

ALTERNATIVAS DE DISCRETIZACIÓN PARA LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TENSIONES EN SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

S. Torrano y P. Martí

Grupo de Optimización Estructural
Universidad Politécnica de Cartagena
Campus Muralla del Mar, 30202 Cartagena, España
e-mail: santiago.torrano@upct.es, web <http://www.upct.es/~deyc>

Palabras-clave: Hormigón armado, esfuerzos últimos, flexocompresión esviada, mallado por mapeo, mallado libre, mallado en bandas, integración en el contorno.

Resumen. *La obtención de los esfuerzos, últimos o de servicio, de una sección de hormigón armado sometida a una sollicitación normal, tiene dos componentes numéricas: la resolución del sistema de ecuaciones (no lineales) de equilibrio, y la integración de las tensiones en el hormigón. En esta comunicación se revisan y comparan las diferentes alternativas que se han venido utilizando en la discretización de la sección o parte de ella para la integración numérica de las tensiones en el hormigón, junto con la alternativa de transformar las integrales de superficie en integrales de línea a lo largo del contorno comprimido de la sección.*

1. INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta en el análisis de secciones de hormigón armado es la integración de las tensiones en el hormigón. Tradicionalmente se ha resuelto discretizando la sección completa o sólo la zona comprimida, e integrando sobre la malla generada. Esta malla puede ser regular o no; puede estar constituida por bandas paralelas o normales al eje neutro, o cualesquiera otras alternativas que posibiliten una discretización del dominio de integración. Las integrales son resueltas generalmente mediante la cuadratura de Gauss.

En esta comunicación se comparan diversas alternativas de discretización del dominio para la integración numérica de las tensiones en el hormigón. Las diferentes alternativas han sido implementadas [1] en un programa desarrollado en lenguaje Fortran.

2. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN DE LAS TENSIONES EN EL HORMIGÓN

Los dos métodos tradicionalmente usados para la resolución de las integrales de las ecuaciones de equilibrio son:

- Integración en el dominio de la sección.
- Integración a lo largo del contorno de la zona comprimida de la sección.

2.1. Integración en el dominio de la sección

Integrando numéricamente con n_g puntos de Gauss las integrales de superficie de las ecuaciones de equilibrio, expresadas en coordenadas locales, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) ds &= \sum_{k=1}^{n_g} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j F(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| \right) \\ \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) y ds &= \sum_{k=1}^{n_g} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j G(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| \right) \\ \iint_s \sigma_c(\varepsilon_c) x ds &= \sum_{k=1}^{n_g} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j H(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)| \right) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo n_g el número de elementos en la discretización; $F(\xi, \eta)$, $G(\xi, \eta)$ y $H(\xi, \eta)$ los integrandos de las funciones $\sigma_c(\varepsilon_c)$, $\sigma_c(\varepsilon_c) y$ y $\sigma_c(\varepsilon_c) x$, respectivamente, todos ellos expresados en coordenadas naturales; w_i y w_j los pesos de Gauss correspondientes a las posiciones i y j en las direcciones de ξ y η , respectivamente, y n el número de puntos de Gauss en cada dirección.

2.2. Integración a lo largo del contorno de la zona comprimida

El teorema de Green (2) relaciona una integral doble extendida a un dominio plano D con la integral curvilínea a lo largo del contorno L de este dominio.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + \oint_L Q dy \quad (2)$$

siendo P y Q dos funciones de x e y .

Escogiendo adecuadamente las funciones P y Q [2], el teorema planteado en (2) puede ser aplicado a la resolución de las integrales de las ecuaciones de equilibrio. Considerando un sistema de ejes con origen en el centro de gravedad de la sección, girado un ángulo β respecto al sistema de referencia inicial de forma que los eje x^* e y^* sean paralelo y normal, respectivamente, al eje neutro, y escogiendo las funciones P y Q referidas a este nuevo sistema de referencia tal que $P = 0$; $Q = \frac{1}{r+1} \int x^{*r+1} y^{*s} \sigma_{ci} dx^*$ (con r y s números enteros positivos), la integral de superficie (2) se transforma en una integral curvilínea a lo largo del contorno L de la superficie A ,

$$\iint_A x^{*r} y^{*s} \sigma_{ci} dx^* dy^* = \frac{1}{r+1} \oint_L x^{*r+1} y^{*s} \sigma_{ci} dy^* \quad (3)$$

