

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE  
TELECOMUNICACIÓN  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



TRABAJO FIN DE GRADO

Sobre algunas técnicas de aproximación  
usadas en diseño asistido por computador

presentado por

Alvaro Mira Carrillo

bajo la dirección de las Drs.

Sergio Amat Plata y M<sup>a</sup> José Legaz Almansa



Cartagena, julio de 2013



# Índice general

<b>1. NURBS</b>	<b>1</b>
1.1. Curvas y superficies en el espacio . . . . .	2
1.2. Curvas de Bézier . . . . .	3
1.3. Introducción a B-Splines . . . . .	6
1.4. Curvas y superficies NURBS . . . . .	8
1.4.1. Propiedades de las curvas NURBS . . . . .	11
1.4.2. Propiedades de las superficies NURBS . . . . .	12
1.4.3. Renderizado en tiempo real . . . . .	13
<b>2. Pixar y los esquemas de subdivisión</b>	<b>17</b>
2.1. Los esquemas de subdivisión y la animación de objetos en Pixar	18
2.2. Superficies de subdivisión . . . . .	19
2.3. Tipos de superficies de subdivisión . . . . .	21
2.3.1. Notación y terminología . . . . .	24
2.3.2. Esquemas de subdivisión interpolatorios . . . . .	26
2.3.3. Esquemas de subdivisión aproximatorios . . . . .	27
2.4. El algoritmo de subdivisión de superficies de Catmull-Clark . .	28
<b>3. Esquemas interpolatorios multiresolución no lineales</b>	<b>37</b>
3.1. Introducción . . . . .	37
3.2. Esquemas multiresolución . . . . .	40
3.3. Multiresolución interpolatoria . . . . .	41
3.3.1. Reconstrucciones lineales: interpolación de Lagrange . .	44
3.3.2. Reconstrucciones no lineales: interpolación PPH . . . .	46
3.4. El marco básico para el esquema . . . . .	49

---

3.5. Un esquema de subdivisión ternaria no lineal . . . . .	51
3.5.1. Convergencia . . . . .	54
3.5.2. Estabilidad del esquema multiresolución interpolatorio no lineal asociado . . . . .	56
3.5.3. Propiedades de las funciones límite . . . . .	56
3.6. Test numéricos . . . . .	59
3.7. Conclusiones . . . . .	61

# Introducción

La creación de personajes creíbles y atractivos mediante gráficos por ordenador presenta un gran número de desafíos técnicos, incluidos el modelado, animación y renderizado de formas complejas tales como cabeza, manos y ropa. Con esta finalidad se han creado varios programas especiales para diseño gráfico por ordenador en 2D y 3D. Estos gráficos se originan mediante un proceso de cálculos matemáticos sobre una base de dos o tres dimensiones que ha sido creada por ordenador e incluyen varios procesos complejos: adquisición, registro, integración, segmentación y ajuste.

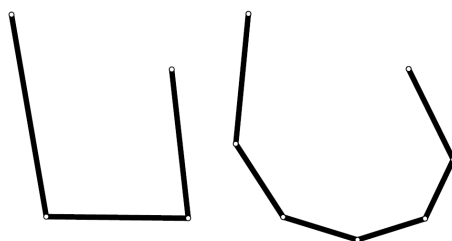
En el caso de la animación gráfica se requiere reconstruir un objeto (en general tridimensional) en el ordenador y posibilitar transformaciones adecuadas del mismo.

Supongamos que queremos trabajar sobre un personaje creado por un dibujante mediante una línea. Si pudiéramos definir esa línea por una función, sería posible realizar sobre ella diversas transformaciones (movimientos, transformaciones afines...). Pero eso no suele ocurrir y la forma de incorporarla al ordenador puede ser escaneándola, lo que supone definir la curva por una serie de puntos de la misma; el número de puntos depende de la resolución del escaneo, pero si agrandamos la figura se advierte la ausencia de continuidad y, además, no tenemos reglas para transformar la curva. Por ello, los programas de diseño gráfico por ordenador consisten básicamente, en algoritmos que permiten unir los puntos del diseño seleccionados por trozos de curvas de ecuación calculable y que funcionan de forma adecuada en las uniones entre dos de estos trozos consecutivos.

