

Aplicaciones del Fast Multipole Method a problemas 2D con formulación Galerkin RWG y teoría de imágenes

Francisco Javier Pérez Soler, Fernando Daniel Quesada Pereira, Alejandro Álvarez Melcón
Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena, Campus de la Muralla del Mar s/n, C.P. 30202, Cartagena (Murcia)
e-mail: fjps@alu.upct.es, fernando.quesada@upct.es, alejandro.alvarez@upct.es

Abstract—In this paper we successfully apply the Fast Multipole Method (FMM) acceleration technique to two dimensional problems, using the Rao-Wilton-Glisson (RWG) formulation in the frame of the Integral Equation (IE) formulation solved with the Method of Moments (MoM). These problems have been traditionally solved using Point Matching, and we now show the advantages of formulating a Galerkin approach with triangular basis functions. First, we present some Radar Cross Section (RCS) results for validation. Then we show, for the first time, the possibilities of applying FMM to the analysis of arbitrarily shaped multiport inductive waveguide devices, where the accurate calculation of the near field is of primary importance. Results show the accuracy and versatility of the FMM as applied to this kind of problems.

I. INTRODUCCIÓN

En los problemas MoM de dos dimensiones se suele emplear el caso particular de formulación Point Matching o método de colocación, consistente en el uso de funciones de base tipo pulso y deltas de Dirac para el test. Este método simplifica el análisis matemático de la ecuación integral, y permite una implementación más sencilla e intuitiva, pero por contra ofrece poca precisión, especialmente para cálculos de campo cercano. Esto hace que se necesite un número de incógnitas alto para obtener buenas prestaciones. Como alternativa, el método Galerkin con funciones triangulares RWG (Rao, Wilton y Glisson, [1]) para la base y el test nos ofrece mejores resultados a cambio de un pequeño aumento en la complejidad de implementación. En este artículo se ha aplicado como novedad para este tipo de formulación en problemas 2D, el algoritmo Fast Multipole Method [2]. Esta es una reconocida técnica para reducir el coste computacional en problemas grandes, sin perder precisión sobre el método directo. Mostraremos algunos casos de sección recta radar (RCS) para demostrar este hecho. Además, el empleo de esta formulación permite a su vez la aplicación del FMM a problemas novedosos como el análisis de dispositivos microondas multipuerto en guía, donde el cálculo del campo cercano es muy importante. Se mostrarán por primera vez resultados que permitirán comprobar el correcto funcionamiento del FMM en estos problemas, así como la versatilidad de la formulación propuesta.

II. TEORÍA

El algoritmo FMM consiste en dividir la geometría de un problema MoM en una serie de grupos. Con ello, es posible realizar una descomposición de la función de Green de espacio libre y sus derivadas del siguiente modo:

$$G(k, |\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_{IJ}^{\text{disgr}}(\alpha) \hat{\alpha}_{I'l}(\alpha) \mathbf{V}_{II}^{\text{agr}}(\alpha) d\alpha' \quad (1)$$

En (1) se aprecia un proceso de tres etapas: una primera de *agregación*, en la que la información del punto origen se traspasa al centro del grupo al que pertenece por medio del operador $\mathbf{V}_{II}^{\text{agr}}$. Seguidamente aplicamos una *traslación*, mediante la cual el operador $\hat{\alpha}_{I'l}$ realiza un traspaso del centro del grupo origen, al centro del grupo destino. Por último se realiza una etapa de *disgregación*, donde el punto destino recupera la información del centro de su grupo, mediante el uso de $\mathbf{V}_{IJ}^{\text{disgr}}$. Las expresiones generales de estos operadores son:

$$\hat{\alpha}_{I'l(z)}(\alpha) = \sum_{p=-P}^P H_p^{(2)}(k\rho_{I'l(z)}) e^{j\rho_{I'l(z)} \cos(\alpha - \phi_{I'l(z)})} \quad (2a)$$

$$\mathbf{V}_{II}^{\text{agr}}(\alpha) = \int_S \beta_{II}(\alpha) \vec{f}_b(\rho_I) dC' \quad (2b)$$

$$\mathbf{V}_{IJ}^{\text{disgr}}(\alpha) = \int_S \beta_{IJ}(\alpha) \vec{f}_t(\rho_J) dC' \quad (2c)$$