Variando los coeficientes r y s se obtienen los esfuerzos resultantes del bloque de compresiones del hormigón (ver tabla 1).

r	s	<i>Esfuerzo</i>
0	0	$N_{c_{ult}} = \oint_L x^* \sigma_{ci} dy^*$
0	1	$M_{cx_{ult}} = \oint_L x^* y^* \sigma_{ci} dy^*$
1	0	$M_{cy_{ult}} = -\frac{1}{r+1} \oint_L x^{*2} \sigma_{ci} dy^*$

Tabla 1. Esfuerzos resultantes del bloque de compresiones del hormigón.

Si L es poligonal, la integral curvilínea (3) es el sumatorio de las integrales de línea a lo largo de cada lado del polígono

$$\frac{1}{r+1} \oint_L x^{*r+1} y^{*s} \sigma_{ci} dy^* = \frac{1}{r+1} \sum_l S_l \quad (4)$$

siendo

$$S_l = \int_{y_l^*}^{y_{l+1}^*} x^{*r+1} y^{*s} \sigma_{ci} dy^* \quad (5)$$

La ecuación de un lado l es $x^* = \alpha_l + \beta_l y^*$, con $\alpha_l = x_l^* - \beta_l y_l^*$; $\beta_l = \frac{x_{l+1}^* - x_l^*}{y_{l+1}^* - y_l^*}$, siendo

$x_{l,(l+1)}^*, y_{l,(l+1)}^*$ las coordenadas del punto inicial (final) del lado l respecto al sistema x^*, y^* .

La integral de línea definida en (5) para el lado l , será

$$S_l = \int_{y_l^*}^{y_{l+1}^*} (\alpha_l + \beta_l y^*)^{r+1} y^{*s} \sigma_{ci} dy^* = \int_{y_l^*}^{y_{l+1}^*} G_l(y^*) dy^* \quad (6)$$

La resolución numérica de la integral (6) se realiza de acuerdo a la expresión

$$S_l = \int_{y_l^*}^{y_{l+1}^*} G_l(y^*) dy^* \cong (y_{l+1}^* - y_l^*) \sum_{i=1}^{n_g} w_i G_l(y_i^*) \quad (7)$$

3. DISCRETIZACIÓN DE LA SECCIÓN

3.1. Métodos de mapeo y función de transporte (mallador por mapeo, MMSC).

Los métodos de mapeo y función de transporte, también conocidos como métodos algebraicos, consisten en el mapeo de una malla de referencia y la proyección de los nodos de ésta al dominio real mediante una función de transporte, F . La capacidad de generar mallas en dominios con geometrías más o menos complejas, va a depender de la naturaleza de dicha función de transporte.

