

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



INGENIERÍA SUPERIOR DE TELECOMUNICACIÓN

**Proyecto Fin de Carrera**

**IMPLEMENTACIÓN DE UN BANCO DE  
FILTROS CAKE WAVELETS PARA LA  
ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN  
MÚLTIPLE Y SU USO EN SEGUIMIENTO  
DE LA VASCULATURA EN IMÁGENES  
RETINOGRÁFICAS**

*Feliciano Hurtado Martí*

*7 de Octubre de 2016*

Director: *Dr. D. Rafael Verdú Monedero*



<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Enfermedades oculares que afectan a la vasculatura retinal . . . . .	2
1.2	Seguimiento de la vasculatura en imágenes retinográficas . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Marcador de orientaciones</b>	<b>5</b>
2.1	Construcción del marcador de orientaciones . . . . .	7
2.2	Dominio del marcador de orientaciones . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Cake wavelets</b>	<b>11</b>
3.1	Marcador de orientaciones a partir de cake wavelets . . . . .	13
3.2	Wavelets bilaterales vs unilaterales. Orientación vs dirección . . . . .	17
<b>4</b>	<b>ETOS. Detección simultánea de bordes</b>	<b>19</b>
4.1	Casos Especiales . . . . .	29
4.1.1	Cruces . . . . .	29
4.1.2	Bifurcaciones . . . . .	30
4.1.3	Vasos paralelos . . . . .	31
4.1.4	Grandes curvaturas . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
6.1	Líneas futuras de investigación . . . . .	40
	<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

Durante este Proyecto se realizará un estudio de un método diseñado para el análisis del seguimiento de la vasculatura retinal basado en la orientación múltiple. Dicho análisis se llevará a cabo mediante el uso del llamado marcador de orientaciones (*Orientation Score, OS*) invertible, el cual nos permite afrontar problemas que hasta ahora se consideraban complejos en el seguimiento de vasos como los cruces, bifurcaciones y la existencia de vasos paralelos. El método proporcionará un modelo detallado de la vasculatura retinal, que es especialmente útil en diagnóstico médico.

En primer lugar se realizará una breve introducción sobre las enfermedades oculares que afectan a la vasculatura retinal y se pueden estudiar mediante el seguimiento de la vasculatura de imágenes retinográficas. Dicho seguimiento será llevado a cabo mediante la obtención del llamado marcador de orientaciones cuya base teórica será explicada con detalle durante el Proyecto. Esta implementación da lugar a la introducción de un tipo de *wavelets* denominado *cake wavelets*, que son básicas para el desarrollo del método de seguimiento de vasos sanguíneos, ETOS. Este método es considerado de escala completa y trabaja con diferentes tipos de marcadores de orientaciones, produciéndose un funcionamiento óptimo con aquellos marcadores de orientación que son invertibles.

## 1.1. Enfermedades oculares que afectan a la vasculatura retinal

La vasculatura de la retina es la única parte del sistema circulatorio que puede ser observada de manera no invasiva mediante medidas ópticas. Hay una gran variedad de enfermedades que afectan a la vasculatura de manera que puede ocasionar cambios tanto geométricos como funcionales. El glaucoma y la degeneración macular relacionada con la edad (*AMD, age-related macular degeneration*) son las más destacadas, y serán definidas a continuación para comprender mejor la importancia del estudio de imágenes retinográficas.

- **Glaucoma** : Conjunto de enfermedades que produce un daño progresivo en el nervio óptico. El glaucoma provoca una creciente pérdida de fibras nerviosas, formando un hueco en el interior de este nervio. Dicho proceso ocurre porque el paciente tiene dificultades para que el humor acuoso (líquido transparente que baña las estructuras oculares y mantiene sus propiedades ópticas) salga del espacio que lo contiene. Como consecuencia, se produce un aumento de la presión intraocular y un daño en el nervio óptico. También existe un tipo de glaucoma en el que el daño del nervio óptico se produce con presiones oculares normales. El glaucoma también puede estar asociado a otros factores, como una presión arterial baja y otras enfermedades vasculares. De no tratarse la enfermedad, en cuanto se queda sin fibras nerviosas, el paciente pierde completamente la visión. Actualmente, es la segunda causa de ceguera en el mundo y afecta alrededor de un millón de personas en España [8].
  
- **Degeneración Macular Relacionada con la Edad (AMD)** : La enfermedad es más común en personas de más de 60 años, razón por la cual a menudo se denomina degeneración macular asociada con la edad. La degeneración macular es un trastorno ocular que destruye lentamente la visión central y aguda, lo cual dificulta la lectura y la visualización de detalles finos. La retina se encuentra en la parte de atrás del ojo y transforma la luz e imágenes que entran al ojo en señales nerviosas que se envían al cerebro. Una parte de la retina, llamada la mácula, hace que la visión sea más nítida y más detallada. La *AMD* es causada por el daño a los vasos sanguíneos que irrigan la mácula. Este cambio también daña dicha mácula [11]. Existen dos tipos:
  - La *AMD* seca ocurre cuando los vasos sanguíneos bajo la mácula se vuelven delgados y frágiles. Se forman pequeños depósitos amarillos, llamados engrosamientos localizados. Casi todas las personas con degeneración macular comienzan con la forma seca.
  
  - La *AMD* húmeda ocurre sólo en alrededor del 10 % de las personas con degeneración macular. Crecen nuevos vasos anormales y muy frágiles bajo la mácula. Estos vasos dejan escapar sangre y líquido. Este tipo de *AMD* causa la mayor parte de la pérdida de la visión asociada con la enfermedad.

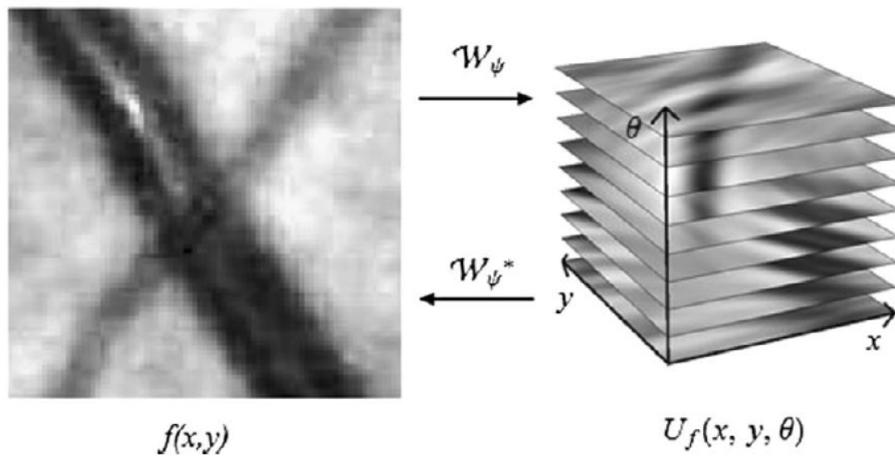
A través de las imágenes retinográficas, no solo se pueden detectar enfermedades oculares como son el glaucoma o la *AMD*, si no que además se pueden detectar otras enfermedades sistémicas como diabetes, hipertensión o arteriosclerosis. Esto hace del estudio de la retina vascular un material de investigación interesante.

### 1.2. Seguimiento de la vasculatura en imágenes retinográficas

Hay dos tipos de métodos para la extracción de vasos sanguíneos: métodos basados en clasificación de píxel [10] y métodos basados en el seguimiento de vasos [1, 15]. En el primer tipo se clasifican los píxeles como vasos o fondo, quedando un mapa de píxeles en el que los vasos sanguíneos están representados por píxeles blancos. El segundo tipo de métodos, seguimiento de vasos, se basan en la expansión recursiva de un modelo de vasculatura, partiendo de un conjunto de semillas. Una de las ventajas del seguimiento de la vasculatura sobre la clasificación de píxeles es que se garantiza la conectividad entre los segmentos de vasos, mientras que en la clasificación de píxeles no se asegura. Para un análisis más cuantitativo de la vasculatura, los algoritmos de seguimiento son preferibles porque dan información de manera intrínseca de la geometría y topología. Por ejemplo, las medidas de los vasos, su curvatura, la longitud de los segmentos o la densidad de las bifurcaciones pueden ser calculadas de manera relativamente sencilla a partir del modelo de vasos sanguíneos generado.

Se pueden encontrar diferentes métodos para el seguimiento de la vasculatura, como son aquellos basados en contornos activos, los filtros adaptados, y los modelos probabilísticos entre otros. Las limitaciones más frecuentes en estos métodos se dan a la hora de detectar cruces de vasos sanguíneos, bifurcaciones y otros casos complejos. Uno de los objetivos de este Proyecto es vencer esas limitaciones con la implementación de un algoritmo basado en el análisis del marcador de orientaciones (*Orientation Score, OS*), es decir, el análisis de las distintas orientaciones que pueden estar presentes en un píxel de imagen.

**Marcador de orientaciones (Orientation Score, OS).** Se puede definir como un marco matemático para el análisis y procesado de imagen basado en el marcador de orientaciones 2D [4]. Se trata de un objeto que mapea las posiciones 2D y el ángulo de la orientación  $(x, y, \theta)$  en escalares complejos. En lugar de asignar una orientación a cada posición, se extiende el dominio de la imagen que se está modelando, pudiendo tener más de una orientación por posición. Al construir el marcador de orientaciones es fundamental no alterar los datos antes de que tenga lugar el seguimiento de vasos sanguíneos. Un marcador de orientaciones se considerará invertible siempre y cuando proporcione una completa comprensión de cómo se ha descompuesto la imagen en sus distintas orientaciones. En la Figura 1.1 se puede observar dicha descomposición.



**Figura 1.1:** Descomposición de la imagen en función de sus orientaciones formando el marcador de orientaciones [2].

---

### Marcador de orientaciones

---

La detección de la orientación y su codificación siempre han tenido relevancia en el procesamiento de imagen. Por ejemplo, se han detectado vasos sanguíneos retinianos mediante el cálculo de la vasculatura obtenida tras el análisis de los autovalores de la matriz Hessiana [6]. También se ha conseguido esto tomando el valor máximo sobre un conjunto de *wavelets* de Gabor [12]. Siendo el valor de la orientación relevante en ambos casos.

Los métodos más comunes para la detección de orientaciones son capaces de detectar una única orientación por posición. Sin embargo, mediante el uso de *wavelets* orientadas y filtros orientables [7], la medida de una posible orientación puede ser calculada para cualquier orientación dada, permitiendo de este modo la detección de más de una orientación por posición. Las *wavelets* orientadas permiten la transformación de una imagen en un marcador de orientaciones, el cual presenta la información de posición y orientación de un píxel en un solo valor escalar [5].

En su estudio pionero, Kalitizin [9] propone la siguiente *wavelet*:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|z|^2}{2}}, \quad z = x + iy, \quad (2.1)$$

la cual garantiza la invertibilidad que permite recuperar la imagen original a partir de su marcador de orientaciones sin perder información. Estas *wavelets* pertenecen a una clase específica que permite una reconstrucción bien condicionada y se calculan por expansión en autofunciones del oscilador armónico. La principal ventaja de este desarrollo es que permite el control de la forma

de la *wavelet* tanto en el dominio espacial como en el de Fourier. Por contra, sus desventajas más destacadas son [3]:

1. Sus series no convergen en  $\mathbb{L}_2$ , y el truncamiento de la serie afecta de manera grave a su forma, provocando oscilaciones no deseadas.
2. Las *wavelets*  $\psi$  'explotan' en la dirección radial de su orientación. Por ejemplo, la expresión 2.1 'explota' en  $\sim (8\pi)^{\frac{1}{4}}\sqrt{r}(1 - O(r^{-2}))$  [3, 2].
3. No permite su reconstrucción aproximada integrando únicamente en  $S^1$ .

El buen funcionamiento de la reconstrucción no está cuantificado en dicho estudio. Para solucionar esto se usa la función  $M_\psi$  [2] (será detallada en la Sección 3), que indica cómo de bien se han conservado las frecuencias tras la transformación. Se usa también como medida de la estabilidad de la transformación inversa.

Dentro de las *wavelets* con reconstrucción bien condicionada, se define un nuevo tipo de *wavelet*, las denominadas *cake wavelets*. Estas *wavelets* orientadas son capaces de capturar todas las escalas de la imagen sin desviación en una escala particular. Esta propiedad es fundamental en el método de seguimiento de los bordes de los vasos sanguíneos, ya que reduce la necesidad de utilizar métodos multiescala. Por otro lado se encuentran las *wavelets* de Gabor, otro tipo de *wavelets* orientadas que se utilizan en procesado de imagen debido a su capacidad para detectar características de orientación para una escala concreta. Aunque la posibilidad de elegir una escala específica puede ser muy útil, implica la exclusión de otras escalas. La transformación con la *wavelets* de Gabor en una única escala provoca la pérdida de información de la imagen original y, por lo tanto, la transformación no es invertible. Para conseguir la invertibilidad se introducen los métodos multiescala, que requieren un mayor coste computacional. Teniendo en cuenta la importancia de no perder información durante la transformación para obtener el marcador de orientaciones, la propiedad de invertibilidad es esencial. Mediante el uso del marcador de orientaciones invertible se pueden desenredar de manera automática las distintas orientaciones presentes en el seguimiento de vasos sanguíneos.

## 2.1. Construcción del marcador de orientaciones

Considerando una imagen 2D  $f$  como una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el dominio de la imagen  $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$  siendo  $X, Y \in \mathbb{R}^+$  el tamaño de la imagen, y asumiendo que debe ser absolutamente integrable,  $f \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)$ , el marcador de orientaciones que se construye a partir de una imagen, está definido por la siguiente función  $U_f: \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , y depende de dos variables  $(\mathbf{x}, \theta)$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  define la posición, mientras que  $\theta \in [0, 2\pi]$  define la orientación.