En la expresión del operador de traslación (2a), P es un parámetro de truncamiento que controla la precisión de la aproximación realizada. Por otra parte, en los operadores de agregación y disgregación (2b) y (2c), \vec{f}_t y \vec{f}_b son las funciones de test y base empleadas respectivamente. Finalmente, las expresiones β_{xx} se obtienen:

$$\beta_{il}(\alpha) = C_{agr} e^{jk\rho_{il} \cos(\alpha - \phi_{il})} \quad (3a)$$

$$\beta_{I'j}(\alpha) = C_{disgr} e^{-jk\rho_{I'j} \cos(\alpha - \phi_{I'j})} \quad (3b)$$

siendo ϕ_{xx} el ángulo que forma el correspondiente vector $\vec{\rho}_{xx}$ con el eje de abscisas, y C es una expresión que dependerá del tipo de función de Green o derivada que se esté tomando. Dicha derivada varía con el tipo de objeto (metal o dieléctrico), y con la polarización de la onda incidente. Por ejemplo, para el caso general de un metal bajo incidencia TM_z , si se emplea el

método Point Matching (\vec{f}_i deltas y \vec{f}_b funciones tipo pulso), se llega a:

$$\mathbf{V}_{\Pi}^{agr}(\alpha) = \Delta_i e^{jk\rho_{ic}(z)_i \cos(\alpha - \phi_{ii})} \quad (4a)$$

$$\mathbf{V}_{VJ}^{disgr}(\alpha) = \frac{\omega\mu}{4Q} e^{-jk\rho_{i'j_c} \cos(\alpha - \phi_{i'j})} \quad (4b)$$

con i_c, j_c los centros de las celdas i y j , Δ_i la longitud de la celda i , y Q el número de puntos con los que se discretiza la variable de integración α . Estos son los operadores de agregación y disgregación que aparecen normalmente en la bibliografía [2], [3]. En este artículo se propone como novedad evaluar (2b) y (2c) empleando funciones de tipo triangular (RWG), tanto en la base como en el test (método Galerkin). Para ello habrá que realizar las integrales de forma numérica a lo largo de la celda correspondiente.

Es importante señalar que esta descomposición se basa en el teorema de adición de las funciones de Bessel [2]. Para asegurar su cumplimiento, únicamente podrá realizarse en aquellos grupos que no se encuentren muy próximos entre sí. En caso contrario, será necesario utilizar las expresiones directas de la formulación MoM que se esté empleando. Con esta consideración, la matriz de momentos total del problema se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{NN} + \mathbf{Z}_{FMM} = \mathbf{Z}_{NN} + \bar{\mathbf{V}}^{disgr} \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{V}}^{agr} \quad (5)$$

siendo \mathbf{Z}_{NN} una matriz que recoge las interacciones de los elementos en los grupos próximos entre sí, y las matrices $\bar{\mathbf{V}}^{disgr}$, $\bar{\alpha}$ y $\bar{\mathbf{V}}^{agr}$ recogen sus operadores correspondientes para todas las celdas del problema. Todas estas matrices son de tipo disperso, con lo cual la resolución del sistema resultante empleando un algoritmo iterativo como el gradiente conjugado permite la disminución del coste computacional de $O(N^2)$ a $O(N^{1.5})$, así como un ahorro considerable en almacenamiento de memoria.