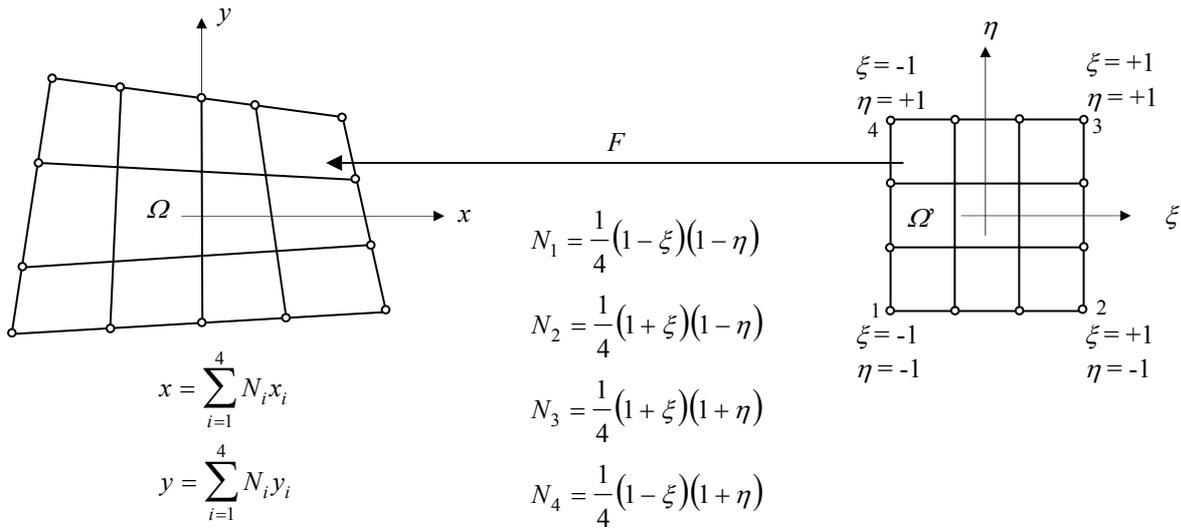


Figura 1. Dominio real y dominio en el sistema de coordenadas naturales.

Este método es muy eficaz (rápido, preciso, mínimo esfuerzo, etc.) desde el punto de vista computacional. Además, es susceptible de una total automatización a partir de la definición geométrica. La robustez y generalidad de aplicación de este método está fuertemente relacionada con las funciones de forma, N_i . En este caso, las funciones utilizadas están basadas en los vértices del superelemento.

3.2. Triangulación de Delaunay-Voronoi (mallador libre, MLSC)

Dentro de los métodos basados en la inserción de puntos existen dos categorías:

- Los que incorporan una definición global del contorno a través de ecuaciones, splines, curvas de Bézier, etc.
- Los basados en una discretización del contorno, donde se mantiene la integridad de los datos.

Este último método ha sido el utilizado en esta comunicación. A partir de un conjunto $x_k = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n distintos puntos en el plano, y de una malla T_i en la que los vértices de los elementos que la definen son los i primeros puntos de x_k , se puede obtener una nueva malla T_{i+1} a partir de la malla T_i de forma que el punto x_{k+1} del conjunto inicial sea uno de sus vértices. En la figura 2 se ha representado gráficamente el proceso de generación de la malla.

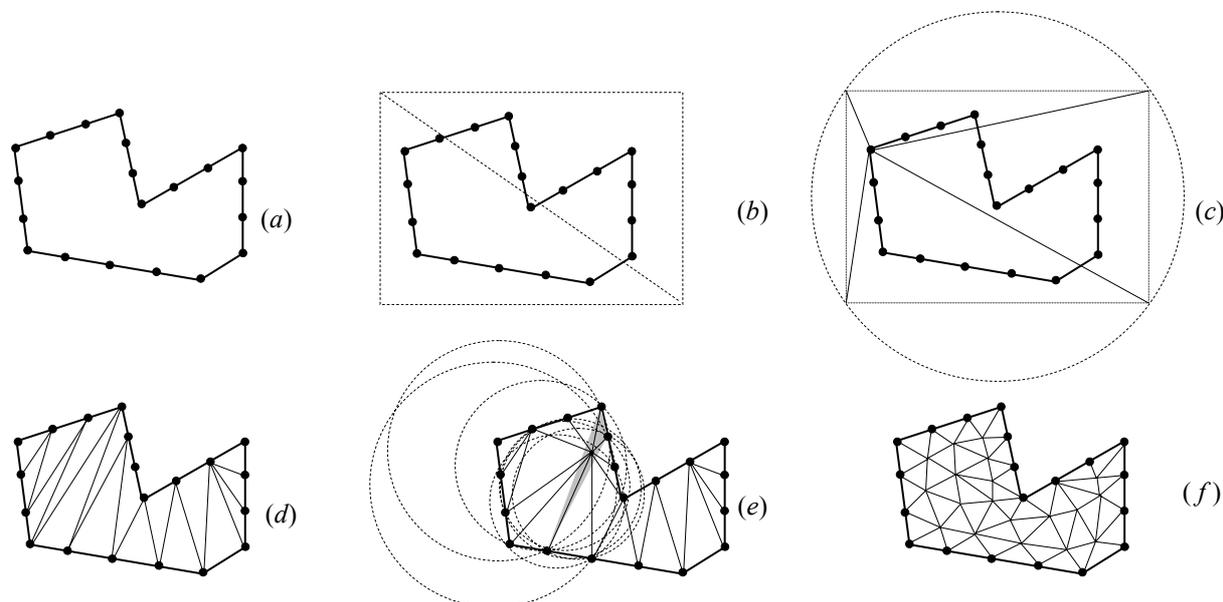


Figura 2. Generación de la triangulación de Delaunay-Voronoi.

