y) \in C_{i,j}^3$, entonces

$$h(x, z) = \begin{cases} z + s_{i,j}(x) & \text{si } z \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } z \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } s_{i,j}(x) = \frac{\beta_i(\beta_i + \beta_{i+1})}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right) \right) - \beta_i \text{ y} \\ M = -s_{i,j}(x).$$

Observación 2.2.1.1. El comportamiento dinámico de la aplicación triangular F definida anteriormente puede resumirse como sigue (la prueba rigurosa se dará en la siguiente sección). Por un lado, no es difícil notar que el conjunto de puntos fijos de F es exactamente la cara I_0^2 . Por otro lado, dado un punto $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$ el comportamiento de las segundas y terceras coordenadas de sus iteradas mediante F en la zona $C_{i,j}$ donde $i \geq 1$ y $1 \leq j \leq 2^i$, es el siguiente (véase también la Figura 2.1):

- (a) Segunda coordenada. (Supondremos sin pérdida de generalidad que i es par, el caso i impar es análogo cambiando la tendencia de crecimiento y usando $\mathbb{I} \times \{0\} \times \mathbb{I}$ en lugar de $\mathbb{I} \times \{1\} \times \mathbb{I}$.)

- (a₁) $\text{Zona } \left(\bigcup_{j=1}^{2^i-1} C_{i,j} \right) \cup C_{i,2^i}^1$. Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en

esta zona existe, entre cada dos iteradas consecutivas hasta alcanzar $\mathbb{I} \times \{1\} \times \mathbb{I}$, un incremento fijo de valor δ_i para las segundas coordenadas. Si $\mathbb{I} \times \{1\} \times \mathbb{I}$ es alcanzada, las iteradas permanecen allí hasta el final de la zona.

- (a₂) $\text{Zona } C_{i,2^i}^2$. Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona, la segunda coordenada de su imagen por F sufre un incremento de valor $\gamma \in [0, \delta_i)$. Además, este incremento γ es más pequeño conforme la iterada inicial está más cerca de $\left\{ \frac{1}{2^i} + \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i + \beta_{i+1}}\varepsilon_i \right\} \times \mathbb{I}^2$.

- (a₃) $\text{Zona } C_{i,2^i}^3$. Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona, la segunda coordenada de su imagen por F sufre un decrecimiento de valor $\gamma' \in (0, \delta_{i+1}]$. Además, este decrecimiento γ' es más grande conforme la iterada inicial está más cerca de $\left\{ \frac{1}{2^i} \right\} \times \mathbb{I}^2$.

- (b) Tercera coordenada. (Supondremos sin pérdida de generalidad que j es par y para i no hay restricciones, el caso j impar es análogo cambiando la tendencia de crecimiento y usando $\mathbb{I}^2 \times \{0\}$ en lugar de $\mathbb{I}^2 \times \{1\}$.)

- (b₁) **Zona $C_{i,j}^1$.** Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona existe, entre cada dos iteradas consecutivas hasta alcanzar $\mathbb{I}^2 \times \{1\}$, un incremento fijo de valor β_i . Si $\mathbb{I}^2 \times \{1\}$ es alcanzada, las iteradas permanecen allí hasta el final de la zona.
- (b₂) **Zona $C_{i,j}^2$.** Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona, la tercera coordenada de su imagen por F sufre un incremento de valor $\zeta \in [0, \beta_i)$. Además, este incremento ζ es más pequeño conforme la iterada inicial está más cerca de $\{\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\} \times \mathbb{I}^2$.
- (b₃) **Zona $C_{i,j}^3$.** En esta situación consideraremos dos posibilidades:
- (b_{3,1}) **Caso $j \neq 2^i$.** Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona, la tercera coordenada de su imagen por F sufre un decrecimiento de valor $\zeta' \in (0, \beta_i]$. Además, este decrecimiento ζ' es más grande conforme la iterada inicial está más cerca de $\{\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\} \times \mathbb{I}^2$.
- (b_{3,2}) **Caso $j = 2^i$.** Si una iterada de (a, b, c) mediante F vive en esta zona, la tercera coordenada de su imagen por F sufre un decrecimiento de valor $\zeta' \in (0, \beta_{i+1}]$. Además, este decrecimiento ζ' es más grande conforme la iterada inicial está más cerca de $\{\frac{1}{2^i}\} \times \mathbb{I}^2$.

Con el fin de entender mejor el comportamiento de F , en la Figura 2.1 puede observarse el movimiento de las iteradas del punto $(1, 1, 1)$ mediante la acción de F en las primeras zonas del cubo.

Nota 2.2.2. En lo que respecta a la Figura 2.1, para cada entero positivo i , las iteradas de $(1, 1, 1)$ en zona $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}] \times \mathbb{I}^2$ pueden pensarse como el movimiento a través de una cierta “poligonal discreta” que se compone de 2^i “segmentos”. Tales segmentos (es decir, la proyección de sus segundas y terceras coordenadas respectivamente) recorren simultáneamente el intervalo \mathbb{I} en la dirección de los ejes OY y OZ. Cuando $i \rightarrow \infty$, la poligonal es asintóticamente densa en I_0^2 . El resto de puntos de $\mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$ tienen un comportamiento similar.

2.2.2. Análisis de la dinámica

En esta sección estudiaremos el comportamiento dinámico de todos los puntos contenidos en las diferentes zonas del cubo, anteriormente definidas, bajo la iteración de aplicación F introducida en la Definición 2.2.1. Al igual que en la sección anterior, mediante $E(\cdot)$ denotaremos a la función parte entera.

Lema 2.2.3. *Sea $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$. Entonces existen enteros no negativos n_0, i_0 y j_0 ($i_0, j_0 \geq 1$) tales que $F^{n_0}(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}^2 \cup C_{i_0, j_0}^3$.*

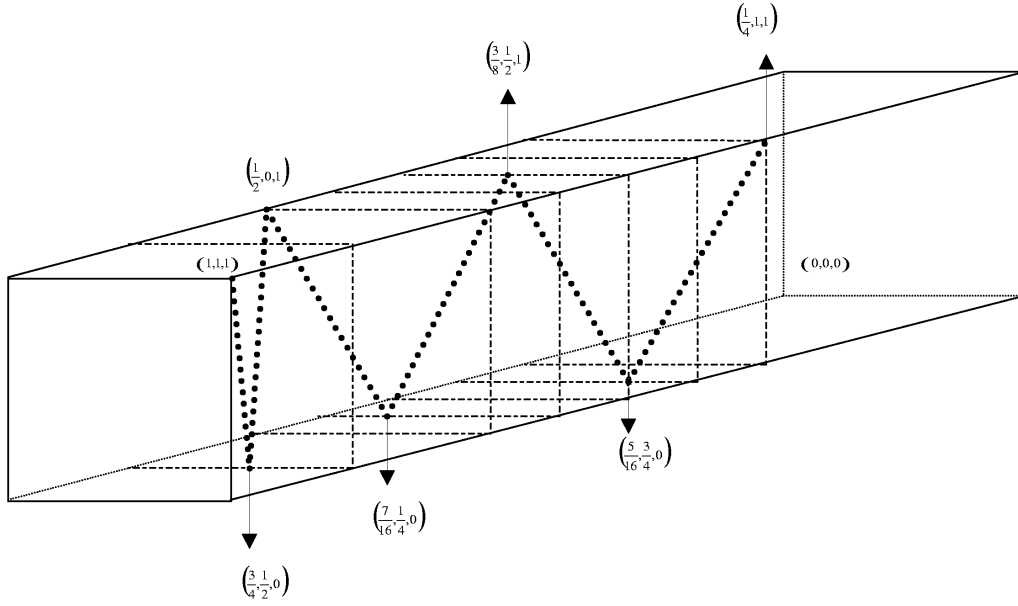


Figura 2.1: Cubo

Demostración. Sean i_0 y j_0 los enteros positivos tales que $(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}$. Si el punto $(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}^2 \cup C_{i_0, j_0}^3$, entonces el resultado se sigue inmediatamente tomando $n_0 = 0$. Por tanto, en el resto de la prueba podemos considerar que $(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}^1$. Sea $l = a - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_0}\right)$ la distancia entre el punto (a, b, c) y el conjunto $\left\{\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_0}\right\} \times \mathbb{I}^2$. Evidentemente, $l \geq 0$ ya que $(a, b, c) \notin C_{i_0, j_0}^2 \cup C_{i_0, j_0}^3$. Sea $n_1 = E\left(\frac{l}{\varepsilon_{i_0}}\right)$. Por definición, $f(x) = x - \varepsilon_{i_0}$ cuando $x \in B_{i_0, j_0}^1$. Entonces, después de n_1 iteraciones se tiene

$$0 \leq f^{n_1}(a) - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_0}\right) < \varepsilon_{i_0}. \quad (2.9)$$

Sea $n_0 := n_1 + 1$. Entonces usando (2.9) obtenemos, por un lado

$$\begin{aligned} f^{n_0}(a) - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_0}\right) &= \\ f^{n_1}(a) - \varepsilon_{i_0} - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} + \varepsilon_{i_0}\right) &< \varepsilon_{i_0} - \varepsilon_{i_0} = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} f^{n_0}(a) - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} \right) &= \\ f^{n_1}(a) - \varepsilon_{i_0} - \left(\frac{1}{2^{i_0}} + (2^{i_0} - j_0)2^{i_0+10}\varepsilon_{i_0} \right) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) y (2.11) se deduce que $f^{n_0}(a) \in B_{i_0, j_0}^2 \cup B_{i_0, j_0}^3$, de donde se obtiene que $F^{n_0}(a, b, c)$ pertenece a $C_{i_0, j_0}^2 \cup C_{i_0, j_0}^3$. \square

Para cada par de enteros positivos i y $1 \leq j < 2^i$, introducimos el siguiente intervalo:

$$\Delta_{i,j} = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - \varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right).$$

Lema 2.2.4. Sean i y j enteros positivos. Si $(a, b, c) \in C_{i,j}^2 \cup C_{i,j}^3$, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

(a) si $j = 2^i$, entonces $F(a, b, c) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right) \times \mathbb{I}^2$,

(b) si $1 \leq j < 2^i$, entonces $F(a, b, c) \in \Delta_{i,j} \times \mathbb{I}^2$.

Demostración. Sea $(a, b, c) \in C_{i,2^i}^2 \cup C_{i,2^i}^3$. Entonces $a \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i \right)$ y por tanto $a = \frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i$ donde $0 \leq t < 1$. De la definición de la función f , se deduce que

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i\right) = (t-1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2^i} = \begin{cases} \frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1} & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2^i} & \text{si } t \rightarrow 1. \end{cases}$$

lo que garantiza que $f(a) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right)$ y por tanto $F(a, b, c) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i} \right) \times \mathbb{I}^2$ finalizando la prueba de (a). Para establecer (b), consideremos un punto $(a, b, c) \in C_{i,j}^2 \cup C_{i,j}^3 \subset \left[\frac{1}{2^i} + \varepsilon_i, \frac{1}{2^{i-1}} \right]$ con $1 \leq j < 2^i$. Así, el punto a pertenece al conjunto $\Delta_{i,j} + \{\varepsilon_i\}$. Entonces, por la definición de f se tiene $f(a) = a - \varepsilon_i \in \Delta_{i,j}$ y por consiguiente $F(a, b, c) \in \Delta_{i,j} \times \mathbb{I}^2$, finalizando la prueba. \square

Para cada par de enteros positivos i y $1 \leq j \leq 2^i$, introducimos los siguientes conjuntos:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \Delta'_{i,j} \times \mathbb{I} \times [0, \beta_i] & \text{si } j \text{ es impar,} \\ \Delta'_{i,j} \times \mathbb{I} \times [1 - \beta_i, 1] & \text{si } j \text{ es par,} \end{cases}$$

donde $\Delta'_{i,j} = B_{i,j}^3 \cup B_{i,j}^2 = \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i \right)$.

Lema 2.2.5. Sean i y j enteros positivos. Las siguientes propiedades se satisfacen:

(a) si $(a, b, c) \in \Delta_{i,j} \times \mathbb{I}^2$ donde $1 \leq j < 2^i$, entonces $F^{2^{i+10}-1}(a, b, c) \in A_{i,j+1}$,

(b) si $(a, b, c) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i}\right) \times \mathbb{I}^2$, entonces $F^{2^{i+11}-1}(a, b, c) \in A_{i+1,1}$.

Demostración. (a) Sea (a, b, c) un punto en el conjunto $\Delta_{i,j} \times \mathbb{I}^2$ donde $1 \leq j < 2^i$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que j es impar (la prueba en el caso j par es análoga). En estas condiciones, $a = \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - t\varepsilon_i$ con $0 < t \leq 1$. Sea $m = E\left(\frac{c}{\beta_i}\right)$. Entonces $c = (m + s)\beta_i$ con $0 \leq s < 1$ y $0 \leq m \leq 2^{i+10}$. Por tanto,

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - t\varepsilon_i, b, (m + s)\beta_i\right) \text{ donde } \begin{cases} 0 < t \leq 1, \\ 0 \leq s < 1, \\ 0 \leq m \leq 2^{i+10}. \end{cases}$$

Ahora, estudiaremos la primera y la tercera coordenada separadamente.

Primera coordenada. Como

$$d\left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - \varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - (j + 1))2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i\right) = (2^{i+10} - 2)\varepsilon_i,$$

entonces por la definición de f se tiene que

$$f^n(a) \in \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - (j + 1))2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\right)$$

cuando $n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 2\}$. Por tanto,

$$f^{2^{i+10}-2}(a) = \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - (t + 2^{i+10} - 2)\varepsilon_i \quad (2.12)$$

y

$$f^{2^{i+10}-2}(a) \in \left[\frac{1}{2^i} + (2^i - (j + 1))2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i\right). \quad (2.13)$$

Bajo estas condiciones, (2.12) y (2.13) nos permiten escribir que

$$\begin{aligned} f^{2^{i+10}-1}(a) &= f(f^{2^{i+10}-2}(a)) \\ &= f\left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - (t + 2^{i+10} - 2)\varepsilon_i\right) \\ &= \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - (t + 2^{i+10} - 1)\varepsilon_i. \end{aligned}$$

Ahora, analizaremos a qué conjunto pertenece $f^{2^{i+10}-1}(a)$. Como $0 < t \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^i} + (2^i - (j+1))2^{i+10}\varepsilon_i &\leq \frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i - (t + 2^{i+10} - 1)\varepsilon_i \\ &< \frac{1}{2^i} + (2^i - (j+1))2^{i+10}\varepsilon_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

y esto implica que $f^{2^{i+10}-1}(a) \in \Delta'_{i,j+1}$.

Tercera coordenada. Supongamos que $m = 2^{i+10}$. En este caso se verifica que $c = 1$ y $F^{2^{i+10}-1}(a, b, 1) \in \Delta'_{i,j+1} \times \mathbb{I} \times \{1\} \subset A_{i,j+1}$ ya que $h(x, 1) = 1$ si $(x, y, z) \in C'_{i,j+1}$. Así, consideraremos en el resto de la prueba que $m \neq 2^{i+10}$. Comprobaremos que $\pi_3(F^{2^{i+10}-1}(a, b, c)) \in [1 - \beta_i, 1]$ donde $\pi_3 : \mathbb{I}^3 \rightarrow \mathbb{I}$ denota la proyección canónica en la tercera coordenada. En efecto, como el parámetro s pertenece a $[0, 1)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$(2^{i+10} - m - 1)\beta_i < (2^{i+10} - m - s)\beta_i \leq (2^{i+10} - m)\beta_i. \quad (2.14)$$

Ahora, consideremos dos posibles situaciones. Si $m = 2^{i+10} - 1$, entonces

$$0 < d((a, b, c), \mathbb{I}^2 \times \{1\}) = 1 - c = 1 - (m + s)\beta_i = (1 - s)\beta_i \leq \beta_i,$$

de donde $c \in [1 - \beta_i, 1) \subset [1 - \beta_i, 1]$. En estas condiciones, por la definición de h , sabemos que $\pi_3(F^n(a, b, c)) = 1$ cuando $n \in \{1, 2, \dots, 2^{i+10} - 1\}$ y por tanto $\pi_3(F^{2^{i+10}-1}(a, b, c)) \in [1 - \beta_i, 1]$. Por otro lado si $0 \leq m < 2^{i+10} - 1$, entonces $1 - c = (2^{i+10} - m - s)\beta_i$ y por tanto

$$c + (2^{i+10} - m - s)\beta_i = 1. \quad (2.15)$$

Por (2.14) y (2.15) podemos escribir

$$\begin{aligned} c + (2^{i+10} - m - 2)\beta_i &= c + (2^{i+10} - m - 1)\beta_i - \beta_i \\ &< c + (2^{i+10} - m - s)\beta_i - \beta_i \\ &= 1 - \beta_i \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$c + n\beta_i < 1 - \beta_i \text{ para cada } n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - m - 2\}. \quad (2.16)$$

Ahora, por (2.16) la definición de la aplicación h garantiza que, $\pi_3(F^n(a, b, c)) = c + n\beta_i$ cuando $n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - m - 2\}$. En particular,

$$\pi_3(F^{2^{i+10}-m-2}(a, b, c)) = 1 - (2 - s)\beta_i < 1 - \beta_i.$$

Por tanto, se obtiene que

$$\pi_3(F^{2^{i+10}-m-1}(a, b)) = \pi_3(F(F^{2^{i+10}-m-2}(a, b, c))) = 1 - (1 - s)\beta_i.$$

Como $0 \leq s < 1$, entonces $1 - \beta_i \leq 1 - (1 - s)\beta_i < 1$ y se concluye que $1 - \beta_i \leq \pi_3(F^{2^{i+10}-m-1}(a, b, c)) < 1$. Según la definición de h ,

$$\pi_3(F^{2^{i+10}-1}(a, b, c)) = \begin{cases} \alpha \in [1 - \beta_i, 1] & \text{si } m = 0, \\ 1 & \text{si } 0 < m < 2^{i+10} - 1. \end{cases}$$

Por las consideraciones realizadas con la primera y tercera coordenadas, se obtiene que $F^{2^{i+10}-1}(a, b, c) \in \Delta'_{i,j+1} \times \mathbb{I} \times [1 - \beta_i, 1] = A_{i,j+1}$ si $(a, b, c) \in \Delta_{i,j} \times \mathbb{I}^2$, $1 \leq j < 2^i$ (j impar) finalizando la prueba de (a). La prueba de la parte (b) es análoga a la de la parte (a), caso j par, donde $\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i$ y ε_i deben ser cambiados por $\frac{1}{2^i}$ y ε_{i+1} respectivamente. \square

Corolario 2.2.5.1. *Sea $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$ y sea i_0 el entero positivo dado por el Lema 2.2.3. Entonces, para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$ y $1 \leq l \leq 2^{i_0+k}$ enteros, existen iteradas de (a, b, c) por F en el conjunto $A_{i_0+k,l}$.*

Demostración. Para establecer el resultado procederemos por inducción en k . Sea un punto $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$ y supongamos que $k = 1$. Según el Lema 2.2.3 existen $i_0, j_0 \geq 1$ y $n_0 \geq 0$ tales que $F^{n_0}(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}^2 \cup C_{i_0, j_0}^3$. En estas condiciones, existe una iterada de (a, b, c) mediante F en el conjunto $C_{i_0, 2^{i_0}}^2 \cup C_{i_0, 2^{i_0}}^3$. En efecto, si $j = 2^{i_0}$ el resultado se cumple. Si $j_0 < 2^{i_0}$, entonces la parte (b) del Lema 2.2.4 garantiza que $F^{n_0+1}(a, b, c) \in \Delta_{i_0, j_0} \times \mathbb{I}^2$. Aplicando la parte (a) del Lema 2.2.5 al punto $F^{n_0+1}(a, b, c)$, obtenemos que

$$F^{2^{i_0+10}+n_0}(a, b, c) \in A_{i_0, j_0+1} \subset C_{i_0, j_0+1}^2 \cup C_{i_0, j_0+1}^3.$$

Usando recurrentemente $2^{i_0} - j_0$ veces este argumento (aplicar sucesivamente la parte (b) del Lema 2.2.4 y parte (a) del Lema 2.2.5), existe un entero $n_1 \geq 1$ tal que

$$F^{n_1}(a, b, c) \in A_{i_0, 2^{i_0}} \subset C_{i_0, 2^{i_0}}^2 \cup C_{i_0, 2^{i_0}}^3.$$

En esta situación, por la parte (a) del Lema 2.2.4, $F^{n_1+1}(a, b, c) \in [\frac{1}{2^{i_0}} - \varepsilon_{i_0+1}, \frac{1}{2^{i_0}}) \times \mathbb{I}^2$. Si aplicamos la parte (b) del Lema 2.2.5 a $F^{n_1+1}(a, b, c)$, se obtiene

$$F^{2^{i_0+11}+n_1}(a, b, c) \in A_{i_0+1, 1} \subset C_{i_0+1, 1}^2 \cup C_{i_0+1, 1}^3.$$

Procediendo de la misma manera (aplicar sucesivamente la parte (a) del Lema 2.2.4 y parte (b) del Lema 2.2.5), $l - 1$ veces, $1 \leq l \leq 2^{i_0+1}$, concluimos que existen iteradas del punto (a, b, c) mediante F en los conjuntos $A_{i_0+1, l}$. Supongamos, como hipótesis de

inducción, que el resultado es cierto para $k \geq 1$. Entonces si $l = 2^{i_0+k}$, existe un entero $n_k \geq 1$ tal que

$$F^{n_k}(a, b, c) \in A_{i_0+k, 2^{i_0+k}} \subset C_{i_0+k, 2^{i_0+k}}^2 \cup C_{i_0+k, 2^{i_0+k}}^3.$$

Por la parte (a) del Lema 2.2.4, $F^{n_k+1}(a, b, c) \in \left[\frac{1}{2^{i_0+k}} - \varepsilon_{i_0+k+1}, \frac{1}{2^{i_0+k}}\right) \times \mathbb{I}^2$. La parte (b) del Lema 2.2.5 aplicada a $F^{n_k+1}(a, b, c)$ garantiza que

$$F^{2^{i_0+k+1}+n_k}(a, b, c) \in A_{i_0+k+1, 1} \subset C_{i_0+k+1, 1}^2 \cup C_{i_0+k+1, 1}^3.$$

Con las mismas ideas, en $l - 1$ pasos, encontramos iteradas del punto (a, b, c) mediante F en los conjuntos $A_{i_0+k+1, l}$, $1 \leq l \leq 2^{i_0+k+1}$, lo que establece el paso inductivo y finaliza la prueba. \square

Lema 2.2.6. Sean i y $1 \leq j \leq 2^i$ enteros positivos. Si $(a, b, c) \in A_{i, j}$, se verifican las siguientes condiciones:

(a) $d(F((a, b, c)), \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq 2\beta_i$ si j es par,

(b) $d(F((a, b, c)), \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq 2\beta_i$ si j es impar.