Un marcador de orientaciones  $U_f := W_\psi$  de una función  $f$  se puede construir mediante la convolución de la función  $f$  con una *wavelet* anisotrópica  $\psi$

$$U_f(\mathbf{x}, \theta) = (\check{\psi}_\theta * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi(\mathbf{R}_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.2)$$

donde  $\psi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)$  es el núcleo de convolución con orientación  $\theta = 0$  y  $W_\psi$  se corresponde con la transformación entre la imagen  $f$  y el marcador de orientaciones  $U_f$ . La línea superior denota el conjugado complejo  $\check{\psi}_\theta(\mathbf{x}) = \psi_\theta(-\mathbf{x})$  y la rotación matricial  $\mathbf{R}_\theta$  viene dada por

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

La reconstrucción exacta <sup>1</sup> a partir del marcador de orientaciones calculado en 2.2, se consigue de la siguiente manera:

$$f = W_\psi^* W_\psi f = \mathcal{F}^{-1} \left[ M_\psi^{-1} \mathcal{F} \left[ \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi_\theta * U_f(\cdot, \theta))(\mathbf{x}) d\theta \right] \right], \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{F}$  es la transformada de Fourier unitaria en  $\mathbb{R}^2$ ,  $W_\psi^*$  representa la transformada de *wavelets* adjunta, y  $M_\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  se calcula de la siguiente manera:

$$M_\psi = 2\pi \int_0^{2\pi} \overline{\mathcal{F}[\psi_\theta]} \mathcal{F}[\psi_\theta] d\theta = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}[\psi_\theta]|^2 d\theta. \quad (2.5)$$

La función  $M_\psi$  proporciona una medida de estabilidad de la transformación inversa. Teóricamente, la reconstrucción está bien condicionada conforme

$$0 < \delta < M_\psi(\omega) < M < \infty, \quad (2.6)$$

donde el valor de  $\delta$  es arbitrariamente pequeño, dado que el número de condición de  $W_\psi$  está acotado por  $M\delta^{-1}$  [3]. Si no se restringe a funciones limitadas en banda, el requerimiento 2.6 afronta la suposición  $\psi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)$  ya que implica que  $\mathcal{F}\psi$  sea una función continua que

<sup>1</sup>La fórmula de la reconstrucción se verifica de manera sencilla usando el teorema de la convolución,  $\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$  y el hecho de que  $\mathcal{F}[\check{\psi}_\theta] = \mathcal{F}[\psi_\theta]$ .

se desvanece en infinito y del mismo modo  $M_\psi$ . En este caso se debe recurrir a la transformada de una *wavelet* distribucional, cuyo cierre es de nuevo un mapa unitario de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)$  a un subespacio reproducible de  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ .

En la práctica, para prevenir posibles problemas numéricos es preferible tener  $M_\psi(\omega) \approx 1$  para  $\|\omega\| < \varrho$ , donde  $\varrho$  es la frecuencia de Nyquist del muestreo discreto de la imagen, lo que significa que todos los componentes de frecuencia relevantes contenidos en el radio  $\varrho$  se conservan de la misma manera. Para evitar la discontinuidad que se produce en  $\|\omega\| = \varrho$ , que puede causar problemas con la transformada inversa de Fourier, se usarán *wavelets*  $\psi$ , con  $M_\psi(\omega) = M_N(\rho^2 t^{-1})$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$  y  $\rho = \|\omega\|$  donde

$$M_N(\rho^2 t^{-1}) = e^{-\frac{\rho^2}{t}} \sum_{k=0}^N \frac{(\rho^2 t^{-1})^k}{k!} \leq 1, \quad (2.7)$$

siendo  $t$  un parámetro de escala. Para fijar el punto de inflexión cerca de la frecuencia de Nyquist ( $\rho = \gamma\varrho$ ), se fija  $t = \frac{2\rho^2}{1+2N}$ , siendo  $0 \ll \gamma < 1$ . En la Figura 2.1 se puede observar este efecto.

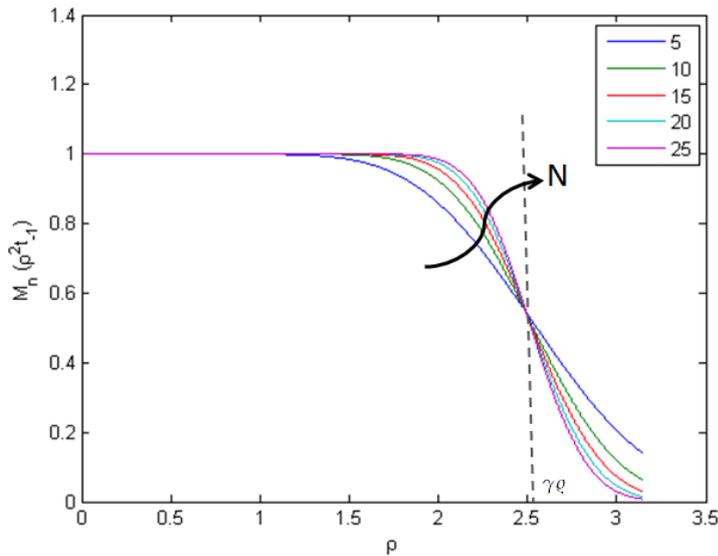


Figura 2.1:  $M_N$  para distintos valores de  $N$ .

La función  $M_N$  es básicamente una función Gaussiana (en la escala  $t$ ) multiplicada por la serie de Taylor de su inversa hasta un orden finito  $2N$  para asegurar que la caída es suave. La función  $M_N$  se aproxima a 1 en el dominio  $\rho \in [0, \delta]$ . Una *wavelet*  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  con este  $M_\psi$  estará bien condicionada.

## 2.2. Dominio del marcador de orientaciones

El método que se describe durante el Proyecto se define como un marco móvil de referencia en el haz de la tangente ( $T(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ ) sobre el dominio  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  del marcador de orientaciones. El marco móvil de referencia viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times S^1 \ni g = (x, y, \theta) \mapsto \\ (\cos(\theta)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\mathbf{e}_y, -\sin(\theta)\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\theta) \\ \in T_g(\mathbb{R}^2 \times S^1) \times T_g(\mathbb{R}^2 \times S^1) \times T_g(\mathbb{R}^2 \times S^1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{e}_y = (0,1,0)$  y  $\mathbf{e}_\theta = (0,0,1)$  son vectores tangentes. Para simplificar la notación se introducen las coordenadas  $\zeta = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ ,  $\eta = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$  y los vectores tangentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\zeta &= \cos(\theta)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\mathbf{e}_y = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \\ \mathbf{e}_\eta &= -\sin(\theta)\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\mathbf{e}_y = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \\ \mathbf{e}_\theta &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como resultado, se obtiene que dado un punto en el marcador de orientaciones  $(x, y, \theta)$  su vector tangente  $\mathbf{e}_\zeta$  apuntará a la dirección espacial alineada con el núcleo de orientación usado en la capa  $\theta$  (esta orientación da lugar al vector  $\mathbf{e}_\theta$ ). Por lo tanto, el vector  $\mathbf{e}_\zeta$  dará la información correspondiente sobre las distintas orientaciones. Del mismo modo se calcula el vector  $\mathbf{e}_\eta$ . En la Figura 2.2 se puede observar una representación gráfica de dichos vectores.

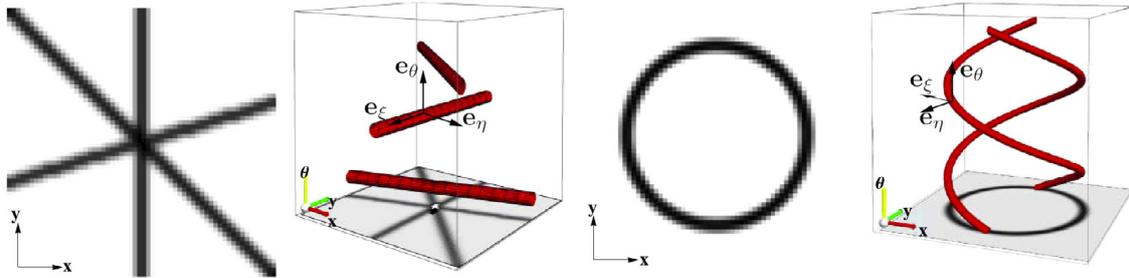


Figura 2.2: Representación de los vectores del marcador de orientaciones [2].

El dominio de un marcador de orientaciones es el conjunto  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . No obstante, a partir de la Figura 2.2 (concretamente en la última subfigura) se puede reconocer una geometría curva en el dominio del marcador de orientaciones. Esto se refleja en el hecho de que tanto  $\mathbf{e}_\zeta$  como  $\mathbf{e}_\eta$  varían con  $\theta$ . Esto se modela imponiendo una estructura de grupo en el conjunto  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . Esta estructura de grupo viene de los movimientos del cuerpo rígido  $g = (\mathbf{x}, \mathbf{R}_\theta)$  que actúa sobre  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  del siguiente modo

$$g \cdot (\mathbf{x}', \theta') = (\mathbf{R}_\theta \mathbf{x}' + \mathbf{x}, \theta + \theta'). \quad (2.10)$$

Notar que  $(\mathbf{x}, \theta) = (x, \mathbf{R}_\theta)(\mathbf{0}, 0)$  permite identificar inequívocamente

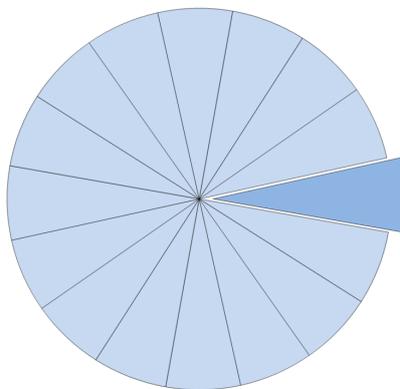
$$\mathbb{R}^2 \times S^1 \ni (\mathbf{x}, \theta) \leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{R}_\theta) = g \in \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2), \quad (2.11)$$

es decir, identificar el espacio de posiciones y orientaciones con el grupo de movimiento del cuerpo rígido  $SE(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$ . Dado que la combinación de dos movimientos de cuerpo rígido, es de nuevo, otro movimiento de cuerpo rígido,  $SE(2)$  está equipada con el producto de grupo

$$g \cdot g' = (\mathbf{x}, \mathbf{R}_\theta)(\mathbf{x}', \mathbf{R}_{\theta'}) = (\mathbf{R}_\theta \mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{R}_{\theta+\theta'}), \quad (2.12)$$

lo cual guarda coherencia con la Ecuación 2.10. El marco móvil de referencia (Ecuación 2.8) corresponde con el llamado campo vectorial invariante a la izquierda en  $SE(2)$  [2].

Las *cake wavelets* se definen en el dominio de Fourier. Mediante el uso de coordenadas polares, el dominio de Fourier se divide uniformemente en  $N_0$  secciones del mismo ancho en la dirección angular, de manera similar a las porciones de una tarta (*cake* en inglés), de ahí el nombre que se le ha asignado a este tipo de *wavelets*. En la Figura 3.1 podemos ver representado un ejemplo de *cake wavelets* con  $N_0=16$ .



**Figura 3.1:** Representación de *cake wavelets* en el dominio de Fourier con  $N_0=16$ .

La función de *cake wavelets* en el dominio espacial viene dada por la siguiente expresión:

$$\psi^{cake}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}^{cake}](\mathbf{x})G_{\sigma_s}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

donde  $G_{\sigma_s}$ , es una ventana de Gauss con  $0 < 1 \ll \sigma_s$ , lo cual evita grandes colas en el dominio espacial. Hay que tener en cuenta que una multiplicación con una ventana grande en el dominio del espacio equivale a una convolución con una ventana pequeña en el dominio de Fourier, de forma que apenas afecta a  $M_\varphi$  si  $\sigma_s$  es suficientemente grande.

La función  $\tilde{\psi}^{cake}$  se define como

$$\tilde{\psi}^{cake}(\boldsymbol{\omega}) = B_k \left( \frac{(\varphi \bmod 2\pi) - \pi/2}{s_\theta} \right) M_N(\rho), \quad (3.2)$$

con  $\boldsymbol{\omega} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  y donde  $s_\theta = 2\pi N_0^{-1}$  es la resolución angular en radianes. La función  $M_N$ , que fue vista en el punto anterior, especifica la función radial en el dominio de Fourier (Ecuación 2.7).  $B_k$  representa el B-spline de orden  $k$  y viene dado por la siguiente expresión:

$$B_k(x) = (B_{k-1} * B_0(x)), \quad B_0(x) = \begin{cases} 1 & -1/2 < x < +1/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}. \quad (3.3)$$

En la Figura 3.2, se pueden ver representados los distintos B-splines de orden 0, 1, 2 y 3, con los que se ha trabajado durante el desarrollo de este Proyecto.

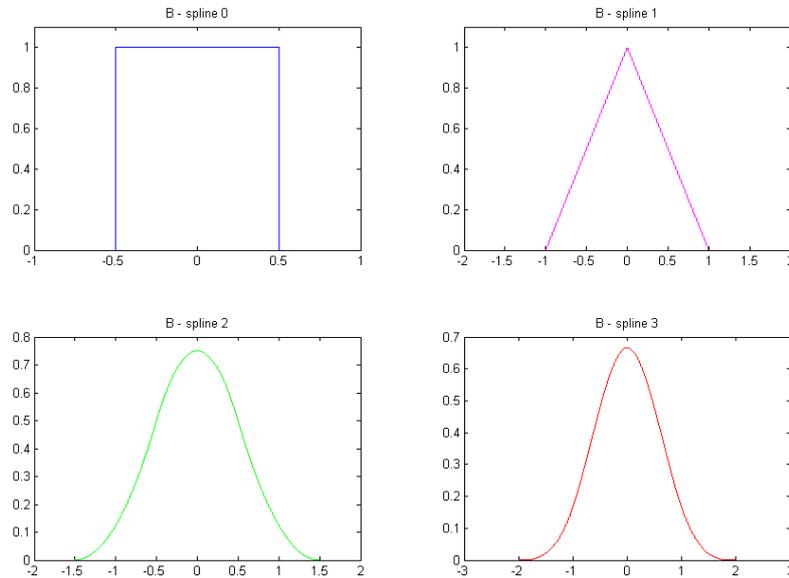
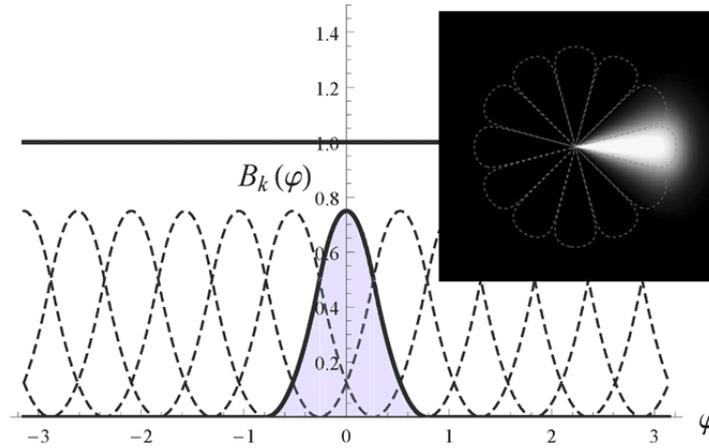


Figura 3.2: B-splines de orden 0, 1, 2 y 3.