Aunque en la literatura las aplicaciones del FMM se centran mayoritariamente en cálculos de la RCS de grandes objetos en dos y tres dimensiones [3], [4], aquí proponemos una nueva aplicación del método. En este caso lo vamos a aplicar en el estudio de dispositivos microondas multipuerto con presencia de obstáculos de geometría arbitraria en su interior, como puede observarse en la figura Fig. 1. La novedad del método es que se prueba por primera vez su efectividad en el cálculo del campo cercano, indispensable para obtener los parámetros de scattering del dispositivo. Hasta ahora, el FMM solo se había aplicado en la obtención de campos lejanos.

Mediante el uso del teorema de extinción, este tipo de estructuras pueden abordarse mediante la combinación de dos problemas separados por un plano de masa impuesto en el puerto de excitación. El primer problema se llama externo, y emplea la función de Green de placas paralelas en el dominio espacial. El segundo problema es el interno, y utiliza la teoría clásica de imágenes espaciales con respecto al plano de masa [5]. La resolución de dicha combinación de problemas mediante el método de los momentos permite obtener las densidades de corriente eléctrica y magnéticas inducidas en la superficie de las estructuras analizadas. Con ellas se pueden

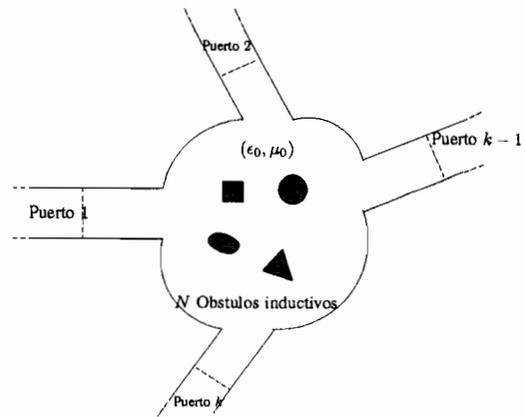


Fig. 1. Problema multipuerto de tipo inductivo con paredes y obstáculos de geometría arbitraria.

calcular los campos existentes en el puerto de excitación, y mediante estos se obtienen los parámetros de admitancia Y de la estructura:

$$Y_{m,n}^{(i,j)} = \frac{\int \int_{S_i} \bar{H}_t^{(i)} \cdot \bar{h}_m^{(i)} dS}{\int \int_{S_j} \bar{E}_t^{(j)} \cdot \bar{e}_n^{(j)} dS} \quad (6)$$

Los parámetros Y ya nos proporcionan la información necesaria para caracterizar un dispositivo de microondas, puesto que con sencillas operaciones matriciales podemos pasar a los parámetros de impedancia Z o a los de scattering S .

En el caso del problema interno antes mencionado, el uso de imágenes permite reducir la función de Green a la combinación de dos funciones de espacio libre. Ello permite emplear FMM considerando las interacciones de los puntos fuente e imagen como dos problemas independientes que comparten el mismo punto destino, tal y como se ve en la figura Fig. 2. En última instancia, este problema también se

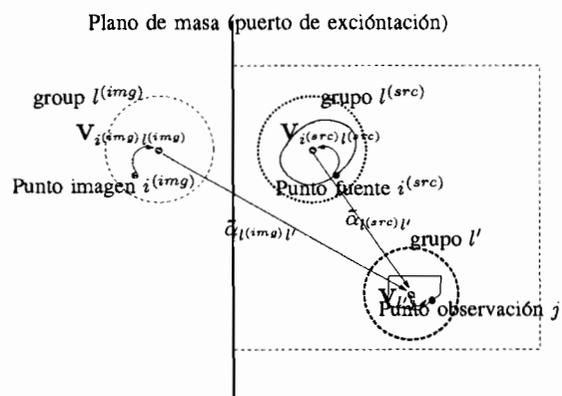


Fig. 2. Etapas de agregación, traslación y disgregación para puntos fuente e imagen en una interacción entre dos postes en el interior de una guía multipuerto.