A modo de ejemplo, supongamos que tenemos una línea y que hemos

elegido 4 puntos de una línea y vamos a interpolar nuevos puntos entre ellos. Esos 4 puntos nos definen una poligonal compuesta por tres segmentos y en los puntos de unión es angulosa. Podemos calcular nuevos puntos utilizando una media ponderada de los puntos antiguos. Por ejemplo, si hallamos la media de cada cuatro puntos con los pesos  $1/16(-1, 9, 9, -1)$  obtenemos una curva curva menos angulosa (véase la figura 1):

Figura 1: Ejemplo de subdivisión de una curva



Reiterando el proceso se obtienen poligonales como las de la figura 2. Y repitiendo el proceso las veces que sea necesario, en el límite, se obtendría una curva continua y suave; pero, en la práctica, suele ser necesario, dependiendo de la resolución de la pantalla que se vaya a usar, realizar el proceso un número pequeño de veces.

Conviene tener presente que si se eligen muchos puntos, el resultado puede ser mejor, pero el proceso de cálculo es más complejo, más costoso, más lento. Lo que se busca, por tanto, son procesos de iteración que permitan obtener

Figura 2: Ejemplo de subdivisión de una curva (continuación)

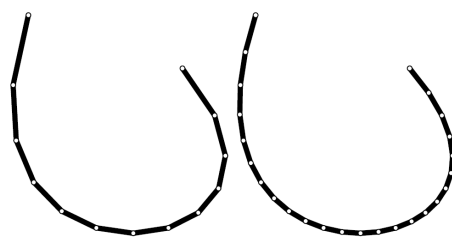
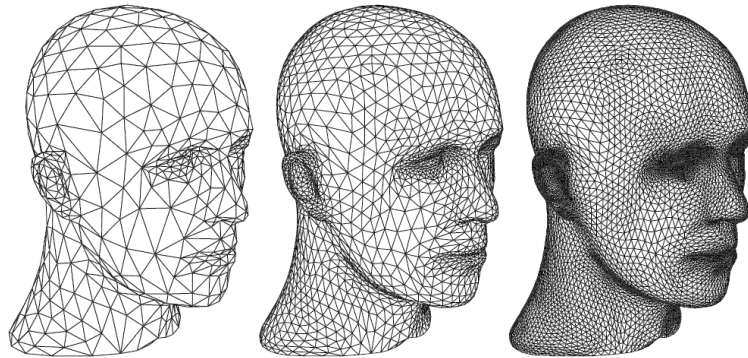


Figura 3: Ejemplo gráfico de subdivisión de una superficie



mejores resultados con menos información de partida (menos puntos).

Otro problema es elegir los puntos iniciales más adecuados. En algunas zonas del diseño más regulares serán necesarios menos puntos, mientras que en otras, se necesitarán más; y la articulación entre unas y otras debe ser adecuada.

Un ejemplo de los refinamientos sucesivos de la subdivisión de una superficie usando mallas triangulares y el diferente tamaño de los triángulos en las distintas zonas se puede ver en la figura 3.

Características que deben tener los algoritmos de subdivisión:

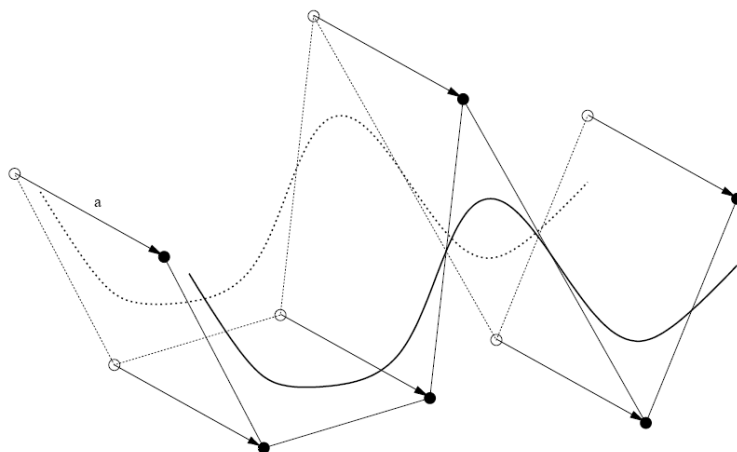
**Eficiencia:** la localización de nuevos puntos debe realizarse con un número pequeño de operaciones sobre algunos puntos contiguos.