Demostración. Como las pruebas de las dos propiedades son análogas (la parte (b) es análoga a (a₂)), probaremos por ejemplo la parte (a). Sea i un entero positivo y consideremos un punto $(a, b, c) \in A_{i, j}$ donde $1 \leq j \leq 2^i$ es par. Distinguimos entre dos posibilidades:

(a₁) Si $j = 2^i$, entonces $A_{i, 2^i} = \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i\right) \times \mathbb{I} \times [1 - \beta_i, 1]$. Por tanto, (a, b, c) puede escribirse como

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i, b, 1 - s\beta_i\right) \text{ donde } \begin{cases} 0 \leq t < 1, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

(a_{1,1}) Si $\frac{1}{3} \leq t < 1$, entonces $(a, b, c) \in C_{i, 2^i}^2$. Por tanto, $a = \frac{1}{2^i} + t\varepsilon_i \geq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\varepsilon_i$, de donde

$$\frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i}\right) - \beta_{i+1} \geq 0. \quad (2.17)$$

Ahora, de (2.17) establecemos que

$$c + \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i}\right) - \beta_{i+1} \geq c.$$

Entonces, usando la parte (c_{2,1}) de la definición de h

$$h(a, c) = \begin{cases} c + \frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i}\right) - \beta_{i+1} \geq c & \text{si } c \in [0, M], \\ 1 & \text{si } c \in [M, 1]. \end{cases}$$

Como $c \in [1 - \beta_i, 1]$, entonces $h(a, c) \geq 1 - \beta_i$ y podemos deducir que

$$d(F(a, b, c), \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq \beta_i < 2\beta_i.$$

(a_{1,2}) Si $0 \leq t < \frac{1}{3}$, entonces $(a, b, c) \in C_{i,2^i}^3$ y por tanto

$$M = -\frac{\beta_i + \beta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(a - \frac{1}{2^i}\right) + \beta_{i+1} = (1 - 3t)\beta_{i+1} \leq \beta_{i+1}. \quad (2.18)$$

Por otro lado, como $(a, b, c) \in A_{i,2^i}$ es claro que $c \geq 1 - \beta_i = 1 - 2\beta_{i+1}$. Ahora, es fácil comprobar que

$$1 - 2\beta_{i+1} = 1 - \frac{2}{2^{i+1}} = \frac{2^{i+1} - 2}{2^{i+1}} > \frac{1}{2^{i+1}} = \beta_{i+1}$$

y así $c \geq \beta_{i+1}$. Entonces por (2.18), $c \geq \beta_{i+1} \geq M$, es decir, $c \in [M, 1]$. Usando la parte (c_{2,1}) de la definición de h , establecemos que

$$h(a, c) = 1 - (2s + 1 - 3t)\beta_{i+1}.$$

La expresión

$$\left\{ 1 - (2s + 1 - 3t)\beta_{i+1} : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

alcanza su valor mínimo cuando

$$\left\{ (2s + 1 - 3t)\beta_{i+1} : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

alcanza su máximo, y tal valor se alcanza cuando $s = 1$ y $t = 0$. Por tanto, $h(a, c) = 1 - (2s + 1 - 3t)\beta_{i+1} \geq 1 - 3\beta_{i+1} = 1 - (\beta_i + \beta_{i+1})$, y como consecuencia,

$$d(F(a, b, c), \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq \beta_i + \beta_{i+1} < 2\beta_i.$$

(a₂) Si $j < 2^i$, entonces $A_{i,j} = \Delta'_{i,j} \times \mathbb{I} \times [1 - \beta_i, 1]$. Ahora, (a, b, c) se escribe de la forma

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i + t\varepsilon_i, b, 1 - s\beta_i \right)$$

$$\text{donde } \begin{cases} 0 \leq t < 1, \\ 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

(a_{2,1}) Si $\frac{1}{3} \leq t < 1$, la prueba es análoga a la parte (a_{1,1}) donde el valor $\frac{1}{2^i}$ debe sustituirse por $\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i$. La razón de esta analogía, con el anterior cambio, está generada porque la definición de h en $C_{i,2^i}^2$ y en $C_{i,j}^2$, $j < 2^i$, es la misma.

(a_{2,2}) Si $0 \leq t < \frac{1}{3}$, entonces $(a, b, c) \in C_{i,j}^3$, $j < 2^i$. Por tanto,

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\beta_i(\beta_i + \beta_{i+1})}{\beta_{i+1}\varepsilon_i} \left(a - \left(\frac{1}{2^i} + (2^i - j)2^{i+10}\varepsilon_i \right) \right) + \beta_i \\ &= (1 - 3t)\beta_i \leq \beta_i. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por otro lado, como $(a, b, c) \in A_{i,j}$ es claro que $c \geq 1 - \beta_i$. Ahora, es fácil comprobar que

$$1 - \beta_i = 1 - \frac{1}{2^{i+10}} = \frac{2^{i+10} - 1}{2^{i+10}} \geq \frac{1}{2^{i+10}} = \beta_i$$

y así $c \geq \beta_i$. Ahora, por (2.19) se tiene que $c \geq \beta_i \geq M$, es decir, $c \in [M, 1]$. Usando la parte (c_{2,2}) de la definición de h , establecemos que

$$h(a, c) = 1 - (s + 1 - 3t)\beta_i.$$

La expresión $\{1 - (s + 1 - 3t)\beta_i : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1\}$ es mínima cuando $\{(s + 1 - 3t)\beta_i : 0 \leq t < \frac{1}{3}, 0 \leq s \leq 1\}$ es máxima, y tal valor se alcanza cuando $s = 1$ y $t = 0$. De tal manera se tiene, $h(a, c) = 1 - (s + 1 - 3t)\beta_i \geq 1 - 2\beta_i$, y como consecuencia

$$d(F(a, b, c), \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq 2\beta_i.$$

Combinado los resultados que hemos obtenido en (a₁) y (a₂) se establece la parte (a) finalizando la prueba. \square

Lema 2.2.7. *Sea $(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}$ donde $i_0 \geq 1$ y $1 \leq j_0 \leq 2^{i_0}$ son enteros. Sean $k \geq 2$, $1 \leq j \leq 2^{i_0+k}$ enteros y $r \in \mathbb{I}$. Entonces, existe un entero $n_0 \geq 0$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- (a) $F^{n_0}(a, b, c) \in C_{i_0+k, j}$,
- (b) $d(\pi_3(F^{n_0}(a, b, c)), r) \leq 2\beta_{i_0+k}$.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que j es impar (la prueba del caso j par es análogo). Como el punto $(a, b, c) \in C_{i_0, j_0}$, $k \geq 2$ y $1 \leq j \leq 2^{i_0+k}$, por el Corolario 2.2.5.1 existe un entero $n_1 \geq 0$ tal que

$$F^{n_1}(a, b, c) \in \begin{cases} A_{i_0+k, j-1} & \text{si } j \neq 1, \\ A_{i_0+k-1, 2^{i_0+k-1}} & \text{si } j = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Por la parte (a) del Lema 2.2.6,

$$d(F^{n_1+1}(a, b, c), \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq 2\beta_{i_0+k}, \quad (2.21)$$

donde $F^{n_1+1}(a, b, c)$ es la primera iterada mediante F de (a, b, c) en la zona $C_{i_0+k,j}$. Por (2.20), como $A_{i_0+k,j-1} \subset C_{i_0+k,j-1}^2 \cup C_{i_0+k,j-1}^3$ y $A_{i_0+k-1,2^{i_0+k-1}} \subset C_{i_0+k-1,2^{i_0+k-1}}^2 \cup C_{i_0+k-1,2^{i_0+k-1}}^3$, el Lema 2.2.4 garantiza que

$$F^{n_1+1}(a, b, c) \in \begin{cases} \Delta_{i_0+k,j-1} \times \mathbb{I}^2 & \text{si } j \neq 1, \\ \left[\frac{1}{2^{i_0+k-1}} - \varepsilon_{i_0+k}, \frac{1}{2^{i_0+k-1}} \right) \times \mathbb{I}^2 & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

En estas condiciones, el Lema 2.2.5 asegura que la última iterada de (a, b, c) mediante F en la zona $C_{i_0+k,j}$, $F^{n_1+2^{i_0+k+10}}(a, b, c)$, satisface

$$F^{n_1+2^{i_0+k+10}}(a, b, c) \in \begin{cases} A_{i_0+k,j} & \text{si } j \neq 1, \\ A_{i_0+k,1} & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Por tanto, $F^{n_1+2^{i_0+k+10}}(a, b, c) \in A_{i_0+k,j}$, de donde se deduce

$$d(F^{n_1+2^{i_0+k+10}}(a, b, c), \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{I}\}) \leq \beta_{i_0+k}. \quad (2.22)$$

Por otro lado, por la parte (b₁) de la Observación 2.2.1.1 (j impar), si $F^n(a, b, c)$ y $F^{n+1}(a, b, c)$ pertenecen a $C_{i_0+k,j}$ entonces,

$$d(\pi_3(F^n(a, b, c)), \pi_3(F^{n+1}(a, b, c))) \leq \beta_{i_0+k}. \quad (2.23)$$

Si $r \in I$, por (2.21),(2.22) y (2.23) existe un entero $n_0 \geq 0$ satisfaciendo (a) y (b). \square

Los anteriores resultados tenían el objetivo de servir como herramientas para probar el Lema 2.2.7, un punto esencial en la resolución del problema. El Lema 2.2.7 nos proporciona una propiedad acerca de las terceras coordenadas de las iteradas de los puntos de $\mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$, esto es, una propiedad sobre la función h . En lo que sigue, intentaremos obtener un resultado semejante al Lema 2.2.7 para las segundas coordenadas de las iteradas de los puntos que viven en $\mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$.

Lema 2.2.8. *Sea $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$. Entonces existen enteros $n_0 \geq 0$ e $i_0 \geq 1$ tales que $F^{n_0}(a, b, c) \in C_{i_0,2^{i_0}}^2 \cup C_{i_0,2^{i_0}}^3$.*

Demostración. La prueba es inmediata ya que por el Corolario 2.2.5.1 existen enteros $n_0 \geq 0$ e $i_0 \geq 1$ tales que $F^{n_0}(a, b, c) \in A_{i_0,2^{i_0}} \subset C_{i_0,2^{i_0}}^2 \cup C_{i_0,2^{i_0}}^3$. \square

Para cada entero positivo i , introducimos los siguientes conjuntos:

$$A_i = \begin{cases} \Delta'_{i,2^i} \times [0, \delta_i] \times \mathbb{I} & \text{si } i \text{ es impar,} \\ \Delta'_{i,2^i} \times [1 - \delta_i, 1] \times \mathbb{I} & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Lema 2.2.9. *Sea i un entero positivo. Si $(a, b, c) \in \left[\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1}, \frac{1}{2^i}\right) \times \mathbb{I}^2$, entonces $F^{2^{i+1}-1}(a, b, c)$ pertenece a A_{i+1} .*

Demostración. Análoga a la parte (b) del Lema 2.2.5. \square

Corolario 2.2.9.1. *Sean $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$ e i_0 el entero positivo dado por el Lema 2.2.8. Entonces, para cada $k \in \{1, 2, \dots\}$ existen iteradas del punto (a, b, c) mediante F en los conjuntos A_{i_0+k} .*

Demostración. Análoga a la prueba del Corolario 2.2.5.1 pero en este caso usaremos la parte (a) del Lema 2.2.4 y los Lemas 2.2.8 y 2.2.9 en lugar de los Lemas 2.2.4, 2.2.3 y 2.2.5, respectivamente. \square

Lema 2.2.10. *Sea i un entero positivo. Si $(a, b, c) \in A_i$, entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

$$(a) \ d(F((a, b, c)), \{(x, 1, z) : x, z \in \mathbb{I}\}) \leq \delta_i + \delta_{i+1} \text{ si } i \text{ es par,}$$

$$(b) \ d(F((a, b, c)), \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{I}\}) \leq \delta_i + \delta_{i+1} \text{ si } i \text{ es impar.}$$

Demostración. La prueba de las dos partes es análoga a la prueba de la parte (a_1) del Lema 2.2.6. \square

Lema 2.2.11. *Sean i_0 y $k \geq 2$ enteros positivos, $q \in \mathbb{I}$ y $(a, b, c) \in \bigcup_{j=1}^{2^{i_0}} C_{i_0, j}$. Entonces, existe un entero $n_0 \geq 0$ satisfaciendo las siguientes propiedades:*

$$(a) \ F^{n_0}(a, b, c) \in \bigcup_{j=1}^{2^{i_0+k}} C_{i_0+k, j},$$

$$(b) \ d(\pi_2(F^{n_0}(a, b, c)), q) \leq \delta_{i_0+k} + \delta_{i_0+k-1}.$$

Demostración. Análoga a la prueba del Lema 2.2.7 usando el Corolario 2.2.9.1, el Lema 2.2.4 parte (a), los Lemas 2.2.9, 2.2.10 y la parte (a_1) de la Observación 2.2.1.1 en lugar del Corolario 2.2.5.1, los Lemas 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6 y la parte (b_1) de la Observación 2.2.1.1, respectivamente. \square

2.2.3. Resolución de ($\bar{P1}$)

Tras el análisis de la dinámica de la aplicación F , pasamos a probar que F resuelve el problema ($\bar{P1}$) para la familia de conjuntos en \mathbb{I}^3 : $\mathcal{A} = \{I_0^2\} \cup \{(0, b, c)\}_{(b, c) \in \mathbb{I}^2}$.

Teorema 2.2.12. *La aplicación triangular F en \mathbb{I}^3 , introducida en la Definición 2.2.1, satisface las siguientes propiedades de uniformidad dinámica:*

(A) si $(a, b, c) \in I_0^2$, entonces $\omega_F(a, b, c) = \{(a, b, c)\}$ y $\text{Per}(F) = \text{Fix}(F) = I_0^2$,

(B) si $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$, entonces $\omega_F(a, b, c) = I_0^2$.

Demostración. (A) Obviamente por la continuidad de F , todos los puntos de I_0^2 son fijos mediante F . Por tanto, si $(a, b, c) \in I_0^2$ su conjunto ω -límite es $\{(a, b, c)\}$.

(B) Sea $(a, b, c) \in \mathbb{I}^3 \setminus I_0^2$. Primero, comprobamos que $I_0^2 \subseteq \omega_F(a, b, c)$. En efecto, sean $(0, p, q) \in I_0^2$ y $\varepsilon > 0$ elementos fijos. Sean $i_0 \geq 1$ y $1 \leq j_0 \leq 2^{i_0}$ enteros tales que (a, b, c) pertenece a C_{i_0, j_0} . Ahora, elegimos un entero $i_1 \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^{i_1-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y definimos $i_2 = \max\{i_0 + 2, i_1 + 1\}$. Como $i_2 \geq i_0 + 2$, por el Lema 2.2.11 existe $n_0 \geq 0$ tal que

$$F^{n_0}(a, b, c) \in \bigcup_{j=1}^{2^{i_2}} C_{i_2, j}$$

y

$$d(\pi_2(F^{n_0}(a, b, c)), p) \leq \delta_{i_2} + \delta_{i_2-1}. \quad (2.24)$$

Sea $j_2 \in \{1, 2, \dots, 2^{i_2}\}$ el entero tal que $F^{n_0}(a, b, c) \in C_{i_2, j_2}$. Como $i_2 \geq i_0 + 2$, por el Lema 2.2.7 existe $n_1 \geq 0$ tal que

$$F^{n_1}(a, b, c) \in C_{i_2, j_2}$$

y

$$d(\pi_3(F^{n_1}(a, b, c)), q) \leq 2\beta_{i_2}. \quad (2.25)$$

Ahora, acotaremos $d(\pi_2(F^{n_1}(a, b, c)), p)$. En efecto, la longitud de B_{i_2, j_2} es $\frac{1}{2^{2i_2}}$ (véase el inicio de la Sección 2.2.1). Como $\frac{1}{2^{2i_2}} = \frac{1}{2^{2i_2}} = 2^{i_2+10}$, el número de iteradas de (a, b, c) mediante F en la zona B_{i_2, j_2} es como máximo $2^{i_2+10} + 1$. Por tanto, si $F^{n_2}(a, b, c)$ y $F^{n_3}(a, b, c)$ son respectivamente la primera y la última iterada en la zona C_{i_2, j_2} , por la parte (a₁) de la Observación 2.2.1.1

$$d(\pi_2(F^{n_2}(a, b, c)), \pi_2(F^{n_3}(a, b, c))) \leq 2^{i_2+10} \delta_{i_2}$$

y la sucesión $\{\pi_2(F^n(a, b, c))\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente o decreciente en C_{i_2, j_2} , de donde

$$d(\pi_2(F^{n_0}(a, b, c)), \pi_2(F^{n_1}(a, b, c))) \leq 2^{i_2+10} \delta_{i_2}. \quad (2.26)$$

Por (2.24) y (2.26), usando la desigualdad triangular

$$d(\pi_2(F^{n_1}(a, b, c)), p) \leq (2^{i_2+10} + 5) \delta_{i_2}. \quad (2.27)$$

Ahora, si $(\alpha, \beta, \gamma) := F^{n_1}(a, b, c)$, como $F^{n_1}(a, b, c) \in C_{i_2, j_2}$, entonces

$$\alpha \leq \frac{1}{2^{i_2} - 1}. \quad (2.28)$$

Por (2.27),

$$d(\beta, q) \leq (2^{i_2+10} + 5)\delta_{i_2} < \frac{1}{2^{i_2-1}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.29)$$

y por (2.25),

$$d(\gamma, q) \leq 2\beta_{i_2} = \frac{1}{2^{i_2+9}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.30)$$

Como $(\alpha, \beta, \gamma) \in C_{i_2, j_2}$, por la definición de f es $\alpha \neq 0$ y así $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, p, q)$. Por tanto, por (2.28), (2.29) y (2.30) obtenemos que

$$0 < d((\alpha, \beta, \gamma), (0, p, q)) = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - p)^2 + (\gamma - q)^2} < \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon,$$

de donde se concluye que $I_0^2 \subseteq \omega_F(a, b, c)$.

Ahora, para probar que $\omega_F(a, b, c) \subseteq I_0^2$, mostraremos que si un punto $(p, q, r) \notin I_0^2$, entonces $(p, q, r) \notin \omega_F(a, b, c)$. En efecto, sea (p, q, r) un punto que no pertenezca a I_0^2 . Entonces, como $p \neq 0$ y $f^n(a) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, existe un entero positivo m_0 tal que $p - f^{m_0}(a) > 0$. Sea $\varepsilon' = \frac{p - f^{m_0}(a)}{2} > 0$. Entonces, como la sucesión $\{f^n(a)\}_{n=0}^\infty$ es decreciente,

$$p - f^n(a) \geq p - f^{m_0}(a) > \varepsilon'$$

para cada entero $n \geq m_0$, de modo que $d((p, q, r), F^n(a, b, c)) \geq p - f^n(a) > \varepsilon'$ para cada entero $n \geq m_0$. Por tanto, $(p, q, r) \notin \omega_F(a, b, c)$ y la prueba finaliza. \square

Corolario 2.2.12.1. Si F es la aplicación triangular en \mathbb{I}^3 introducida en la Definición 2.2.1, entonces

$$\mathcal{W}(F) = I_0^2 \cup \{(0, b, c)\}_{(b,c) \in \mathbb{I}^2}.$$

Nota 2.2.13. La construcción presentada en la Definición 2.2.1, resuelve el problema $(\bar{P}1)$ para los conjuntos propuestos en [BRS 03] como hemos comprobado anteriormente. Por el contrario, el método planteado en la Observación 2.1.7.1 no es satisfactorio en este caso, al proporcionar una aplicación (triangular) G en \mathbb{I}^3 verificando que para cada $z \in \mathbb{I}$, $\omega_G(x, y, z) = \{0\} \times \mathbb{I} \times \{z\}$ formado por puntos fijos. Ambas construcciones satisfacen que todos sus puntos poseen ω -límite infinito formado por puntos fijos, excepto los puntos de la cara I_0^2 que son fijos. La diferencia entre G y F (véase Definición 2.2.1) es que F , además, satisface la propiedad de uniformidad dinámica de que los conjuntos ω -límite de todos los puntos del cubo, excepto los de I_0^2 , son iguales a I_0^2 .

Una cuestión a estudiar en el futuro, es analizar si se puede encontrar una solución al problema $(\bar{P}1)$ para los conjuntos propuestos en [BRS 03] que sea diferenciable.

Capítulo 3

Aplicaciones universales para $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$

Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{X})$ una clase de aplicaciones. En este capítulo, estudiaremos el problema (P2) de la existencia de elementos universales en \mathcal{F} con respecto a la familia $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ de todos los posibles conjuntos ω -límite engendrados por los elementos de la clase \mathcal{F} . Como ya se comentó en la introducción, esto lo realizaremos en los dos sentidos propuestos por Bruckner en [B 93].

Definición 3.0.14. *Un elemento $\psi \in \mathcal{F}$ es universal con respecto a los conjuntos ω -límite generados por la clase \mathcal{F} , si para cada conjunto $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ existe un punto $x_A \in \mathbb{X}$ tal que $\omega_{\psi}(x_A) = A$. Es decir, si ocurre $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$.*

Definición 3.0.15. *Un elemento $\psi \in \mathcal{F}$ se llamará universal en sentido débil (d-universal) con respecto a los conjuntos ω -límite generados por la clase \mathcal{F} , si para cada conjunto $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ existe un homeomorfismo $H_A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ y un punto x_A tal que $\omega_{\psi}(x_A) = H_A(A)$. Es decir, si ocurre que $H_A(A) \in \mathcal{W}(\psi)$.*

Con relación a este problema, el único resultado existente es el obtenido por Smítal y Pokluda en [SP 00], donde construyen una función d-universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I})}$.

En el desarrollo del capítulo probaremos que cuando la clase \mathcal{F} es la de todas las aplicaciones continuas, no existen elementos universales en la mayor parte de los espacios métricos compactos. Por otro lado, si nos restringimos a la clase $\mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ y consideramos intervalos contenidos en la fibra I_0 , construiremos una aplicación triangular universal para dichos conjuntos (véase Sección 3.2). Asimismo para el caso débil, demostraremos que el resultado afirmativo que se tiene cuando el espacio \mathbb{X} es el intervalo compacto unidad, no es cierto, ni para variedades compactas m -dimensionales con $m \geq 1$ que no sean arcos, ni para grafos que no sean arcos.

3.1. Universalidad

Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} = \mathcal{C}(\mathbb{X})$. El problema que analizamos en esta sección es el de la existencia o no de una aplicación $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ tal que $\mathcal{W}(\psi)$ coincida con la familia $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ de todos los posibles conjuntos ω -límite generados por los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{X})$.

Definición 3.1.1. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto. Diremos que \mathbb{X} es un espacio ω -degenerado si $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})} = \{\{x\} : x \in \mathbb{X}\}$.*

Ejemplos de espacios ω -degenerados son por ejemplo $\mathbb{X} = \{x\}$, es decir, el espacio formado por un solo elemento o \mathbb{X} un *rígido continuo*, es decir, un espacio métrico, compacto y conexo que únicamente admite como endomorfismos continuos a la aplicación identidad y a las aplicaciones constantes.

Proposición 3.1.2. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto ω -degenerado. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

- (a) \mathbb{X} es conexo,
- (b) para cada $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y cada $x \in \mathbb{X}$ la sucesión $(\psi^n(x))_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo.

Demostración. (a) Supongamos que \mathbb{X} no es conexo. Entonces existen conjuntos disjuntos abiertos y cerrados X_1, X_2 tales que $\mathbb{X} = X_1 \cup X_2$. Tomemos cualquier punto $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Definamos ψ actuando sobre \mathbb{X} como $\psi(X_1) = x_2$ y $\psi(X_2) = x_1$. La aplicación ψ es continua sobre \mathbb{X} y $\{x_1, x_2\}$ es conjunto ω -límite contradiciendo el que \mathbb{X} es ω -degenerado.

(b) La sucesión $(\psi^n(x))_{n=0}^{\infty}$ sólo posee un punto límite (el conjunto ω -límite de x es un punto). Por la invarianza de los conjuntos ω -límite, dicho punto ha de ser fijo. \square

Es evidente que el problema de encontrar una aplicación universal en el caso en que \mathbb{X} es un espacio ω -degenerado es inmediato. La aplicación identidad definida en \mathbb{X} satisface la propiedad requerida. El problema queda reducido al caso de espacios que admiten aplicaciones continuas generando conjuntos ω -límite diferentes de los conjuntos unipuntuales.