puede expresarse de forma matricial análoga a (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{MULTIPOINT}} &= \mathbf{Z}_{\text{NN}}^{\text{tot}} + \mathbf{Z}_{\text{FMM}}^{\text{tot}} = \\ &= \mathbf{Z}_{\text{NN}}^{\text{tot}} + \mathbf{Z}_{\text{FMM}}^{(\text{src})} + \mathbf{Z}_{\text{FMM}}^{(\text{img})} = \\ &= \mathbf{Z}_{\text{NN}}^{\text{tot}} + \bar{\mathbf{V}}_{\text{disgr}} \cdot \bar{\alpha}^{(\text{src})} \cdot \bar{\beta}_{\text{agr}}^{(\text{src})} + \\ &+ \bar{\mathbf{V}}_{\text{disgr}} \cdot \bar{\alpha}^{(\text{img})} \cdot \bar{\beta}_{\text{agr}}^{(\text{img})} \end{aligned} \quad (7)$$

donde los superíndices (*src*) y (*img*) denotan los casos de los problemas fuentes e imagen respectivamente, compartiendo la misma etapa de disgregación $\bar{\mathbf{V}}_{\text{disgr}}$. Por último, $\mathbf{Z}_{\text{NN}}^{\text{tot}}$ incluye, además de los elementos próximos entre sí, las interacciones del problema externo, que corresponden a las propias celdas del puerto de excitación, y que no pueden calcularse mediante FMM. Esto es debido a la naturaleza de la función de Green empleada en este caso (formulada en el dominio espectral [6]). Si se eligen los grupos de forma que las celdas correspondientes al puerto queden recogidas en menos de tres grupos consecutivos, esta inclusión en la matriz se cumple de forma directa sin consideraciones adicionales.

III. RESULTADOS

En primer lugar se mostrará el correcto funcionamiento de la técnica FMM empleando la formulación RWG aplicándola a un problema de RCS. La figura Fig. 3 muestra los resultados para un cilindro conductor perfecto infinito de radio λ cuando incide una onda plana en 180° . Como puede observarse, el algoritmo FMM ofrece excelentes resultados cuando empleamos este tipo de formulación, al igual que sucedía en el caso Point Matching. Se incluyen los resultados de la misma estructura

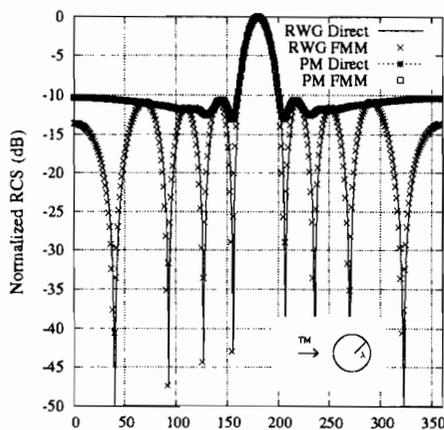


Fig. 3. RCS normalizada de un cilindro conductor perfecto infinito de radio λ excitado con una onda TM_z en 180°

empleando el método de colocación como comparación. Se aprecia cómo las funciones triangulares ofrecen un mayor nivel de detalle en los lóbulos secundarios.

A continuación presentamos resultados de diferentes estructuras de gufa a la que se ha aplicado el método descrito en la teoría. Hay que destacar que la técnica FMM nunca había sido aplicada antes a problemas en gufa, donde la reconstrucción del campo cercano es importante. En primer lugar, la figura

Fig. 4 muestra los parámetros de un filtro de doble poste de cuarto orden presentado en [7]. Se incluyen comparaciones de la técnica propuesta con la propia referencia para validación de resultados. Puede observarse la excelente precisión que nos brinda el método FMM. Esta estructura se ha discretizado con un total de 200 funciones de base en el problema interno y 24 funciones para los puertos, empleándose 11,7 segundos por punto de frecuencia.