**Soporte compacto:** la región sobre la que un punto influye debe ser finita y no demasiado grande.

**Definición local:** las reglas que determinan los nuevos puntos sólo dependen de algunos cercanos, no de los lejanos.

**Invariancia afín:** Si se realiza una transformación afín (traslación, giro, homotecia,...) sobre los puntos base, la forma generada a partir de los puntos transformados debe ser la misma que la que se obtendría aplicando dicha transformación a la curva completa (véase la figura 4).

Figura 4: Ejemplo de invariancia afín



**Simplicidad:** El proceso debe constar de un pequeño número de reglas, preferentemente determinadas por un proceso independiente.

**Continuidad:** Interesan los procesos que generan curvas continuas y derivables, e incluso que la segunda derivada sea continua.

Por ejemplo, la regla que se ha usado para construir las curvas de las figuras 1 y 2 de la página IV, calcula los nuevos puntos a partir de una media ponderada de los puntos antiguos cercanos: los dos anteriores y los dos posteriores, asignándoles pesos de  $1/16(-1, 9, 9, -1)$  respectivamente. Se trata de un procedimiento muy *eficiente* pues sólo requiere, para cada coordenada de cuatro multiplicaciones sencillas y una suma de cuatro sumandos; tiene *soporte compacto* ya que sólo involucra a tres trozos en total; la definición es *local*, pues sólo depende de cuatro puntos próximos y es independiente del resto; es *invariante afín*, pues la suma de los pesos es 1; es muy *simple*, ya que se usa siempre la misma regla; además, la curva límite que se obtiene repitiendo este proceso es derivable.

La memoria consta de tres capítulos y unas conclusiones finales. En el capítulo 1 se introducen las nociones necesarias para definir las NURBS, y más concretamente, las técnicas que están en la base de su desarrollo y al-



---

gunas de sus propiedades. También se hace una pequeña introducción sobre la aparición y evolución de las NURBS en el diseño de formas. En el capítulo 2 veremos como Pixar, que en un principio usaba NURBS para sus diseños, investigó las distintas superficies de subdivisión para solucionar algunos problemas que surgían con las NURBS. Se comentará cuales fueron sus criterios para optar por el esquema de Catmull-Clark; esquema que modificaron posteriormente para corregir algunos problemas que aparecieron y para su empleo en otros campos de la animación 3D. Las NURBS corresponden con esquemas interpolatorios de carácter lineal, pero tienen el inconveniente de que en determinadas circunstancias se presentan oscilaciones indeseables que no desaparecen aunque se incremente el número de iteraciones: fenómeno Gibbs. En el capítulo 3 se presenta un esquema interpolatorio multiresolución no lineal. El objetivo es la reconstrucción a trozos de una función utilizando para ello cuatro puntos en soportes pequeños y un esquema interpolatorio recursivo. Se persigue la convergencia y estabilidad del esquema, que genere funciones límite con buen nivel de suavidad y que evite el fenómeno Gibbs.



# 1

# NURBS

---

El acrónimo NURBS representa la formulación inglesa «Non Uniform Rational B-Splines» y corresponde a un modelo matemático muy utilizado en los gráficos por ordenador para generar y representar curvas y superficies.

El desarrollo de NURBS empezó en 1950 por ingenieros que necesitaban la representación matemática exacta de superficies de forma libre como las usadas en carrocerías de automóviles y cascos de barcos, que pudieran ser reproducidos exacta y técnicamente en cualquier momento. Las representaciones anteriores de este tipo de diseños sólo podían hacerse con modelos físicos o maquetas realizadas por el diseñador o ingeniero.