Teorema 3.1.3. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto no ω -degenerado. Entonces, no existe ninguna aplicación universal con respecto a los conjuntos ω -límite generados por los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{X})$.*

Demostración. Supongamos que exista $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ universal con respecto a los elementos de la familia $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$. Como la aplicación identidad $\text{Id}_{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$, entonces

$$\{\{x\} : x \in \mathbb{X}\} \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}.$$

Teniendo en cuenta que los conjuntos ω -límite son fuertemente invariantes y que ψ satisface $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ al ser una aplicación universal, entonces $\psi = \text{Id}_{\mathbb{X}}$. Así, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})} = \mathcal{W}(\psi) = \mathcal{W}(\text{Id}_{\mathbb{X}}) = \{\{x\} : x \in \mathbb{X}\}$, lo que implica que el espacio \mathbb{X} es ω -degenerado incurriendo en una contradicción. Por tanto, en estas condiciones no existe aplicación universal. \square

Definición 3.1.4. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\mathbb{X})$ una clase de aplicaciones continuas. Diremos que el espacio \mathbb{X} es ω -degenerado para \mathcal{F} si $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = \{\{x\} : x \in \mathbb{X}\}$.*

Corolario 3.1.4.1. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto no ω -degenerado para una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\mathbb{X})$ tal que $\text{Id}_{\mathbb{X}} \in \mathcal{F}$. Entonces, no existe ninguna aplicación universal con respecto a los conjuntos ω -límite generados por los elementos de \mathcal{F} .*

Ante el carácter negativo de los resultados anteriores, parece razonable el planteamiento del problema de la existencia de aplicaciones universales reduciendo la familia de conjuntos ω -límite respecto de la cual se tiene la universalidad. Es decir, considerar $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ y analizar la existencia de elementos $\psi \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{W}(\psi) = \mathcal{A}$. En la siguiente sección presentamos un resultado en esta línea, para la clase de las aplicaciones triangulares en \mathbb{I}^2 (véase [BGM 02]).

3.2. Universalidad en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ para intervalos contenidos en fibras

Consideraremos aplicaciones triangulares en \mathbb{I}^2 . Por el Teorema 1.3.5, fijada una fibra en el cuadrado unidad que podemos tomar, sin pérdida de generalidad, igual a I_0 , sabemos que la familia de conjuntos tipo intervalo contenidos en dicha fibra,

$$\mathcal{A} = \{\{0\} \times [a, b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{I}\},$$

es un subconjunto de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)}$. En estas condiciones probaremos en esta sección, y lo definiremos explícitamente, que existe un elemento $F \in \mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ universal para la familia de conjuntos \mathcal{A} , es decir, verificando que $\mathcal{W}(F) = \mathcal{A}$. Obsérvese que para este elemento se resuelve también el problema (P1), al tenerse completamente descrita a la familia de todos los conjuntos ω -límite que produce.

3.2.1. Construcción del elemento universal

Para $i \in \{1, 2, \dots\}$ sean ε_i y δ_i los siguientes valores:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}, \quad \delta_i = \frac{1}{2^{i+10}}.$$

Sea i un entero positivo. Consideremos el intervalo $I_i = [\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$ y dividámoslo en 2^{i+10} conjuntos del siguiente modo

$$I_i = \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}} \right] = \bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} \left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n+1)\varepsilon_i \right].$$

Por otro lado, para cada $n \in \{0, \dots, 2^{i+10} - 1\}$, consideremos las siguientes dos zonas de \mathbb{I}^2 :

- (a) $A_{n,1}^i = \left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n + \frac{1}{2})\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I}$,
- (b) $A_{n,2}^i = \left[\frac{1}{2^i} + (n + \frac{1}{2})\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n + 1)\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I}$.

Para las zonas previas, es fácil notar que se verifica

$$\left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n + 1)\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I} = A_{n,1}^i \cup A_{n,2}^i$$

y

$$\bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} (A_{n,2}^i \cup A_{n,1}^i) = I_i \times \mathbb{I}.$$

Definición 3.2.1. *Introducimos la siguiente aplicación triangular en \mathbb{I}^2 :*

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

donde

(A) $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, es la función base tipo Kolyada para los valores $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2^{2i+10}}\}_{i=1}^{\infty}$.

(B) $g : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$

(b₁) Sea i impar:

- Si $n = 0$,

▪ para $(x, y) \in A_{0,2}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_i & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M], \end{cases}$$

donde $M = \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_i$;

- para $(x, y) \in A_{0,1}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1};$$

- Si $n \in \{1, 2, \dots, 2^{i+10} - 1\}$,

- para $(x, y) \in A_{n,2}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) + \delta_i & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) - \delta_i;$$

- para $(x, y) \in A_{n,1}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) - \delta_i & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) + \delta_i.$$

(b₂) Sea i par:

- Si $n = 0$,

- para $(x, y) \in A_{0,2}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_i & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_i;$$

- para $(x, y) \in A_{0,1}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i}(x - \frac{1}{2^i}) + \delta_{i+1};$$

- Si $n \in \{1, 2, \dots, 2^{i+10} - 1\}$,

- para $(x, y) \in A_{n,2}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) - \delta_i & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i}(x - (\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i)) + \delta_i;$$

■ para $(x, y) \in A_{n,1}^i$, definimos

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) + \delta_i & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1], \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) - \delta_i.$$

Observación 3.2.1.1. El comportamiento dinámico de la aplicación triangular F , definida previamente, puede resumirse como sigue. La prueba se realizará en la siguiente sección. Sea (p, q) un punto en $I_i \times \mathbb{I}$, $i \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces, su órbita puede seguirse a través del movimiento de un cierto tipo de “onda discreta” (véase Figura 3.1).

Notemos que cuando el punto $(p, q) \in I_i \times \mathbb{I}$ con i impar (respectivamente i par), sus iteradas poseen una tendencia de crecimiento en altura descendente (respectivamente ascendente) hasta alcanzar las zonas $A_{0,1}^i$ o $A_{2^{i+1}-1,2}^{i+1}$ donde esta tendencia cambia para ser ascendente (respectivamente descendente).

Cuando i es impar y $(p, q) \notin A_{0,1}^i$ o i es par y $(p, q) \in A_{0,1}^i$, si el valor de M asociado al punto (p, q) en la definición de F , denotado con $M(p, q)$, es cero (véase Figura 3.1 punto ■), la onda es una línea horizontal y por tanto su amplitud total es cero. Cuando $M(p, q) = \delta_i$, la amplitud total de la onda alcanza su valor máximo igual a uno (véase Figura 3.1 punto ●). La tercera posibilidad para esta amplitud es tomar valores entre cero y uno, lo que se corresponde con $M(p, q) \in (0, \delta_i)$ (véase Figura 3.1 punto ▼).

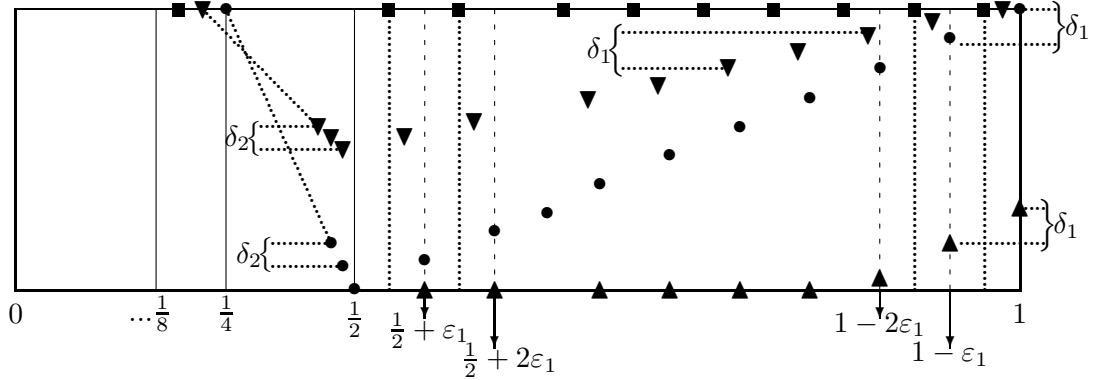
En cualquiera de los casos anteriores, la órbita de (p, q) puede intersectarse con $I_i \times \{0\}$. Si $F^n(p, q)$ es la primera iterada en la zona $I_i \times \mathbb{I}$, perteneciendo a $I_i \times \{0\}$, las siguientes iteradas, $F^k(p, q)$, $k \geq n$, permanecen en $I_i \times \{0\}$ hasta alcanzar la zona siguiente $I_{i+1} \times \mathbb{I}$ (véase, por ejemplo, Figura 3.1 punto ▲).

Cuando $(p, q) \in A_{0,1}^i$ con i impar, o $(p, q) \notin A_{0,1}^i$ con i par, tenemos una situación análoga para $M(p, q) \in [1 - \delta_i, 1]$.

Para un punto $(p, q) \in I_i \times \mathbb{I}$, como desde $I_{i+1} \times \mathbb{I}$ los puntos que determinan la amplitud total de la onda se encuentran siempre a la misma altura, conocemos con exactitud cuál es el conjunto ω -límite del punto (p, q) . Por otro lado, como $M(\alpha, \beta)$ toma todos los valores entre cero y δ_i cuando el punto $(\alpha, \beta) \in A_{2^{i+1}-1,2}^1$, dado $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$, $a \leq b$, podemos elegir $(p, q) \in A_{2^{i+1}-1,2}^1$ tal que $M(p, q) = \delta_1(b - a)$, obteniendo una condición suficiente para que la longitud de $\omega_F(p, q)$ sea $b - a$. Por tanto, para el punto anterior si tomamos $q = b$ tendremos $\omega_F(p, q) = \{0\} \times [a, b]$.

Nota 3.2.2. Sobre la Figura 3.1, destacamos los siguientes hechos:

- (1) Para cada punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$, la diferencia en altura entre dos iteradas consecutivas en la zona $I_i \times \mathbb{I}$ es la misma siempre y cuando ninguna de las dos iteradas mencionadas se intersecte con $\mathbb{I} \times \{0\}$ o $\mathbb{I} \times \{1\}$.


 Figura 3.1: Iteradas F

- (2) Las órbitas de los puntos \bullet y \blacktriangle coinciden a partir de la zona $I_2 \times \mathbb{I}$ y se representarán mediante \bullet .

3.2.2. Análisis de la dinámica

El siguiente resultado es clave para la prueba de la universalidad de F con respecto a los conjuntos ω -límite de tipo intervalo contenidos en I_0 , ya que nos proporciona una descripción precisa de las iteradas de los puntos pertenecientes a $A_{2^{11}-1,2}^1$.

Lema 3.2.3. Sean $a, b \in \mathbb{I}$, $a \leq b$ y $(p, q) = (\frac{1}{2} + (2^{11} - 1)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1, b)$ un punto en $A_{2^{11}-1,2}^1$. Entonces, las iteradas de (p, q) mediante F en $I_i \times \mathbb{I}$, $i \in \{1, 2, \dots\}$, son

$$F^{k + \sum_{j=2}^i 2^{j+9}}(p, q) = \begin{cases} (\xi_i, b - k\delta_i(b-a)) & i \text{ impar,} \\ (\xi_i, a + k\delta_i(b-a)) & i \text{ par,} \end{cases}$$

donde $k \in \{0, \dots, 2^{i+10} - 1\}$, $\xi_i = \frac{1}{2^i} + (2^{i+10} - (k+1))\varepsilon_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i$ y consideremos que $\sum_{j=2}^i 2^{j+9} = 0$ si $i = 1$.

Demostración. Para establecer el resultado procederemos por inducción sobre i . A lo largo de la prueba, mediante π_i , $i \in \{1, 2\}$, denotaremos respectivamente a las proyecciones canónicas en la primera y segunda coordenada.

Caso $i = 1$. Como $\frac{1}{2} = 2^{11}\varepsilon_1$, entonces por definición de la función base f se tiene que $f^k(p) \in \pi_1 \left(A_{2^{11}-(k+1),2}^1 \right)$ y por tanto,

$$f^k(p) = \frac{1}{2} + (2^{11} - (1+k))\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1$$

para $k \in \{0, \dots, 2^{11} - 1\}$.

Para la segunda coordenada, tenemos que comprobar que

$$\pi_2(F^k(p, q)) = b - k\delta_1(b - a)$$

donde $k \in \{0, \dots, 2^{11} - 1\}$. Para establecer este objetivo procedemos por recurrencia:

- Si $k = 0$, entonces $\pi_2(F^0(p, q)) = \pi_2(p, q) = b = b - 0\delta_1(b - a)$.
- Sea $k \in \{0, \dots, 2^{11} - 2\}$ y supongamos que se verifica la igualdad

$$\pi_2(F^k(p, q)) = b - k\delta_1(b - a).$$

Como $f^k(p) \in \pi_1\left(A_{2^{11}-(k+1), 2}^1\right)$, entonces

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\delta_1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{2} + (2^{11} - (1 + k))\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b - a}{2}\varepsilon_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + (2^{11} - (1 + k))\varepsilon_1 \right) \right) - \delta_1 = \delta_1(b - a). \end{aligned}$$

Dado que $0 \leq k \leq 2^{11} - 2$, entonces se tiene la siguiente cadena de desigualdades,

$$0 \leq k\delta_1(b - a) \leq (2^{11} - 2)\delta_1(b - a).$$

Así,

$$\begin{aligned} b - k\delta_1(b - a) &\geq b - (2^{11} - 2)\delta_1(b - a) = b - \left(\frac{1}{\delta_1} - 2 \right) \delta_1(b - a) \\ &= a + 2\delta_1(b - a) \geq \delta_1(b - a). \end{aligned}$$

De donde se deduce que $b - k\delta_1(b - a) \in [M, 1]$. Ahora, por la definición de la función g , se sigue

$$\pi_2(F^{k+1}(p, q)) = b - k\delta_1(b - a) - \delta_1(b - a) = b - (k + 1)\delta_1(b - a)$$

como pretendíamos deducir.

Caso $i = 2$. Consideremos las siguientes situaciones:

- Sea $k = 0$. Por el caso $i = 1$ cuando $k = 2^{11} - 1$, se verifica

$$\begin{aligned} F^{2^{11}-1}(p, q) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b - a}{2}\varepsilon_1, b - (2^{11} - 1)\delta_1(b - a) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b - a}{2}\varepsilon_1, a + \delta_1(b - a) \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como $0 \leq b - a \leq 1$, entonces $0 \leq \frac{b-a}{2}\varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$ y así

$$F^{2^{11}-1}(p, q) \in A_{0,2}^1 \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon_1\right] \times \mathbb{I}.$$

Esto nos permite obtener

$$\begin{aligned} f^{2^{11}}(p) &= f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1\right) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1 - (b-a)}{2}\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{4} = 2^{12}\varepsilon_2$, entonces $(2^{12} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$. De donde se deduce,

$$f^{2^{11}}(p) = \frac{1}{2} - \frac{1 - (b-a)}{2}\varepsilon_2 = \frac{1}{4} + (2^{12} - 1)\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_2.$$

Por otro lado, calculamos $\pi_2\left(F^{2^{11}}(p, q)\right)$. En este caso por (3.1) se tiene

$$M = \frac{2\delta_1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\right) - \delta_1 = \delta_1(b-a).$$

Como $a \geq 0$, entonces se verifican

$$a + \delta_1(b-a) \geq \delta_1(b-a)$$

y

$$a + \delta_1(b-a) \in [M, 1].$$

De donde se deduce que

$$\pi_2\left(F^{2^{11}}(p, q)\right) = a + \delta_1(b-a) - \delta_1(b-a) = a.$$

Resumiendo,

$$F^{2^{11}}(p, q) = \left(\frac{1}{4} + (2^{12} - 1)\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_2, a\right)$$

como queríamos comprobar.

- Sea $k \in \{0, \dots, 2^{12} - 1\}$. Como $\frac{1}{4} = 2^{12}\varepsilon_2$, entonces se verifica

$$f^{2^{11}+k}(p) \in \pi_1\left(A_{2^{12}-(k+1),2}^2\right).$$

Esto nos permite obtener que

$$\begin{aligned}
f^{2^{11}+k}(p) &= f^k \left(\frac{1}{4} + (2^{12} - 1)\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_2 \right) \\
&= \frac{1}{4} + (2^{12} - (1+k))\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Para la segunda coordenada, hemos de comprobar que

$$\pi_2 \left(F^{2^{11}+k}(p, q) \right) = a + k\delta_2(b-a)$$

donde $k \in \{0, \dots, 2^{12} - 1\}$. Para alcanzar este objetivo procedemos de nuevo por recurrencia:

- Si $k = 0$, entonces $\pi_2 \left(F^{2^{11}}(p, q) \right) = a = a + 0\delta_2(b-a)$.
- Sea $k \in \{0, \dots, 2^{12} - 2\}$ y supongamos que se verifica la igualdad

$$\pi_2 \left(F^{2^{11}+k}(p, q) \right) = a + k\delta_2(b-a).$$

Por (3.2), se tiene

$$\begin{aligned}
M &= 1 - \frac{2\delta_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{4} + (2^{12} - (k+1))\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_2 \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{4} + (2^{12} - (k+1))\varepsilon_2 \right) + \delta_2 = 1 - \delta_2(b-a).
\end{aligned}$$

Como $0 \leq k \leq 2^{12} - 2$, entonces es válida la cadena de desigualdades

$$0 \leq a + k\delta_2(b-a) \leq a + (2^{12} - 2)\delta_2(b-a).$$

Así,

$$\begin{aligned}
a + k\delta_2(b-a) &\leq a + (2^{12} - 2)\delta_2(b-a) = a + \left(\frac{1}{\delta_2} - 2 \right) \delta_2(b-a) \\
&= b - 2\delta_2(b-a) \leq 1 - \delta_2(b-a).
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $a + k\delta_2(b-a) \in [0, M]$. Ahora, de nuevo por la definición de la función g se sigue que

$$\begin{aligned}
\pi_2 \left(F^{2^{11}+k+1}(p, q) \right) &= a + k\delta_2(b-a) + 1 - (1 - (b-a)\delta_2) \\
&= a + (k+1)\delta_2(b-a)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Supongamos, como hipótesis de inducción, que el resultado es válido para $i \geq 1$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, que i es impar. La prueba cuando i es par es análoga. Si establecemos la validez del resultado para $i + 1$, entonces la prueba habrá finalizado. Para ello estudiaremos las siguientes situaciones:

- Sea $k = 0$. En la zona $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$ cuando $k = 2^{i+10} - 1$ sabemos, por hipótesis de inducción, que

$$\begin{aligned} F^{2^{i+10}-1}(p, q) &= \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i, b - (2^{i+10} - 1)\delta_i(b-a) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i, a + \delta_i(b-a) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como $0 \leq b - a \leq 1$, entonces $0 \leq \frac{b-a}{2}\varepsilon_i \leq \frac{1}{2}\varepsilon_i$ y por tanto

$$F^{2^{i+10}-1}(p, q) \in A_{0,2}^i \subset \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \varepsilon_i \right] \times \mathbb{I}. \quad (3.4)$$

Ahora, por (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} f^{2^{i+10}}(p) &= f \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i \right) = \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i - \frac{1}{2^i} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2^i} - \varepsilon_{i+1} \right) = \frac{1}{2^i} - \frac{1 - (b-a)}{2}\varepsilon_{i+1}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2^{i+1}} = 2^{i+11}\varepsilon_{i+1}$, entonces $(2^{i+11} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})\varepsilon_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}$. De donde

$$f^{2^{i+10}}(p) = \frac{1}{2^i} - \frac{1 - (b-a)}{2}\varepsilon_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - 1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1}.$$

Ahora, calculemos $\pi_2 \left(F^{2^{i+10}}(p, q) \right)$. En este caso, por (3.3) se verifica que

$$M = \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{b-a}{2}\varepsilon_i - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_i = \delta_i(b-a).$$

Como $a \geq 0$, entonces $a + \delta_i(b-a) \geq \delta_i(b-a)$. Por tanto, $a + \delta_i(b-a) \in [M, 1]$ y así

$$\pi_2 \left(F^{2^{i+10}}(p, q) \right) = a + \delta_i(b-a) - \delta_i(b-a) = a.$$

Por los cálculos previos,

$$F^{2^{i+10}}(p, q) = \left(\frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - 1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1}, a \right)$$

como esperábamos.¹

- Sea $k \in \{0, \dots, 2^{i+11} - 1\}$. Como $\frac{1}{2^{i+1}} = 2^{i+11}\varepsilon_{i+1}$, entonces

$$f^{2^{i+10}+k}(p) \in \pi_1 \left(A_{2^{i+11}-(k+1),2}^2 \right).$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} f^{2^{i+10}+k}(p) &= f^k \left(\frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - 1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - (1+k))\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para la segunda coordenada, hemos de mostrar que

$$\pi_2 \left(F^{2^{i+10}+k}(p, q) \right) = a + k\delta_{i+1}(b-a)$$

donde $k \in \{0, \dots, 2^{i+11} - 1\}$. Procederemos una vez más por recurrencia:

- Si $k = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_2 \left(F^{2^{i+10}}(p, q) \right) &= b - 2^{i+10}\delta_i(b-a) \\ &= b - (b-a) = a = a + 0\delta_{i+1}(b-a). \end{aligned}$$

- Sea $k \in \{0, \dots, 2^{i+11} - 2\}$ y supongamos que se verifica

$$\pi_2 \left(F^{2^{i+10}+k}(p, q) \right) = a + k\delta_{i+1}(b-a).$$

Por (3.5) se verifica,

$$\begin{aligned} M &= 1 - \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_{i+1}} \left(\frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - (k+1))\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} \right) \\ &\quad + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_{i+1}} \left(\frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - (k+1))\varepsilon_{i+1} \right) \\ &\quad + \delta_{i+1} = 1 - \delta_{i+1}(b-a). \end{aligned}$$

Como $0 \leq k \leq 2^{i+11} - 2$, entonces es válida la siguiente cadena de desigualdades

$$0 \leq a + k\delta_{i+1}(b-a) \leq a + (2^{i+11} - 2)\delta_{i+1}(b-a).$$

¹En el caso i par con un argumento análogo se obtiene

$$F^{2^{i+10}}(p, q) = \left(\frac{1}{2^{i+1}} + (2^{i+11} - 1)\varepsilon_{i+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_{i+1}, b \right),$$

expresión que será usada en la Observación 3.2.3.1.

Así,

$$\begin{aligned} a + k\delta_{i+1}(b-a) &\leq a + (2^{i+11} - 2)\delta_{i+1}(b-a) \\ &= a + \left(\frac{1}{\delta_{i+1}} - 2\right)\delta_{i+1}(b-a) \\ &= b - 2\delta_{i+1}(b-a) \leq 1 - \delta_{i+1}(b-a). \end{aligned}$$

De donde se deduce que $a + k\delta_{i+1}(b-a) \in [0, M]$. De la definición de g , se sigue que

$$\begin{aligned} \pi_2 \left(F^{2^{i+10}+k+1}(p, q) \right) &= a + k\delta_{i+1}(b-a) + 1 - (1 - (b-a)\delta_{i+1}) \\ &= a + (k+1)\delta_{i+1}(b-a), \end{aligned}$$

estableciendo el paso inductivo y finalizando la prueba. \square

Observación 3.2.3.1. A partir de su definición, es sencillo ver que $A_{2^{11}-1,2}^1$ se puede expresar en la forma

$$A_{2^{11}-1,2}^1 = \bigcup_{\substack{a \leq b \\ a, b \in \mathbb{I}}} \left(\frac{1}{2} + (2^{11} - 1)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1, b \right).$$

El lema previo garantiza que la diferencia en altura entre dos iteradas consecutivas de un punto $(p, q) \in A_{2^{11}-1,2}^1$ en $I_i \times \mathbb{I}$ es exactamente $\delta_i(b-a)$. Si i es impar, la primera iterada en $I_i \times \mathbb{I}$ ($k=0$) posee altura b y la última ($k=2^{i+10}-1$) posee altura $a + \delta_i(b-a)$. Si i es par, la primera iterada en $I_i \times \mathbb{I}$ ($k=0$) posee altura a y la última ($k=2^{i+10}-1$) posee altura $b - \delta_i(b-a)$. (En el razonamiento previo, consideramos que $\frac{1}{2^i} \in I_{i+1}$ cuando nos referimos a la última iterada en $I_i \times \mathbb{I}$.)