En la Figura 3.3 se puede ver como se utiliza el B-Spline en la construcción de *cake wavelets*. La imagen muestra B-splines cuadráticos (de orden  $k=2$ ), y se puede observar que la suma de todos los B-spline desplazados da como resultado 1.



**Figura 3.3:** Uso del B-spline en la construcción de *cake wavelets*. Representación de B-spline cuadráticos ( $k=2$ ). La imagen de la esquina derecha muestra una *cake wavelet* en el dominio de Fourier usando B-spline cuadráticos y  $M_N$  con  $N=60$  [2].

### 3.1. Marcador de orientaciones a partir de cake wavelets

El marcador de orientaciones construido a partir de una imagen  $f$  usando *cake wavelets* se denomina  $U_f^{cake}$ . Se obtiene tras el filtrado de la imagen que se desea analizar usando un filtro  $h_{cw}$  de *cake wavelets*.

En base a la Ecuación 3.2, se puede definir el filtro  $h_{cw}$  como:

$$h_{cw}(\omega) = B_k(\varphi) \cdot M_N(\rho), \quad (3.4)$$

vale la pena recordar que el valor de  $M_N$  viene dado por la Ecuación 2.7 mientras que el de  $B_k$  se deduce de manera sencilla, siendo este

$$B_k(\varphi) = B_k \left( \frac{(\varphi \bmod 2\pi) - \pi/2}{s_\theta} \right). \quad (3.5)$$

Una vez conocido el valor del filtro se utilizará uno para cada una de las distintas orientaciones que se quieran detectar. El número total de orientaciones consideradas viene dado por  $N_0$ , que será por tanto el número de filtros utilizados para el cálculo del marcador de orientaciones. En la Figura 3.4 se puede observar una representación del esquema utilizado para la obtención del marcador de orientaciones.

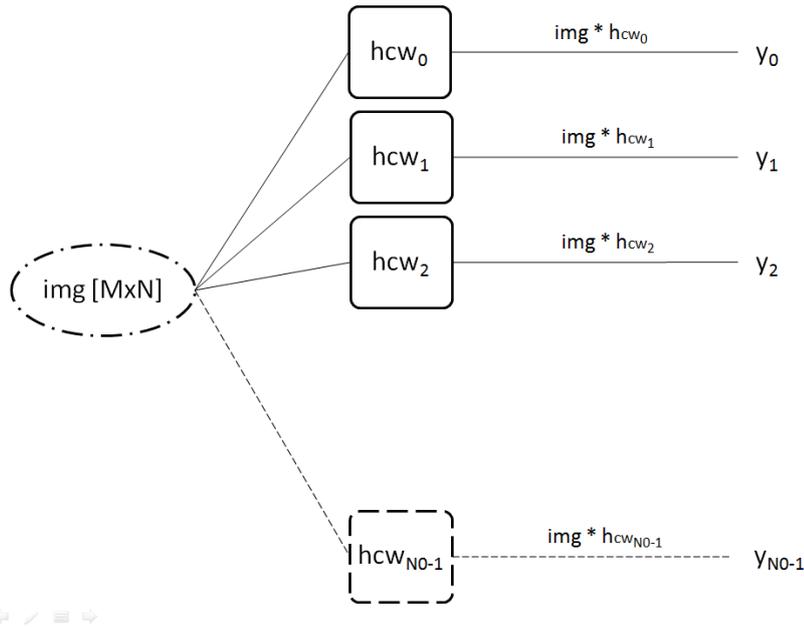


Figura 3.4: Esquema del marcador de orientaciones a partir de *cake wavelets*.

Por tanto, el volumen  $U_f^{cake}$  estará formado por los distintos valores que va tomando la imagen tras ser filtrada con los distintos núcleos  $h_{cw}$ .

$$U_f^{cake} = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{N_0-1}] \quad (3.6)$$

Se puede interpretar el marcador de orientaciones como un banco de imágenes filtradas cuyo tamaño será  $M \times N \times N_0$ . Siendo  $M \times N$  el tamaño de la imagen y  $N_0$  el número de orientaciones consideradas (véase Figura 3.5).

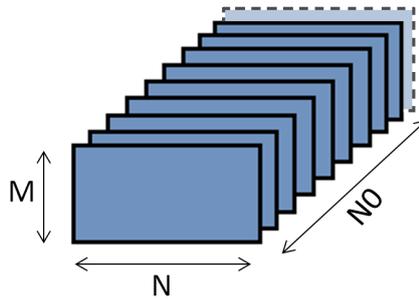
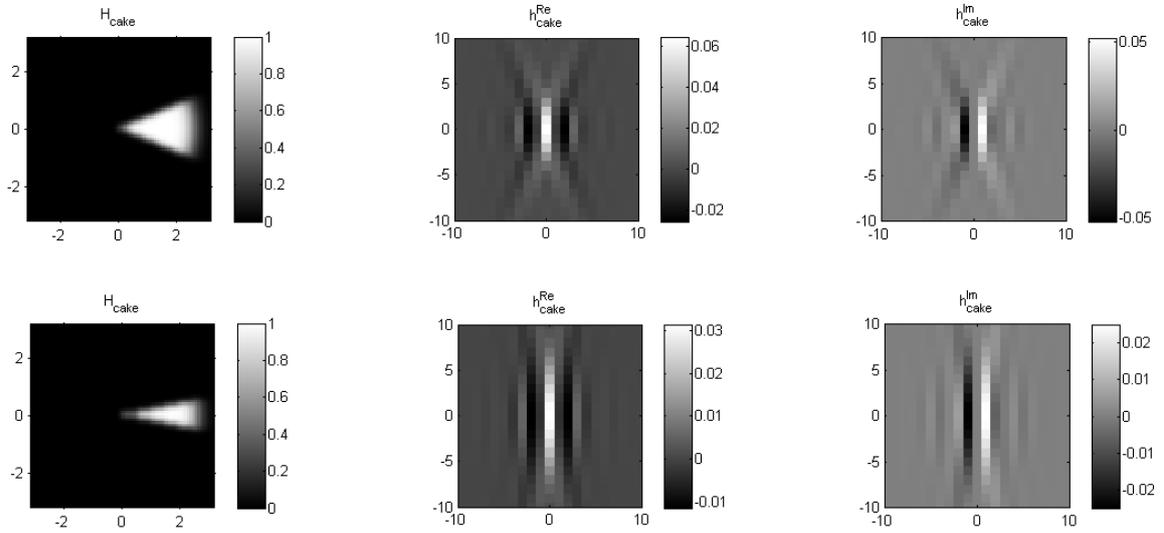


Figura 3.5: Marcador de orientaciones para una imagen dada.

El enfoque de la construcción directa de *wavelets* en el dominio de Fourier permite controlar de manera indirecta la forma del filtro en el dominio espacial, y que ésta se pueda adaptar de manera bastante sencilla. La resolución angular  $s_\theta$  viene condicionada por el valor de  $N_0$ . En caso de que este tenga un valor grande, el valor de la resolución será también grande y el filtro

resultante será muy estrecho. Esto se puede observar en la Figura 3.6, en la que se comparan dos cake wavelets con  $N_0 = 8$  y  $N_0 = 16$ , respectivamente. La frecuencia de corte de la función  $M_N$  que normalmente coincide con la frecuencia de Nyquist, se puede reducir para filtrar componentes de ruido con altas frecuencias.

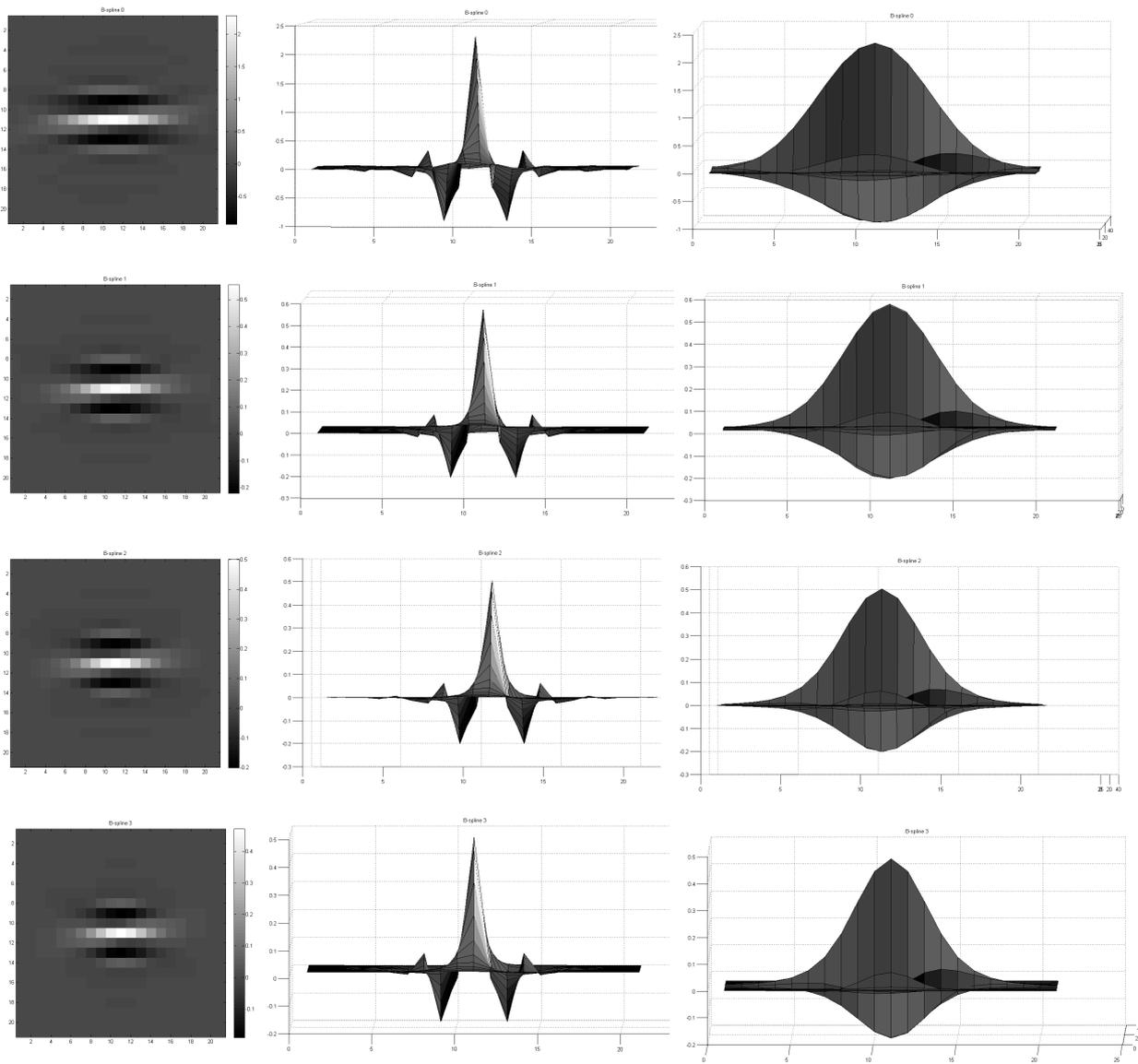
Destacar que si  $N_0 \rightarrow \infty$  entonces  $\tilde{\psi}^{cake} \rightarrow \delta_0$  en el sentido distributivo. En este caso la transformada de wavelet converge hacia la transformada Radon, que también ha sido propuesta para la detección efectiva de vasos sanguíneos retinianos en otras investigaciones [10]. Sin embargo, la ventaja de escoger  $N_0 \ll \infty$  es que se obtienen matrices convolución que permiten la reconstrucción estable de la imagen.



**Figura 3.6:** Marcador de orientaciones en función de  $N_0$ . En la parte superior  $N_0 = 8$ , en la inferior  $N_0 = 16$ , ambos con B-spline de orden  $k=0$ . Primera columna  $H_{cake}(\omega)$ , segunda columna  $\Re\{h_{cake}(\mathbf{n})\}$  y tercera columna  $\Im\{h_{cake}(\mathbf{n})\}$ .

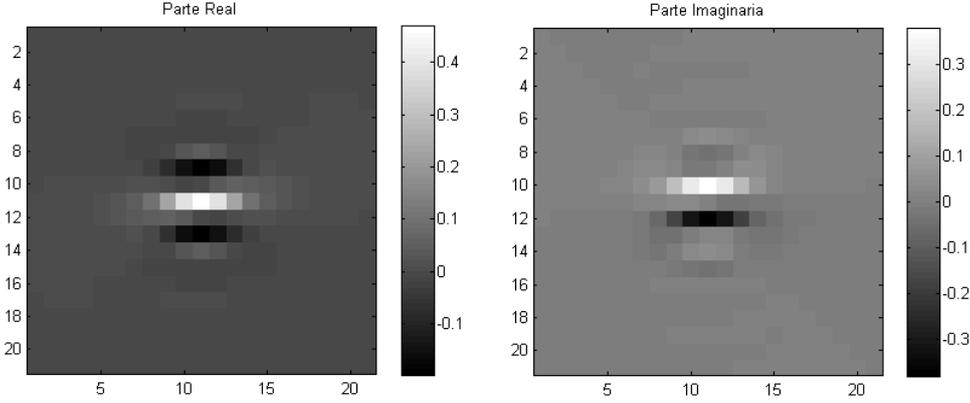
Además, como se utilizan los distintos B-splines y la función  $M_N$  para muestrear en el dominio de Fourier, la suma de todas las *cake wavelets* es aproximadamente 1 en todo el dominio de Fourier. De este modo las *cake wavelets* están bien condicionadas permitiendo su reconstrucción a partir de la Ecuación 2.4, donde se puede omitir la división por  $M_\psi^{-1} \approx 1$ . En ese caso la reconstrucción estable se obtiene mediante la integración sobre  $SE(2) := \mathbb{R}^2 \times S^1$  y/o su subgrupo parcialmente discreto  $\mathbb{R}^2 \times S_N^1$  con  $S_N^1 = e^{n(2\pi i/N_0)}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$ .