Los pioneros en esta investigación fueron Pierre Bézier quien trabajaba como ingeniero en Renault, y Paul de Casteljaou quien trabajaba en Citroën, ambos en Francia. Aunque los dos trabajaron en modelos matemáticos muy parecidos y paralelos ninguno de los dos conoció el trabajo que el otro desarrollaba. El trabajo de Bézier fue publicado primero y por esta razón tradicionalmente se le ha asociado a las splines. El nombre de Casteljaou solamente ha sido asociado al desarrollo de algoritmos para la evaluación de las splines.

Las NURBS pueden representar con precisión objetos geométricos estándar tales como líneas, círculos, elipses, esferas y toroides, así como formas geométricas libres como carrocerías de coches y cuerpos humanos. La cantidad de información que requiere la representación de una forma geométrica en NURBS es muy inferior a la que necesitan otros tipos de aproximaciones comunes.

En este capítulo vamos a desarrollar las nociones necesarias para definir las NURBS, en particular, las técnicas que están en la base de su desarrollo y algunas de sus propiedades.

## 1.1. Curvas y superficies en el espacio

Toda curva o superficie en el espacio se puede definir por un conjunto de funciones paramétricas.

En el caso de las curvas, por ejemplo, las coordenadas  $(x, y, z)$  de los puntos de la curva pueden ser dadas por:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t),$$

siendo  $t \in \mathbb{R}$  el parámetro y siendo  $X, Y, Z$  funciones de  $t$ .

Si  $X, Y$  y  $Z$  son polinomios de grado 1, la curva definida es un segmento de una recta. En ese caso, solo se necesitarán dos datos (por ejemplo dos puntos o un punto y una pendiente) para definir esta curva. Si  $X, Y, Z$  son polinomios de grado 2, se definirá una parábola y se necesitarán tres datos para describirla (por ejemplo, 3 puntos o 2 puntos y una tangente). Para polinomios de grado  $n$ , se necesitarán  $n + 1$  datos para describir la curva. Este número de datos es lo que llamamos *el orden de la curva*, y siempre es, por tanto, una unidad mayor que el grado del polinomio.

Los polinomios cúbicos suelen ser los más utilizados para representar curvas. Efectivamente, para polinomios de grado mayor se necesitan más datos, lo que hace el modelado más difícil de manejar. Por otro lado, los polinomios de grado menor describen de manera más restrictiva las curvas, que sólo pueden ser rectas o parábolas, las cuales son siempre curvas planas.

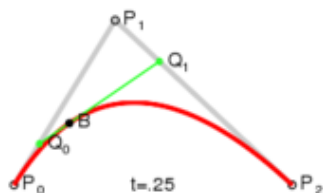
En el caso de las superficies, se pueden definir paramétricamente usando dos parámetros. Las coordenadas  $(x, y, z)$  de los puntos de la superficie pueden ser dadas por:

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v)$$

siendo  $u, v \in \mathbb{R}$  los parámetros y siendo  $X, Y, Z$  funciones de éstas

## 1.2. Curvas de Bézier

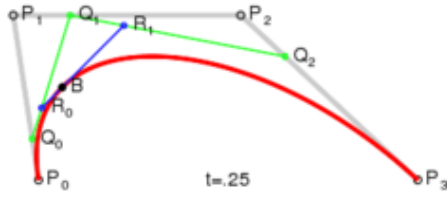
Las curvas de Bézier representan un instrumento ampliamente usado en la realización de gráficos con ordenador para modelar curvas de comportamiento «suave», en el sentido de que no existan puntos angulosos. Se construyen utilizando un cierto número finito y ordenado de *puntos de control*, que con frecuencia son tres (curvas de Bézier cuadráticas) o cuatro (curvas de Bézier cúbicas). La curva une el primero y el último de los puntos de control mediante un trazo sin «puntos angulosos», pero, generalmente, no pasa por los puntos de control, sino que estos actúan como si tuvieran una cierta capacidad de atracción sobre una «cuerda elástica» que uniera los puntos extremos con el resultado de producir una deformación suave de la misma.