Para discretizar la zona comprimida, se parte del contorno de dicha zona (MLZC).

3.3. Mallador en bandas (MBZC)

Otra opción para discretizar la sección es el mallado en bandas paralelas al eje neutro [1, 3]. Al igual que con el mallador libre, es posible la discretización de toda la sección o de la zona comprimida. En el estudio realizado, se ha considerado nula la resistencia a tracción del hormigón, por lo que sólo es necesario discretizar en bandas la zona comprimida. En la figura 3 se ha representado gráficamente el proceso de generación de la malla.

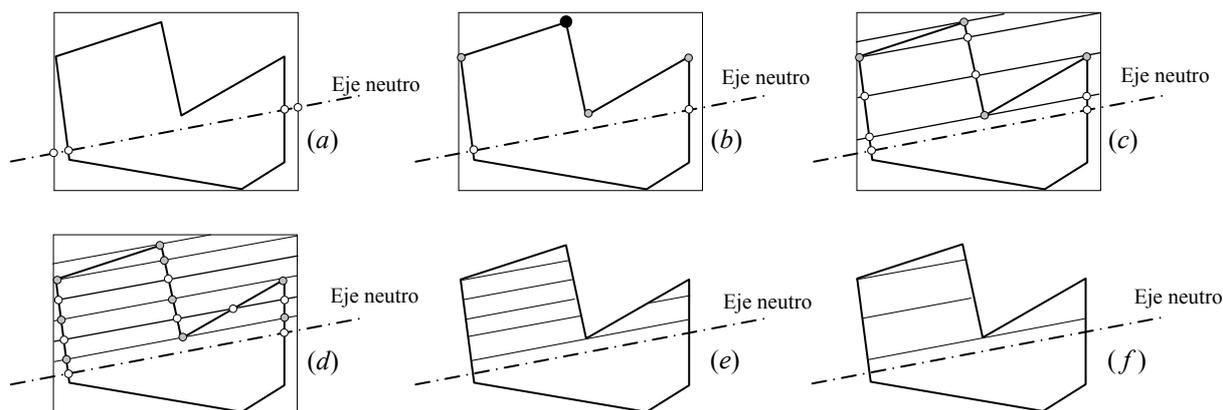


Figura 3. Generación de un mallado en bandas.

4. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Para el análisis de la sección en el Estado Límite Último, el sistema de ecuaciones ha sido resuelto utilizando el método de Newton-Raphson. El orden de integración ha sido tres; la perturbación utilizada en las derivadas es 10^{-7} y la tolerancia de cierre, 10^{-4} . Para evitar diferencias en los tiempos a causa de programas residentes, han sido realizadas 100 ejecuciones de cada caso, siendo los valores mostrados, valores medios.

Se considera como ley de comportamiento del hormigón el diagrama parábola-rectángulo (lo que permite la integración exacta para algunos métodos) y para el acero, una ley bilineal que responde a un comportamiento elástico-perfectamente plástico.

Los ejes de cada sección están situados en el centro de gravedad de la misma con sentidos positivos hacia la derecha (eje x) y hacia arriba (eje y), y los esfuerzos últimos están referidos a dichos ejes. Se consideran positivas aquellas sollicitaciones que producen compresión en el primer cuadrante.

Los valores de los esfuerzos utilizados como referencia se han obtenido integrando numéricamente las tensiones en el hormigón discretizando la zona comprimida de la sección en bandas paralelas al eje neutro y utilizando derivadas semianalíticas.