En la Figura 3.2 se pueden observar los distintos B-splines que se han utilizado durante la realización del Proyecto. En función de la elección de uno o de otro, el comportamiento del filtro variará. Como se puede observar en la Figura 3.7 aunque la variación sea mínima, el tamaño del filtro disminuye al escoger un B-spline mayor, siendo más preciso.



**Figura 3.7:** Comparación del filtro en función del orden del B-spline: De arriba a abajo 0, 1, 2 y 3. En todos ellos el número de orientaciones es  $N_0 = 16$ , el tamaño del filtro seleccionado es  $21 \times 21$ , y  $M_N$  con  $N = 25$ .

Otra característica reseñable de las *cake wavelets* es la simetría par de la parte real del filtro frente a la parte imaginaria que presenta simetría impar. Esto se puede observar en la Figura 3.8.



**Figura 3.8:** Partes real e imaginaria de una *cake wavelet* construida con un B-spline de orden  $k = 0$ , por su parte el número de orientaciones es  $N_0 = 16$ , mientras que el tamaño del filtro seleccionado es  $21 \times 21$ , y  $M_N$  con  $N = 25$ .

Las *cake wavelets* son filtros en cuadratura, es decir, la parte real contiene información acerca de estructuras simétricas, como son las crestas y estructuras longitudinales, mientras que la parte imaginaria contiene la información de estructuras asimétricas, como por ejemplo los bordes. Las partes real e imaginaria del filtro  $\psi_\theta$  están relacionadas por la transformada de Hilbert en la dirección perpendicular a la orientación de la *wavelet*, que se define como

$$\mathcal{H}^\eta(\psi_\theta)(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \omega \mapsto i \operatorname{sign}(\omega \cdot \mathbf{e}_\eta) \mathcal{F}^{-1}[\psi_\theta](\omega) \right], \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{e}_\eta$  especifica la dirección en la que se realiza la transformada de Hilbert. La propiedad de cuadratura es muy útil en el estudio del seguimiento de vasos sanguíneos, ya que permite la detección de los bordes de los vasos con la parte imaginaria del marcador de orientaciones sin la necesidad de calcular las derivadas de primer orden de la perpendicular a la orientación del vaso.

Por último, cabe destacar que las *cake wavelets* cubren uniformemente el dominio de Fourier ( $M_N \approx 1$ ), permitiendo un esquema de reconstrucción rápida dado por la integración del marcador de orientación múltiple sobre sus ángulos

$$f^{approx}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_f^{cake}(\mathbf{x}, \theta) d\theta. \quad (3.8)$$

### 3.2. Wavelets bilaterales vs unilaterales. Orientación vs dirección

Las *cake wavelets* bilaterales son aquellas que no distinguen entre una dirección hacia adelante o hacia atrás (son simétricas respecto al eje  $y$ ). Para poder distinguir entre simetrías  $\pi$  y simetrías

$2\pi$  (véase la imagen de la izquierda de la Figura 3.9), y ser capaces de detectar bifurcaciones, se descompone el marcador de orientaciones en dos marcadores, uno para la dirección hacia delante y otro para la dirección hacia atrás, que se denotarán como  $U_f^+$  y  $U_f^-$ , respectivamente, y se definen como:

$$U_f(x, y, \theta) = U_f^+(x, y, \theta) + U_f^-(x, y, \theta), \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} U_f^+(x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^+(\mathbf{R}_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ U_f^-(x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^-(\mathbf{R}_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

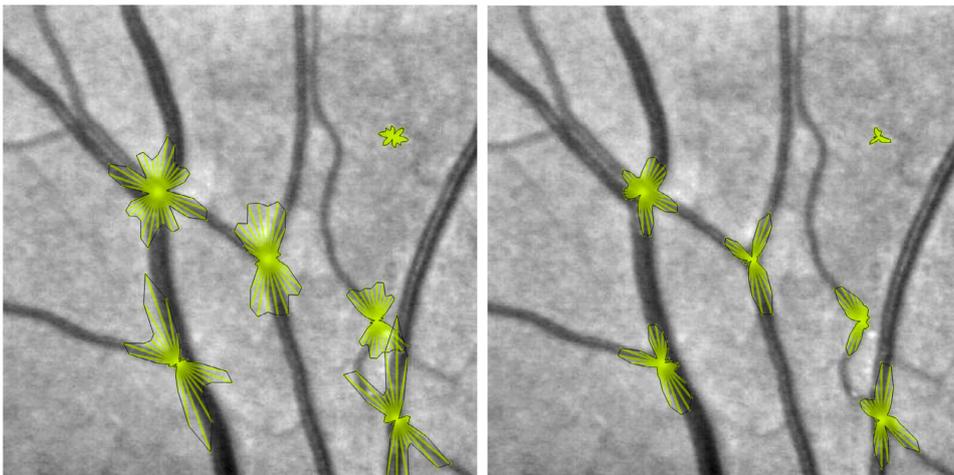
siendo

$$\begin{aligned} \psi^+(x, y) &= w(x)\psi(x, y), \\ \psi^-(x, y) &= w(-x)\psi(x, y) = (1 - w(x))\psi(x, y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

con

$$\omega(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (3.12)$$

Notar que usando la función del error, se obtiene  $\psi = \psi^- + \psi^+$  y  $U_f^-(x, y, \theta) = \overline{U_f^+(x, y, \theta + \pi)}$  por tanto  $U_f(x, y, \theta) = U_f^+(x, y, \theta) + \overline{U_f^+(x, y, \theta + \pi)}$ . Esto hace posible elegir una *wavelet* unilateral para construir un marcador de orientaciones direccional, mientras también sigue siendo posible acceder al marcador de orientaciones original (bilateral). La Figura 3.9 demuestra la ventaja de usar *wavelets* unilaterales frente a las bilaterales en el caso de estimar la orientación basándose en la columna de orientación de un marcador  $U_f(x, y, \cdot)$  [2].



**Figura 3.9:** Comparación entre *wavelets* bilaterales (izquierda) y unilaterales (derecha) [2].

---

## ETOS. Detección simultánea de bordes

---

En un marcador de orientaciones, la información correspondiente a la imagen original queda claramente organizada en las distintas orientaciones, permitiendo el buen funcionamiento en estructuras con cruces. Además, gracias a la propiedad de cuadratura de las *cake wavelets*, se extrae información importante de los bordes en la parte imaginaria del marcador. Se propone un método de seguimiento vascular que actúa directamente sobre el marcador de orientaciones denominado ETOS. El método ETOS (*Edge tracking in Orientation Score*) realiza un seguimiento de la vasculatura basado en la detección de bordes. Para ello, hace uso del marcador de orientaciones a partir de *cake wavelets* (bilaterales) visto en el punto anterior. En esta Sección se explicará dicho método, para una mejor comprensión se detallará un ejemplo de seguimiento vascular mediante ETOS.

Se trata de un método iterativo que a partir de la detección de los bordes del vaso sanguíneo, será capaz de predecir el siguiente punto, realizando de este modo el seguimiento completo del vaso sanguíneo. Para cada iteración  $k$  se definirán los bordes izquierdo y derecho como  $\mathbf{u}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  respectivamente. Conocida la posición de los bordes, la anchura del vaso (que se denominará  $w_k$ ) y la posición del centro (denominada  $\mathbf{c}_k$ ) pueden ser calculadas de manera sencilla:

$$\mathbf{c}_k = \frac{\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k}{2}, \quad (4.1)$$

$$w_k = \|\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k\|. \quad (4.2)$$

Para describir el método se utilizará un marco móvil de referencia en los vectores base  $\mathbf{e}_{\eta k}$ ,  $\mathbf{e}_{\zeta k}$  y  $\mathbf{e}_{\theta k}$  que se describen mediante el parámetro de orientación  $\theta_k$  y la Ecuación 2.9. En la Figura 4.1 se puede observar un esquema del método ETOS que ayudará a comprender el funcionamiento del mismo.

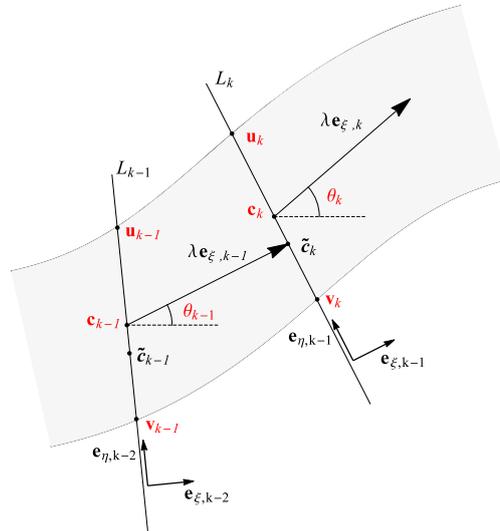


Figura 4.1: Esquema ETOS.

Conviene recordar que  $\mathbf{c}_k$  denota el centro, mientras que  $\mathbf{u}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  representan los bordes. Por su parte  $\theta_k$  es el ángulo correspondiente a la orientación del punto, mientras que la línea  $L_k$  es la perpendicular al centro en el punto seleccionado y cuya función será explicada más adelante. Para calcular la iteración  $k$  han sido utilizados los valores obtenidos en la iteración anterior,  $k-1$ . Un borde se puede detectar en el marcador de orientaciones como un máximo local en la parte imaginaria del plano tangente  $\mathcal{V}$ ) (representado en amarillo en la Figura 4.2).

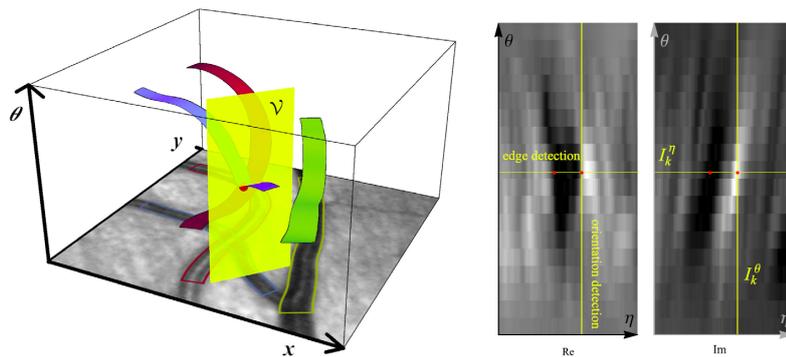
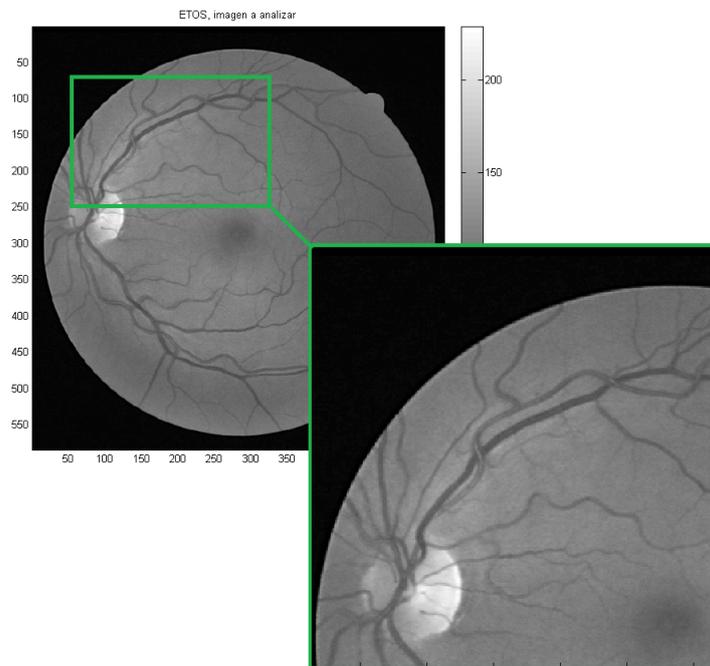


Figura 4.2: Seguimiento vascular en una orientación  $\pi$  periódica construida a partir de *wavelets* bilaterales. En la primera imagen se ve un corte perpendicular del marcador de orientaciones cuyas parte Real e Imaginaria están representadas en las dos siguientes imágenes respectivamente.

---

Como se dijo anteriormente, para una mejor comprensión del método ETOS se explicará el mismo a través de un ejemplo. Para ello se dispone de una imagen retinográfica como la mostrada en la Figura 4.3, en esta imagen se ha realizado un zoom para visualizar mejor el vaso que se detectará y seguirá durante la explicación del método (las imágenes retinográficas utilizadas para el ejemplo pertenece al repositorio DRIVE [14, 13] ).



**Figura 4.3:** Imagen retinográfica que será analizada mediante el método ETOS.

A partir de dicha imagen se obtendrá su correspondiente marcador de orientaciones, donde se indicará el número de orientaciones deseadas y el B-spline utilizado. Por lo tanto, se obtendrá un banco de imágenes filtradas con las distintas orientaciones similar al de la Figura 3.5 que ha sido explicado con anterioridad.

El primer punto se seleccionará de manera manual, y a partir de él se calcularán los siguientes. Para ello, en un primer paso se calculará la orientación de dicho punto. Dicha orientación  $\theta_k$  será determinada comprobando la intensidad de dicho punto en las distintas imágenes filtradas según la orientación almacenadas en el marcador de orientaciones. El punto de intensidad máximo en la parte real del marcador de orientaciones se dará en la orientación correspondiente a dicho punto.

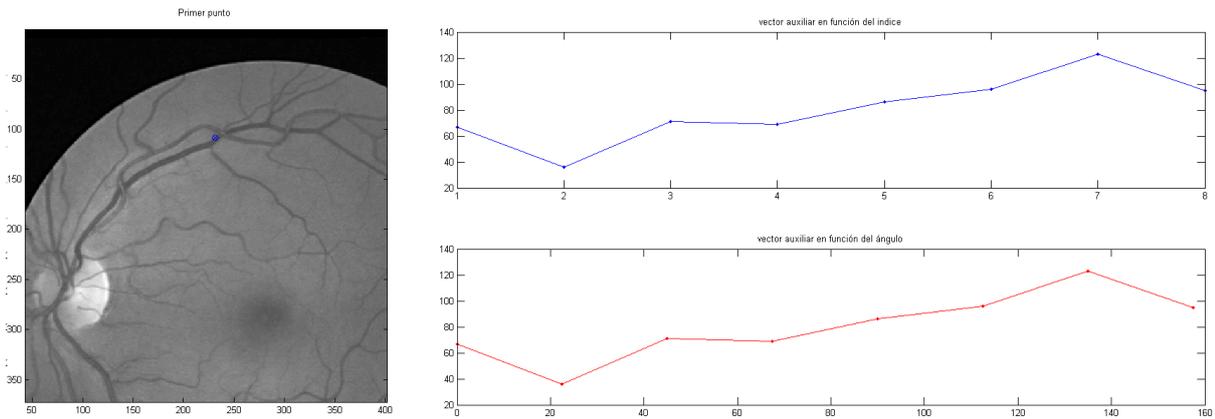


Figura 4.4: Primer punto, seleccionado de forma manual y diagrama de su orientación.