Los puntos de control utilizados para generar la curva de Bézier del gráfico que aquí figura son  $P_0, P_1, P_2$ . El punto  $Q_0$  inicia su recorrido del segmento  $P_0P_1$

partiendo de  $P_0$  y se mueve de acuerdo con la ecuación  $Q_0 = P_0 + t(P_1 - P_0)$ , donde  $0 \leq t \leq 1$ . El parámetro  $t$  puede considerarse como una medida del porcentaje del camino recorrido (en realidad al multiplicarlo por 100); en el gráfico  $t = 0,25$  corresponde al 25%. Así cuando  $t = 0$  estamos en el punto  $Q_0 = P_0$ , cuando  $t = 1$  es  $Q_0 = P_1$  y para los valores intermedios de  $t$  el punto  $Q_0$  va pasando por los diferentes puntos del segmento  $P_0P_1$ . Simultáneamente, y de forma enteramente análoga, el punto  $Q_1$  recorre el segmento  $P_1P_2$  de acuerdo con la ecuación  $Q_1 = P_1 + t(P_2 - P_1)$ . Y por último el punto  $B$  de la curva Bézier está situado, para cada  $t$ , sobre el segmento  $Q_0Q_1$  siguiendo el mismo tipo de interpolación lineal  $B = Q_0 + t(Q_1 - Q_0)$ . En consecuencia la ecuación de la curva de Bézier viene dada por:

$$\begin{aligned} B(t) &= Q_0 + t(Q_1 - Q_0) = (1 - t)Q_0 + tQ_1 \\ &= (1 - t)\left((1 - t)P_0 + tP_1\right) + t\left((1 - t)P_1 + tP_2\right) \\ &= (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2 \end{aligned}$$



Esta curva de Bézier tiene cuatro puntos de control ordenados  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Con los tres primeros se procede como en el caso anterior para determinar un punto, llamado  $R_0$  en el gráfico, y con los tres últimos se hace lo propio para determinar un punto llamado  $R_1$  en el gráfico. Entre ambos puntos se realiza la interpolación lineal correspondiente al parámetro  $t$  para determinar el punto  $B$  de la curva de Bézier generada por esos puntos de control. Pulsando sobre la figura que inicia este párrafo es posible ver una generación dinámica de las curvas Bézier de grados 2 y 3 correspondiente dichos dibujos anteriores. Procediendo como en el caso anterior se obtiene el polinomio de grado tres correspondiente a esta curva con cuatro puntos de control.

$$\begin{aligned}
 B(t) &= (1-t)R_0 + tR_1 \\
 &= (1-t)\left((1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2\right) \\
 &\quad + t\left((1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3\right) \\
 &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + (1-t)^3P_3
 \end{aligned}$$

Utilizando el mismo procedimiento podrían generarse curvas de Bézier de grado más alto, que, sin embargo no suelen utilizarse por el esfuerzo computacional que requieren. En lugar de eso es preferible para modelar perfiles complejos usar varias curvas de Bézier de grado bajo, con grupos de puntos de control adecuadamente próximos, de forma que se enlacen bien entre sí. Al igual que sucede con la interpolación de Lagrange.

En general las curvas de Bézier con  $n$  puntos de control ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) se expresan en la forma

$$(1.1) \quad B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n} P_i \quad \text{siendo } b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1}$$

Los polinomios  $b_{i,n}$  se conocen con el nombre de polinomios de Bernstein de grado  $n$  y corresponden precisamente, a los coeficientes en el desarrollo del

binomio de Newton de la expresión

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n b_{i,n}$$

En ocasiones se consideran también curvas de Bézier para las que los puntos de control,  $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$  tienen pesos  $w_0, w_1, w_2 \dots w_n$  (lo cual correspondería a asignar diferentes poderes de atracción a los diferentes puntos de control) y entonces la fórmula a considerar sería:

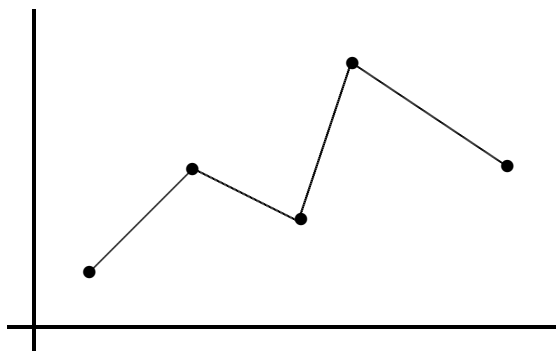
$$(1.2) \quad B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n b_{i,n} P_i w_i}{\sum_{i=0}^n b_{i,n} w_i}$$

Como ya hemos dicho, las curvas de Bézier fueron introducidas por Paul de Casteljaou en 1959 y muy ampliamente utilizadas en el diseño de carrocerías de automóviles por el ingeniero francés Pierre Bézier, del que toman su nombre.