Con el siguiente resultado, para cada punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ acotamos la diferencia en altura entre dos iteradas consecutivas mediante F y describimos la forma de las mismas.

Lema 3.2.4. Sea $(p, q) \in \bigcup_{n=0}^{2^{i_0+10}-1} (A_{n,2}^{i_0} \cup A_{n,1}^{i_0})$. Entonces, las siguientes propiedades se satisfacen, siendo $i_0, i_1 \geq 1$ y $k \geq 0$ enteros:

(a) Si $F^k(p, q) \in \bigcup_{n=0}^{2^{i_1+10}-1} (A_{n,2}^{i_1} \cup A_{n,1}^{i_1})$, entonces:

$$(a_1) \quad 0 \leq \left| \pi_2(F^k(p, q)) - \pi_2(F^{k+1}(p, q)) \right| \leq M(F^k(p, q)) \text{ en el caso } i_1 \text{ impar,}$$

$$(a_2) \quad 0 \leq \left| \pi_2(F^k(p, q)) - \pi_2(F^{k+1}(p, q)) \right| \leq 1 - M(F^k(p, q)) \text{ en el caso } i_1 \text{ par,}$$

$$\text{donde } M(F^k(p, q)) = \begin{cases} \frac{M((p,q)\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}} & \text{si } i_0 \text{ e } i_1 \text{ son impares,} \\ \frac{(1-M((p,q))\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}} & \text{si } i_0 \text{ es par e } i_1 \text{ es impar,} \\ 1 - \frac{M((p,q)\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}} & \text{si } i_0 \text{ es impar e } i_1 \text{ es par,} \\ 1 - \frac{(1-M((p,q))\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}} & \text{si } i_0 \text{ e } i_1 \text{ son pares.} \end{cases}$$

(b) Sea $i \geq i_0 + 1$ y $F^{k_i}(p, q)$ la primera iterada de (p, q) en $\bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} (A_{n,2}^i \cup A_{n,1}^i)$, se cumple:

(b₁) Si $(p, q) \in A_{n,2}^{i_0}$ donde $n \in \{0, 1, \dots, 2^{i_0+10} - 1\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$.

Entonces:

1) Si i es impar, $\pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \geq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q))$.

2) Si i es par, $\pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \leq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q))$.

(b₂) Si $(p, q) \in A_{n,1}^{i_0} \setminus (\{\frac{1}{2^{i_0}} + n\varepsilon_{i_0}\} \times \mathbb{I})$ donde $n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$ y $j \in \{-1, 0, 1, \dots, 2^{i+10} - 2\}$, se cumple:

1) Si i es impar, $\pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \geq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q))$.

2) Si i es par, $\pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \leq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q))$.

Demostración. La propiedad (b) y la cadena de desigualdades

$$0 \leq |\pi_2(F^k(p, q)) - \pi_2(F^{k+1}(p, q))| \leq M(F^k(p, q)),$$

se deducen inmediatamente de la definición de F . Para describir $M(F^k(p, q))$ supon- gamos, por ejemplo, que i_0 e i_1 son ambos impares. Entonces, $M(F^k(p, q)) = t\delta_{i_1}$ con $0 \leq t \leq 1$. Por la morfología de F , para un tal valor t , sabemos que $M((p, q)) = t\delta_{i_0}$. Por tanto, se tiene que $M(F^k(p, q)) = \frac{M((p,q)\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}}$. \square

3.2.3. Comprobación de la universalidad

Tras analizar la dinámica de la aplicación triangular F presentada en la Definición 3.2.1, pasamos a comprobar que se trata de un elemento universal para los conjuntos ω -límite de tipo intervalo contenidos en la fibra I_0 .

Teorema 3.2.5. *La aplicación triangular F en \mathbb{I}^2 introducida en la Definición 3.2.1 satisface las siguientes condiciones:*

(A) Para cada $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$, $a \leq b$, existe un punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ tal que

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times [a, b].$$

(B) Dado $(p, q) \in \mathbb{I}^2$, existe un intervalo compacto $J \subseteq \mathbb{I}$, degenerado o no, verificando que

$$\omega_F(p, q) = \{0\} \times J.$$

Demostración. (A). Consideremos $(p, q) = (\frac{1}{2} + (2^{11} - 1)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{b-a}{2}\varepsilon_1, b)$, $y \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{2^i} \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$, existe i_0 entero positivo tal que $\frac{1}{2^{i_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado como $\delta_i(b-a) = \frac{b-a}{2^{i+10}} \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ existe un entero positivo i_1 tal que $\delta_{i_1}(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $i_2 = \max\{i_0 + 1, i_1\}$. Como $y \in [a, b]$, la anterior consideración y la Observación 3.2.3.1 nos permiten obtener una iterada $(\alpha, \beta) \neq (0, y)$ de (p, q) en $I_{i_2} \times \mathbb{I}$ tal que $0 < |\beta - y| \leq \delta_{i_2}(b-a)$. Como $i_2 \geq i_1$, entonces

$$\delta_{i_2}(b-a) = \frac{1}{2^{i_2+10}}(b-a) \leq \frac{1}{2^{i_1+10}}(b-a) = \delta_{i_1}(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, $|\beta - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Más aún, como $(\alpha, \beta) \in I_{i_2} \times \mathbb{I}$ entonces $0 < \alpha \leq \frac{1}{2^{i_2-1}}$ y de $i_2 \geq i_0 + 1$ se sigue $0 < \alpha \leq \frac{1}{2^{i_2-1}} \leq \frac{1}{2^{i_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente,

$$0 < d((\alpha, \beta), (0, y)) = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - y)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < \varepsilon$$

Y así, $\{0\} \times [a, b] \subseteq \omega_F(p, q)$.

Por otro lado, sea $(x, y) \notin \{0\} \times [a, b]$. En estas condiciones, hay dos posibles situaciones:

(a₁) Caso $x \neq 0$. Como $f^n(p) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $x \neq 0$, existe un entero positivo n_0 tal que $x - f^{n_0}(p) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{x - f^{n_0}(p)}{2} > 0$. Entonces,

$$x - f^n(p) \geq x - f^{n_0}(p) > \frac{x - f^{n_0}(p)}{2} = \varepsilon$$

para cada entero $n \geq n_0$. Así,

$$d((x, y), F^n(p, q)) \geq x - f^n(p) > \varepsilon$$

para cada entero $n \geq n_0$ y esto implica que $(x, y) \notin \omega_F(p, q)$.

(a₂) Caso $x = 0$ e $y \notin [a, b]$. Ahora, sea $h = d([a, b], y) > 0$ la distancia entre $[a, b]$ e $\{y\}$. Por el Lema 3.2.3, $\pi_2(F^n(p, q)) \in [a, b]$ para cada n entero no negativo. Entonces, $|\pi_2(F^n(p, q)) - y| \geq h$ para cada n entero no negativo. Sea $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$. Por tanto,

$$d(F^n(p, q), (x, y)) \geq |\pi_2(F^n(p, q)) - y| \geq h > \varepsilon$$

para cada n entero no negativo. En definitiva, $(x, y) \notin \omega_F(p, q)$.

Así por (a₁) y (a₂) establecemos la parte (A).

(B) Si $(0, c) \in I_0$, entonces es un punto fijo y el resultado se sigue inmediatamente tomando $J = \{c\}$. Por otro lado, sea $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Notemos que $\omega_F(p, q) \subseteq I_0$ (idéntica prueba que en el apartado (a₁) de (A), tomando $\mathbb{I} = [a, b]$). Como \mathbb{I}^2 es un compacto, $\omega_F(p, q) \neq \emptyset$. Si $\omega_F(p, q) = \{(0, c)\}$, el resultado es verdadero tomando de nuevo $J = \{c\}$. Como F es una aplicación continua, entonces el conjunto $\omega_F(p, q)$ es cerrado. Así, si $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ es suficiente probar que $\omega_F(p, q) = \{0\} \times J$ donde $J \subseteq \mathbb{I}$ es un intervalo. Para conseguir este propósito, sean $(0, a)$ y $(0, b)$ en $\omega_F(p, q)$, donde $a < b$. Sea $a < c < b$. Entonces, si comprobamos que $(0, c) \in \omega_F(p, q)$ el resultado estará probado.

Sea j_0 un entero positivo tal que $(p, q) \in \bigcup_{n=0}^{2^{j_0+10}-1} (A_{n,2}^{j_0} \cup A_{n,1}^{j_0})$. Tomemos $\varepsilon > 0$ e i_0 un entero positivo satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$(b_1) \quad a + \varepsilon < c < b - \varepsilon,$$

$$(b_2) \quad \frac{1}{2^{i_0}} + \frac{1}{2^{i_0+10}} < \varepsilon,$$

$$(b_3) \quad \varepsilon + \frac{1}{2^{i_0+1}} < \frac{b-a}{2},$$

$$(b_4) \quad i_0 \geq j_0 + 1.$$

Como $(0, a)$ y $(0, b)$ son puntos de $\omega_F(p, q)$, existen k_1 y k_2 enteros positivos tales que

$$f^{k_s}(p) \leq d(F^{k_s}(p, q), (0, \lambda)) < \frac{1}{2^{i_0}};$$

donde $s \in \{1, 2\}$ y $\lambda \in \{a, b\}$. Así, obtenemos que $F^{k_s}(p, q) \in \bigcup_{n=0}^{2^{i_s+10}-1} (A_{n,2}^{i_s} \cup A_{n,1}^{i_s})$ con $i_s > i_0$, $s \in \{1, 2\}$. Por tanto,

$$|\pi_2(F^{k_s}(p, q)) - \lambda| \leq d(F^{k_s}(p, q), (0, \lambda)) < \frac{1}{2^{i_0}} < \varepsilon$$

si $s \in \{1, 2\}$ y $\lambda \in \{a, b\}$. Así, por un lado $\pi_2(F^{k_1}(p, q)) < a + \varepsilon$ y por otro lado $\pi_2(F^{k_2}(p, q)) > b - \varepsilon$. Usando estas dos propiedades y por la elección de ε e i_0 , tenemos

$$\pi_2(F^{k_2}(p, q)) - \pi_2(F^{k_1}(p, q)) > b - a - 2\varepsilon > \frac{1}{2^{i_0}} > \frac{1}{2^{i_1+10}} = \delta_1 \geq M(F^{k_1}(p, q)).$$

Por (b₄), usando las partes (a) y (b) del Lema 3.2.4 y el hecho $a + \varepsilon < c < b - \varepsilon$, existe k_3 , y por consiguiente un entero positivo i_3 , tal que $k_1 \leq k_3 \leq k_2$ verificando

$$|\pi_2(F^{k_3}(p, q)) - c| \leq M(F^{k_3}(p, q)) \tag{3.6}$$

y

$$F^{k_3}(p, q) \in \bigcup_{n=0}^{2^{i_3+10}-1} (A_{n,2}^{i_3} \cup A_{n,1}^{i_3}).$$

Como $k_1 \leq k_3$, entonces $i_0 < i_1 \leq i_3$ y así se tiene, $\delta_{i_3} < \delta_{i_0}$ y

$$\pi_1(F^{k_3}(p, q)) \leq \frac{1}{2^{i_1-1}} \leq \frac{1}{2^{i_0}}. \quad (3.7)$$

Por (3.6) y (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 < d(F^{k_3}(p, q) - (0, c)) &= \sqrt{[\pi_1(F^{k_3}(p, q))]^2 + [\pi_2(F^{k_3}(p, q)) - c]^2} \\ &\leq \pi_1(F^{k_3}(p, q)) + |\pi_2(F^{k_3}(p, q)) - c| \\ &\leq \frac{1}{2^{i_0}} + M(F^{k_3}(p, q)) \leq \frac{1}{2^{i_0}} + \delta_{i_3} \\ &< \frac{1}{2^{i_0}} + \delta_{i_0} = \frac{1}{2^{i_0}} + \frac{1}{2^{i_0+10}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $(0, c) \in \omega_F(p, q)$ y así $\omega_F(p, q) = \{0\} \times J$ donde $J \subseteq \mathbb{I}$ es un intervalo, comprobando la parte (B) y finalizando la prueba. \square

Observación 3.2.5.1. Un problema a estudiar en el futuro es la construcción de aplicaciones universales para otros tipos de familias de conjuntos ω -límite \mathcal{A} , por ejemplo, si consideramos $\mathcal{A} = \{\{0\} \times ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]) : a_i, b_i \in \mathbb{I}\}$ (en \mathcal{A} se consideran las uniones de dos intervalos degenerados, es decir, la unión de dos puntos pero se excluyen conjuntos de la forma $[a, b] \cup \{p\}$ ya que dicho conjunto no es un ω -límite en la fibra I_0 para $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ por la propiedad de la incompresibilidad débil, véase Teorema 1.3.5). Notemos que por la fuerte invarianza de los conjuntos ω -límite, la eventual aplicación universal F construida para la familia \mathcal{A} , en la fibra I_0 será la identidad.

Siguiendo las técnicas presentadas en este capítulo hemos conseguido, dados dos intervalos concretos y no degenerados en la fibra I_0 , definir explícitamente una aplicación que depende de ambos intervalos y que los tiene como conjunto ω -límite (véase [BGM2 04]). Pero, al intentar dar el paso para obtener la universalidad se rompe la continuidad de la aplicación.

3.3. D-universalidad

En esta sección estudiaremos el problema de la existencia de aplicaciones universales en sentido débil para los conjuntos ω -límite generados por todas las aplicaciones continuas definidas en una variedad compacta m -dimensional \mathbb{M} y en un grafo \mathbb{G} (véase [CGSS 04]). Es decir, analizaremos la existencia de aplicaciones $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$ (respectivamente $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{G})$) tales que para cada conjunto $A \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{M})}$ (respectivamente

$A \in \mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{G})}$) existe \tilde{A} , copia homeomorfa de A , en $\mathcal{W}(\psi)$. Comenzaremos con algunos resultados generales sobre conjuntos ω -límite.

Lema 3.3.1. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto, $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y $M \in \mathcal{W}(\psi)$. Si el interior de M es distinto de vacío, entonces existe $y \in M$ tal que $\omega_\psi(y) = M$.*

Demostración. Como $M \in \mathcal{W}(\psi)$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $\omega_\psi(x) = M$. Al ser $\text{Int}(M) \neq \emptyset$ y abierto, existe un entero k tal que $\psi^k(x) \in \text{Int}(M)$. Sea $y := \psi^k(x)$, entonces $\omega_\psi(y) = M$. En efecto, trivialmente $\omega_\psi(y) \subseteq \omega_\psi(x)$. Por otro lado, sea $z \in \omega_\psi(x)$, entonces existe una sucesión de enteros no negativos $\{n_l\}_{l=0}^\infty$ tal que $\psi^{n_l}(x) \rightarrow z$ cuando $l \rightarrow \infty$. Tomemos l suficientemente grande de modo que $n_l \geq k$. Así $\psi^{n_l-k}(y) = \psi^{n_l}(x) \rightarrow z$ cuando $l \rightarrow \infty$. De donde $z \in \omega_\psi(y)$, comprobando que $M = \omega_\psi(y)$ con $y \in M$. \square

Lema 3.3.2. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto, $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$, $M_1 \in \mathcal{W}(\psi)$ y M_2 cerrado y ψ -invariante. Si $M_1 \cap \text{Int}(M_2) \neq \emptyset$, entonces $M_1 \subseteq M_2$ (respectivamente si $M_2 \cap \text{Int}(M_1) \neq \emptyset$, entonces $M_2 \subseteq M_1$).*

Demostración. Como $M_1 \in \mathcal{W}(\psi)$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $\omega_\psi(x) = M_1$. Por otro lado, como $M_1 \cap \text{Int}(M_2) \neq \emptyset$ existirá un entero no negativo k tal que $\psi^k(x) \in \text{Int}(M_2)$. Como M_2 es fuertemente invariante, para cada $n \geq k$, $\psi^n(x) \in M_2$. De donde se deduce, teniendo en cuenta que M_2 es cerrado, que $M_1 \subseteq M_2$. \square

Corolario 3.3.2.1. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto, $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y $M_1, M_2 \in \mathcal{W}(\psi)$. Si $\text{Int}(M_1) \cap \text{Int}(M_2) \neq \emptyset$, entonces $M_1 = M_2$.*

Una vez presentados estos resultados generales sobre conjuntos ω -límite, pasamos a demostrar la no existencia de aplicaciones d -universales en variedades compactas m -dimensionales. Comenzamos con el caso $m \geq 2$.

3.3.1. Inexistencia en variedades m -dimensionales. El caso $m \geq 2$

El siguiente resultado será un punto clave para probar la no existencia de aplicaciones d -universales en variedades compactas m -dimensionales con $m \geq 2$.

Lema 3.3.3. *En \mathbb{I}^2 existe una cantidad no numerable de dendritas no homeomorfas.*

Demostración. Tomemos cualquier sucesión $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ de ceros y unos, sea $k_0 = 1$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$ sea $k_i = k_{i-1} \cdot (2 + \alpha_{i-1}) = \prod_{l=0}^{i-1} (2 + \alpha_l)$. Sea $C \subset \mathbb{I}$ un conjunto de Cantor y $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ su subconjunto denso.

Consideremos $p_{-1,0} = (\frac{1}{2}, 1)$ y $p_{0,0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$, tomamos k_i puntos $p_{ij} = (x_j, \frac{1}{2^{i+1}})$ donde $x_0 < x_1 < \dots < x_{k_i-1}$ y tal que $\{x_0, x_1, \dots, x_{k_i-1}\} = \{c_0, c_1, \dots, c_{k_i-1}\}$. Finalmente, definimos $D_\alpha \subset \mathbb{I}^2$ (véase Figura 3.2) como la unión de:

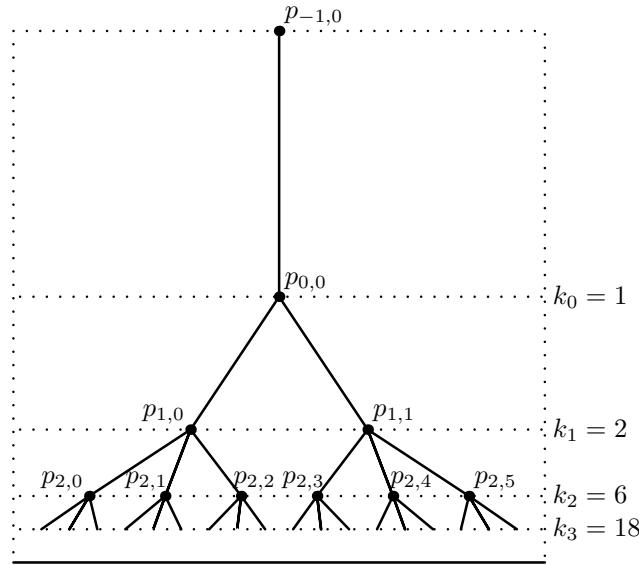


Figura 3.2: Dendrita

- todos los segmentos entre $p_{i,j}$ y $p_{i+1,j'}$ ($i \geq 1$, $(2+\alpha_i)j \leq j' \leq (2+\alpha_i)j+1+\alpha_i$),
- el segmento entre $p_{-1,0}$ y $p_{0,0}$,
- el conjunto $C \times \{0\}$.

Esto es una dendrita con vértices $p_{i,j}$ ($i \geq 0$, $j \in \{0, 1, \dots, k_i - 1\}$) y puntos finales $p_{-1,0}$ y $(x, 0)$, $x \in C$. Probaremos que si $\alpha' = (\alpha'_0, \alpha'_1, \dots)$ es otra sucesión de ceros y unos diferente de α entonces D_α y $D_{\alpha'}$ son no homeomorfas, lo que finalizará la prueba.

En efecto, tomemos dos sucesiones cualesquiera de ceros y unos α, α' ; los símbolos para la construcción de $D_{\alpha'}$ se denotarán mediante $k'_i, p'_{i,j}$. Sea $h : D_\alpha \rightarrow D_{\alpha'}$ un homeomorfismo. Como $p_{-1,0}, p'_{-1,0}$ es el único punto final de $D_\alpha, D_{\alpha'}$, respectivamente, que no es un límite de vértices, debe verificarse que $h(p_{-1,0}) = p'_{-1,0}$.

El conjunto $D_\alpha \setminus \{p_{0,0}\}$ tiene $k_1 + 1 = \alpha_0 + 3$ componentes conexas; denotemos sus clausuras mediante L, E_0, \dots, E_{k_1-1} , donde L es la componente que contiene a $p_{-1,0}$ y E_j es la componente que contiene a $p_{1,j}$ ($j \in \{0, 1, \dots, k_1 - 1\}$). Como L es un arco, $h(L)$ es también un arco. Uno de los puntos finales de $h(L)$ es $h(p_{-1,0}) = p'_{-1,0}$. El otro punto final $h(p_{0,0})$ es igual a $p'_{0,0}$ ya que dicho punto es un vértice de $D_{\alpha'}$ (la imagen homeomorfa de un vértice) y $h(L)$ no contiene otro vértice (todos los puntos del arco L excepto los dos puntos finales poseen componente numérica 2). Así, la imagen de $D_\alpha \setminus \{p_{0,1}\}$ es $D_{\alpha'} \setminus \{p_{0,1}\}$ que posee $k'_1 + 1 = \alpha'_0 + 3$ componentes (las clausuras de las mismas serán denotadas mediante $L', E'_0, \dots, E'_{k'_1-1}$). Por tanto, $\alpha_0 = \alpha'_0$.

Es más, como L se transforma sobreyectivamente en L' , E_0 se transforma sobreyectivamente en algún E'_j . Pero E_0, E'_j es una dendrita homeomorfa a $D_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)}, D_{(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots)}$,

respectivamente. Analizando las componentes de $E_0 \setminus \{p_{1,0}\}$ análogamente como antes obtenemos que $\alpha_1 = \alpha'_1$. Continuando inductivamente obtendremos que $\alpha_i = \alpha'_i$ para cada i , así $\alpha = \alpha'$. Por tanto, $D_\alpha, D_{\alpha'}$ son no homeomorfas si $\alpha \neq \alpha'$. \square

Recordemos que un espacio separable es aquel que posee una cantidad de abiertos numerable.

Lema 3.3.4. *Sea \mathbb{X} el cubo m -dimensional \mathbb{I}^m con $m \geq 2$. Entonces, no existe ninguna aplicación d -universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$.*

Demostración. Sea $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un sistema no numerable de dendritas no homeomorfas en \mathbb{I}^2 . Si $m > 2$ identificamos \mathbb{I}^2 con $\mathbb{I}^2 \times \{0\}^{m-2}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ elegimos una bola cerrada B_α en \mathbb{I}^m disjunta de D_α . Por el Teorema 1.3.4 parte (iii), $B_\alpha \cup D_\alpha$ es un conjunto ω -límite para alguna función continua al ser la unión de dos continuos de Peano.

Afirmamos que $B_\alpha \cup D_\alpha, B_\beta \cup D_\beta$ son no homeomorfos para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq \beta$. En efecto, supongamos que existe un homeomorfismo $h : B_\alpha \cup D_\alpha \rightarrow B_\beta \cup D_\beta$. Como D_α es una componente de $B_\alpha \cup D_\alpha$, es aplicada sobreyectivamente sobre una componente de $B_\beta \cup D_\beta$. Pero ésta no puede ser aplicada en B_β ya que D_α es una dendrita, y por ende posee interior vacío (cualquier subconjunto abierto en \mathbb{I}^m contiene una curva cerrada simple). Así, $h|_{D_\alpha} : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ es un homeomorfismo y por el Lema 3.3.3 se sigue $\alpha = \beta$.