El siguiente paso, será calcular la orientación perpendicular a la que define la orientación del punto  $\theta_k$ . Esta nueva orientación se denominará  $\theta_k^\perp$  y nos proporcionará información clave para la detección de bordes. Dicha información viene dada por la parte imaginaria del marcador de orientaciones en la orientación  $\theta_k^\perp$ , donde como se vio en la Figura 3.8, la *cake wavelet* tiene simetría impar. Por lo tanto para obtener información completa, será también necesario obtener el ángulo situado a  $180^\circ$  de  $\theta_k^\perp$  que se denominará  $\theta_k^\perp$ . Se trazará un corte en la orientación  $\theta_k^\perp$  y otro en la orientación  $\theta_k^\perp$ . A la hora de representarlos, a simple vista solo se distinguirá uno, ya que ambos vectores tendrán la misma dirección pero sentido contrario debido a la diferencia de  $180^\circ$  (véase Figura 4.5). En la Figura 4.1 este corte se representaba como  $L_k$ .

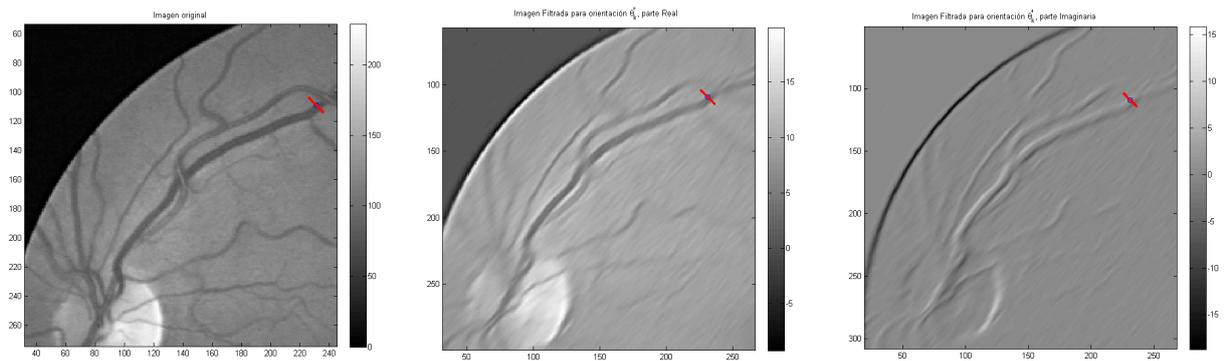


Figura 4.5: Trazo perpendicular a la orientación del punto seleccionado en la imagen original, la parte real y la parte imaginaria del marcador de orientaciones.

---

Una vez trazada la línea  $L_k$  sus valores vendrán dados por la siguiente expresión:

$$L_k = \{\mathbf{p}_k(\eta) | \eta \in [-\eta_{max}, \eta_{max}]\} , \quad (4.3)$$

con

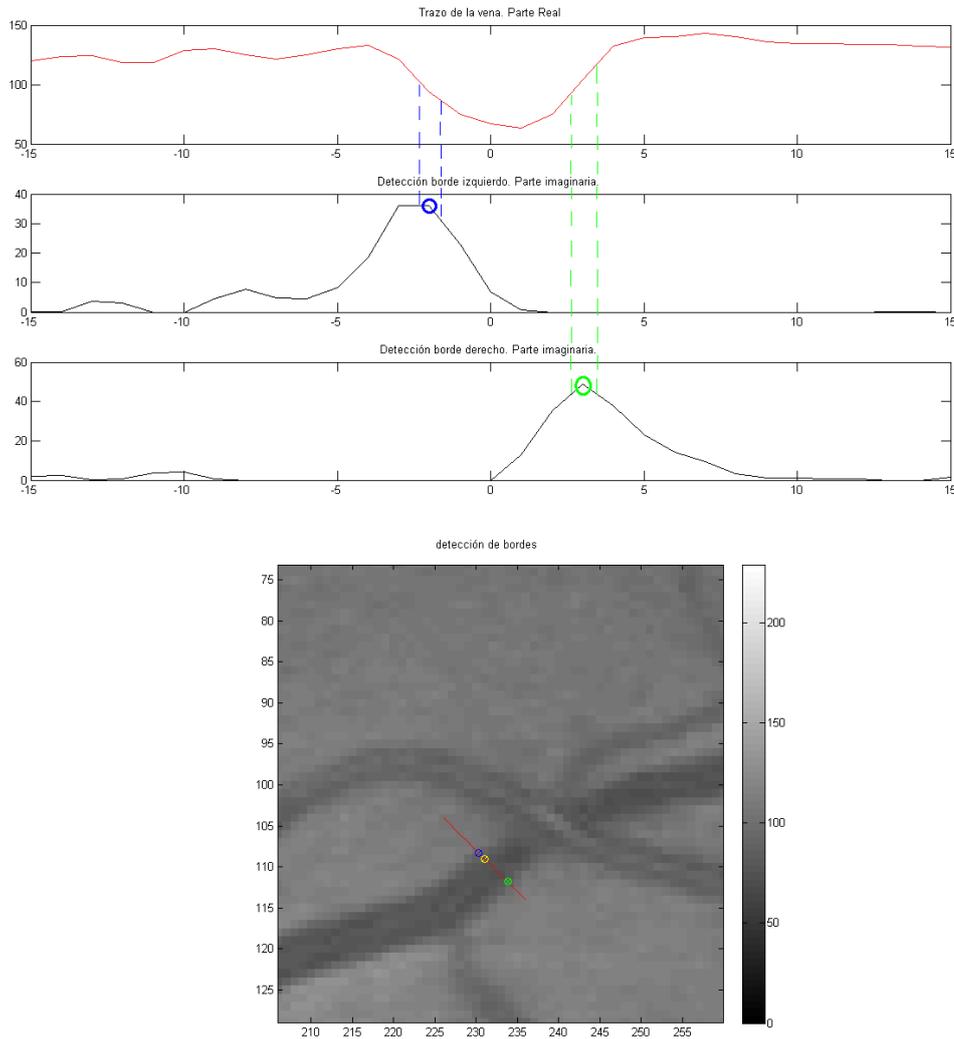
$$\mathbf{p}_k(\eta) = \tilde{c}_k + \eta \mathbf{e}_{\eta k-1} , \quad (4.4)$$

donde  $\eta$  es un parámetro que describe la distancia hasta la estimación del centro de la vena,  $\eta_{max} > \|\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k\|$  denota la distancia máxima al punto central de la vena. Cabe destacar que la expresión 4.4 hace referencia a la orientación anterior  $\theta_{k-1}$  mientras no se detecta la nueva orientación.

El perfil de intensidad  $I_k^\eta$  se puede obtener a partir del marcador de orientaciones como

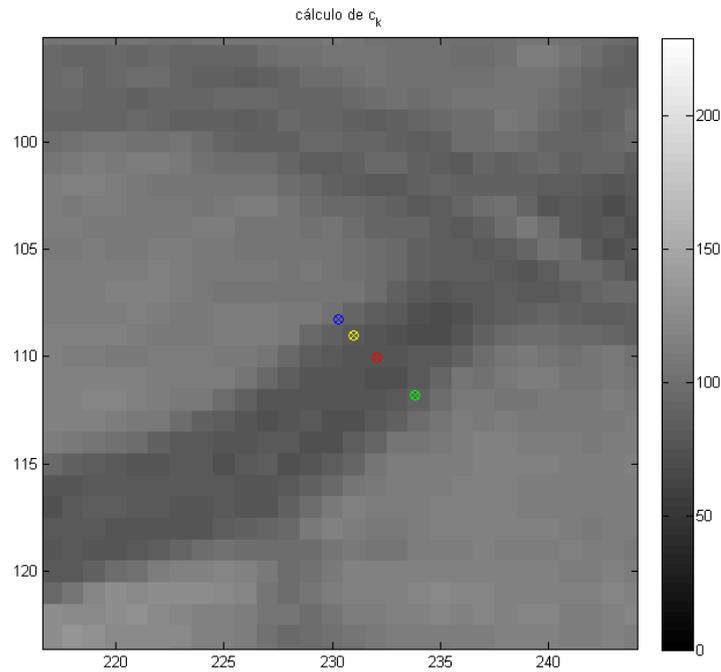
$$I_k^\eta(\eta) = U_f(\mathbf{p}_k(\eta), \theta_{k-1}) . \quad (4.5)$$

Realizando una interpolación entre el vector  $L_k$  y el perfil de intensidad obtenido a partir de la parte real del marcador de orientaciones en la orientación actual  $\theta$ , obtendremos un perfil de intensidad que dará información útil sobre el geometría del vaso sanguíneo. Por su parte, los perfiles de intensidad resultantes tras las interpolaciones entre  $L_k$  y los perfiles de intensidad obtenidos a partir de la parte imaginaria del marcador de orientaciones dadas las orientaciones  $\theta_k^+$  y  $\theta_k^-$ , proporcionan la información necesaria para la detección del borde izquierdo y derecho respectivamente. Analizando dichos perfiles de intensidad se encontrará la posición de los bordes en los máximos relativos más cercanos a cero de los perfiles mencionados (en la Sección 4.1 se explicará la razón de escoger el máximo más cercano a cero en lugar del máximo absoluto). La Figura 4.6 representa lo explicado anteriormente y ayuda a una mejor comprensión.



**Figura 4.6:** Detección de bordes mediante el método ETOS. En la figura superior se observa el perfil de intensidad  $I_k^{\eta}(\eta)$ , parte Real, parte Imag y parte Imag  $+180^{\circ}$ . En la figura inferior se puede ver esta detección representada en la vena.

Una vez conocidos los valores de los bordes izquierdo y derecho, mediante el uso de las ecuaciones 4.1 y 4.2 se pueden calcular los valores de  $c_k$  y  $w_k$  respectivamente. Es importante volver a calcular el valor del centro en la primera iteración pues al haber sido introducido el primer punto de manera manual, la posición del mismo podía no ser exacta, del mismo modo, el punto calculado en la siguiente iteración podría no corresponder con el centro exacto. Sin embargo una vez detectados los bordes, sabremos con certeza la posición del centro. En la Figura 4.7 se puede observar como ha sido recalculado el punto  $c_k$  (en rojo) respecto al punto inicial (en amarillo) gracias a la detección de los bordes (azul y verde).



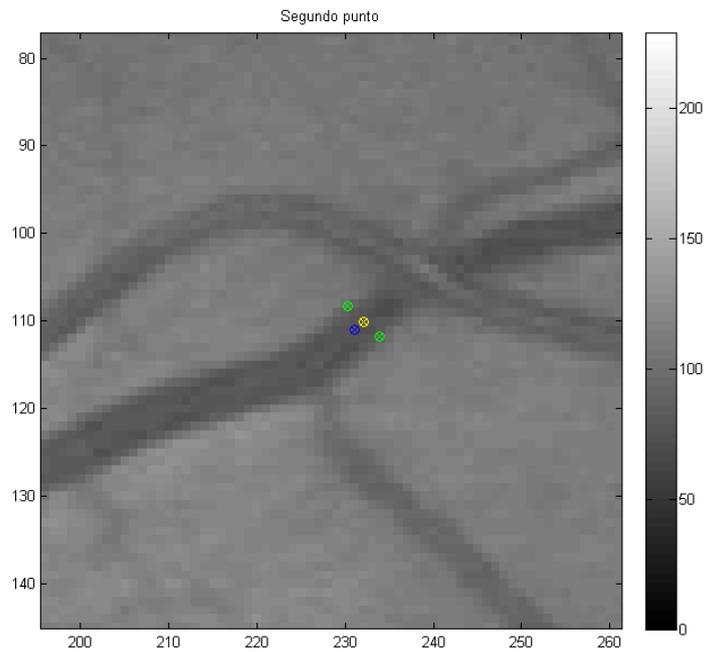
**Figura 4.7:** Cálculo de  $c_k$  a partir de los bordes.

Una vez detectados los bordes y calculado el centro, se procederá a calcular el siguiente punto a analizar que vendrá determinado por las siguientes expresiones:

$$c_{x_k} = c_{x_{k-1}} + \lambda \cdot \cos \theta_{k-1} , \quad (4.6)$$

$$c_{y_k} = c_{y_{k-1}} + \lambda \cdot \sin \theta_{k-1} , \quad (4.7)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que denota el paso del seguimiento. Por su parte  $c_{x_k}$  y  $c_{y_k}$  se corresponden con las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto  $c_k$ , obteniendo de este modo las coordenadas del que será nuestro segundo punto.



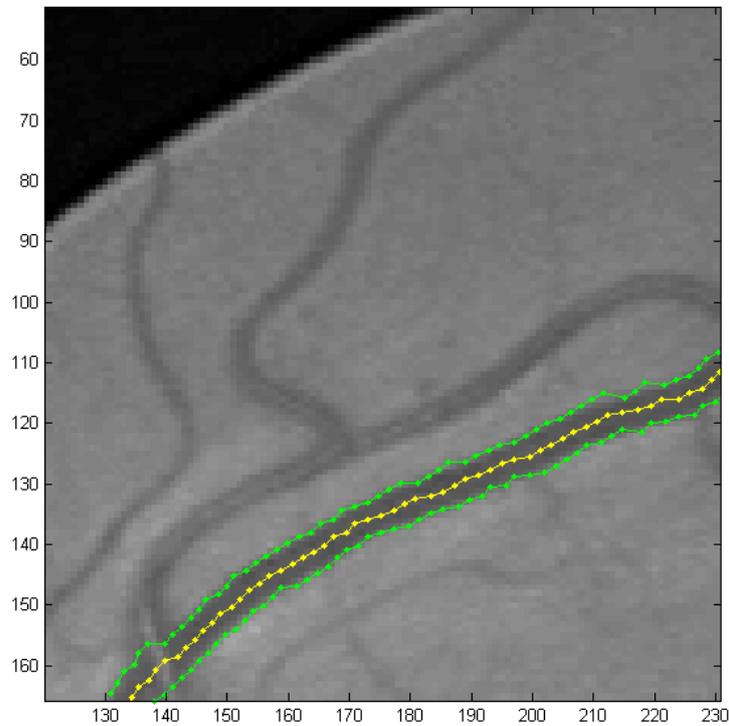
**Figura 4.8:** Punto seleccionado en la segunda iteración del método ETOS.