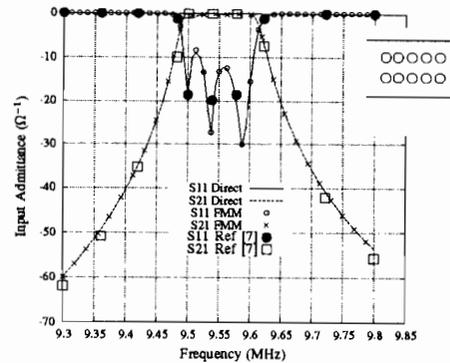


Fig. 4. Parámetros S de un filtro de doble poste de cuarto orden. Las dimensiones se muestran en ref. [7]

Las aplicaciones de esta técnica no quedan limitadas a estructuras con postes en su interior. También es posible el estudio de filtros utilizando ventanas inductivas, como se muestra en Fig. 5. Este filtro corresponde a una aplicación presentada en [8] para comunicaciones por satélite. Se muestra aquí la precisión y la versatilidad del método para estructuras con paredes de geometría variable. La estructura se ha discretizado tomando 408 funciones de base en el contorno y 15 para los puertos, empleándose 16.4 segundos por punto de frecuencia. Se incluye además el resultado obtenido para el mismo mallado si se emplea la técnica Point Matching en el análisis. Se puede comprobar cómo empeora la respuesta en comparación con el caso de funciones RWG si se mantiene la densidad de mallado, siendo incapaz el primer método de seguir correctamente las variaciones de la respuesta del filtro en la banda de paso. Además se aprecia la aparición de pequeñas fluctuaciones, debidas a errores numéricos.

Un tercer ejemplo es un dispositivo en T de microondas con un poste circular alojado en su interior, propuesto en [9] (ver la figura Fig. 6). De nuevo, los resultados son igualmente satisfactorios para una estructura de más de dos puertos. En este caso se han requerido 9,2 segundos por punto de frecuencia, empleando 129 funciones de base para discretizar el circuito interno y 20 para los puertos.

Por último, para mostrar el correcto funcionamiento del método para una orientación arbitraria de los puertos, en Fig. 7 se presentan los resultados de un dispositivo en forma de codo, que se puede encontrar también en [9] para diferentes valores de inclinación. En este caso se emplearon 83 funciones de base para discretizar el circuito interno y 15 para los puertos. Puede verse cómo la técnica nos sigue brindando la misma precisión que la obtenida con un simulador comercial de elementos fini-

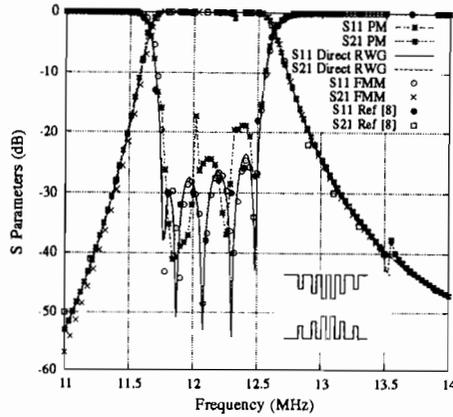


Fig. 5. Parámetros S de un filtro de 5 cavidades. Las dimensiones se muestran en ref. [8].

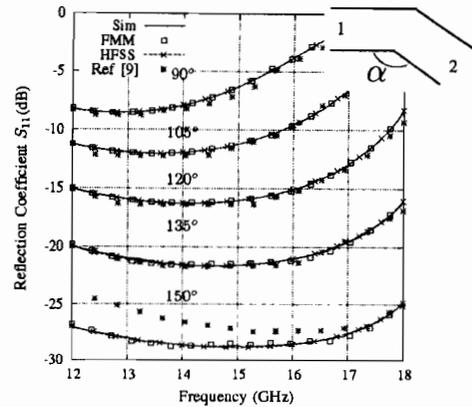


Fig. 7. Coeficiente de reflexión para codos en los que el ángulo varía desde 90° a 150°. Las dimensiones se muestran en [9]-Fig.3a.