Supongamos por reducción al absurdo que existe una aplicación d -universal $\psi : \mathbb{I}^m \rightarrow \mathbb{I}^m$ para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$. Por tanto, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe un conjunto G_α , ω -límite para ψ y que es homeomorfo a $B_\alpha \cup D_\alpha$. Es evidente que G_α debe poseer interior no vacío. Por el Corolario 3.3.2.1 se sigue que los interiores de G_α ($\alpha \in \mathcal{A}$) son disjuntos dos a dos. Pero esto contradice el hecho de que \mathbb{I}^m sea un espacio separable, de donde se obtiene la inexistencia de aplicación d -universal. \square

Para la prueba del siguiente resultado se necesita la noción de retracción de un espacio métrico (véase Definición 1.5.8).

Teorema 3.3.5. *Sea \mathbb{X} un espacio métrico compacto conteniendo una copia homeomorfa del cubo unidad \mathbb{I}^m para algún $m \geq 2$. Entonces, no existe ninguna aplicación d -universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$.*

Demostración. Sea $J \subset \mathbb{X}$ una copia homeomorfa a \mathbb{I}^m , es decir, existe un homeomorfismo $h : J \rightarrow \mathbb{I}^m$. Sean $B_\alpha, D_\alpha \subset \mathbb{I}^m$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) los conjuntos introducidos en la prueba del Lema 3.3.4.

Como \mathbb{I}^m es una retracción absoluta (véase [HoYo 88, Teorema 2-34]) J es una retracción para \mathbb{X} . Así, existe una función continua $\pi : \mathbb{X} \rightarrow J$ tal que $\pi|_J = \text{Id}_J$. Los

conjuntos $Y_\alpha = h^{-1}(B_\alpha \cup D_\alpha)$ son conjuntos ω -límite para alguna aplicación continua en \mathbb{X} . Esto se sigue del hecho de que si $f : \mathbb{I}^m \rightarrow \mathbb{I}^m$ es una aplicación continua para la que existe $y \in \mathbb{I}^m$ tal que $B_\alpha \cup D_\alpha = \omega_f(y)$, entonces $Y_\alpha = \omega_{h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi}(h^{-1}(y))$. Como cada Y_α posee interior no vacío, podemos obtener una contradicción razonando como en la prueba del Lema 3.3.4. \square

Corolario 3.3.5.1. *Sea \mathbb{M} una variedad compacta m -dimensional con $m \geq 2$. Entonces, $\mathcal{W}_{C(\mathbb{M})}$ no admite una aplicación d -universal.*

3.3.2. Inexistencia en grafos distintos de un arco

Tras probar en la sección anterior que las variedades compactas m -dimensionales con $m \geq 2$ no admiten aplicaciones d -universales para sus conjuntos ω -límite, pasamos a estudiar la situación para endomorfismos definidos en grafos. Ello permitirá, en particular, cerrar el problema para variedades compactas unidimensionales.

Comenzamos introduciendo un resultado sobre sistemas dinámicos *transitivos* (véase [ARR 99]). Recordemos que un sistema (\mathbb{X}, ψ) se dice transitivo, si existe un punto $x \in \mathbb{X}$ con órbita densa en \mathbb{X} .

Proposición 3.3.6. *Cualquier grafo admite un sistema dinámico transitivo.*

Para ser precisos, en [ARR 99, 3.7] se prueba únicamente que existe un sistema dinámico transitivo en grafos que no sean árboles. Pero una ligera modificación de su construcción proporciona una aplicación transitiva en cualquier grafo.

Lema 3.3.7. *Si \mathbb{S}^1 es la circunferencia unidad, no existe ninguna aplicación d -universal para $\mathcal{W}_{C(\mathbb{S}^1)}$.*

Demostración. Sea $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación d -universal para $\mathcal{W}_{C(\mathbb{S}^1)}$. Por la Proposición 3.3.6 se sigue que para algún $x \in \mathbb{S}^1$, $\omega_\psi(x) \subset \mathbb{S}^1$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , y por tanto igual a \mathbb{S}^1 . En efecto, tomemos cualquier conjunto $Y \subset \mathbb{S}^1$ homeomorfo a \mathbb{S}^1 para el que exista un punto $x \in \mathbb{S}^1 \setminus Y$. Sea J un arco en Y (existe ya que \mathbb{S}^1 contiene un arco) y sea y un punto no final de J . Entonces, $Y \setminus \{y\} \subset \mathbb{S}^1 \setminus \{x, y\}$ es no conexo, y por ende Y no es homeomorfo al círculo (si a \mathbb{S}^1 le quitamos un punto permanece conexo).

Sea $J \subset \mathbb{S}^1$ un arco con puntos finales p, q . Sea f cualquier función transitiva en J que fija los puntos finales p, q . Extendemos f a \mathbb{S}^1 de modo que funciona como la identidad en $\mathbb{S}^1 \setminus J$. En estas condiciones, f es una función continua y posee a J como uno de sus conjuntos ω -límite. Así, usando la d -universalidad de ψ , existe $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $\omega_\psi(y)$ es homeomorfo a J . Pero entonces, los interiores de $\omega_\psi(x)$ y $\omega_\psi(y)$ intersecan y por el Corolario 3.3.2.1 dichos conjuntos son iguales. Esto es una contradicción ya que un círculo y un arco son diferentes. \square

Podemos completar ahora el Corolario 3.3.5.1, teniendo información para cualquier tipo de variedad compacta finito dimensional.

Corolario 3.3.7.1. *Sea \mathbb{M} una variedad compacta m -dimensional ($m \geq 1$). Entonces, $\mathcal{W}_{C(\mathbb{M})}$ admite una aplicación d -universal si y sólo si \mathbb{M} es un arco (y por ende $m = 1$).*

Estudiemos ahora la situación para grafos distintos de \mathbb{S}^1 .

Lema 3.3.8. *Si \mathbb{X} es una 3-estrella. Entonces no existe ninguna aplicación d -universal para $\mathcal{W}_{C(\mathbb{X})}$.*

Demostración. Denotemos mediante b el vértice de \mathbb{X} y con a_1, a_2, a_3 los tres puntos finales de \mathbb{X} . Sean p, q cualquier par de puntos distintos del interior del arco $\overline{ba_3}$ (p está más cerca de b que q). Definimos el conjunto Y como el conjunto obtenido de eliminar en \mathbb{X} el interior del subarco \overline{pq} del arco $\overline{ba_3}$; Y posee dos componenetes: la 3-estrella X' con vértice b y puntos finales a_1, a_2, p , y el arco $J = \overline{qa_3}$.

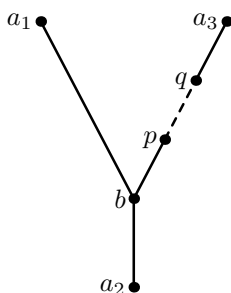


Figura 3.3: Letra Y

Afirmamos que $Y = X' \cup J$ es un conjunto ω -límite para algún endomorfismo continuo definido en \mathbb{X} . Por el Lema 3.6 de [ARR 99] se sigue que existen funciones continuas sobreyectivas $\varphi : J \rightarrow X'$ y $\psi : X' \rightarrow J$ tales que $\psi \circ \varphi$ es transitiva en J . Sea $\xi : \overline{pq} \rightarrow \mathbb{X}$ una función continua tal que $\xi(p) = \psi(p)$, $\xi(q) = \varphi(q)$ (su existencia se sigue de la conexión por arcos de \mathbb{X}). Definimos f en \mathbb{X} como

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in J, \\ \psi(x) & \text{si } x \in X', \\ \xi(x) & \text{si } x \in \overline{pq}. \end{cases}$$

Claramente f es continua. Como $f^2|_J = \psi \circ \varphi$ es transitiva en J y $f(J) = X'$, $f(X') = J$, la función $f|_{X' \cup J}$ es transitiva. En efecto, si $x_0 \in J$ es un punto transitivo para $f^2|_J$, entonces la clausura de $\{f^{2n}(x_0)\}_{n \geq 1}$ es J y por ende la clausura de $\{f^{2n+1}(x_0)\}_{n \geq 1}$ es $f(J) = X'$, así x_0 es un punto transitivo para $f|_{X' \cup J}$ y $\omega_f(x_0) = X' \cup J = Y$.

Sea $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ una aplicación d-universal. Usando el resultado precedente y la Proposición 3.3.6, tenemos que para algún $x, y \in \mathbb{X}$ el conjunto $\omega_\psi(x), \omega_\psi(y)$ es homeomorfo a \mathbb{X}, Y , respectivamente. Como el único vértice de \mathbb{X} es el punto b que está en su interior, $\omega_\psi(x)$ contiene a b en su interior. Análogamente para $\omega_\psi(y)$. Ahora la contradicción se sigue, como en el Lema anterior, por el Corolario 3.3.2.1 y por la no existencia de un homeomorfismo entre \mathbb{X} e Y . \square

Nótese que la prueba anterior puede modificarse fácilmente para demostrar la inexistencia de aplicación d-universal en cualquier grafo \mathbb{X} diferente de un arco con $\text{End}(\mathbb{X}) \neq \emptyset$.

Proposición 3.3.9. *Sea \mathbb{X} un grafo. Entonces, un conjunto cerrado y no vacío $Y \subset \mathbb{X}$ es una retracción de \mathbb{X} si y sólo si es conexo. Es decir, las retracciones de \mathbb{X} son exactamente sus subgrafos.*

Demostración. Por [N 92, 9.10.1] cualquier subcontinuo de \mathbb{X} es un grafo. Ahora, como cualquier subgrafo de \mathbb{X} puede ser construido eliminando una cantidad finita de arcos abiertos en \mathbb{X} , sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Y = \mathbb{X} \setminus \text{Int}(J)$, donde $J \subset \mathbb{X}$ es un arco que no contiene ningún vértice de \mathbb{X} en su interior. Denotemos los puntos finales de J mediante p y q .

Como Y es conexo, existe un subgrafo $Y' \subset Y$ tal que $Y' \cup J$ es una curva cerrada simple, es decir, existe un homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y' \cup J$, donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Podemos suponer que $h(1) = p, h(-1) = q$ y $h([-1, 1]) = J$, donde $[-1, 1] = \{z \in \mathbb{S}^1 : \text{Real}(z) > 0\}$. Ahora una retracción π de \mathbb{X} sobre Y puede definirse como

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y, \\ h(1/h^{-1}(x)) & \text{si } x \in J. \end{cases}$$

\square

Teorema 3.3.10. *Sea \mathbb{X} un grafo. Entonces, $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ admite aplicación d-universal si y sólo si \mathbb{X} es un arco.*

Demostración. El hecho de que el intervalo unidad (y por tanto cualquier arco) admite aplicación d-universal fue probado en [SP 00]. Si \mathbb{X} es una curva cerrada simple o una 3-estrella, entonces no existen aplicaciones d-universales como se comprobó respectivamente en los Lemas 3.3.7 y 3.3.8.

Sea \mathbb{X} un grafo que no sea ni un arco, ni una curva cerrada simple, ni una 3-estrella. Entonces por [N 92, 9.5] el conjunto $B(\mathbb{X})$ de todos los vértices es no vacío.

Como \mathbb{X} admite una aplicación transitiva (véase Proposición 3.3.6), una aplicación d-universal ψ tendría como conjunto ω -límite a $X^* \subset \mathbb{X}$ homeomorfo a \mathbb{X} . El conjunto

X^* contiene un entorno de $B(\mathbb{X})$. (De hecho, cualquier homeomorfismo $\mathbb{X} \rightarrow X^*$ envía biyectivamente $B(\mathbb{X})$ sobre sí mismo y, más aún, preserva el orden de los vértices. Para comprobar esto, nótese que existe una cantidad finita de vértices y que el homeomorfismo considerado no puede mandar un vértice a otro vértice de menor orden.)

Además, ψ tiene un conjunto ω -límite $Y^* \subset \mathbb{X}$ que es una 3-estrella. Para comprobar esto, sea Y cualquier 3-estrella en \mathbb{X} y sea $\pi : X \rightarrow Y$ una retracción (véase Proposición 3.3.9). Por la Proposición 3.3.6 existe una aplicación transitiva $f : Y \rightarrow Y$. Entonces, $f \circ \pi$ es una aplicación continua en \mathbb{X} para la que Y es conjunto ω -límite.

El grafo X^* contiene un entorno de $B(\mathbb{X})$ y el vértice de la 3-estrella Y^* vive en $B(\mathbb{X})$. Se sigue que los interiores (en \mathbb{X}) de los conjuntos X^* e Y^* intersecan (en algún punto distinto del vértice de Y^*). Por el Corolario 3.3.2.1, $X^* = Y^*$, lo que es imposible ya que X^* no es una 3-estrella. \square

3.3.3. Espacios finitos y problemas abiertos

Finalizamos el capítulo mostrando que en el caso de espacios finitos, dotados con la topología discreta, no existen aplicaciones d-universales. Además, planteamos algunos problemas que pueden ser objeto de estudio en el futuro.

Lema 3.3.11. *Si \mathbb{X} es un espacio no degenerado finito dotado de la topología discreta, entonces $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ no admite ninguna aplicación d-universal.*

Demostración. Sea $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ una aplicación d-universal para $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$. La permutación $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_1$ es una aplicación transitiva, así \mathbb{X} es un conjunto ω -límite. Su única copia homeomorfa en \mathbb{X} es el conjunto \mathbb{X} (por razones de cardinalidad), así para algún x se tiene $\mathbb{X} = \omega_\psi(x)$. Además, $Y = \{x_1\}$ es un conjunto ω -límite (basta tomar una aplicación constante), así para algún $y \in \mathbb{X}$, $\omega_\psi(y)$ es homeomorfo a Y . Pero como $\text{Int}(\omega_\psi(x)) \cap \text{Int}(\omega_\psi(y)) \neq \emptyset$, el Corolario 3.3.2.1 implica que $\omega_\psi(x) = \omega_\psi(y)$, es decir, \mathbb{X} es un espacio degenerado. \square

Problema 3.3.12. Sea \mathbb{X} un espacio compacto cero-dimensional (es decir, posee una base de abiertos y cerrados). ¿Será verdad que $\mathcal{W}_{\mathcal{C}(\mathbb{X})}$ admite una aplicación d-universal? Quizás tal aplicación podría construirse análogamente a la presentada en [SP 00]. Sugérimos para el futuro analizar qué ocurre en espacios contables y conjuntos tipo Cantor.

Problema 3.3.13. ¿Existe una dendrita que admita una aplicación d-universal para los conjuntos ω -límite generados por todas las funciones continuas definidas sobre ella?

Conjeturamos que la respuesta es con mucha probabilidad negativa. Esto puede probarse análogamente a como se hizo para aplicaciones definidas en grafos si, por ejemplo, la dendrita contiene al menos uno, pero sólo una cantidad finita, de vértices de orden

3 (o 4 o 5 ...). Entonces es suficiente usar el hecho de que cualquier subgrafo es una retracción de una dendrita y buscar dos subgrafos no homeomorfos que sean copias homeomorfas respectivamente de otros que posean un punto interior en común (por ejemplo un vértice de orden 3). Así la prueba sería similar a la del Teorema 3.3.10.

Las dendritas que quedan son aquellas que para cada $m \geq 3$, o poseen una cantidad infinita, o no poseen vértices de orden m . Si, por ejemplo, una dendrita \mathbb{X} posee una cantidad infinita de vértices de orden 4, entonces probablemente contendrá una cantidad no numerable de subdendritas no homeomorfas (que serán todas retracciones de la dendrita original y son espacios transitivos) y podremos deducir una contradicción en el mismo modo que en el Teorema 3.3.5.

Capítulo 4

Clausura Hausdorff de $\mathcal{W}(\psi)$

En este Capítulo estudiaremos el problema (P3) para la clase de las aplicaciones triangulares definidas en \mathbb{I}^2 . Como ya se comentó en la Introducción, en 1996 A. Blokh et al. (véase [BBHS 96]) estudiaron las propiedades de clausura en la topología métrica de Hausdorff (d_H) en \mathbb{I} , de la familia $\mathcal{W}(f)$ de todos los conjuntos ω -límite producidos por una función continua f definida en el intervalo. Obtuvieron que $\mathcal{W}(f)$ es un conjunto compacto en el espacio de todos los subconjuntos cerrados de \mathbb{I} , $(\mathcal{K}(\mathbb{I}), d_H)$, dotado de la métrica de Hausdorff.

En [BBHS 96] se pone de manifiesto, para $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$, el interés de considerar la clausura de $\mathcal{W}(\psi)$ en $(\mathcal{K}(\mathbb{X}), d_H)$, ya que por un lado, existe relación entre la propiedad de d_H -clausura de $\mathcal{W}(\psi)$ y las propiedades caóticas de la aplicación $x \rightarrow \omega_\psi(x)$. Por otro lado, en el caso en que $\mathcal{W}(\psi)$ sea d_H -cerrado, tenemos un método para la construcción de conjuntos ω -límite a través del uso de sucesiones d_H -convergentes de conjuntos ω -límite. En efecto, si $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ y $\mathcal{W}(\psi)$ es d_H -compacto, dada una sucesión $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{W}(\psi)$ d_H -convergente a un conjunto $A \subseteq \mathbb{X}$, entonces existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $A = \omega_\psi(x)$.

4.1. El caso bidimensional: $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$

Como comentario general puede decirse que, al contrario de lo que ocurre en el caso unidimensional, la propiedad de clausura de $\mathcal{W}(F)$ en $(\mathcal{K}(\mathbb{I}^2), d_H)$ donde $F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, no es válida, e incluso pueden construirse ciertos ejemplos sencillos, mostrando la no compacidad, dentro de la clase de las aplicaciones triangulares. Por ejemplo, basta tomar

como función base f la identidad sobre \mathbb{I} y como función fibra una función transitiva g_x , para cada $x \in \mathbb{I}$ (es decir, existe $y \in \mathbb{I}$ tal que $\omega_{g_x}(y) = \mathbb{I}$), satisfaciendo $g_x \rightarrow Id|_{I_0}$ cuando $x \searrow 0$.

El hecho de que la propiedad de cierre no se verifique en el ejemplo anterior y, probablemente, para la mayoría de las transformaciones bidimensionales no es ninguna sorpresa ya que, informalmente hablando, el conjunto ω -límite *global* (es decir, la unión de los conjuntos ω -límite de todos los puntos del espacio) es “muy grande”. En particular, en el ejemplo anterior, el ω -límite global es $\mathbb{I}^2 \setminus I_0$.

Centremos nuestra atención en elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ que poseen una dinámica cercana a la de las funciones del intervalo. Es decir, consideremos aplicaciones triangulares en \mathbb{I}^2 que producen conjuntos ω -límite sólo en una fibra que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es la fibra I_0 (para detalles sobre esta clase de aplicaciones triangulares véanse, por ejemplo, [KS 92/93], [BGM 01] o [BGM 02]). Para este tipo de aplicaciones triangulares, existen ejemplos (los presentados en el Capítulo 2, Sección 2.1.1 y en el Capítulo 3, Sección 3.2.1) donde la propiedad de clausura en la métrica de Hausdorff se satisface para la familia de todos los conjuntos ω -límite. Por tanto, si definimos mediante $\mathcal{C}_\Delta^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$ a la familia de las aplicaciones triangulares F que satisfacen la propiedad de que $\mathcal{W}(F) \subset I_0$, parece razonable conjeturar que para los elementos F de esa subclase, que poseen un comportamiento dinámico cercano al unidimensional, se satisfaga que $\mathcal{W}(F)$ es d_H -cerrado. El análisis de esta cuestión será objeto de estudio en la siguiente sección.

4.2. El caso triangular: $\mathcal{C}_\Delta^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$

En esta sección mostraremos que, en contra de la evidencia, la propiedad de clausura en la métrica de Hausdorff no se mantiene en la clase $\mathcal{C}_\Delta^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$. Para ello construiremos el oportuno contraejemplo. La idea es encontrar un elemento F en $\mathcal{C}_\Delta^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$, de modo que exista una sucesión de puntos $\{(p_i, q_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, tales que la sucesión de sus conjuntos ω -límite d_H -converge a un conjunto de la forma $\{0\} \times [a, b]$ en la fibra I_0 . Por otro lado, y destacamos este punto, obtenemos una propiedad sobre los conjuntos ω -límite de F (véase Lema 4.2.6) que nos permite probar que no existe ningún punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2$ tal que $\omega_F(p, q) = \{0\} \times [a, b]$. Por tanto, $\mathcal{W}(F)$ no será un conjunto d_H -cerrado en $\mathcal{K}(\mathbb{I}^2)$.

4.2.1. Construcción del elemento de $\mathcal{C}_\Delta^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$

En lo que sigue, denotaremos mediante π_i , $i \in \{1, 2\}$, a las *proyecciones canónicas* de \mathbb{I}^2 sobre \mathbb{I} . Para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$ y por razones técnicas, consideremos ε_i y δ_i elegidos del siguiente modo:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^{2i+10}}, \quad \delta_i = \frac{1 - \lambda_i}{2^{i+10}} \quad \text{donde} \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^{j+10}}.$$

Sea J_i el intervalo $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$. Dividámoslo en 2^{i+10} subintervalos de la forma:

$$J_i = \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}} \right] = \bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} \left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n+1)\varepsilon_i \right].$$

Por otro lado, para cada $n \in \{0, \dots, 2^{i+10} - 1\}$, consideramos las zonas de \mathbb{I}^2 :

- (a) $A_{n,1}^i = \left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n + \frac{1}{2})\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I}$,
- (b) $A_{n,2}^i = \left[\frac{1}{2^i} + (n + \frac{1}{2})\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n+1)\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I}$.

Se deduce inmediatamente que

$$(c) J_i \times \mathbb{I} = \bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} \left[\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i, \frac{1}{2^i} + (n+1)\varepsilon_i \right] \times \mathbb{I} = \bigcup_{n=0}^{2^{i+10}-1} (A_{n,2}^i \cup A_{n,1}^i).$$

Definición 4.2.1. *Tras hacer las divisiones previas en \mathbb{I} , introducimos la siguiente aplicación triangular en \mathbb{I}^2 :*

$$F : (x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$$

donde

(A) $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es la función base tipo Kolyada para la sucesión de ε_i descrita previamente.

(B) $g : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$

(b₁) Si i es impar ($n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$):

- Si $(x, y) \in A_{n,2}^i$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) + \delta_i & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) - \delta_i.$$

- Si $(x, y) \in A_{n,1}^i$, entonces

- Si $n = 0$,

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) + \delta_{i+1} & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_{i+1}.$$

- Si $n > 0$,

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) - \delta_i & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) + \delta_i.$$

(b₂) Si i es par ($n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$):

- Si $(x, y) \in A_{n,2}^i$, entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) - \delta_i & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) + \delta_i.$$

- Si $(x, y) \in A_{n,1}^i$, entonces

- Si $n = 0$,

$$g(x, y) = \begin{cases} y + \frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) - \delta_{i+1} & \text{si } y \in [M, 1], \\ 0 & \text{si } y \in [0, M]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = -\frac{2\delta_{i+1}}{\varepsilon_i} \left(x - \frac{1}{2^i} \right) + \delta_{i+1}.$$

- Si $n > 0$,

$$g(x, y) = \begin{cases} y - \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) + \delta_i & \text{si } y \in [0, M], \\ 1 & \text{si } y \in [M, 1]. \end{cases}$$

$$\text{donde } M = 1 + \frac{2\delta_i}{\varepsilon_i} \left(x - \left(\frac{1}{2^i} + n\varepsilon_i \right) \right) - \delta_i.$$

Observación 4.2.1.1. El comportamiento dinámico de la aplicación F , anteriormente definida, puede resumirse como sigue y será verificado en la siguiente sección (véase Lema 4.2.3).

Sea (p, q) un punto en $J_i \times \mathbb{I}$, $i \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces, su órbita puede pensarse como el movimiento de una cierta “onda discreta” cuya amplitud disminuye a partir de $J_{i+2} \times \mathbb{I}$ (véase Figura 4.1).