Se trata de un método iterativo, en el que una vez calculado el segundo punto se repite el proceso explicado. Este proceso se puede resumir de la siguiente manera:

1. Se analiza dicho punto en las distintas orientaciones del marcador de orientaciones para obtener la orientación del vaso sanguíneo en ese punto. La orientación  $\theta_k$  será aquella en el que el valor en la parte real del marcador de orientaciones sea máximo.
2. A partir de la orientación  $\theta_k$ , se obtienen las orientaciones  $\theta_k^+$  (perpendicular a  $\theta_k$ ) y  $\theta_k^-$  (situada  $180^\circ$  de  $\theta_k^+$ ) y se calcula el perfil  $L_k$  mediante el uso de la expresión 4.3.
3. La interpolación de los valores de  $L_k$  y los perfiles de intensidad obtenidos a partir del marcador de orientaciones para las orientaciones calculadas en el segundo paso da como resultado los perfiles en cuyos máximos encontraremos los bordes izquierdo y derecho.
4. Una vez detectados los bordes, se calcula la posición del centro y a partir de él el siguiente punto.

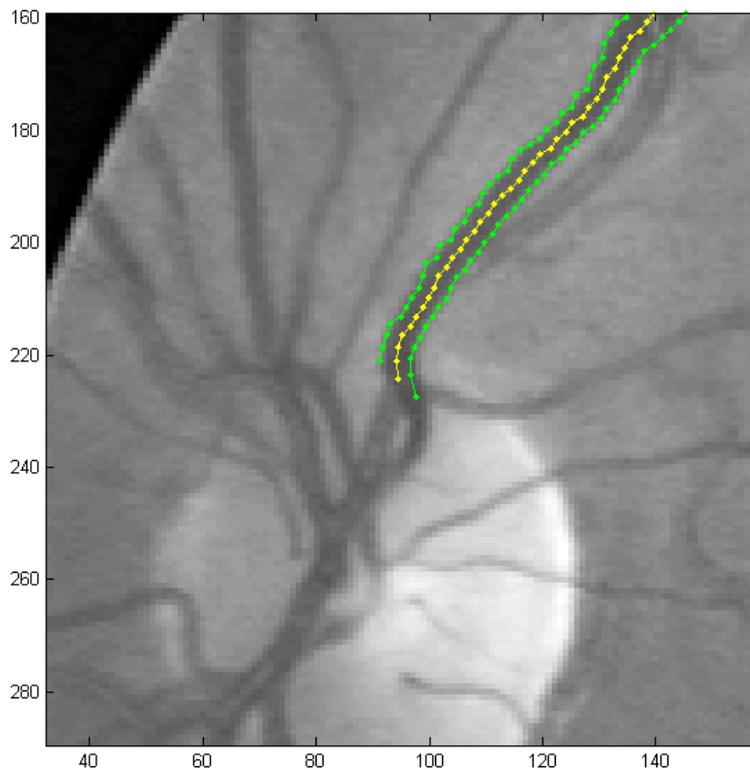
---

En la Figura 4.9 se muestra un vaso sanguíneo tras varias iteraciones: los bordes están representados con el color verde y el centro con amarillo. Se puede observar como la detección de bordes ha facilitado el seguimiento del vaso.



**Figura 4.9:** Seguimiento del vaso sanguíneo. Posiciones del centro de la vena  $\mathbf{c}_k$  y los bordes derecho e izquierdo  $\mathbf{u}_k$  y  $\mathbf{v}_k$ .

El proceso finalizará, como es lógico, cuando se detecte el final del vaso sanguíneo, en lo que será la última iteración del método. El final de vena se puede dar o bien dentro del disco óptico o al llegar al borde de la imagen retinográfica. En el primero de los casos, se dará por concluida la detección al entrar en el disco óptico. Esto sucede en el caso que se está analizando en esta Sección y se puede observar en la Figura 4.10. Por otro lado, en el segundo de los casos, cuando el final se da en la retina, la detección se lleva a cabo mediante el análisis del ancho de la vena (Ecuación 4.2), el ancho de la vena en la primera iteración se tomará como referencia y se irá comparando con el resultante de cada iteración. Cuando el ancho se haya reducido de manera muy brusca significará que el vaso sanguíneo ha llegado a su fin y por tanto el seguimiento se dará por concluido.



**Figura 4.10:** Detección del final del vaso sanguíneo al entrar en el disco óptico.

A continuación, y para terminar, se indica el valor de los parámetros utilizados durante la simulación del ejemplo visto en este apartado. Dichos parámetros serán igualmente utilizados en la explicación de los casos especiales (Sección 4.1).

- Tamaño del filtro  $h_{cw}$   $21 \times 21$ .
- $N_0 = 16$  orientaciones.
- B-spline  $B_k$  de orden 1.
- $M_N$  con  $N = 25$  y  $\sigma = 5$ . Proporciona la estabilidad de la transformación inversa.
- $\eta_{max} = 7$ . Parámetro que describe la distancia hasta la estimación del centro de la vena.
- Paso del seguimiento  $\lambda = 2$ .

## 4.1. Casos Especiales

### 4.1.1. Cruces

Anteriormente se mencionó que a la hora de buscar el máximo del perfil de intensidad que da la información para la detección de bordes, se elegiría el más próximo a cero y no el absoluto. Esto se hace para evitar la confusión con otro vaso sanguíneo en caso de que se produzca un cruce. En la Figura 4.11 se puede observar como en ese cruce el máximo absoluto (en rojo) correspondería con el borde de la vena superior y podría haber llevado a error. Seleccionando el máximo más cercano a 0 (en azul) se asegura un correcto seguimiento del vaso sanguíneo.

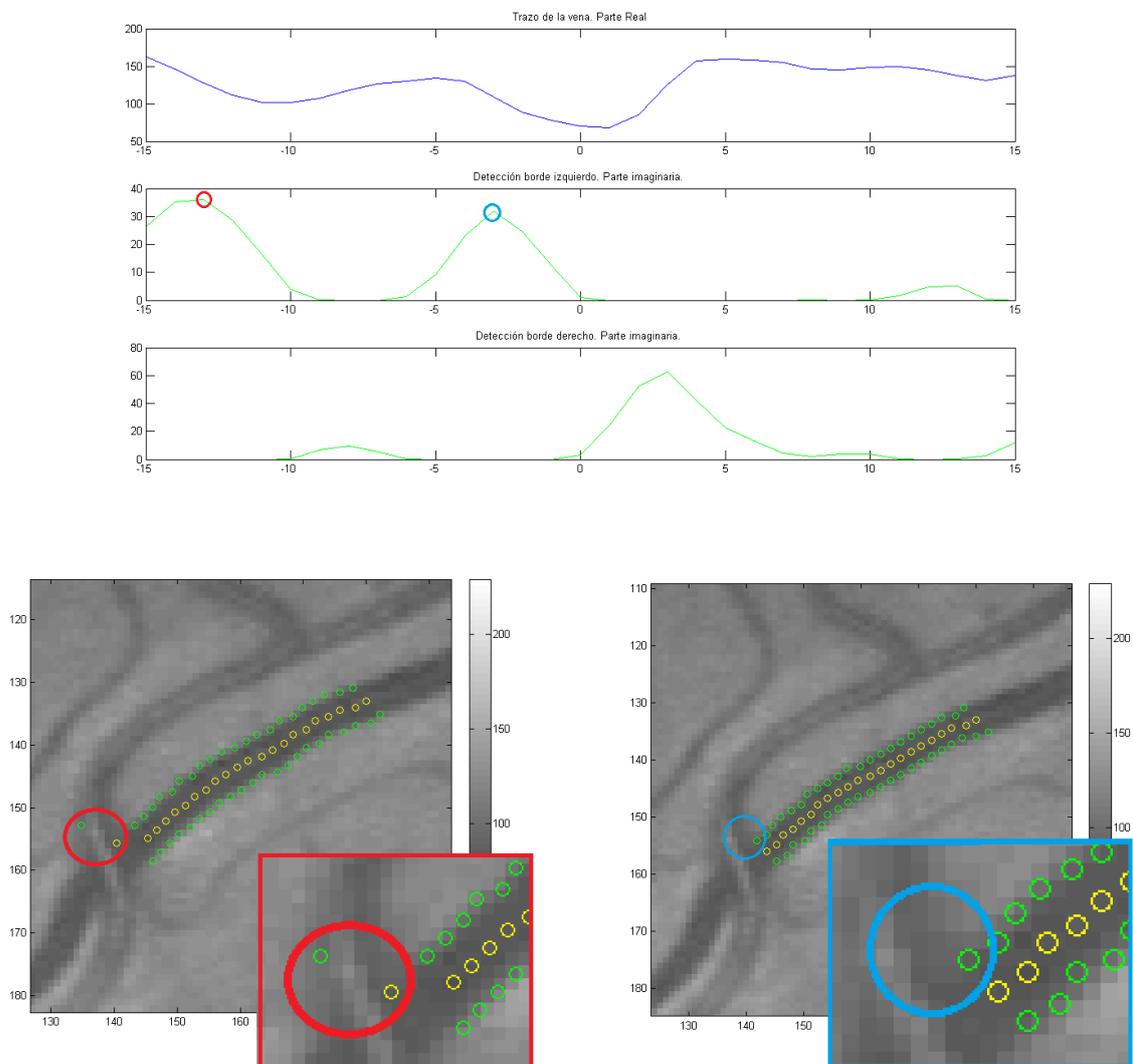
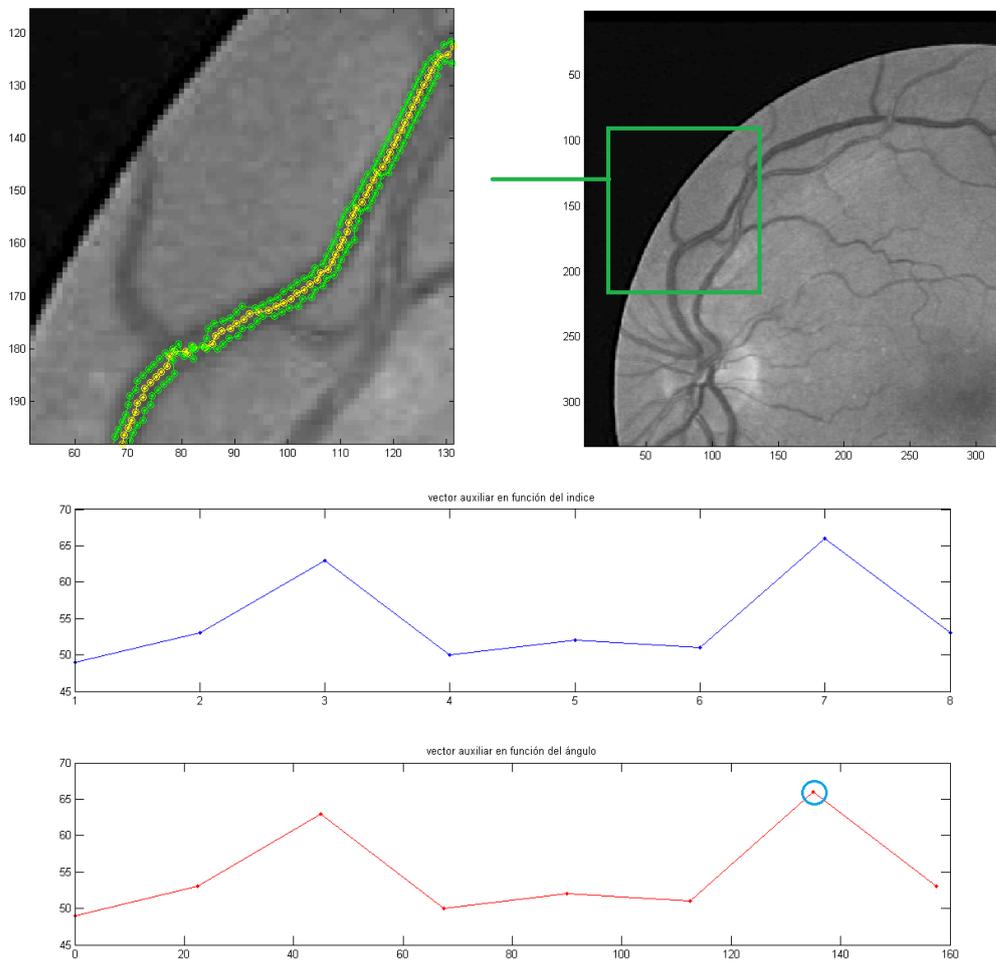


Figura 4.11: Compartamiento del método ETOS ante la presencia de un cruce.

### 4.1.2. Bifurcaciones

Ante la presencia de una bifurcación, el método ETOS detectará las dos orientaciones presentes en ambas ramas. En base a la orientación del punto anterior ( $\theta_{k-1}$ ), se seleccionará como orientación de la semilla actual la más parecida a la mencionada  $\theta_{k-1}$ . De este modo se seguirá la rama del vaso sanguíneo con la orientación más “similar” a la que venía teniendo. En la Figura 4.12 se puede ver el funcionamiento del método ante la presencia de una bifurcación. En la gráfica correspondiente a las orientaciones del punto donde se produce la bifurcación se distinguen las dos orientaciones presentes, estando señalada en azul la correspondiente al punto anterior que será por tanto la seleccionada.



**Figura 4.12:** Compartamiento del método ETOS ante la presencia una bifurcación, el punto rodeado en azul corresponde a la orientación anterior.

### 4.1.3. Vasos paralelos

El método ETOS se basa en la orientación del vaso y por tanto la presencia de vasos paralelos podría crear confusiones, pues éstos tienen la misma orientación que el vaso del que se está realizando el seguimiento. Sin embargo, al depender del punto anterior y teniendo en cuenta la detección de bordes y su efectividad ante la presencia de otros vasos (como se pudo ver anteriormente con los cruces), tiene como consecuencia que la presencia de vasos paralelos no afecte al seguimiento de la vena. En la Figura 4.13 se puede observar este efecto.