Actualmente, se utilizan las curvas de Bézier como herramientas de diseño gráfico en programas como Adobe Photoshop, Adobe Illustrator, Inkscape, etc. o en programas de animación gráfica para controlar el movimiento en aplicaciones como Adobe Flash, Adobe After Effects, Adobe Shockwave, entre otros.

El diseño de las fuentes True Type usadas en MS-Windows se desarrolló a finales de los ochenta por Apple Computer utilizando curvas de Bézier con tres puntos de control mientras que en el diseño de las fuentes postscript Adobe Type 1 se utilizan curvas de Bézier con cuatro puntos de control. También se utilizan curvas de Bézier cúbicas en el diseño con Metafont de las tipografías usadas en T<sub>E</sub>X (como las utilizadas en este trabajo), con lo que la calidad técnica de las dos últimas es superior a la de las fuentes True Type.

Figura 1.1: Interpolación segmentaria lineal entre puntos



### 1.3. Introducción a B-Splines

En el ámbito del análisis numérico, un *spline* es una curva definida a trozos mediante polinomios. Estas curvas se utilizan para resolver problemas de interpolación y suavizado de curvas y, como pueden hacer uso de polinomios de grado bajo, se consigue facilitar los cálculos y simplificar las representaciones, además de evitar las oscilaciones que aparecen cuando se usan polinomios de grado alto. Todo esto hace que los splines sean utilizados en los gráficos por ordenador y estén en la base de muchas otras técnicas. Hay que señalar que las curvas de Bézier son un tipo particular de spline.

Otros tipos de splines son las *interpolaciones segmentarias poligonales* que pueden ser de distinto grado. Cuando el grado es 1 tenemos la interpolación segmentaria lineal que consiste, simplemente, en unir los puntos dados por segmentos, lo que proporciona una gráfica continua pero no derivable en los puntos de control (figura 1.1)

Cuando el grado es 2 se denomina interpolación segmentaria cuadrática; se interpolan trozos de parábola que van de un punto de control al siguiente, y se pide que la derivada en el punto de control sea igual a ambos lados, es decir, que el spline sea  $C^1$ .

Cuando el grado es 3 se denomina interpolación segmentaria cúbica. En este caso se pide que el spline resultante sea  $C^2$ , es decir, que tanto la primera derivada como la segunda coincidan a ambos lados de cada punto. Estas



condiciones no son suficientes para determinar los splines cúbicos y hay que agregar otras que dan lugar a diferentes tipos de splines cúbicos. En particular tenemos los *splines cúbicos naturales* en los cuales la derivada segunda es cero en el primer y en el último punto.

El principal inconveniente con los splines naturales es que la modificación un punto de control afecta a toda la curva, ya que los coeficientes polinómicos dependen de todos los puntos de control. Interesa definir curvas en las que sea posible un *control local*, es decir, que la modificación de un punto de control afecte sólo a un trozo de la curva. Esto ocurre así en los B-Splines, que consisten en varios trozos de splines naturales, cada uno de los cuales está definido por un conjunto reducido de puntos de control.

Los B-Splines combinan  $p + 1$  puntos de control  $P_0, P_1, \dots, P_p$ ,  $p \geq n$  y consiste en  $p - (n - 1)$  trozos de curva  $Q_n, Q_{n+1}, \dots, Q_p$  (polinomios de grado  $n$ ). Además, podemos definir un parámetro común  $t$  mejor que considerar  $t$  definido en el intervalo  $[0, 1[$  para cada trozo de la curva. Así que, para cada segmento  $Q_i$  de la curva,  $t$  dependerá del intervalo  $[t_i, t_{i+1}[$ , con  $n \leq i \leq p$ . Además, cada segmento  $Q_i$  solo se verá afectado por  $n$  puntos de control:  $P_{i-n}$  hasta  $P_i$ .