Los errores de los esfuerzos en el análisis, se han calculado a partir de la expresión

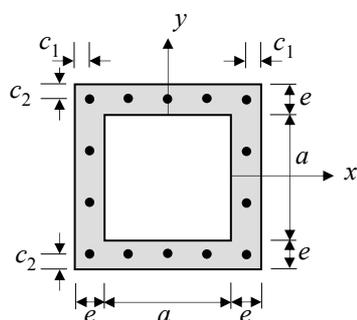
$$\text{Error}(\%) = \frac{|\mathbf{R}_{d_{MBZC}} - \mathbf{R}_{d_M}|}{\mathbf{R}_{d_{MBZC}}} \times 100 \quad (8)$$

siendo $\mathbf{R}_{d_{MBZC}}$ los esfuerzos últimos tomados como referencia y \mathbf{R}_{d_M} los esfuerzos últimos obtenidos integrando numéricamente sobre la sección discretizada con el mallador a comparar.

5. EJEMPLO

En este ejemplo se analiza una sección cuadrada hueca, con el armado distribuido uniformemente sobre las caras exteriores.

En la figura 4 se muestran la geometría y las dimensiones de la sección, la distribución y cuantía del armado, y las características de los materiales.



Geometría
 $a = 356 \text{ mm}$
 $e = 127 \text{ mm}$
 $c_1 = 61 \text{ mm}$
 $c_2 = 60,5 \text{ mm}$

Armado
 $14\varnothing 20 \text{ mm}$

DATOS

Materiales
 $f_{yk} = 414 \text{ MPa}$; $\gamma_s = 1,15$
 $f_{ck} = 28 \text{ MPa}$; $\gamma_c = 1,5$
 $E_s = 200 \text{ GPa}$

Cargas
 $N_d = 4950 \text{ kN}$
 $M_{xd} = -504 \text{ m}\cdot\text{kN}$
 $M_{yd} = 240 \text{ m}\cdot\text{kN}$

Figura 4. Sección cuadrada hueca.

5.1. Capacidad resistente de la sección en el Estado Límite Último

Los resultados del análisis (considerados como referencia) se muestran en la figura 5 (junto a la discretización utilizada) y en la tabla 2.

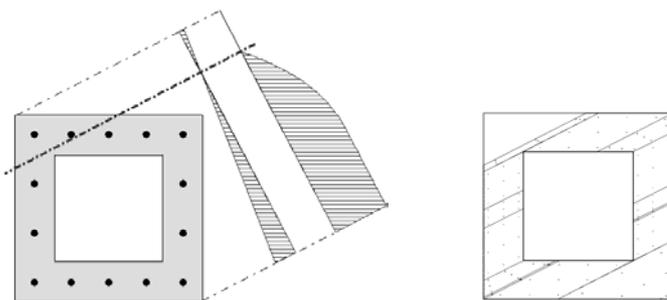


Figura 5. Sección cuadrada hueca. MBZC. Eje neutro y distribuciones de tensiones y deformaciones.

N_{ult} (kN)	M_{xult} (mkN)	M_{yult} (mkN)	χ (m)	β (°)
4951,617	-503,705	239,966	0,671	207,519

Tabla 2. Esfuerzos últimos y posición del eje neutro.

En la tabla 3 se indica el coste computacional y el número de iteraciones.

n_b	TM (s)	TA (s)	TT (s)	Iteraciones
8	0,009	0,036	0,045	7

Tabla 3. MBZC. Costes computacionales y número de iteraciones.

5.2. Resultados con otras alternativas de discretización

En las figuras 6, 7, 8 y 9 se muestran, las discretizaciones utilizadas para las distintas alternativas de integración a comparar y las características de las mismas (número de

elementos y tamaño de malla en mm), y en las tablas 4, 5, 6 y 7 el coste computacional, el número de iteraciones y los errores cometidos.

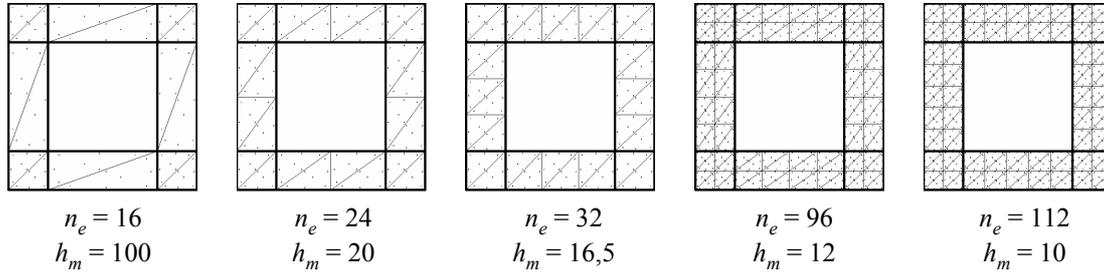


Figura 6. Discretizaciones utilizadas para la alternativa MSSC.