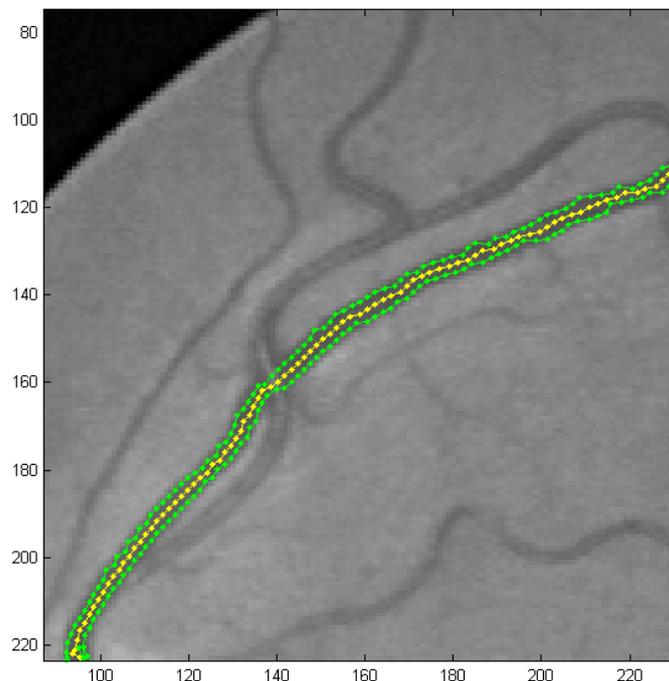
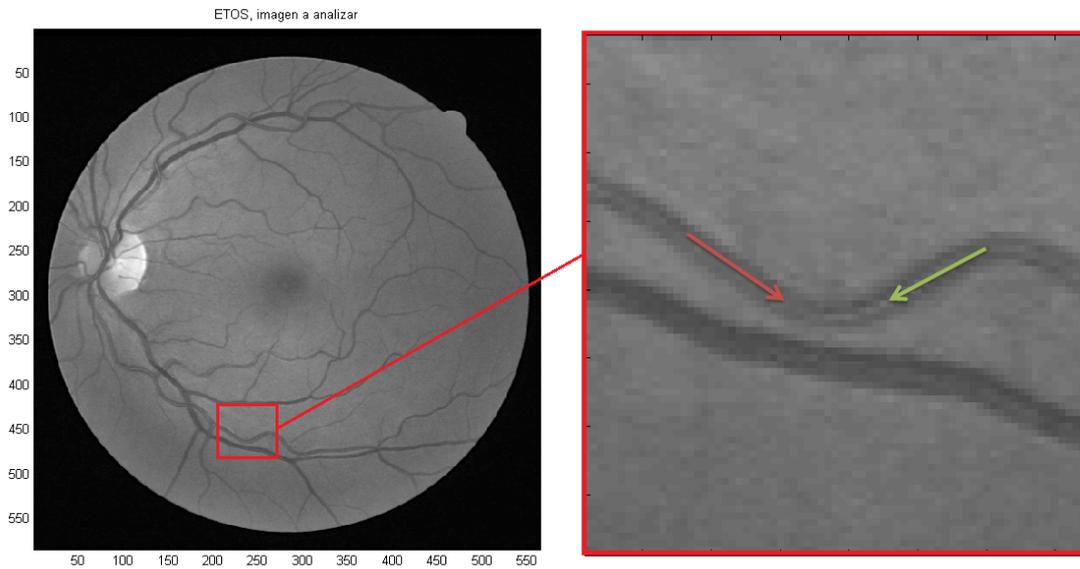


Figura 4.13: Compartamiento del método ETOS ante la presencia de vasos paralelos.

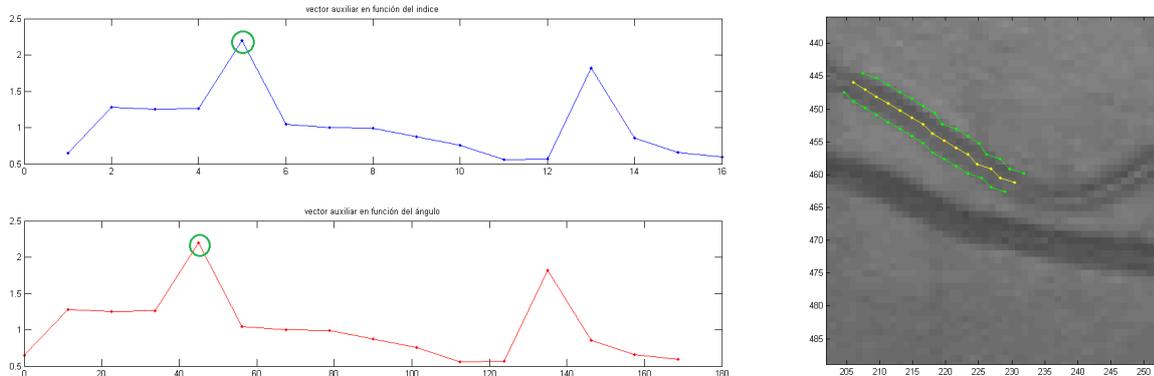
### 4.1.4. Grandes curvaturas

La presencia de grandes curvaturas supone una limitación para el método ETOS, pues no es capaz de detectarlas satisfactoriamente. Esto es debido a la presencia de dos direcciones en las curvaturas de gran tamaño y a la imposibilidad de distinguir entre ellas al estar basado el marcador de orientaciones en *cake wavelets* bilaterales, que no distinguen entre direcciones hacia adelante o hacia atrás. En la Figura 4.14 se puede observar la presencia de ambas direcciones.



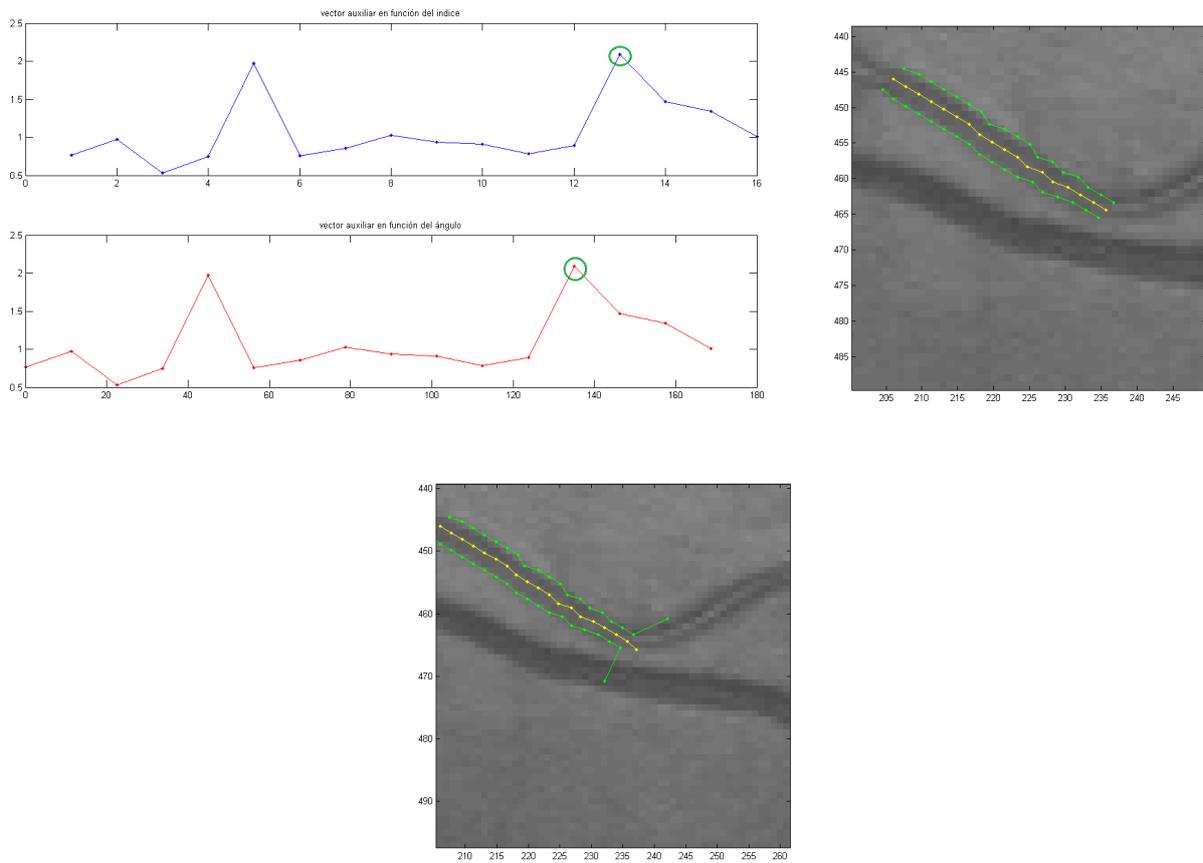
**Figura 4.14:** Segmento de vena con gran curvatura y presencia de direcciones opuestas.

Durante el primer tramo de vena, el seguimiento se hará de manera correcta ya que presenta la misma orientación (véase Figura 4.15).



**Figura 4.15:** Diagrama de orientación para el último punto detectado, en verde orientación presente en dicho punto. Seguimiento satisfactorio del primer tramo de la vena.

En un momento dado, la orientación del segundo tramo de la vena estará más presente en el píxel seleccionado y será a partir de la siguiente iteración cuando se produzcan errores en el seguimiento, ya que aunque el método es capaz de calcular la orientación en dicho punto, no es capaz de determinar su dirección. Como resultado tenemos una detección errónea. Este proceso queda reflejado en la Figura 4.16.

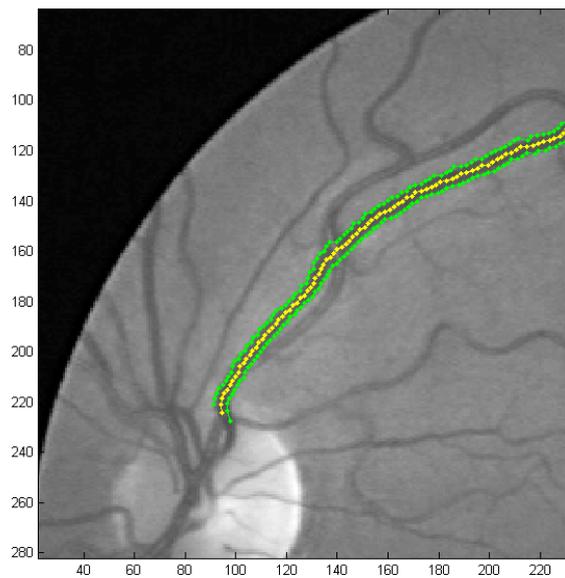


**Figura 4.16:** Diagrama de orientación para la iteración  $k - 1$ , en verde se muestra la orientación presente en dicho punto. A su derecha seguimiento de la vena en ese punto. En la parte inferior, iteración  $k$  donde se produce el error.

Para una correcta detección de grandes curvaturas, sería necesaria la implementación del marcador de orientaciones mediante el uso de *cake wavelets* unilaterales. Las *wavelets* si pueden distinguir entre diferentes direcciones, pudiendo solucionar por tanto el problema planteado.

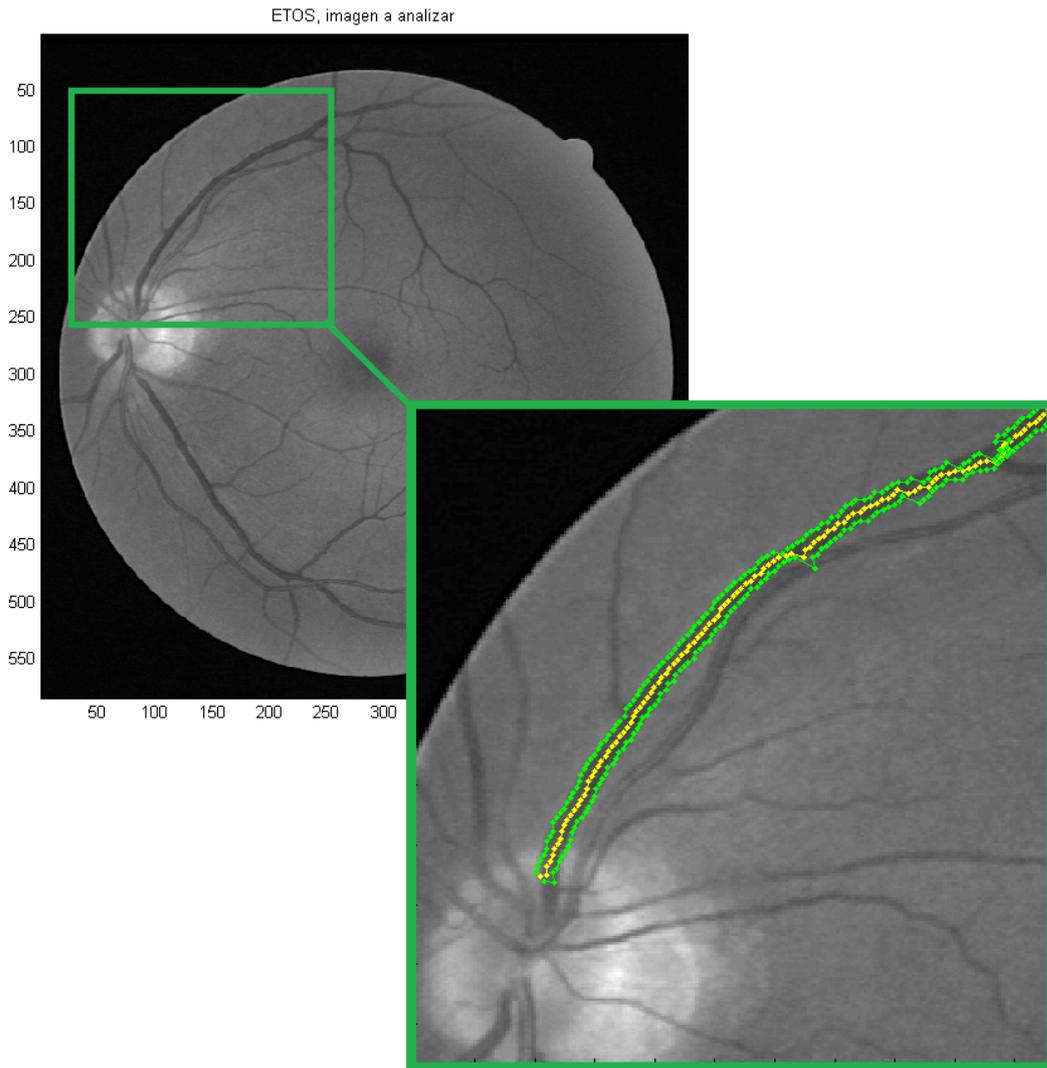


Durante esta Sección se verán distintos casos de seguimiento de venas en los que se ha utilizado el método ETOS. En primer lugar, en la Figura 5.1 se puede observar el seguimiento completo del segmento de vena que ha sido analizado durante el ejemplo de la Sección 4.



