*Métodos de dinámica orbital y rotacional 175–181*

# Estabilidad de ciertos equilibrios de un giróstato simétrico bajo un potencial con simetría axial U(K$_3$).

J.A. Vera y A. Vigueras

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena.

**Abstract**

In this paper, we consider the study of the stability of some equilibria of a symmetrical gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field, where the potential function adopts the form U = U(K$_3$). The Energy-Casimir method allows us to obtain sufficient conditions of stability for these equilibria. The obtained results generalize, in part, others of the papers [7], [8], [1] and [2]. In particular, these results can be applied to the case of a symmetrical gyrostat when the potential function is approximated by U$^{(3)}$ and to other problems, as the problem of a rigid body or gyrostat into a incomprehensible fluid.

## 1 Introducción

El problema que consideramos en este trabajo, es el del movimiento de un giróstato fijo por uno de sus puntos $O$, perteneciente a su parte rígida, para el cual el momento angular relativo de $S_2$ con respecto a $S_1$, también denominado momento girostático es constante. Con origen en $O$ se consideran dos sistemas de referencia uno fijo o inercial $OX_1X_2X_3$ y otro móvil $Ox_1x_2x_3$, fijo en el cuerpo (en nuestro caso en la parte rígida del giróstato), y cuyos ejes están dirigidos según las direcciones principales de inercia del giróstato en $O$. Parte de la literatura concerniente a este problema está dedicada al estudio de posiciones de equilibrio y de su estabilidad para un giróstato con un punto fijo ([3], [7] y [8]). Así, Rumiantsev haciendo uso del segundo método de Lyapunov investiga ciertos movimientos de un giróstato pesado (el potencial del que derivan las fuerzas es aproximado por $U^{(1)}$) de revolución, obteniendo para la estabilidad de la solución de equilibrio:

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_3^0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 1$$

la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad

$$(I_3\omega_3^0 + l)^2 - 4I_1 m_0 z_0 > 0,$$

donde $I_1 = I_2, I_3$ son los momentos de inercia de $S$, $(0,0,l)$ es el momento girostático y $(x_0, y_0, z_0)$ son las coordenadas del centro de masas de S. Más recientemente en [1] y [2] aplican el mismo método para estudiar soluciones de equilibrio del mismo problema cuando el potencial es aproximado por $U^{(2)}$, obteniendo para la solución de equilibrio anterior, que también existe ahora, la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad

$$(I_3\omega_3^0 + l)^2 > 4I_1(m_0 z_0 - m_1(I_1 - I_3)),$$

donde $m_0 = mg$, $m_1 = 3g/r$, siendo $m$ la masa total del giróstato, $g$ la aceleración de la gravedad a la distancia fija $r$ del centro de atracción $P$, que se supone fijo en la parte negativa del eje $OX_3$, al punto fijo $O$. Condición que pone de manifiesto no sólo la influencia de la posible elección del momento girostático, sino también de la aproximación del potencial que estemos utilizando.

El problema que vamos a considerar en este trabajo, es el estudio de la estabilidad de ciertas soluciones de equilibrio de un giróstato de revolución con un punto fijo bajo un potencial axialmente simétrico $U(k_3)$ siendo $U$ una función verificando condiciones adecuadas de diferenciabilidad.

Vamos a utilizar como herramienta de estudio de la estabilidad de dichas soluciones el método de la Energía-Casimir, que proporciona condiciones suficientes para la estabilidad Liapunov de soluciones de equilibrio para sistemas mecánicos con simetría. El siguiente teorema nos describe el método:

**Teorema** (Energía-Casimir)

*Sea* $(M, \{\cdot,\cdot\}, h)$ *un sistema de Poisson,* $m \in M$ *un equilibrio del campo vectorial Hamiltoniano* $X_h$ *y* $C_1, C_2, ..., C_n \in C^\infty(M)$ *integrales del movimiento del sistema verificando:*

$$\boldsymbol{d}(h + C_1 + C_2 + ... + C_n)(m) = 0$$

*y que*

$$\boldsymbol{d}^2(h + C_1 + C_2 + ... + C_n)(m)\Big|_{W\times W}$$

*es una forma cuadrática definida positiva sobre* $W \times W$*, donde* $W$ *está definido por:*

$$W = \ker\, \boldsymbol{d}C_1(m) \bigcap \ker\, \boldsymbol{d}C_2(m) \bigcap \ldots \bigcap \ker\, \boldsymbol{d}C_n(m)$$

*Entonces,* $m \in M$ *es estable. Si además* $W = \{0\}$*, entonces* $m \in M$ *es siempre estable (ver [5] y [6]).*

## 2 Ecuaciones de Lie-Poisson de un giróstato en un potencial Newtoniano.

Para aplicar el resultado anterior hemos de describir el sistema mecánico en cuestión como un sistema de Poisson con una cierta función hamiltoniana $h$.