n_e	h_m (mm)	TM (s)	TA (s)	TT (s)	Iteraciones	Error (%)
16	100	0,002	0,012	0,014	6	$7,4 \cdot 10^{-2}$
24	20	0,002	0,011	0,013	5	$2,3 \cdot 10^{-2}$
32	16,5	0,002	0,012	0,014	5	$1,6 \cdot 10^{-2}$
96	12	0,005	0,016	0,021	5	$2,5 \cdot 10^{-2}$
112	10	0,005	0,019	0,024	5	$2,4 \cdot 10^{-2}$

Tabla 4. MSSC. Costes computacionales, número de iteraciones y errores.

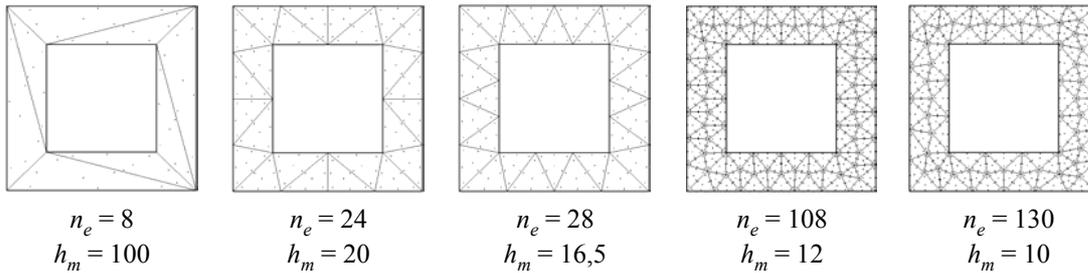


Figura 7. Discretizaciones utilizadas para la alternativa MLSC.

n_e	h_m (mm)	TM (s)	TA (s)	TT (s)	Iteraciones	Error (%)
8	100	0,001	0,034	0,034	7	$1,9 \cdot 10^{-1}$
24	20	0,003	0,034	0,037	7	$1,5 \cdot 10^{-1}$
28	16,5	0,004	0,034	0,038	6	$2,2 \cdot 10^{-1}$
108	12	0,011	0,037	0,049	6	$1,8 \cdot 10^{-3}$
130	10	0,015	0,038	0,053	6	$1,2 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5. MLSC. Costes computacionales, número de iteraciones y errores.

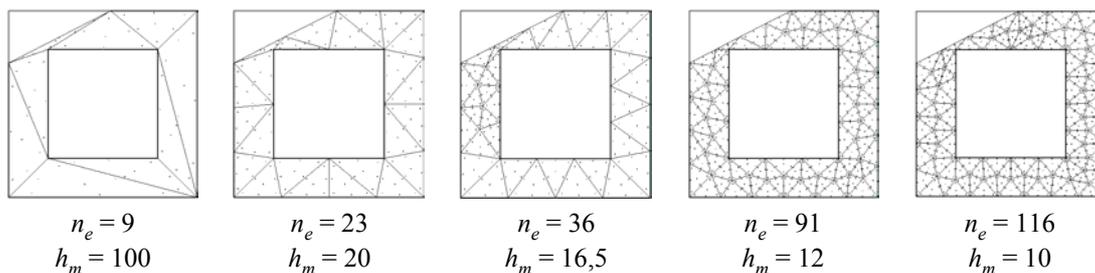


Figura 8. Discretizaciones utilizadas para la alternativa MLZC.

n_e	h_m (mm)	TM (s)	TA (s)	TT (s)	Iteraciones	Error (%)
9	100	0,009	0,035	0,044	6	$1,4 \cdot 10^{-2}$
23	20	0,020	0,036	0,056	6	$6,4 \cdot 10^{-5}$
36	16,5	0,028	0,037	0,065	6	$8,5 \cdot 10^{-4}$
91	12	0,059	0,039	0,098	6	$1,9 \cdot 10^{-6}$
116	10	0,075	0,041	0,116	6	$1,1 \cdot 10^{-7}$

Tabla 6. MLZC. Costes computacionales, número de iteraciones y errores.