Notemos que cuando el punto (p, q) pertenece a $J_i \times \mathbb{I}$ con i impar (respectivamente i par), sus iteradas sufren una disminución (respectivamente un aumento) de su tendencia de crecimiento en altura hasta alcanzar las zonas $A_{0,1}^i$ o $A_{2^{i+11}-1,2}^{i+1}$, donde esta tendencia de crecimiento se invierte.

Cuando i es impar y (p, q) no pertenece a $A_{0,1}^i$ o i es par y (p, q) pertenece $A_{0,1}^i$, si el valor de M asociado a (p, q) en la definición de F , denotado por $M(p, q)$, es cero (véase Figura 4.1 punto ■), la onda es una línea horizontal y por tanto su amplitud total es cero.

Por un lado, si suponemos que las iteradas de (p, q) no intersecan con $\mathbb{I} \times \{0\}$ entonces:

- (a) si $M(p, q)$ es igual a δ_i , la amplitud inicial de la onda (diferencia en altura entre su primera cima y valle (véase Definición 4.2.4)) es la mayor de todas las amplitudes parciales (diferencia en altura entre cima y valle consecutivos) e igual a $1 - \lambda_{i+1}$ (véase Figura 4.1 punto ●);
- (b) si $M(p, q) \in (0, \delta_i)$ (véase Figura 4.1 punto ▼), la amplitud inicial de la onda toma valores entre cero y $1 - \lambda_{i+1}$.

Por otro lado, la órbita de (p, q) puede intersectar a $J_i \times \{0\}$. Si $F^n(p, q)$ es la primera iterada en zona $J_i \times \mathbb{I}$, perteneciendo a $J_i \times \{0\}$, las siguientes iteradas $F^k(p, q)$, $k \geq n$, permanecen en $J_i \times \{0\}$ hasta alcanzar la siguiente zona $J_{i+1} \times \mathbb{I}$ (véase por ejemplo en la Figura 4.1 el punto ▲).

Cuando $(p, q) \in A_{0,1}^i$ con i impar, o $(p, q) \notin A_{0,1}^i$ con i par, tenemos una situación análoga para $M(p, q) \in [1 - \delta_i, 1]$.

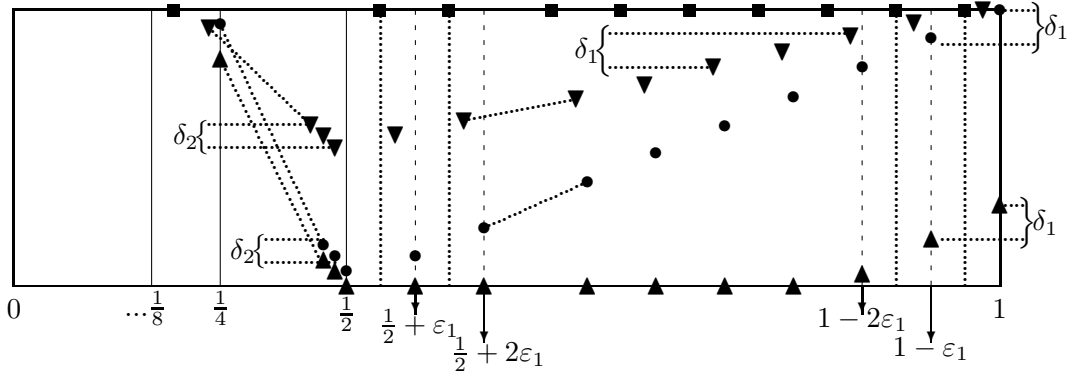


Figura 4.1: Iteradas de F

Nota 4.2.2. Sobre la Figura 4.1 destacamos que, para cada punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$, la diferencia en altura entre dos iteradas consecutivas en zona $J_i \times \mathbb{I}$ es la misma mientras que ninguna de ellas intersekte a $\mathbb{I} \times \{0\}$ (si i es impar) o $\mathbb{I} \times \{1\}$ (si i es par).

4.2.2. Análisis de la dinámica

En esta sección analizamos la dinámica de la aplicación F . El siguiente resultado, cuya prueba es análoga a la del Lema 3.2.4 para otros valores de δ_i , por un lado, establece cotas para la diferencia en altura entre cada dos iteradas consecutivas por F de un punto de $\mathbb{I}^2 \setminus I_0$ y, por otra parte, describe su forma.

Lema 4.2.3. *Sea $(p, q) \in J_{i_0} \times \mathbb{I}$. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades donde $i_0, i_1 \geq 1$ y $k \geq 0$ son enteros:*

(a) Si $F^k(p, q) \in J_{i_1} \times \mathbb{I}$:

$$(a_1) \quad 0 \leq |\pi_2(F^k(p, q)) - \pi_2(F^{k+1}(p, q))| \leq M(F^k(p, q)) \text{ si } i_1 \text{ es impar,}$$

$$(a_2) \quad 0 \leq |\pi_2(F^k(p, q)) - \pi_2(F^{k+1}(p, q))| \leq 1 - M(F^k(p, q)) \text{ si } i_1 \text{ es par,}$$

donde $M(F^k(p, q))$ es, respectivamente, $\frac{M(p, q)\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}}$ si i_0 e i_1 son ambos impares, $\frac{(1-M(p, q))\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}}$ si i_0 es par e i_1 es impar, $1 - \frac{M(p, q)\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}}$ si i_0 es impar e i_1 es par y $1 - \frac{(1-M(p, q))\delta_{i_1}}{\delta_{i_0}}$ si i_0 e i_1 son ambos pares.

(b) Consideremos $i \geq i_0 + 1$, $F^{k_i}(p, q)$ la primera iterada de (p, q) en $J_i \times \mathbb{I}$ y $n \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$. Entonces:

(b₁) Si $(p, q) \in A_{n,2}^{i_0}$ y $j \in \{0, 1, \dots, 2^{i+10} - 1\}$:

$$1) \quad \pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \geq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q)), \text{ si } i \text{ es impar.}$$

$$2) \quad \pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \leq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q)), \text{ si } i \text{ es par.}$$

(b₂) Si $(p, q) \in A_{n,1}^{i_0} \setminus (\{\frac{1}{2^{i_0}} + n\varepsilon_{i_0}\} \times \mathbb{I})$ y $j \in \{-1, 0, 1, \dots, 2^{i+10} - 2\}$:

$$1) \quad \pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \geq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q)), \text{ si } i \text{ es impar.}$$

$$2) \quad \pi_2(F^{k_i+j}(p, q)) \leq \pi_2(F^{k_i+j+1}(p, q)), \text{ si } i \text{ es par.}$$

Definición 4.2.4. *Sea $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Diremos que la iterada $F^k(p, q)$, $k > 0$ entero, es una cima del punto (p, q) (respectivamente un valle) si*

$$\pi_2(F^{k-1}(p, q)) < \pi_2(F^k(p, q)) > \pi_2(F^{k+1}(p, q))$$

$$(\text{ respectivamente } \pi_2(F^{k-1}(p, q)) > \pi_2(F^k(p, q)) < \pi_2(F^{k+1}(p, q))).$$

Observación 4.2.4.1. Destacamos los siguientes hechos:

(a) En general, cuando un punto $(x, y) \in I_{\frac{1}{2^i}}$, i entero positivo, consideramos el punto en $J_{i+1} \times \mathbb{I}$ para su proceso de iteración mediante F .

(b) Por la definición de F y el Lema 4.2.3, para cada punto $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ tal que $M(p, q) \notin \{0, 1\}$, existe una cantidad infinita de valles y cimas que se siguen alternativamente una a otra. Es más, por la parte (b) del Lema 4.2.3 si $\pi_2(F^k(p, q))$ es un valle (respectivamente una cima) y $\pi_2(F^{k'}(p, q))$, $k < k'$, es la cima consecutiva (respectivamente el valle consecutivo), para cada entero l , $k \leq l \leq k'$, se tiene $\pi_2(F^k(p, q)) \leq \pi_2(F^l(p, q)) \leq \pi_2(F^{k'}(p, q))$ (respectivamente $\pi_2(F^k(p, q)) \geq \pi_2(F^l(p, q)) \geq \pi_2(F^{k'}(p, q))$).

Lema 4.2.5. *Sea $i \in 2\mathbb{N}^*$ donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces:*

$$F^{\sum_{j=1}^k 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i}, 1 \right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2^{i+k}}, \xi_{i,k} \right) & \text{si } k \text{ es impar,} \\ \left(\frac{1}{2^{i+k}}, 1 + \xi_{i,k} \right) & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

donde $\xi_{i,k} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \lambda_{i+j}$ y $\sum_{j=1}^k 2^{i+j+10} = 0$ si $k = 0$.

Demostración. Primero, es inmediato por las definiciones que

$$\xi_{i,k} = \frac{1}{2^{10}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^i} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) \right) \quad (k \text{ impar}) \quad (4.1)$$

y

$$1 + \xi_{i,k} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^{i+10}} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \quad (k \text{ par}). \quad (4.2)$$

Por (4.1) y (4.2), para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $\xi_{i,k}$ y $1 + \xi_{i,k}$ pertenecen a \mathbb{I} . Así, como $d(I_{\frac{1}{2^{i+k}}}, I_{\frac{1}{2^{i+k-1}}}) = \frac{1}{2^{i+k}}$ y $\frac{1}{2^{i+k}} = \varepsilon_{i+k} 2^{i+k+10}$, por la definición de f ,

$$f^{2^{i+k+10}} \left(\frac{1}{2^{i+k-1}} \right) = \frac{1}{2^{i+k-1}} - 2^{i+k+10} \varepsilon_{i+k} = \frac{1}{2^{i+k}}. \quad (4.3)$$

Para establecer el resultado procederemos por inducción sobre k . El caso $k = 0$ es claro ya que F^0 es la aplicación identidad. Supongamos que $k = 1$. Entonces, la iterada de $(\frac{1}{2^i}, 1)$ de orden $\sum_{j=1}^1 2^{i+j+10}$ es $F^{2^{i+11}}(\frac{1}{2^i}, 1)$. Ahora, estudiamos cada coordenada separadamente. Para la primera tenemos, por (4.3), $f^{2^{i+11}}(\frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2^{i+1}}$ y para la segunda,

$$\pi_2 \left(F^{2^{i+11}} \left(\frac{1}{2^i}, 1 \right) \right) = 1 - 2^{i+11} \delta_{i+1} = \lambda_{i+1},$$

probando el caso $k = 1$. Supongamos, como hipótesis de inducción, que el resultado es cierto para $k - 1 \geq 0$ y probaremos que funciona para k . De nuevo, estudiamos cada coordenada separadamente. Por la hipótesis de inducción y (4.3), la primera coordenada satisface

$$f^{\sum_{j=1}^k 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i} \right) = f^{2^{i+k+10}} \left(f^{\sum_{j=1}^{k-1} 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i} \right) \right) = f^{2^{i+k+10}} \left(\frac{1}{2^{i+k-1}} \right) = \frac{1}{2^{i+k}}.$$

Ahora, analicemos qué ocurre con la segunda coordenada. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que k es par, el caso k impar es análogo usando la parte adecuada de la expresión de la hipótesis de inducción.

Como $k - 1$ es impar, por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \pi_2 \left(F^{\sum_{j=1}^k 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i}, 1 \right) \right) &= \pi_2 \left(F^{2^{i+k+10}} \left(F^{\sum_{j=1}^{k-1} 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i}, 1 \right) \right) \right) \\ &= \pi_2 \left(F^{2^{i+k+10}} \left(\frac{1}{2^{i+k-1}}, \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \lambda_{i+j} \right) \right), \end{aligned}$$

de donde, por (4.3), los hechos $\xi_{i,k}$, $1 + \xi_{i,k} \in \mathbb{I}$ y la definición de F obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_2 \left(F^{\sum_{j=1}^k 2^{i+j+10}} \left(\frac{1}{2^i}, 1 \right) \right) &= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \lambda_{i+j} + 2^{i+k+10} \delta_{i+k} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \lambda_{i+j}, \end{aligned}$$

lo que establece el paso inductivo y finaliza la prueba. \square

Observación 4.2.5.1. Por el Lema 4.2.3 parte (b) y el Lema 4.2.5, no es difícil notar que las sucesiones de valles y cimas de un punto $(\frac{1}{2^i}, 1)$, $i \in 2\mathbb{N}^*$, son respectivamente

$$\begin{aligned} \{(T_k, t_k)\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+1} &= \left\{ \left(\frac{1}{2^{i+k}}, \xi_{i,k} \right) \right\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+1} \quad (\text{valles}) \\ \{(C_k, c_k)\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+2} &= \left\{ \left(\frac{1}{2^{i+k}}, 1 + \xi_{i,k} \right) \right\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+2} \quad (\text{cimas}). \end{aligned}$$

Lema 4.2.6. Si $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$, la aplicación triangular F satisface las siguientes propiedades:

- (a) si $M(p, q) \in \{0, 1\}$, entonces $\omega_F(p, q) = \{(0, q)\}$,
- (b) si $M(p, q) \notin \{0, 1\}$, entonces $(0, 1) \notin \omega_F(p, q)$.

donde $M(p, q)$ es el valor de M asociado a (p, q) por la Definición 4.2.1.

Demostración. (a) Por la definición de F y el Lema 4.2.3 parte (a), si $M(p, q) \in \{0, 1\}$ entonces, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $F^k(p, q) = (a_k, q)$ con $a_k \neq 0$ y $a_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por tanto, obtenemos que $\omega_F(p, q) = \{(0, q)\}$.

(b) Sea i_0 un entero positivo tal que $(p, q) \in J_{i_0} \times \mathbb{I}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que i_0 es impar. En el caso i_0 par, el siguiente razonamiento sería análogo usando $i_0 + 2l - 1$ en lugar de $i_0 + 2l$, con $l \geq 2$ entero. Esto se probará en dos pasos. Primero, mostraremos que la sucesión de las segundas coordenadas de las cimas de (p, q) mediante F es estrictamente decreciente (es cierto también, y la prueba es análoga, que la sucesión de las segundas coordenadas de los valles de (p, q) mediante F es estrictamente creciente). En efecto, fijamos un entero $l \geq 2$. Como $M(p, q) \notin \{0, 1\}$, por el Lema 4.2.3 parte (b), existe $F^k(p, q)$, $k \in \mathbb{N}$, una cima de (p, q) en el conjunto $A_{2^{i_0+2l+10}-1, 2}^{i_0+2l} \cup A_{0, 1}^{i_0+2l-1} \setminus (\{\frac{1}{2^{i_0+2l-1}}\} \times \mathbb{I})$. En ambas situaciones, la siguiente cima del punto (p, q) mediante F se alcanza en $F^{k'}(p, q)$, donde $k' = k + 2^{i_0+2l+10} + 2^{i_0+2l+11}$. Ahora, por el Lema 4.2.3 parte (a) (expresión de $M(F^k(p, q))$) y Observación 4.2.4.1 parte (b), para esta nueva cima se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_2(F^{k'}(p, q)) &= \pi_2(F^k(p, q)) - 2^{i_0+2l+10} \frac{M(p, q)\delta_{i_0+2l}}{\delta_{i_0}} + 2^{i_0+2l+11} \frac{M(p, q)\delta_{i_0+2l+1}}{\delta_{i_0}} \\ &= \pi_2(F^k(p, q)) + \frac{M(p, q)}{\delta_{i_0}} (-\lambda_{i_0+2l} + \lambda_{i_0+2l+1}). \end{aligned}$$

Como $\lambda_{i_0+2l} < \lambda_{i_0+2l+1}$, entonces $\pi_2(F^{k'}(p, q)) < \pi_2(F^k(p, q))$, obteniendo lo deseado.

Ahora, como segundo paso mostraremos que $(0, 1) \notin \omega_F(p, q)$. Como hicimos antes, para cada entero $l \geq 2$ sea (α_l, β_l) la cima de (p, q) existente en $A_{2^{i_0+2l+10}-1, 2}^{i_0+2l} \cup (A_{0, 1}^{i_0+2l-1} \setminus (\{\frac{1}{2^{i_0+2l-1}}\} \times \mathbb{I}))$. Por el primer paso $\beta_2 < \beta_1 \leq 1$. Sea $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2^{i_0+3}}, 1 - \beta_2\} > 0$. Supongamos que el punto $(0, 1) \in \omega_F(p, q)$. Entonces, existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$0 < d(F^s(p, q), (0, 1)) < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Por tanto, $|\pi_2(F^s(p, q)) - 1| < \varepsilon \leq 1 - \beta_2$ y, como $0 \leq \pi_2(F^s(p, q)) \leq 1$, obtenemos $1 - \pi_2(F^s(p, q)) < 1 - \beta_2$, de donde operando concluimos que

$$\beta_2 < \pi_2(F^s(p, q)). \quad (4.5)$$

Sea i_1 un entero positivo tal que $F^s(p, q) \in J_{i_1} \times \mathbb{I}$. Por (4.4) y la definición de ε , $f^s(p) < \frac{1}{2^{i_0+3}}$. Así, $i_1 \geq i_0 + 4$. En esta situación, el primer paso y la parte (b) de la Observación 4.2.4.1 garantizan que ocurre $\pi_2(F^s(p, q)) \leq \beta_2$ lo que no es posible por (4.5). Así, $(0, 1) \notin \omega_F(p, q)$ y (b) queda probado. \square

Lema 4.2.7. *Sea $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Si $\{(\alpha'_k, \beta'_k)\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+1}$ y $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k \in 2\mathbb{N}^*+2}$ son, respectivamente, sus sucesiones de valles y cimas mediante F , y si existen los límites $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta'_k = \beta'$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 1$) y $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 2$), entonces $\omega_F(p, q) = \{0\} \times [\beta', \beta]$.*

Demostración. Fijamos $(0, c) \in \{0\} \times [\beta', \beta]$ y $\varepsilon > 0$. Sean $i_0, i_1 \in \mathbb{N}^*$ enteros positivos tales que $(p, q) \in J_{i_0} \times \mathbb{I}$ y $\frac{1}{2^{i_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, sea $\Delta = \max\{i_0 + 1, i_1 + 1\}$ y definamos

$$i_2 = \begin{cases} \Delta & \text{si } \Delta \text{ es impar,} \\ \Delta + 1 & \text{si } \Delta \text{ es par} \end{cases}.$$

Como $c \in [\beta', \beta]$, por el primer paso de la parte (b) de la prueba del Lema 4.2.6 y de la parte (a) del Lema 4.2.3 existe (x, y) , iterado de (p, q) por F , tal que:

$$(x, y) \in J_{i_2} \times \mathbb{I} \quad (4.6)$$

y

$$0 \leq |y - c| \leq M(x, y) \leq \delta_{i_2} < \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.7)$$

En estas condiciones, (4.6) garantiza la desigualdad

$$0 < x \leq \frac{1}{2^{i_2-1}} \leq \frac{1}{2^{i_1}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.8)$$

Por (4.7) y (4.8),

$$0 < d((x, y), (0, c)) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \leq x + |y - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde obtenemos $\{0\} \times [\beta', \beta] \subseteq \omega_F(p, q)$.

Por otro lado, sea $(\gamma, \delta) \notin \{0\} \times [\beta', \beta]$. Ahora, existen dos posibilidades:

- (a) **Caso $\gamma \neq 0$.** Como $f^n(p) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\gamma \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\gamma - f^{n_0}(p) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{\gamma - f^{n_0}(p)}{2} > 0$. Entonces, como la anterior convergencia es estrictamente decreciente, obtenemos

$$\gamma - f^n(p) \geq \gamma - f^{n_0}(p) > \frac{\gamma - f^{n_0}(p)}{2} = \varepsilon$$

para cada entero $n \geq n_0$. Así, $d((\gamma, \delta), F^n(p, q)) \geq \gamma - f^n(p) > \varepsilon$ para cada entero $n \geq n_0$ y esto implica $(\gamma, \delta) \notin \omega_F(p, q)$.

- (b) **Caso $\gamma = 0$ y $\delta \notin [\beta', \beta]$.** Sea $h > 0$ la distancia entre $\{0\} \times [\beta', \beta]$ y $\{(0, \delta)\}$. Consideremos $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta'_k = \beta'$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 1$) y $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 2$), existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|\beta_k - \beta| < \varepsilon \quad \text{para cada } k \in 2\mathbb{N}^* + 2, k \geq k_0$$

y

$$|\beta'_k - \beta'| < \varepsilon \quad \text{para cada } k \in 2\mathbb{N}^* + 1, k \geq k_0.$$

Sea $k_1 \in 2\mathbb{N}^* + 2$ y $k_2 \in 2\mathbb{N}^* + 1$ tales que $k_1, k_2 \geq k_0$. Entonces:

$$\beta_{k_1} < \varepsilon + \beta \quad \text{y} \quad \beta' - \varepsilon < \beta'_{k_2}. \quad (4.9)$$

Ahora, existen $s_{k_1}, s_{k_2} \in \mathbb{N}^*$ tales que $\beta_{k_1} = F^{s_{k_1}}(p, q)$ y $\beta'_{k_2} = F^{s_{k_2}}(p, q)$. Sea $s_{k_0} = \max\{s_{k_1}, s_{k_2}\}$. Entonces, por el primer paso de la prueba del Lema 4.2.6, la parte (b) de la Observación 4.2.4.1 y (4.9),

$$\beta' - \varepsilon < \beta'_{k_2} \leq \pi_2(F^s(p, q)) \leq \beta_{k_1} < \varepsilon + \beta$$

para cada entero $s \geq s_{k_0}$. Por tanto,

$$d(F^s(p, q), (\gamma, \delta)) \geq |\pi_2(F^s(p, q)) - \delta| > \varepsilon$$

para cada entero $s \geq s_{k_0}$. Así, $(\gamma, \delta) \notin \omega_F(p, q)$.

Por (a) y (b) mostramos que $\omega_F(p, q) \subseteq \{0\} \times [\beta', \beta]$ y la prueba finaliza. \square

4.2.3. Resolución de (P3) en $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$

Tras analizar en la sección anterior la dinámica de F , pasamos a probar que no satisface la propiedad de clausura en la métrica de Hausdorff para sus conjuntos ω -límite.

Teorema 4.2.8. *La aplicación continua F introducida en la Definición 4.2.1 satisface las siguientes propiedades:*

(A) *Existe una sucesión de puntos $\{(p_i, q_i)\}_{i \in 2\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{I}^2 \setminus I_0$ tal que:*

$$(\mathcal{A}_1) \quad \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [a_i, b_i] \text{ con } b_i - a_i = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

$$(\mathcal{A}_2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1] \text{ en la topología de Hausdorff de } \mathbb{I}^2.$$

(B) $\omega_F(p, q) \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1]$ para cada $(p, q) \in \mathbb{I}^2$.