El espacio de configuración es $\mathbf{SO(3)}$, y la función hamiltoniana viene dada por:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_2} + \frac{\pi_3^2}{I_3}\right) + U(k_1, k_2, k_3)$$

donde, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ es el momento angular del giróstato $S$, $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$ el vector de Poisson y la función $U$ satisface condiciones adecuadas de diferenciabilidad.

Dicho hamiltoniano anterior está definido en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{e(3)}^* \cong \mathbf{so(3)}^*(\mathbf{R}^3)^*$, siendo $\mathbf{e(3)}$ el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie $\mathbf{E(3)}$, grupo de los movimientos de $\mathbf{R}^3$. La herramienta adecuada para realizar esto se basa en el Teorema de Reducción del Producto Semidirecto de Álgebras de Lie [4]. Tenemos así las siguientes afirmaciones:

**Proposición 2.1** (Corchetes de Lie-Poisson de un giróstato con punto fijo)

*La estructura geométrica asociada al movimiento de un giróstato con un punto fijo O y momento girostático constante, viene dada por el siguiente corchete de Lie-Poisson definido en* $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{e(3)}^*$ *por la fórmula:*

$$\{F, G\}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k}) = -(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\pi}} F \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} G) - \boldsymbol{k} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\pi}} F \times \nabla_{\boldsymbol{k}} G + \nabla_{\boldsymbol{k}} F \times \nabla_{\boldsymbol{\pi}} G)$$

*siendo* $F, G \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ *el momento angular del giróstato S,* $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$ *el vector de Poisson y* $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3)$ *el momento girostático.*

*El tensor de Poisson asociado a dicho corchete viene dado por la siguiente matriz:*

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi_3 - l_3 & \pi_2 + l_2 & 0 & -k_3 & k_2 \\ \pi_3 + l_3 & 0 & -\pi_1 - l_1 & k_3 & 0 & -k_1 \\ -\pi_2 - l_2 & \pi_1 + l_1 & 0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Y las ecuaciones de Lie-Poisson asociadas al hamiltoniano h vienen dadas por las fórmulas:*

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \times (\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) - \nabla_{\boldsymbol{k}} h \times \boldsymbol{k}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -\nabla_{\boldsymbol{\pi}} h \times \boldsymbol{k}$$

*Cuando el momento girostático es nulo obtenemos las ecuaciones del sólido rígido con un punto fijo.*

*La estructura geométrica asociada al movimiento de un giróstato con un punto fijo O y momento girostático constante, posee dos funciones de Casimir, las cuales vienen dadas por las siguientes fórmulas:*

$$\phi_1\left((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}\right); \qquad \phi_2\left(\| \boldsymbol{k} \|^2\right),$$

*siendo $\phi_1, \phi_2$ sendas funciones diferenciables. Junto con el hamiltoniano, dicho sistema posee en general, dos integrales del movimiento, en involución.*

Los primeros resultados de la proposición 2.1 son aplicaciones del teorema de reducción del producto semidirecto. La parte final de la misma es sencilla de comprobar ya que claramente se tiene que:

$$\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_1\left((\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{k}\right),\ \nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_2\left(\|\ \boldsymbol{k}\ \|^2\right)\in\ker\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})$$

es decir dan campos vectoriales hamiltonianos nulos. Además, es inmediato comprobar que:

$$\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_1(\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{k})\,\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}h=0,$$

$$\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}\phi_2(\|\ \boldsymbol{k}\ \|^2)\,\mathbf{B}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})\nabla_{(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{k})}h=0.$$