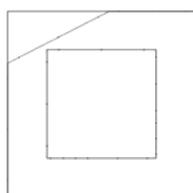


Figura 9. Discretización utilizada para la alternativa MCZC.

TM (s)	TA (s)	TT (s)	Iteraciones	Error (%)
0,001	0,037	0,038	6	$7,6 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7. MCZC. Costes computacionales, número de iteraciones y errores.

En las gráficas de la figura 10 se muestra la evolución de los tiempos de análisis y de mallado para cada una de las alternativas de discretización.

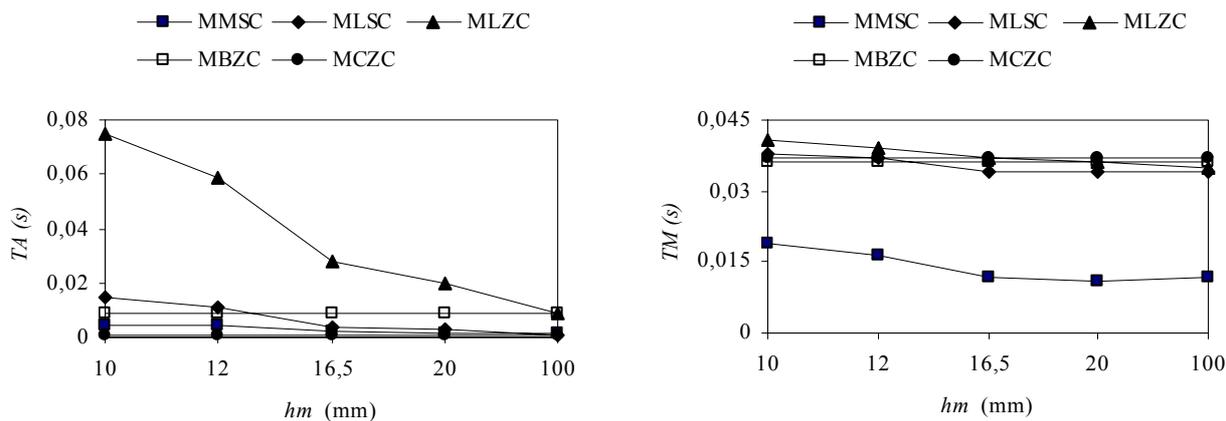


Figura 10. Evolución de los tiempos de análisis y de mallado, para las diversas alternativas de discretización.