Demostración. (A) Sea $\{(p_i, q_i)\}_{i \in 2\mathbb{N}^*} = \{(\frac{1}{2^i}, 1)\}_{i \in 2\mathbb{N}^*}$. Por la Observación 4.2.5.1, para cada punto (p_i, q_i) de la anterior sucesión, conocemos la expresión de sus valles y cimas mediante F . Por el Lema 4.2.7, si existen los límites $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 1$) y $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 2$), entonces $\omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times [t, c]$. Ahora, por (4.1) y (4.2) respectivamente,

$$t_k = \xi_{i,k} = \frac{1}{2^{10}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^i} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) \right) \quad (k \in 2\mathbb{N}^* + 1)$$

y

$$c_k = 1 + \xi_{i,k} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^{i+10}} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \quad (k \in 2\mathbb{N}^* + 2).$$

Por tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \frac{1}{2^{10}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^i}\right)$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 1$) y $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^{i+10}}$ ($k \in 2\mathbb{N}^* + 2$). Entonces, usando el razonamiento previo se verifica

$$\omega_F(p_i, q_i) = \{0\} \times \left[\frac{1}{2^{10}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^i}\right), 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^{i+10}} \right],$$

lo que establece (\mathcal{A}_1) . Para probar (\mathcal{A}_2) , calculamos los siguiente límites puntuales que en este caso coincide con el límite en la topología métrica de Hausdorff de \mathbb{I}^2 (véase [E 90])

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_F(p_i, q_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\{0\} \times \left[\frac{1}{2^{10}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^i}\right), 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^{i+10}} \right] \right) \\ &= \{0\} \times \left[\frac{1}{2^{10}}, 1 \right]. \end{aligned}$$

(B) Como F es una aplicación continua en \mathbb{I}^2 , entonces I_0 es una fibra de puntos fijos. Por tanto, para cada $(0, q) \in I_0$, $\omega_F(0, q) = \{(0, q)\} \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1]$. Sea ahora $(p, q) \in \mathbb{I}^2 \setminus I_0$. Por el Lema 4.2.6 parte (a), si $M(p, q) \in \{0, 1\}$, entonces $\omega_F(p, q) = \{(0, q)\} \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1]$. Por otro lado, si $M(p, q) \notin \{0, 1\}$, entonces por el Lema 4.2.6 parte (b) el punto $(0, 1)$ no pertenece a $\omega_F(p, q)$ y por tanto $\omega_F(p, q) \neq \{0\} \times [\frac{1}{2^{10}}, 1]$. \square

Corolario 4.2.8.1. *La familia $\mathcal{W}(F)$, donde $F \in \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$ es la anterior aplicación triangular, no es cerrada en $(\mathcal{K}(\mathbb{I}^2), d_H)$.*

Observación 4.2.8.1. Una vez comprobado que la propiedad de d_H -clausura no se verifica en $\mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$, e incluso tampoco en $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{fib}}(\mathbb{I}^2)$, proponemos analizar en el futuro lo que ocurre con la clase de endomorfismos continuos de permutación en \mathbb{I}^2 ,

$$\mathcal{C}(\mathbb{I}^2) = \{F : (x, y) \rightarrow (g(y), f(x)) : F \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^2)\}.$$

Dado que esta clase de aplicaciones posee, como consecuencia de su especial morfología, ciertas similitudes con la dinámica de las funciones unidimensionales (véanse, por ejemplo, [BL 00], [BL 01] o [BL 02]), sería interesante analizar la veracidad o no, de la propiedad de clausura en la métrica de Hausdorff, d_H , para la familia de todos los conjuntos ω -límite generados por elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$.

Capítulo 5

Caracterizando $h(F) = 0$ en $\mathcal{C}_{\Delta}^*(\mathbb{I}^2)$

Como ya comentamos en la introducción, mediante $\mathcal{C}_{\Delta}^*(\mathbb{I}^2)$ denotaremos a la clase de las aplicaciones triangulares que poseen una función base f satisfaciendo la propiedad de ser $\text{Per}(f)$ cerrado.

Dada una aplicación $F \in \mathcal{C}_{\Delta}(\mathbb{I}^2)$ consideremos las siguientes propiedades dinámico-topológicas:

- (1) la entropía topológica de F es cero ($h(F) = 0$);
- (2) la entropía topológica de $F|_{\text{Rec}(F)}$ es cero ($h(F|_{\text{Rec}(F)}) = 0$);
- (3) $F|_{\text{Rec}(F)}$ es no caótica;
- (4) cada punto recurrente de F es uniformemente recurrente ($\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$);
- (5) los periodos de todos los puntos periódicos son una potencia de dos ($F \leq 2^{\infty}$).

Es bien conocido que las propiedades (1) - (5) son equivalentes para las funciones continuas del intervalo unidad (véase [SKSF 97]). Tal equivalencia establece una útil caracterización de la propiedad de entropía topológica cero que, como es sabido, es un signo de simplicidad dinámica.

5.1. Estado del problema en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$

En 1989, A.N. Sharkovskii y S.F. Kolyada (véase [SK 91]) formularon el problema de estudiar las relaciones existentes entre las propiedades (1) – (5) en el contexto de las aplicaciones triangulares del cuadrado unidad. Como primer comentario, hemos de decir que, en general, para $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ las propiedades (1)-(5) no son mutuamente equivalentes. Por ejemplo en [BEL 95], se contruye una aplicación triangular en \mathbb{I}^2 de clase $\leq 2^\infty$ pero que posee entropía topológica positiva y puntos recurrentes que no son uniformemente recurrentes, es decir, se prueba que (5) $\not\Rightarrow$ (1) y (5) $\not\Rightarrow$ (4) (este mismo resultado es presentado en [Ko 92] pero la peculiaridad que introduce [BEL 95] es que los autores proporcionan un método que permite construir para cada k entero positivo un elemento de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ de clase C^k satisfaciendo las propiedades). Por otro lado en [FPS 95] se da un ejemplo en $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ de una aplicación F que posee entropía topológica cero y tal que su conjunto de puntos recurrentes es diferente del de puntos uniformemente recurrentes ((1) $\not\Rightarrow$ (4)). Para más información sobre la no equivalencia mutua entre las propiedades (1)-(5) para los elementos de la clase $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ véanse, por ejemplo, [Ko 92], [Koč 99] o [KMS 99].

Además, incluso bajo fuertes hipótesis adicionales sobre la aplicación triangular F , la equivalencia no se consigue. En [Koč 01] se considera el problema de analizar la equivalencia para aplicaciones triangulares no decrecientes en las fibras, es decir, transformaciones de la forma $(x, y) \rightarrow (f(x), g(x, y))$ donde para cada $x \in \mathbb{I}$ la función g_x es no decreciente. En esta situación se prueba que las propiedades (1), (2) y (5) son mutuamente equivalentes, (3) implica (4) y (4) implica (1). Sin embargo (véase [Koč 01, Lema 4.2]) existe un ejemplo de una aplicación triangular no decreciente en las fibras satisfaciendo (2) pero no (3) ni (4) (este ejemplo está basado en ideas de [FPS 95]). La implicación de (4) a (3) ha sido recientemente resuelta de modo negativo en [FPS 04]. Por tanto, incluso para esta clase tan particular de aplicaciones, las propiedades (1) – (5) no son equivalentes.

5.2. La clase $\mathcal{C}_\Delta^*(\mathbb{I}^2)$

Consideraremos el problema de la equivalencia mutua entre (1) – (5) en la clase $\mathcal{C}_\Delta^*(\mathbb{I}^2)$ de las aplicaciones triangulares que poseen función base con conjunto de puntos periódicos cerrado. Para tales aplicaciones probaremos que (1)-(5) son propiedades mutuamente equivalentes, resolviendo así el problema propuesto por Sharkovskii y Kolyada en [SK 91] para esta clase particular de aplicaciones triangulares.

La hipótesis que consideramos sobre las funciones base es un requerimiento fácil de comprobar, bien estudiado en la literatura y satisfecho por una gran cantidad de

funciones del intervalo. Observemos que las funciones de $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ que posean conjunto de puntos periódicos cerrado, necesariamente tienen entropía topológica cero pero no a la inversa. Existen funciones del intervalo de tipo 2^∞ (es decir, funciones cuyo conjunto de periodos es $\{1, 2, 2^2, \dots\}$) y por tanto con entropía topológica cero (véase [MS 80]), tal que el conjunto de sus puntos periódicos no es cerrado (véase por ejemplo [SKSF 97]). Es más, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1 ([Ni 82], [SF 80], [SKSF 97] y [X 81]). *Sea f una función continua del intervalo \mathbb{I} . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (i) $\text{Per}(f)$ es cerrado,
- (ii) para cada $x \in \mathbb{I}$, $\omega_f(x)$ es finito,
- (iii) $\text{Rec}(f) = \text{Per}(f)$,
- (iv) $\text{UR}(f) = \text{Per}(f)$.

5.3. Resultados parciales

En esta sección probaremos ciertos resultados parciales que nos permitirán establecer la equivalencia mutua entre (1)-(5) para los elementos de $\mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$.

Teorema 5.3.1. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ con función base f . Entonces (1) y (4) son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que se satisface (1). Entonces, por la fórmula de Bowen (1.1) se verifica $h(f) = h(F|_{I_x}) = 0$ para cada $x \in \mathbb{I}$. Fijamos $x \in \text{Per}(f)$ y sea m_x su periodo. Entonces $h(F^{m_x}) = m_x \cdot h(f) = 0$ (véase [BC 92, Capítulo VIII, Proposición 2]), y por tanto $h(F^{m_x}|_{I_x}) = 0$. Consideremos la función unidimensional

$$\tau_{m_x} = g_{f^{m_x-1}(x)} \circ \dots \circ g_x.$$

Entonces $h(\tau_{m_x}) = 0$. Y por tanto $\text{Rec}(\tau_{m_x}) = \text{UR}(\tau_{m_x})$ (véase [SKSF 97, Teorema 4.19]). Consecuentemente, como $\text{Rec}(F^{m_x}|_{I_x}) = \{x\} \times \text{Rec}(\tau_{m_x})$ y $\text{UR}(F^{m_x}|_{I_x}) = \{x\} \times \text{UR}(\tau_{m_x})$, encontramos

$$\text{Rec}(F^{m_x}|_{I_x}) = \text{UR}(F^{m_x}|_{I_x}).$$

Es más, tenemos $\text{Rec}(F^{m_x}) = \text{Rec}(F)$ y $\text{UR}(F^{m_x}) = \text{UR}(F)$ (véase [BC 92]). Por tanto, $\text{Rec}(F|_{I_x}) = \text{UR}(F|_{I_x})$. Como $x \in \text{Per}(f)$ está arbitrariamente fijado,

$$\text{Rec}(F|_{\text{Per}(f) \times \mathbb{I}}) = \text{UR}(F|_{\text{Per}(f) \times \mathbb{I}}).$$

Por otro lado, como $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ el conjunto $\text{Per}(f)$ es cerrado, lo que por el Teorema 5.2.1, significa que $\text{Rec}(f) = \text{UR}(f) = \text{Per}(f)$. Obteniéndose, por tanto, que $\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$.

Ahora supongamos que (1) no se satisface, es decir, $h(F) > 0$. Como $\text{Per}(f)$ es cerrado, por (1.1) existe un punto $x \in \text{Per}(f)$ tal que $h(F|_{I_x}) > 0$. Sea m_x el periodo de x por f . Por tanto, por [KS 96, Lema 4.4], $h(F^{m_x}|_{I_x}) = m_x \cdot h(F|_{I_x}) > 0$ (obsérvese que este hecho no puede deducirse en general de [BC 92, Capítulo VIII, Proposición 2] ya que, excepto para el caso $m_x = 1$, la fibra I_x no es invariante mediante F). Por ende, $h(\tau_{m_x}) > 0$ y usando de nuevo [SKSF 97, Teorema 4.19] existe $y^* \in \text{Rec}(\tau_m) \setminus \text{UR}(\tau_m)$. Consecuentemente, existe una sucesión de enteros no negativos $(n_k)_{k=0}^\infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_x}^{n_k}(y^*) = y^*$. Así,

$$(x, y^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x, \tau_{m_x}^{n_k}(y^*)) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k \cdot m_x}(x, y^*),$$

es decir, $(x, y^*) \in \text{Rec}(F^{m_x}) = \text{Rec}(F)$. Observemos que $(x, y^*) \notin \text{UR}(F)$. De otro modo, $y^* \in \text{UR}(\tau_{m_x})$, lo que no es posible. Por tanto, $\text{Rec}(F) \neq \text{UR}(F)$ finalizando la prueba. \square

Para probar la equivalencia entre (3) y (4) (véase Teorema 5.3.3) desarrollamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 5.3.2. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ con función base f . Si F satisface (4), entonces para cada $(x, y) \in \text{Rec}(F)$, la aplicación $F|_{\omega_F(x, y)}$ es no caótica.*

Demostración. Sea $(x, y) \in \text{Rec}(F)$. El caso donde $\omega_F(x, y)$ es finito es trivial. Asímatse que $\omega_F(x, y)$ es un conjunto infinito. Como (4) se satisface para F , por el Teorema 5.3.1, $h(F) = 0$. Por tanto, por (1.1), $h(F|_{I_x}) = h(f) = 0$ para cada $x \in \text{Per}(f)$. Como $(x, y) \in \text{Rec}(F)$ y $\text{Per}(f)$ es cerrado, usando los Teoremas 1.2.4 y 5.2.1, tenemos que $x \in \text{Per}(f)$. Sea m_x el periodo de x mediante f . Entonces, $\omega_F(x, y)$ se distribuye en fibras I_{x_j} donde $x_j = f^j(x)$ para $j \in \{0, \dots, m_x - 1\}$. Es más, de (4) se sigue que $\omega_F(x, y)$ es un conjunto minimal de F . Así, para cada $j \in \{0, \dots, m_x - 1\}$, F^{m_x} posee un conjunto minimal M_{x_j} contenido en I_{x_j} y $\omega_F(x, y) = \bigcup_{j=0}^{m_x-1} M_{x_j}$. Por (4) y [BC 92, Capítulo VIII, Proposición 2], $\text{Rec}(F^{m_x}) = \text{UR}(F^{m_x})$ y por ende $\text{Rec}(F^{m_x}|_{I_{x_j}}) = \text{UR}(F^{m_x}|_{I_{x_j}})$. Como para las funciones del intervalo (4) implica (3), para cada $j \in \{0, \dots, m_x - 1\}$ la aplicación $F^{m_x}|_{I_{x_j}}$ es no caótica en su conjunto de puntos recurrentes. Por tanto, $F^{m_x}|_{I_{x_j}}$ es no caótica en M_{x_j} para cada $j \in \{0, \dots, m_x - 1\}$. Consecuentemente, como $x \in \text{Per}(f)$ la aplicación F^{m_x} , y por ende F , es no caótica en la unión de M_{x_j} que es igual a $\omega_F(x, y)$. \square

Teorema 5.3.3. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ con función base f . Entonces (3) y (4) son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $F|_{\text{Rec}(F)}$ es caótica, entonces existen puntos $z, t \in \text{Rec}(F)$ satisfaciendo:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(F^n(z), F^n(t)) = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(F^n(z), F^n(t)) > 0. \quad (5.1)$$

Por tanto, existe una sucesión creciente de enteros positivos $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(F^{n_k}(z), F^{n_k}(t)) = 0.$$

Como, $(F^{n_k}(z))_{k=0}^{\infty}$ y $(F^{n_k}(t))_{k=0}^{\infty}$ poseen subsucesiones convergentes, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k}(z) = u$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k}(t) = v$. Entonces, $u = v$ y $u \in \omega_F(z) \cap \omega_F(t)$. Si $\text{Rec}(F)$ y $\text{UR}(F)$ fuesen iguales, entonces $\omega_F(z)$ y $\omega_F(t)$ serían conjuntos minimales y por tanto, $\omega_F(u) = \omega_F(z) = \omega_F(t)$. Así, $F|_{\omega_F(u)}$ sería caótica, lo que no es posible por el Lema 5.3.2. Queda pues probado que $\text{Rec}(F) \neq \text{UR}(F)$.

Ahora, supongamos que $\text{Rec}(F) \neq \text{UR}(F)$. Por el Teorema 5.3.1, $h(F) > 0$. Usando que $\text{Per}(f)$ es cerrado, por (1.1) existe un punto $x \in \text{Per}(f)$ tal que $h(F|_{I_x}) > 0$. Sea m_x el periodo de x mediante f y τ_{m_x} la función unidimensional definida como $g_{f^{m_x-1}(x)} \circ \dots \circ g_x$. Entonces, $h(\tau_{m_x}) > 0$ y por tanto τ_{m_x} es caótica en el conjunto de sus puntos recurrentes (véase [Sh2 65, Teorema 4.19]). Así, existen $z_1, t_1 \in \text{Rec}(\tau_{m_x})$ tales que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\tau_{m_x}^n(z_1), \tau_{m_x}^n(t_1)) = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\tau_{m_x}^n(z_1), \tau_{m_x}^n(t_1)) > 0. \quad (5.2)$$

Para cada entero $n \geq 1$ e $y \in \mathbb{I}$, $F^{m_x \cdot n}(x, y) = (x, \tau_{m_x}^n(y))$. Por tanto, si definimos $z = (x, z_1)$ y $t = (x, t_1)$, entonces $z, t \in \text{Rec}(F)$ y por (5.2) conseguimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(F^{m_x \cdot n}(z), F^{m_x \cdot n}(t)) = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(F^{m_x \cdot n}(z), F^{m_x \cdot n}(t)) > 0.$$

Así,

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(F^n(z), F^n(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(F^{m_x \cdot n}(z), F^{m_x \cdot n}(t)) = 0$$

y

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} d(F^{m_x \cdot n}(z), F^{m_x \cdot n}(t)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(F^n(z), F^n(t)),$$

obteniendo que $F|_{\text{Rec}(F)}$ es caótica. □

5.4. Prueba del resultado principal

Finalmente, pasamos a demostrar la equivalencia entre las propiedades (1)-(5) para la clase de aplicaciones triangulares $\mathcal{C}_{\Delta}^*(I^2)$.

Teorema 5.4.1. *Sea $F \in \mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$ con función base f . Entonces, las condiciones (1)–(5) son mutuamente equivalentes.*

Demostración. Por los Teoremas 5.3.1 y 5.3.3, obtenemos la mutua equivalencia entre (1), (3) y (4). Por otro lado, por [Koč 99], y sin hipótesis adicionales, (5) es siempre equivalente a $h(F|_{\text{Per}(F)}) = 0$ en $\mathcal{C}_\Delta(I^2)$. Por tanto, como (2) implica $h(F|_{\text{Per}(F)}) = 0$, obtenemos que (2) implica (5). Por definición, (1) siempre implica (2) y por [Ko 92, Teorema 8], (5) es equivalente a (1) finalizando la prueba. \square

Observación 5.4.1.1. (A) Es conocido que existe una larga lista de propiedades caracterizando la propiedad de poseer entropía topológica cero para los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ (véase [SKSF 97]). En este Capítulo hemos estudiado el problema, propuesto por Sharkovskii y Kolyada (véase [SK 91]), de encontrar una condición natural sobre los elementos de $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$ que permita obtener una caracterización de la propiedad de poseer entropía topológica cero, análoga a la habida para los elementos de $\mathcal{C}(\mathbb{I})$. Nosotros hemos estudiado cuatro de las propiedades más representativas, equivalentes a poseer entropía topológica cero en $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, (2)-(4). Está claro, que en el futuro, será necesario analizar si el resto de propiedades que en $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ caracterizan a la entropía cero se mantienen válidas para los elementos de $\mathcal{C}_\Delta^*(I^2)$. Nuestra idea es que para muchas de ellas la equivalencia funcionará.

(B) Dada una aplicación triangular F , un problema abierto es analizar la validez o no, de la implicación entre (4) $\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$ y (1) $h(F) = 0$. La importancia de este problema radica en que si existiese una contestación positiva al mismo, podría proponerse una definición de simplicidad en la clase $\mathcal{C}_\Delta(I^2)$ en términos puramente dinámicos, al realizarse a través de conjuntos con propiedades de retorno. Una aplicación triangular F sería simple si y sólo si $\text{Rec}(F) = \text{UR}(F)$.

Por los resultados obtenidos tras nuestro análisis y por el trabajo de [Koč 01], el problema de analizar la implicación entre (4) y (1) queda reducido a considerar aplicaciones triangulares $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$ con $h(f) = 0$ y $\overline{\text{Per}(f)} \neq \text{Per}(f)$, y con al menos un $x \in \mathbb{I}$ tal que g_x es decreciente.

Apéndice

En relación con lo planteado en el Capítulo 1, Sección 1.1, mostramos dos ejemplos de espacios y aplicaciones que generan sólo conjuntos scrambled que poseen dos puntos.

Teorema 5.4.2. *Existe una aplicación continua definida en un espacio tipo Cantor, tal que cada conjunto scrambled tiene exactamente dos puntos.*

Demostración. Sea Σ_2 el espacio de las sucesiones $x = x_1x_2x_3\dots$ donde $x_n = 0$ o 1 para cada n , dotado con la topología de la convergencia puntual. Consideremos la aplicación continua *shift* $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida por $\sigma(x_1x_2x_3\dots) = x_2x_3\dots$. Por [L 03, Teorema 3.11], existe $\mathbb{X} \subset \Sigma_2$ σ -invariante y métrico compacto tal que $\sigma|_{\mathbb{X}}$ verifica que cada conjunto scrambled posee exactamente dos puntos. Por otro lado, es conocido (véase [Ki 98]) que existe un homeomorfismo h , entre Σ_2 y C , donde C es el conjunto ternario de Cantor clásico. Si $h(\mathbb{X})$ no posee puntos aislados, entonces el conjunto $h(\mathbb{X})$ es tipo Cantor y cada conjunto scrambled para la aplicación continua definida en $h(\mathbb{X})$, $h \circ \sigma \circ h^{-1}$, posee exactamente dos puntos. Si por el contrario existiesen puntos aislados x_i en $h(\mathbb{X})$, para cada i existirá U_i entorno cerrado de x_i tal que $U_i \cap h(\mathbb{X}) = \{x_i\}$. Sea $C_i \subset U_i$ el conjunto de Cantor que contiene a x_i y consideremos $A = h(\mathbb{X}) \cup \left(\bigcup_i C_i \right)$. Es claro que A no posee puntos aislados y es de tipo Cantor. Consideremos ahora la función $f : A \rightarrow A$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} h \circ \sigma \circ h^{-1}(x) & \text{si } x \in h(\mathbb{X}), \\ h \circ \sigma \circ h^{-1}(x_i) & \text{si } x \in C_i \text{ para todo } i. \end{cases}$$

Es obvio que f es continua y que cada conjunto scrambled posee exactamente dos puntos ya que $f(y) = f(x_i)$ para cada $y \in C_i$. □

Nota 5.4.3. El punto crucial en la prueba del teorema es la existencia del espacio \mathbb{X} contenido en Σ_2 que es σ -invariante y que satisface la propiedad de generar únicamente conjuntos scrambled bipuntuales. A este respecto, tan sólo comentar que dicho espacio se construye como la unión de las órbitas cerradas de dos puntos adecuadamente elegidos del espacio Σ_2 que poseen conjuntos ω -límite infinitos (para más detalles véase [L 03]).

Teorema 5.4.4. *Existe un continuo $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ (espacio compacto y conexo) con interior vacío y un homeomorfismo h en \mathbb{X} , tal que, cada conjunto scrambled tiene exactamente dos puntos.*

Demostración. Consideremos los conjuntos A , B , C y D y las funciones h_1 , h_2 y h_3 definidas como siguen:

$$A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1) \right\},$$

$$B = \{0\} \times [-1, 1],$$

$$C = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\varphi), 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\varphi) \right) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [0, \pi] \right\},$$

$$D = \{1\} \times (0, 1),$$

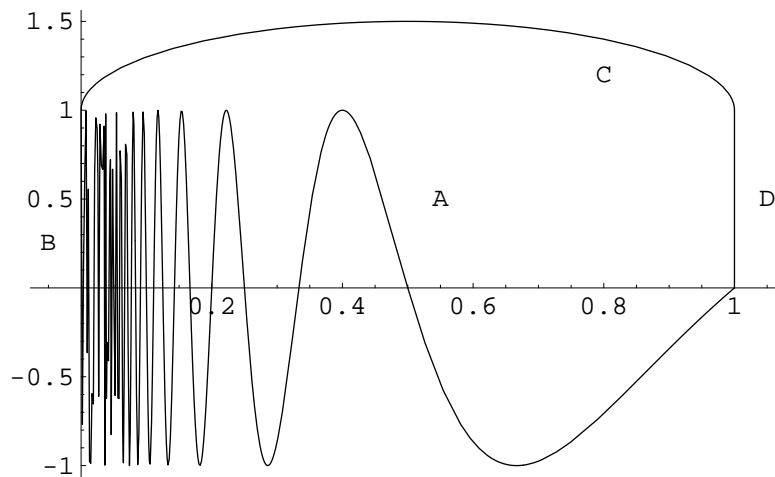
y

$$h_1 : A \rightarrow (1, +\infty) \text{ tal que } (x, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)) \rightarrow 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right),$$

$$h_2 : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty) \text{ tal que } x \rightarrow \frac{x-1}{(1+(x-1)^2)+x}$$

$$h_3 : (1, +\infty) \rightarrow A \text{ tal que } x \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \operatorname{sen}(\pi x)\right).$$

Consideremos el espacio $\mathbb{X} = A \cup B \cup C \cup D$. Es claro que \mathbb{X} es conexo (incluso por arcos) y compacto como puede observarse en la siguiente figura.