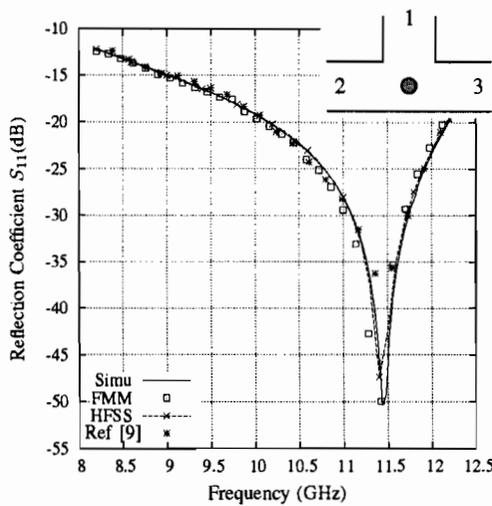


Fig. 6. Coeficiente de reflexión del puerto común para el dispositivo en T presentado en [9]-Fig.2.

tos, como HFSS. En contraposición, la aproximación utilizada en la referencia [9] difiere un poco en el caso del codo de 150°.

Para ver la utilidad del uso de FMM damos ahora unos datos del ahorro que se obtiene al emplear esta técnica. Si por ejemplo, para el caso del dispositivo en T de la figura Fig. 6, aumentamos el número de incógnitas a 860, el método FMM nos proporciona un ahorro de un 23,2% de almacenamiento de matrices, y un 32,3% de ahorro en el tiempo de resolución. Empleando 1010 funciones de base, el ahorro en tiempo pasa a un 35,7%, y en almacenamiento de memoria a un 35,6%. Como podemos comprobar con estos ejemplos, conforme aumentamos el número de incógnitas resulta más ventajoso el empleo del método basado en FMM. Justificamos así el uso de esta técnica cuando se analicen estructuras grandes, donde el número de incógnitas debe ser forzosamente elevado, y el coste computacional del método directo resulta prohibitivo.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha mostrado cómo aplicar la técnica de aceleración FMM para problemas MoM en dos dimensiones cuando se emplea una formulación tipo Galerkin con funciones RWG. Además se ha propuesto el empleo de esta nueva formulación para un método novedoso de análisis de dispositivos de microondas multipuerto en gufaonda. Los resultados muestran la precisión del método FMM para estos problemas, así como las ventajas que supone su utilización en problemas de elevado coste computacional (número de incógnitas elevado).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado con soporte del Proyecto Nacional Ref. TEC2004-04313-C02-02/TCM.

REFERENCIAS

- [1] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrarily shape," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 409-418, May 1982.
- [2] W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, ch. 2. Artech House, 2001.
- [3] W. C. Chew and C. Lu, "Fast algorithm for solving hybrid integral equation," *IEE Proceedings-H*, vol. 140, pp. 455-459, December 1993.
- [4] N. Geng, A. Sullivans, and L. Carin, "Multilevel fast multipole algorithm for scattering from conducting targets above or embedded in lossy half space," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 38, pp. 115-125, July 2000.
- [5] A. A. Melcon and J. R. Mosig, "A novel spatial images technique for the analysis of cavity backed antennas," *ACES, Applied Computational Electromagnetics Society*, vol. 14, March 1999.
- [6] Y. Leviatan and G. S. Sheaffer, "Analysis of inductive dielectric posts in rectangular waveguide," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 35, pp. 48-59, January 1987.
- [7] S. Yin, T. Valilyeva, and P. Pramanick, "Use of three-dimensional field simulators in the synthesis of waveguide round rod bandpass filters," *Int J Microwave and Millimeter Wave Computer Aided Engineering*, vol. 8, pp. 484-497, August 1998.
- [8] M. Guglielmi, G. Gheri, and A. A. Melcon, "CAD of tunning-less band-pass filters," *Estec Working Paper 1624*, European Space Agency, ESA-ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, July 1991.
- [9] J. M. Reiter and F. Arndt, "Rigorous analysis of arbitrarily shaped H- and E-plane discontinuities in rectangular waveguides by a full wave boundary contour mode matching method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, pp. 796-801, April 1995.