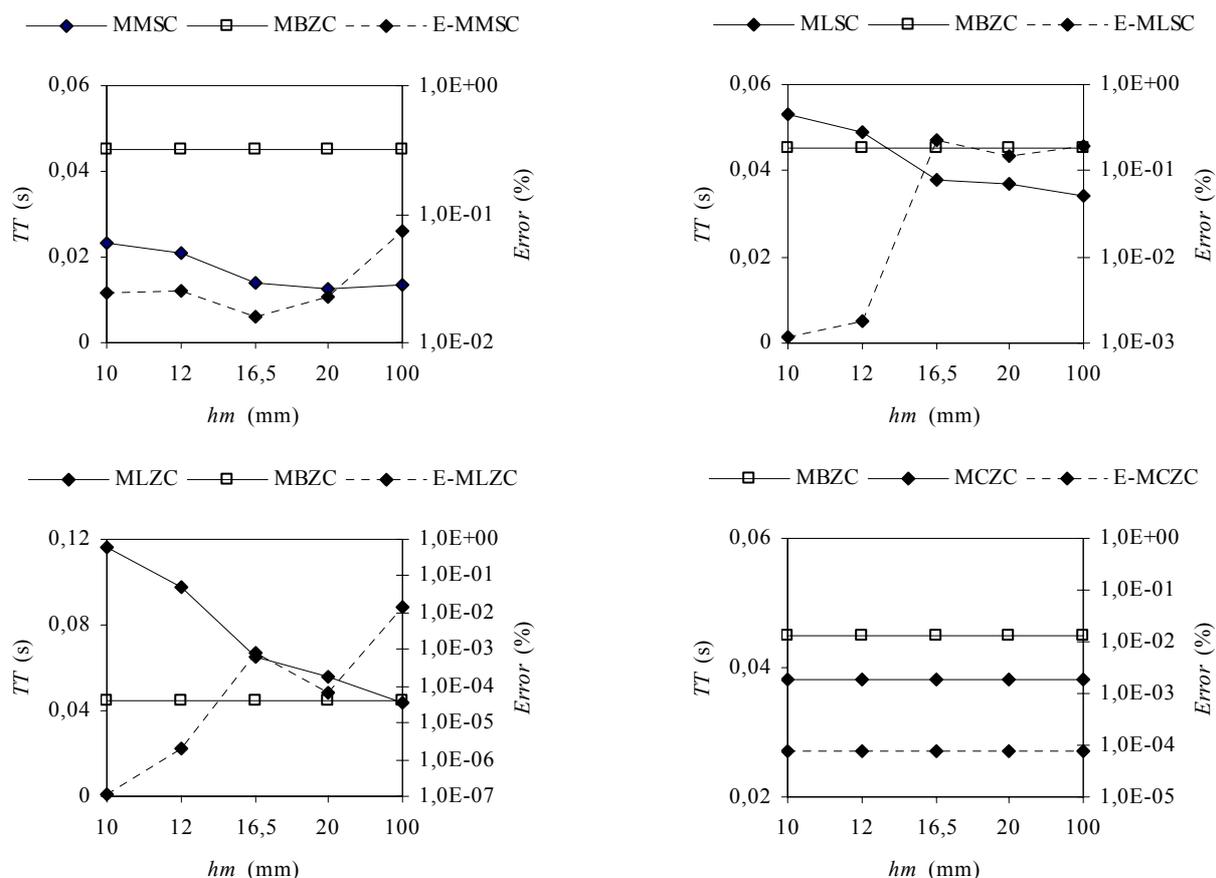


Figura 11. Evolución del tiempo de total de CPU para cada una de las alternativas de discretización.

5. CONCLUSIONES

Se han planteado dos métodos para la resolución numérica de las integrales que aparecen en las ecuaciones de equilibrio: la integración sobre el dominio o la transformación de la integral de superficie, mediante el Teorema de Green, en una integral de línea. Se han considerado cuatro alternativas de discretización del dominio: mapeo por mapeo de la sección completa; mapeo libre de la sección completa; mapeo libre de la zona comprimida y mapeo en bandas paralelas al eje neutro (en estos dos últimos casos sólo se discretiza la zona comprimida de la sección).

La integración numérica de las tensiones mediante una integral de línea a lo largo del contorno de la zona comprimida, asegura unos errores de los esfuerzos últimos inferiores al 10^{-3} %, con un coste computacional menor, o a lo sumo igual, al empleado para obtener los esfuerzos últimos de referencia.

En general, y para un mismo tamaño de malla, los errores en los esfuerzos últimos obtenidos discretizando la zona comprimida de la sección con el mapeo libre, son un orden de magnitud menores que los obtenidos discretizando toda la sección con los mapeos por

mapeo o libre.

El error en los esfuerzos últimos, obtenidos con los malladores por mapeo y libre, con una relación entre el tamaño de malla y la menor dimensión de la sección de 0,5, es inferior al 10^{-2} %.

Los resultados obtenidos con todos los malladores son, en general, aceptables. La integración numérica sobre la zona comprimida de la sección, discretizada en bandas, o la integración a lo largo del contorno de la zona comprimida, son las mejores opciones para la integración de las tensiones sobre el hormigón.

REFERENCIAS

- [1] S. Torrano, *Diseño Óptimo de Secciones y Elementos Estructurales de Hormigón Armado*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena (2003).
- [2] A. Fafitis, *Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete sections in biaxial bending*. Journal of Structural Engineering, 127(7), 840-846 (2001).
- [3] J.L. Bonet, M.L. Romero, P.F. Miguel y M.A. Fernández, *A Fast Stress Integration Algorithm for Reinforced Concrete Sections With Axial Loads and Biaxial Bending*, 82, 213-225 (2004).