Consideremos ahora la siguiente función:

$$H(x) = \begin{cases} h_3 \circ h_2 \circ h_1(x) & \text{si } x \in A, \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es obvio que H es un homeomorfismo. Además, cada conjunto scrambled posee exactamente dos puntos. En efecto, la función H no posee ningún conjunto scrambled en

$B \cup C \cup D$ ya que sobre tales conjuntos está definida como la identidad. Por otro lado, es claro que no existen conjuntos scrambled para H en A ya que se satisface

$$\lim_{x \rightarrow 0} (H(x) - x) = 0. \quad (5.3)$$

La expresión (5.3) se sigue de la igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} (h_2(x) - x) = 0$. Por otra parte, por (5.3), si $x \in A$ e $y \in B$, $\{x, y\}$ es un par de Li-Yorke. \square

Nota 5.4.5. Con respecto a las funciones que integran la definición de H , notamos lo siguiente:

- (1) La función h_1 rectifica la curva $\sin(\frac{1}{x})$ en la semirecta positiva,
- (2) la función h_2 mueve los puntos hacia el infinito con una velocidad decreciente,
- (3) si tomamos como punto de B , $y = (0, 1)$ o $y = (0, -1)$ y $x \in A$ arbitrario, obtenemos un par de Li-Yorke “extremal” ya que $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(H^n(x), H^n(y)) = 2$, alcanzando su máximo valor.

Observación 5.4.5.1. En el ejemplo contenido en [FPS 95], se muestra que los continuos pueden admitir aplicaciones que sólo poseen pares de Li-Yorke. Pero, el continuo que se usa es el espacio \mathbb{I}^2 que posee interior no vacío en \mathbb{R}^2 con la topología relativa. Con el Teorema 5.4.4, se muestra que continuos con interior vacío en el espacio euclídeo en el que se sumergen, también pueden admitir la misma propiedad.

Bibliografía

- [AKM 65] R.L. Adler, A. G. Konheim y M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **114**, (1965), 309-319.
- [ABCP 89/90] S.J. Agronsky, A.M. Bruckner, J.G. Ceder y T.L. Pearson, *The structure of ω -limit sets for continuous functions*, Real Anal. Exch., **15**, (1989/1990), 483–510.
- [AC1 91/92] S.J. Agronsky y J.G. Ceder, *What sets can be ω -limit sets in E^n ?*, Real Anal. Exch., **17**, (1991/1992), 97–109.
- [AC2 91/92] S.J. Agronsky y J.G. Ceder, *Each Peano subspace of E^k is an ω -limit sets*, Real Anal. Exch., **17**, (1991/1992), 371–378.
- [ALM 89] Ll. Alsedà, J. Llibre y M. Misiurewicz, *Periodic orbits of maps of Y* , Trans. Amer. Math. Soc., **313**, (1989), 475-538.
- [ALM 93] Ll. Alsedà, J. Llibre y M. Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific, Second Edition Vol. **5**, (2000).
- [AM 93] Ll. Alsedà y J.M. Moreno, *Linear orderings and the full periodicity kernel for the n -star*, J. Math. Anal. Appl., **180**, (1993), 599-616.
- [APR 97] Ll. Alsedà, J. Paraños y J.A. Rodríguez, *The full periodicity kernel for a class of graph maps*, Acta Math. Univ. Comenian., **66**, (1997), 313-320.
- [ARR 99] Ll. Alsedà, M. A. del Río y J. A. Rodríguez, *A splitting theorem for transitive maps*, J. Math. Anal. Appl., **232 (2)**, (1999), 359–375.
- [AY 95] Ll. Alsedà y X. Ye, *No division and the set of periods for tree maps*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **15**, (1995), 221-237.

- [A 94] C. Arteaga, *Smooth triangular maps of the square with closed set of periodic points*, J. Math. Anal. and Appl., **196**, (1994), 987-997.
- [Ba 97/98] M. Babilonová, *On a conjecture of Agronsky and Ceder concerning orbit-enclosing ω -limit sets*, Real Anal. Exch., **23**, (1997/98), 773-777.
- [B 91] S. Baldwin, *An extension of Sharkovskii's theorem to the n -od*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **11**, (1991), 249-271.
- [B 95] S. Baldwin, *Toward a theory of forcing on maps of trees*, Proceedings of the Conference "Thirty Years after Sharkovskii's Theorem: New Perspectives", (Murcia 1994), Int. J. Bifurcat. Chaos, **5**, (1995), 1307-1318.
- [BL1 95] S. Baldwin y J. Llibre, *Periods of maps on trees with all branching points fixed*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **15**, (1995), 239-246.
- [BEL 95] F. Balibrea, F. Esquembre y A. Linero, *Smooth triangular maps of type 2^∞ with positive topological entropy*, Int. J. Bifurcat. Chaos, **5** (1995), 1319-1324.
- [BL 00] F. Balibrea y A. Linero, *Some results on topological dynamics of antitriangular maps*, Acta Math. Hung., **88 (1-2)**, (2000), 169-178.
- [BL 01] F. Balibrea y A. Linero, *Periodic structure of σ -permutation maps on \mathbb{T}^n* , Aequationes Math., **62 (3)**, (2001), 265-279.
- [BL 02] F. Balibrea y A. Linero, *Periodic structure of σ -permutation maps II. The case \mathbb{T}^n* , Aequationes Math., **64 (1-2)**, (2002), 34-52.
- [BGM 01] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *Description of ω -limit sets of a triangular map on I^2* , Far East J. Dynamical Systems, **3(1)**, (2001), 87-101.
- [BGM 02] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *A triangular map on I^2 whose ω -limit sets are all compact intervals of $\{0\} \times I$* , Discret Contin. Dyn. S., **8(4)**, (2002), 983-994.
- [BGM 03] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *On ω -limit sets of triangular maps on the unit cube*, J. Differ. Equ. Appl., **9(3-4)**, (2003), 289-304.

- [BG 04] F. Balibrea y J.L. García Guirao, *On ω -limit sets of triangular maps on the unit square*, Grazer Math. Ber., **346**, (2004), 177-186.
- [BGM1 04] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *On the space of ω -limit sets for continuous maps on the unit square*, Sometido a Dyn. Contin. Discret I., (2004).
- [BGM2 04] F. Balibrea, J.L. García Guirao y J.I. Muñoz Casado, *A topological method for obtaining finite unions of interval as ω -limit sets in one fiber for triangular maps*, Preprint, (2004).
- [BRS 03] F. Balibrea, L. Reich y J. Smítal, *Iteration theory: dynamical systems and functional equations*, Int. J. Bifurcat. Chaos, **13(7)**, (2003), 1627-1647.
- [Bea 91] A.F. Beardon, *Iteration of rational functions*, (1991), Springer-Verlag.
- [Be 81] C. Bernhardt, *Periodic orbits of continuous mappings of the circle without fixed points*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **1**, (1981), 413-417.
- [Be 82] C. Bernhardt, *Periodic points of a class of endomorphisms of the circle*, J. Lond. Math. Soc., **45(3)**, (1982), 539-550.
- [Bi 27] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. publications, Rhode Island, (1927).
- [BGKM 02] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada y A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math. **547**, (2002), 51-68.
- [BDM 04] F. Blanchard, F. Durand and A. Maas, *Constant-Lenght substitutions and countable scrambled sets*, Preprint, (2004).
- [BBHS 96] A. Block, A.M. Bruckner, P.D. Humke y J. Smítal, *The Space of ω -limit Sets of a Continuous Map on the Interval*, Trans. Amer. Math. Soc., **348(4)**, (1996), 1357-1372.
- [BC 92] L.S. Block y W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, (1992).
- [Bl 92] A.M. Blokh, *Periods implying almost all periods for tree maps*, Non-linearity, **5**, (1992), 1375-1382.
- [B 93] A.M. Bruckner, *Some problems concerning the iteration of real functions*, Atti Sem. Mat. Fiz. Univ. Modena, **41**, (1993), 195-203.

- [BS 92] A.M. Bruckner y J. Smítal, *The structure of ω -limit sets for continuous maps of the interval*, Math. Bohem. **117**, (1992), 42-47.
- [Bo 71] R. Bowen, *Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **153** (1971), 401-414.
- [CGSS 04] J. Chudziak, J.L. García Guirao, L. Snoha y V. Špitalský, *Universal discrete dynamical systems regarding ω -limit sets*, Preprint, (2004).
- [D 89] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, Reading, MA, (1989), Second Edition.
- [Du 18] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Braunschweig: F. Vieweg, **VI**, (1918).
- [E 90] G.A. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, (1990), Springer-Verlag.
- [FM 93] J. Franks y M. Misiurewicz, *Cycles for disk homeomorphisms and thick trees*, Contemp. Math., **152**, (1993), 69-139.
- [FPS 95] G.L. Forti, L. Paganoni y J. Smítal, *Strange triangular maps of the square*, B. Aust. Math. Soc., **51**, (1995), 398-415.
- [FPS 04] G.L. Forti, L. Paganoni y J. Smítal, *Triangular maps with all periods and no infinite ω -limit set containing periodic points*, Sometido a Topol. Appl.
- [G 01] J.L. García Guirao, *Dinámica topológica de aplicaciones triangulares bidimensionales*, Tesina de Licenciatura, Universidad de Murcia (2001).
- [GC 04] J.L. García Guirao y J. Chudziak, *A characterization of zero topological entropy for a class of triangular mappings*, J. Math. Anal. Appl., **287(2)** (2003), 516-521.
- [GL 04] J.L. García Guirao y M. Lampart, *Li and Yorke chaos with respect to the cardinality of scrambled sets*, Sometido a Topol. Appl., (2004).
- [HoYo 88] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Second edition, Dover Publications, Inc., New York, (1988).

- [HY 01] W. Huang y X. Ye, *Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **21** (1), (2001), 77-91.
- [J 92] V. Jiménez, *Is Li and Yorke's definition a good tool to measure chaos?*, Tesis Doctoral, (1992), Universidad de Murcia.
- [JS 01] V. Jiménez y J. Smítal, *ω -Limit sets for triangular mappings*, Fund. Math., **167**, (2001), 1-15.
- [Ki 98] B.P. Kitchens, *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable State Markov Shifts*, Springer, (1998), (Universitext).
- [Kl 79] P.E. Kloeden, *On Sharkovsky's cycle coexistence ordering*, B. Aust. Math. Soc., **20**, (1979), 171-177.
- [Koč 99] Z. Kočan, *The problem of classification of triangular maps with zero topological entropy*, Annal. Math. Sile., **13**, (1999), 181-192.
- [Koč 01] Z. Kočan, *Triangular maps non-decreasing on the fibres*, Preprint Series in Mathematical Analysis, MA **31/2001**, Mathematical Institute, Silesian University in Opava, (2001).
- [Ko 92] S.F. Kolyada, *On dynamics of triangular maps of the square*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **12**, (1992), 749-768.
- [KMS 99] S.F. Kolyada, M. Misiurewicz y L. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous piecewise monotone dynamical systems on the interval*, Fund. Math., **160**, No.2 (1999), 161-181.
- [KS 92/93] S.F. Kolyada y L. Snoha, *On ω -limit sets of triangular maps*, Real Anal. Exch., **18**(1), (1992/93), 115-130.
- [KS 96] S.F. Kolyada y L. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems*, Random & Computational Dynamics, **4**, (1996), 205-233.
- [KST 04] S.F. Kolyada, L. Snoha y S. Trofimchuk, *On minimality of nonautonomous dynamical systems*, (2004), Preprint.
- [KuS 91] M. Kuchta y J. Smítal, *Two point scrambled set implies chaos*, World Sci. Publ. Singapore 1989 (Proceedings of the European Conference of Iteration Theory, Spain 1987), 427 - 430.
- [Ku 68] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, (1968).

- [L 03] M. Lampart, *Two kinds of chaos and relations between them*, Acta Math. Univ. Comenianae, **LXXII**, **1** (2003), 119-217.
- [LL1 95] C. Leseduarte y J. Llibre, *On the set of periods for σ maps*, Trans. Amer. Math. Soc., **347**, (1995), 4889-4942.
- [Li 93] S. Li, *ω -Chaos and topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **339**, (1993), 243-249.
- [LY 75] T.Y. Li y J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Month., **82**, (1975), 985-992.
- [LIM 93] J. Llibre y M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **52**, (1993), 149-164.
- [LIPR 95] J. Llibre, J. Paraños y J.A. Rodríguez, *On the extension of Sharkovskii's theorem to connected graphs with non-positive Euler characteristic*, Proceedings of the Conference "Thirty Years after Sharkovskii's Theorem: New Perspectives", (Murcia 1994), Int. J. Bifurcat. Chaos, **5**, (1995), 1395-1405.
- [Ma 76] R.M. May, *Mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261**, (1976), 459-467.
- [MSS 73] N. Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein, *On finite limit sets for transformations on the unit interval*, J. Comb. Theory, **15**, (1973), 25-44.
- [MS 80] M. Misiurewicz y W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Stud. Math., **67**, (1980), 45-63.
- [Mo 98] S. Morosawa, *Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions*, Nonlinear analysis and convex analysis (Nigata, 1998), World Sci., 266-273.
- [Mos 62] J. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Viss. Gottingen Math. Phys., Kl. **2**, (1962), 1-20.
- [My 63] P.J. Myrberg, *Iteration der Reellen Polynome Zweiten Grades III*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **336**, (1963), 1-20.
- [My 65] P.J. Myrberg, *Iteration der Polynome mit reellen Koeffizienten*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **374**, (1965), 1-17.

- [ML 57] A.D. Myshkis y A.Y. Lepin, *Existence of an invariant set, consisting of two points, for certain continuous maps of an interval into itself*, Uchen. Zap. Belor. Univ., Ser. Fiz.-Mat., **32**, (1957), 29-32.
- [N 92] S. B. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).
- [NS 49] V.V. Nemytskii y V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press: Princeton, (Russian original, Moscow, 1949).
- [Ni 82] Z. Nitecki, *Maps of the interval with closed periodic set*, Proc. Amer. Math. Soc., **85** (1982), 451-456.
- [Ot 57] G. Ottaviani, *Sulla risoluzione di una equazione con il metodo di iterazioni*, Scritti matematici onore Filippo Sibirani, Cezare Zuffi, Bologna, (1957), 195-199.
- [SP 00] D. Pokluda y J. Smítal, *A universal dynamical system generated by a continuous map of the interval*, Proc. Amer. Math. Soc., **128(10)**, (2000), 3047–3056.
- [SS 94] B. Schweizer y J. Smítal, *Measures of chaos and spectral decomposition of dynamical systems on the interval*, Trans. Amer. Math. Soc., **344**, (1994), 737-754.
- [SP 83] A.P. Shapiro y C.P. Puppov, *Ecuaciones recurrentes en la teoría de la dinámica de poblaciones*, Ed. Hayka, Moscú (en ruso).
- [Sh 60] A.N. Sharkovskii, *Condiciones necesarias y suficientes para la Convergencia en procesos de Iteración uno-dimensionales*, Ukrain. Mat. Zh., **12**, (1960), 484-489 (en Ruso).
- [Sh 64] A.N. Sharkovskii, *Coexistencia de ciclos para una función continua de la recta en si misma*, Ukrain. Mat. Zh., **16**, (1964), 61-71 (en Ruso).
- [Sh1 65] A.N. Sharkovskii, *On cycles and the structure of continuous mapping*, Ukrain. Mat. Zh., **17**, (1965), 104-111 (en Ruso).
- [Sh2 65] A.N. Sharkovskii, *Attracting and attracted sets*. Soviet Math. Dokl., **6**, (1965), 268–270.

- [SF 80] A.N. Sharkovskii y V.V. Fedorenko, *Continuous mappings of an interval with closed sets of periodic points*(Russian), *An Investigation of differential and differential-difference equations*, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat. Kiev, (1980), 137-145.
- [SK 91] A.N. Sharkovskii y S.F. Kolyada, *On topological dynamics of triangular maps of the plane*, Proceedings of ECIT-89, Batschums, Austria, World Scientific, Singapore (1991), 177-183.
- [SKSF 97] A.N. Sharkovskii, S.F. Kolyada, A.G. Sivak y V.V. Fedorenko, *Dynamics of one dimensional maps*, Kluwer Academic Publishers, (1997).
- [S 02] P. Šindelarova, *A zero topological entropy map for which periodic points are not a G_δ set*, Ergod. Theor. Dyn. Syst., **22**, (2002), 947–949.
- [S 03] P. Šindelarova, *On a problem concerning ω -limit sets of triangular maps in I^3* , Preprint Series in Mathematical Analysis, MA **34/2003**, Mathematical Institute, Silesian University in Opava, (2003).
- [Si 95] A.G. Sivak, *On the structure of transitive ω -limit sets for continuous maps*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **4**, (2003), 109-123.
- [Sm 65] S. Smale, *Diffeomorphism with many periodic points, differential and combinatorial topology*, S.S. Cairns, (1965), 63-80.
- [Sm 67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, (1967), 774-817.
- [St 77] P. Stefan, *A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphism of the real line*, Commun. Math. Phys., **54**, (1977), 237–248.
- [RP 86] P. H. Richter y H. O. Peitgen, *The beauty of fractals*, (1986), Springer-Verlag.
- [Thu 88] W.P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **19**, (1988), 417–431.
- [V 27] B. Van der Pool, *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag **3**, (1927), 109-123.
- [W 82] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, (1982), Springer-Verlag.

-
- [Wi 77] R. F. Williams. *The structure of Lorenz attractors*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **615**, Springer-Verlag, (1977), 94-112.
- [X 81] J.C. Xiong, *Continuous self-maps of the closed interval whose periodic points form a closed set*, J. China Univ. Sci. Technol., **11**, (1981), 14-23.

Índice alfabético

- (*), 18
 (**), 18
 (* * *), 18
 (\mathbb{G}, V) , 12
 (\mathbb{I}, f) , 3
 (\mathbb{X}, ψ) , 1
 $(\mathbb{X}, f_{1,\infty})$, 7
 (n, ε) -separado, 2
 2^∞ , 5
 $>_s$, 5
 $A(F, \mathbb{I}^2)$, 7
 $A(f, \mathbb{I})$, 7
 $A_{i,j}$, 37
 A_i^1 , 24
 A_i^2 , 24
 $A_{n,j}^i$, 52
 $B_{i,j}$, 30
 $B_{i,j}^1$, 30
 $B_{i,j}^2$, 30
 $B_{i,j}^3$, 30
 $C_{i,j}$, 31
 $C_{i,j}^1$, 31
 $C_{i,j}^2$, 31
 $C_{i,j}^3$, 31
 $E(\cdot)$, 22
 I_0 , 17
 I_0^2 , 30
 I_x , 6
 $\Delta_{i,j}$, 37
 $\Omega(F)$, 29
 \mathbb{S}^1 , 5
 \mathbb{D} , 14
 \mathbb{I}^2 , 4
 \mathbb{I}^n , 24
 $\mathbb{I}_{a,b}$, 4
 \mathbb{M} , 12
 \mathbb{N} , 5
 \mathbb{R}^2 , 4
 $\mathcal{C}(\mathbb{I}^2)$, 4
 $\mathcal{C}(\mathbb{I}_{a,b})$, 4
 $\mathcal{C}(\mathbb{X})$, 1
 $\mathcal{C}_\Delta^*(\mathbb{I}^2)$, 87
 $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^2)$, 6
 $\mathcal{C}_\Delta(\mathbb{I}^3)$, 30
 \mathcal{F} , 11
 $\mathcal{K}(\mathbb{X})$, 15, 75
 $\mathcal{W}(F)$, 29
 $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$, 49
 ω -degenerado, 50
 $\omega_\psi(x)$, 8
 π , 7
 π_2 , 25
 π_3 , 39
 ψ , 1
 ψ^n , 1
 $\mathbb{B}(\mathbb{D})$, 14
 $\mathbb{B}(\mathbb{G})$, 12
 $\mathbb{C}(\mathbb{I}^2)$, 86
 $\text{End}(\mathbb{X})$, 14
 $\text{Fix}(\psi)$, 2
 $\text{Id}_{\mathbb{X}}$, 1
 $\text{Int}(\cdot)$, 66
 $\text{Orb}_\psi(x)$, 1
 $\text{Per}(\psi)$, 1

- Rec(ψ), 2
- Tra $_{\psi}(x)$, 1
- UR(ψ), 2
- $\{\psi^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, 1
- $c(p, \mathbb{X})$, 13
- $d(\cdot, \cdot)$, 24
- d_H , 15, 75
- $f \leq 2^{\infty}$, 7
- $g_x(\cdot)$, 6
- $h(F|_{I_x})$, 7
- $h(\psi)$, 2
- $h_{\text{fib}}(F)$, 7
- n -estrella, 13
- $\text{ord}(p, \mathbb{X})$, 14
- (\mathbb{X}, d) , 1
- aplicación
 - n -dimensional, 6
 - de permutación, 86
 - continua, 1
 - d-universal, 49
 - identidad, 1
 - shift, 93
 - triangular, 6
 - de Kolyada, 17
 - tridimensional, 30
 - universal, 49
- árbol, 13
- arco, 12
- caos
 - ω , 3
 - Devaney, 3
 - distribucional, 3
 - Li-Yorke, 3
- cima, 80
- componente
 - conexa, 13
 - numérica, 13
- conjunto
 - ω -límite, 2
 - de Julia, 14
 - abierto, 9
 - cerrado, 2
 - de Cantor, 4
 - ternario, 93
 - denso en ninguna parte, 9
 - invariante, 2
 - minimal, 2
 - no vacío, 2
 - scrambled, 3
- cubo, 30
 - n -dimensional, 29
- curva cerrada simple, 13
- dendrita, 14
- dinámica, 1
 - compleja, 14
 - discreta, 4
 - topológica, 4
- distancia euclídea, 24
- entorno, 12
- entropía topológica, 2
- espacio
 - compacto, 1
 - conexo, 4
 - contable, 3
 - continuo, 9
 - continuo de Peano, 9
 - Hausdorff, 12
 - localmente conexo, 9
 - métrico, 1
 - separable, 68
 - totalmente desconectado, 4
 - unidimensional, 5
- estructura periódica, 5
- fibra, 6
- función

- base, 6
 - tipo Kolyada, 11
- fibra, 6
- grafo, 12
- hipercubo, 29
- incompresibilidad débil, 9
- interior, 66
- invariante, 7
- iteradas, 1
- órbita, 1
- orden de p , 14
- par
 - Li-Yorke, 3
- periodo, 1
- propiedad del transporte, 9
- proyección canónica, 7
 - primera coordenada, 7, 55, 76
 - segunda coordenada, 25, 55, 76
 - tercera coordenada, 39
- punto
 - acumulación, 2
 - aislado, 4
 - asintóticamente periódico, 8
 - fijo, 2
 - final, 12, 14
 - fuertemente recurrente, 2
 - no errante, 29
 - periódico, 1
 - recurrente, 2
 - uniformemente recurrente, 2
- retracción, 14
 - absoluta, 14
- sistema
 - no autónomo, 7
 - transitivo, 69
- teorema
 - proyección de Kolyada, 7
 - Sharkovskiĭ, 5
- topología
 - discreta, 72
 - métrica Hausdorff, 15, 75
- trayectoria, 1
- valle, 80
- variedad
 - m -dimensional, 12
 - compacta, 12
 - con borde, 12
- vértice, 12, 14