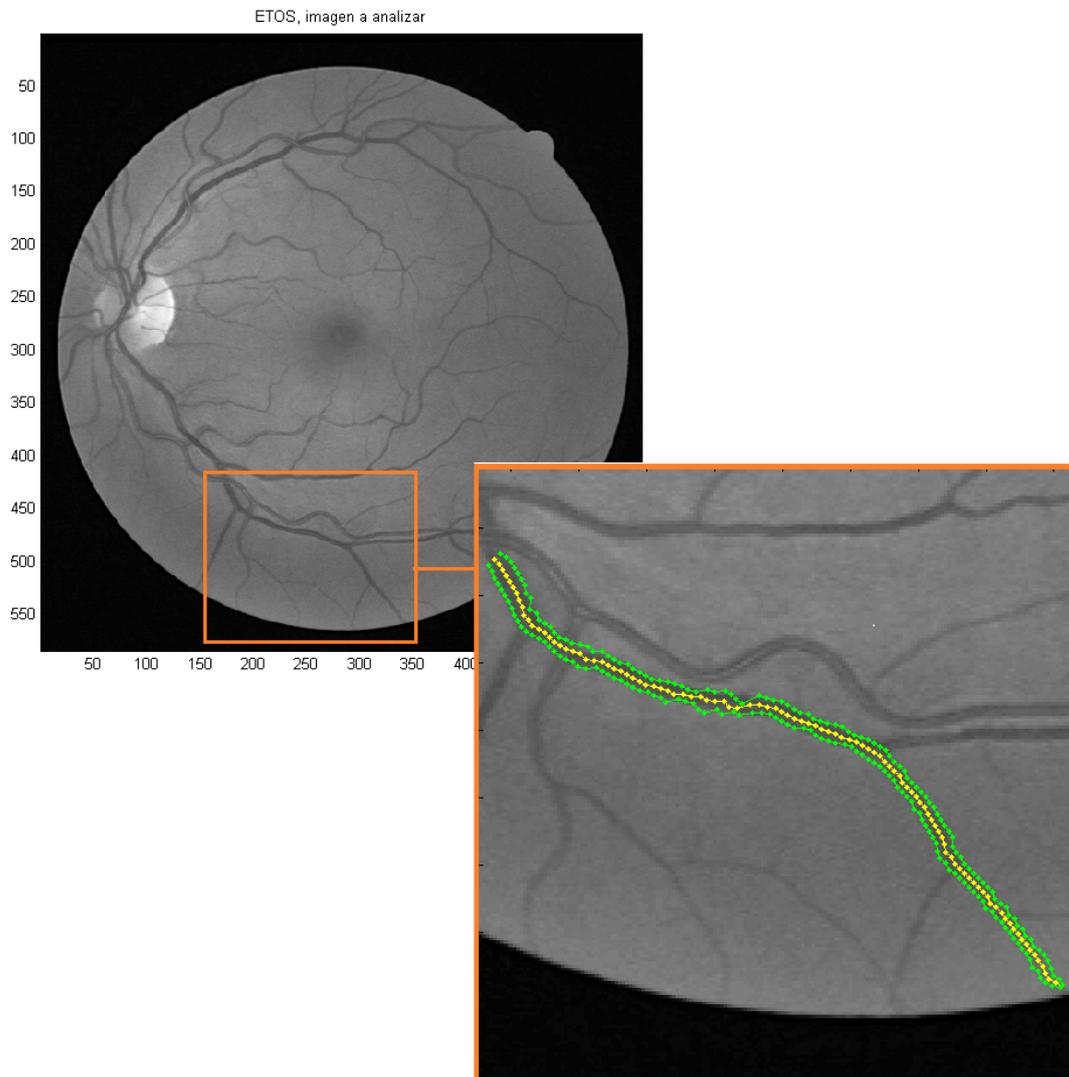
**Figura 5.1:** Seguimiento de la vasculatura de un segmento de vaso sanguíneo.

En el siguiente caso, se muestra el seguimiento de un vaso sanguíneo que al igual que el anterior concluye cuando entra en el disco óptico. En la Figura 5.2 se puede ver como la presencia de un vaso paralelo no afecta a el seguimiento. Tanto en la simulación de este ejemplo como en los sucesivos, se mantienen los parámetros utilizados en la Sección 4, aumentando el número de orientaciones  $N_0$  hasta 32 para obtener una mayor precisión. Todas la imágenes retinográficas utilizadas en la simulación de resultados pertenecen al repositorio DRIVE [14, 13].



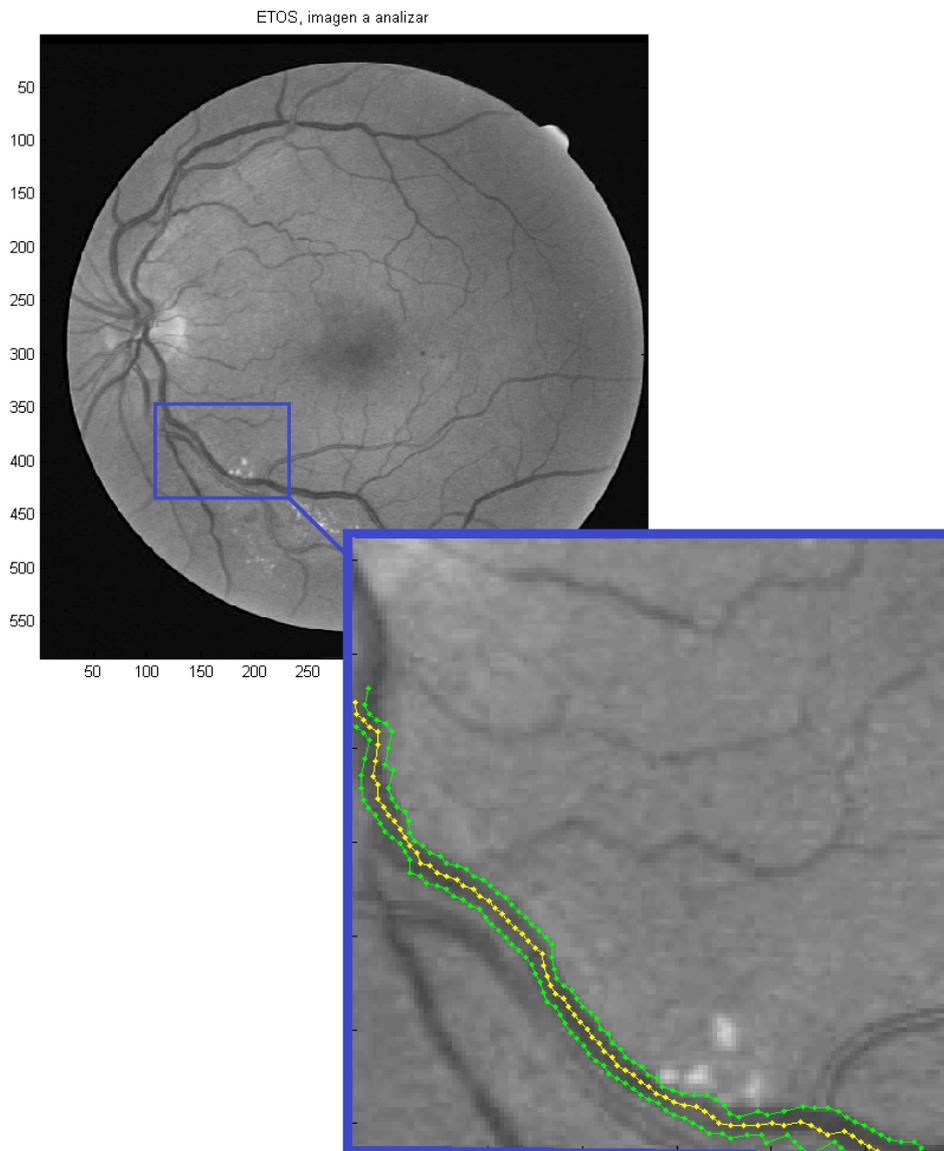
**Figura 5.2:** Fin del seguimiento de la vasculatura al llegar a la retina y comportamiento frente a bifurcaciones y cruces.

A continuación se presenta un ejemplo en el que el final de vena se detecta al llegar a la retina, cuando la anchura  $w_k$  ha disminuido de manera considerable. En este ejemplo también se puede observar el comportamiento del método ante un cruce y distintas bifurcaciones. Todo ello queda reflejado en la Figura 5.3.



**Figura 5.3:** Fin del seguimiento de la vasculatura al llegar a la retina y comportamiento frente a bifurcaciones y cruces.

Por último, se analiza una vena en la que hay presente varias bifurcaciones y además se encuentra muy cerca de un vaso paralelo. En la Figura 5.4 se observa como el método es capaz de resolver estas situaciones de manera satisfactoria.



**Figura 5.4:** Seguimiento de vaso sanguíneo con la presencia de varias bifurcaciones y un vaso paralelo.

---

### Conclusiones

---

- Las *cake wavelets* garantizan la invertibilidad del marcador de orientaciones, y por tanto la imagen original se puede recuperar sin perder información.
- Las *cake wavelets* son *wavelets* de escala completa, es decir, son capaces de capturar todas las escalas sin desviación en una escala particular, a diferencia de las *wavelets* de Gabor. No se necesitan métodos multiescala y por tanto requieren un menor coste computacional.
- En un marcador de orientaciones, se tiene una mejor resolución angular  $s_\theta$  al aumentar el número de orientaciones  $N_0$ . Cuanto mayor sea éste, más estrecho será el filtro, y por tanto, su resolución será mayor.
- Las *cake wavelets* son filtros en cuadratura, es decir, la parte real (con simetría par) contiene información acerca de estructuras simétricas, mientras que la parte imaginaria (con simetría impar) contiene la información de estructuras asimétricas.
- Las *cake wavelets* pueden ser bilaterales y unilaterales, siendo estas últimas capaces distinguir entre dirección hacia adelante y hacia atrás. Si bien, el método desarrollado en este Proyecto se ha hecho mediante *wavelets* bilaterales.

- El método ETOS se basa en la detección simultánea de bordes a través del estudio del marcador de orientaciones. Los perfiles de intensidad de las orientaciones presentes en cada píxel dan la información necesaria para la detección de los bordes.
- El método ETOS actúa de manera efectiva ante la presencia de cruces, vasos paralelos o bifurcaciones.
- El método ETOS no es capaz de realizar un seguimiento vascular correcto ante la presencia de grandes curvaturas. El uso de *cake wavelets* bilaterales en la construcción del marcador de orientaciones impide la detección de diferentes direcciones como las presentes una curvatura de gran tamaño.

### 6.1. Líneas futuras de investigación

- ↔ Análisis completo de los filtros de *cake wavelets*. Comportamiento ante un alto número de orientaciones  $N_0$  y conveniencia de normalizar el filtro.
- ↔ Cálculo de la primera semilla de forma automática.
- ↔ Señalización de bifurcaciones y grandes curvaturas.
- ↔ A la hora de encontrar una bifurcación, realización del seguimiento en todas las direcciones.
- ↔ Estudio del método ETOS usando *wavelets* unilaterales y aplicación del mismo a la resolución de grandes curvaturas.
- ↔ Detección automática del disco óptico.
- ↔ Comparación con filtros morfológicos con aperturas orientables.

---

## Bibliografía

---

- [1] B. Al-Diri, A. Hunter, and D. Steel. An active contour model for segmenting and measuring retinal vessels. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28(9):1488–1497, 2009.
- [2] Erik Bekkers, Remco Duits, Tos Berendschot, and Bart ter Haar Romeny. A multi-orientation analysis approach to retinal vessel tracking. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 49(3):583–610, 2014.
- [3] R. Duits. Perceptual organization in image analysis. Ph.D. thesis department of biomedical engineering, Eindhoven University of Technology, the Netherlands, 2005.
- [4] R. Duits, M. Duits, Markus van Almsick, and B. ter Haar Romeny. Invertible orientation scores as an application of generalized wavelet theory. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 17(1):42–75, 2007.
- [5] Remco Duits, Michael Felsberg, G.H. Granlund, and Bart ter Haar Romeny. Image analysis and reconstruction using a wavelet transform constructed from a reducible representation of the euclidean motion group. *International Journal of Computer Vision*, 72(1):79–102, 2007.
- [6] A.F. Frangi, W.J Niessen, K.L Vincken, and M.A. Viergever. Multiscale vessel enhancement filtering. *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention MICCAI98*, pages 130–137, 1998.
- [7] W.T. Freeman and E.H. Adelson. The design and use of steerable filters *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 1991.
- [8] IMO instituto de microcirugía ocular. IMO glaucoma, 2015.

- [9] Stiliyan N. Kalitzin, Bart M. Ter Haar Romeny, and Max A. Viergever. Invertible apertured orientation filters in image analysis. *International Journal of Computer Vision*, 31(2):145–158, 1999.
- [10] Michael Krause, Ralph Maria Alles, Bernhard Burgeth, and Joachim Weickert. Fast retinal vessel analysis. *Journal of Real-Time Image Processing*, 11(2):413–422, 2013.
- [11] American Academy of Ophthalmology Retina/Vitreous Panel MedlinePlus. Degeneración macular asociada con la edad. Preferred Practice Pattern Guidelines, 2015.
- [12] J. V. B. Soares, J. J. G. Leandro, R. M. Cesar, H. F. Jelinek, and M. J. Cree. Retinal vessel segmentation using the 2-D gabor wavelet and supervised classification. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(9):1214–1222, 2006.
- [13] J. Staal, M. D. Abramoff, M. Niemeijer, M. A. Viergever, and B. van Ginneken. Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(4):501–509, April 2004.
- [14] J. Staal, M. D. Abramoff, M. Niemeijer, M. A. Viergever, and B. van Ginneken. Drive: Digital retinal images for vessel extraction, 2015.
- [15] Yi Yin, Mouloud Adel, and Salah Bourennane. Retinal vessel segmentation using a probabilistic tracking method. *Pattern Recognition*, 45(4):1235 – 1244, 2012.