Las ecuaciones del movimiento para un giróstato simétrico, con momento girostático $\boldsymbol{l}=(0,0,l)$ constante, bajo un potencial axialmente simétrico $U(k_3)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi_1} &= \left(\frac{I_1-I_3}{I_1I_3}\right)\pi_2\pi_3-\frac{l\pi_2}{I_2}+k_2\frac{\partial U}{\partial k_3};\\
\dot{\pi_2} &= \left(\frac{I_3-I_1}{I_3I_1}\right)\pi_1\pi_3+\frac{l\pi_1}{I_1}-k_1\frac{\partial U}{\partial k_3};\\
\dot{\pi_3} &= 0\\
\dot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{k}\times\left(\tfrac{\pi_1}{I_1},\tfrac{\pi_2}{I_1},\tfrac{\pi_3}{I_3}\right)
\end{aligned}$$

Luego dicho problema posee una nueva integral del movimiento: $\pi_3 = cte$

*Es fácil ver que los puntos de* $\mathbf{R}^3\times\mathbf{S}^2$*:*

$$E_1=(0,0,\pi_3^0,0,0,1)$$

$$E_2=(0,0,\pi_3^0,0,0,-1)$$

*son soluciones de equilibrio de nuestro problema.*

La demostración es inmediata en virtud de las ecuaciones de Lie-Poisson anteriores. Por otro lado, según sea la función $U$ tendremos posiblemente otros equilibrios relativos. La búsqueda de equilibrios relativos según la forma de la función $U$ será objeto de un tratamiento posterior.

## 3 Condiciones suficientes de estabilidad de las soluciones de equilibrio $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$

### *3.1 Estudio de la solución $E_1$*

Esta solución corresponde físicamente al movimiento del giróstato alrededor de la vertical en sentido ascendente. Para aplicar el método de la Energía-Casimir, descrito anteriormente sea la función:

$$f := \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_1} + \frac{\pi_3^2}{I_3}\right) + U(k_3) + \phi_1((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}) + \phi_2(\| \boldsymbol{k} \|^2) + \phi_3(\pi_3)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ son funciones reales, al menos dos veces derivables, a determinar y $U(k_3)$ es el potencial anterior, verificando que la función $U$ no tenga ningún punto crítico en $E_1$.

Imponiendo las condición de que $\boldsymbol{d}(f)(E_1) = \boldsymbol{0}$, realizando los cálculos pertinentes y llamando

$$x = \phi_1'(\pi_3^0 + l), \quad y = 2\phi_2'(1), \quad z = \phi_3'(\pi_3^0 + l),$$

obtenemos:

$$x + z + \pi_3^0/I_3 = 0,$$

$$U'(1) + x(\pi_3^0 + l) + y = 0.$$

En tanto que el subespacio

$$W = \ker \boldsymbol{d}\phi_1((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k})(E_1) \bigcap \ker \boldsymbol{d}\phi_2(\| \boldsymbol{k} \|^2)(E_1) \bigcap \ker \boldsymbol{d}\phi_3(\pi_3)(E_1),$$

está dado por

$$W = \mathbf{span} < (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0) >$$

Y la matriz $\boldsymbol{d}^2(f)(E_1)\Big|_{W\times W}$, resulta ser:

$$\boldsymbol{d}^2(f)(E_1)\Big|_{W\times W} = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1/I_1 & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Para que esta matriz sea definida positiva es suficiente que el determinante de la primera submatriz de orden 3 sea positivo, o también que la función:

$$d(x) = -\frac{1}{I_1^2}\left[U'(1) + x(\pi_3^0 + l + xI_1)\right]$$

sea positiva para cualquier valor de $x$, lo cual indica que debemos calcular el valor de $x$ que la minimiza, que resulta ser: $-(\pi_3^0 + l)/(2I_1)$. Entonces, sustituyendo en la función $d$ y simplificando obtenemos la siguiente condición suficiente:

$$(\pi_3^0 + l)^2 > 4I_1U'(1)$$

Por tanto, podemos concluir que:

*Una condición suficiente de estabilidad en sentido de Lyapunov de la solución de equilibrio $E_1$ del problema del movimiento de un giróstato simétrico, con un punto fijo $O$ en un campo de potencial $U(k_3)$ (tal que $U(k_3)$ no tenga un punto crítico en $E_1$) y con* *momento girostático constante $l$ alrededor del tercer eje principal de inercia, es que se verifique:*

$$(\pi_3^0 + l)^2 > 4I_1U'(1).$$

*Y una función de Lyapunov viene dada por la fórmula siguiente:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1^2}{I_1} + \frac{\pi_2^2}{I_1} + \frac{\pi_3^2}{I_3}\right) + U(k_3) + \phi_1((\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{k}) + \phi_2(\| \boldsymbol{k} \|^2) + \phi_3(\pi_3),$$

*donde las derivadas de las funciones $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ verifican las relaciones:*

$$\phi_1'(\pi_3^0 + l) = x = -\tfrac{\pi_3^0+l}{2I_1};$$

$$2\phi_2'(1) = -U'(1) - x(\pi_3^0 + l);$$

$$\phi_3'(\pi_3^0 + l) = -\frac{\pi_3^0 + xI_3}{I_3}$$

### *3.2 Estabilidad de la solución $E_2$*

Dicha solución corresponde físicamente a la rotación del giróstato alrededor de la vertical en sentido descendente. Y procediendo de un modo similar al anterior obtenemos el siguiente resultado:

*Una condición suficiente para que la solución de equilibrio $E_2$, del problema del movimiento de un giróstato simétrico, con un punto fijo $O$ en un campo de potencial $\mathbf{U}(\mathbf{k}_3)$ (tal que $U(k_3)$ no tenga un punto crítico en $E_2$) y con momento girostático constante $l$, alrededor del tercer eje principal de inercia, sea estable, en sentido de Lyapunov, es que se verifique:*

$$(\pi_3^0 + l)^2 > -4I_1U'(1)$$

## 4 Conclusiones

El método de la Energía Casimir es bastante efectivo para la obtención de condiciones suficientes de estabilidad de soluciones de equilibrio de problemas complicados de mecánica del sólido rígido. Así, obtenemos condiciones suficientes para la estabilidad de las soluciones de equilibrio $E_1$ y $E_2$ de una familia de problemas cualquiera que sea el potencial con simetría axial $U(k_3)$; de modo que particularizando adecuadamente el potencial $U(k_3)$ se reducen a las dadas en los trabajos citados en los siguientes casos:

- $U(k_3) = mgz_0k_3$ (giróstato pesado $U^{(1)}$) (condiciones suficientes de Rumiantsev en [7] y [8]).
- $U(k_3) = mgz_0k_3 + \dfrac{3g(I_3 - I_1)}{2r}k_3^2$ (giróstato en campo $U^{(2)}$) se obtienen las dadas en [1] y [2].

Las condiciones suficientes obtenidas son válidas cualquiera que sea el grado de aproximación del potencial. También queda de manifiesto la importancia de la posible elección del momento girostático, así como de la posible elección de la aproximación del potencial a la hora de estudiar la estabilidad de soluciones del sistema, o la posible estabilización de ciertos equilibrios.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación Cultura y Deportes (Proyecto n$^o$ PB98-1576).

## Referencias

[1] Cavas, J. A. y Vigueras, A.: 1998, "Stability of certain rotations of a gyrostat analogous to that of Lagrange and Poisson in a Newtonian force field", *Proceedings of the Fourth International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*, 129–136.

[2] Cavas, J. A., Molina, R, y Vigueras, A.: 1995, "Soluciones de equilibrio y estabilidad de un problema generalizado de Lagrange-Poisson", *Proceedings XIV CEDYA/IV CMA*, (publicación electrónica de la Universidad Politécnica de Cataluña, http://www.ma1.upc.es/cedya/comu.html); 9 páginas.

[3] Leimanis, E.: 1965, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*, Springer Verlag.

[4] Marsden, A., Ratiu, T. S. y Weinstein A.: 1984, "Semidirect products and reduction in mechanics", *Transactions of the American Mathematical Society*, **281**, 147–177.

[5] Ortega, J. P.: 1998, *Symmetry, Reduction and Stability in Hamiltonian systems.* Tesis doctoral, Universidad de California.

[6] Ortega, J. P. y Ratiu, T. S.: 1999, "Stability of Hamiltonian Relative Equilibria", *Nonlinearity* **12(3)**, 693–720.

[7] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of gyrostats", *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 9–19.

[8] Rumiantsev, V. V.: 1961, "On the stability of motion of certain types of gyrostats", *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 1158–1169.