Para cada  $i \geq n$ , existe un nodo entre  $Q_i$  y  $Q_{i+1}$  para el valor  $t_i$  del parámetro  $t$ . Existe un total de  $p - n - 2$  nodos para el B-Spline. El concepto de uniformidad es el siguiente: si los nodos están uniformemente distribuidos sobre el intervalo  $[0, 1[$  (por ejemplo,  $\forall i \in [n, p[, t_{i+1} - t_i = t_{i+2} - t_{i+1}$ ), el B-Spline se dice que es *uniforme*. En otro caso, diremos que es *no uniforme*. Cabe mencionar el hecho de que estas definiciones implican que los nodos son crecientes (por ejemplo,  $\forall i \in [n, p], t_i \leq t_{i+1}$ ).

Cuando las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto de la curva están dadas por cocientes de polinomios como en la ecuación (1.3), el B-Spline se dice que es *racional*, cuando el denominador es la unidad se dice *no racional*.

$$(1.3) \quad x = \frac{X(t)}{W(t)}, \quad y = \frac{Y(t)}{W(t)}, \quad z = \frac{Z(t)}{W(t)}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior tenemos 4 tipos diferentes de B-

Splines:

- No Racionales Uniformes
- No Racionales No Uniformes
- Racionales Uniformes
- Racionales No Uniformes

El último tipo llamado generalmente NURBS, es el más general y el que más nos interesa para nuestro objetivo. Cualquiera de los otros tipos de B-Splines son un caso particular de NURBS; para los no racionales se cumple que  $W(t) = 1$ , y la uniformidad es un caso particular de los no uniformidad.

## 1.4. Curvas y superficies NURBS

Una curva NURBS  $Q(t)$  está definida por la siguiente ecuación paramétrica (1.4):

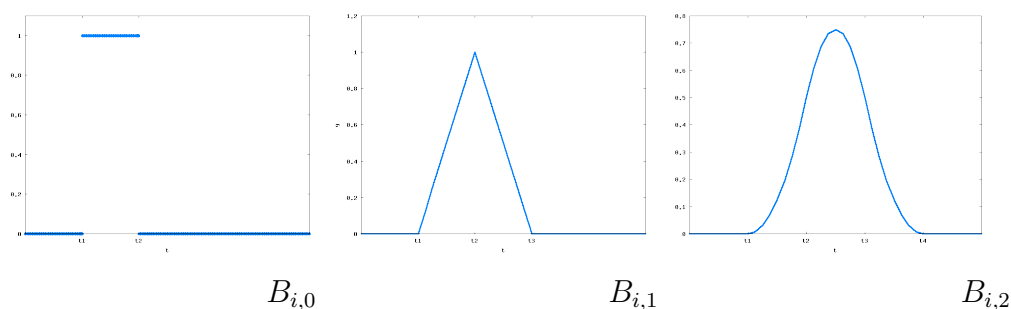
$$(1.4) \quad Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t)P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t)w_i}$$

Y similarmente, generalizando la ecuación (1.4) para el caso de 2 parámetros obtenemos una superficie NURBS (1.5).

$$(1.5) \quad S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)P_{i,j}w_{i,j}}{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)w_{i,j}}$$

En ambas ecuaciones,  $P_i$  es un punto de control,  $w_i$  el peso asociado a éste, y  $B_{i,n}$  una función base definida recursivamente sobre  $n$  por:

$$(1.6) \quad B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Figura 1.2: Gráficas de las primeras funciones base:  $B_{i,0}$ ,  $B_{i,1}$  y  $B_{i,2}$ 

$$(1.7) \quad B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad \forall k > 0$$

Por ejemplo, para  $k = 1$  la ecuación de  $B_{i,1}$  viene dada por

$$(1.8) \quad B_{i,1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} B_{i+1,0}(t)$$

y su representación gráfica aparece, junto con las de  $B_{i,0}$  y  $B_{i,2}$ , en la figura 1.2.

Volviendo ahora a la ecuación (1.4) observamos que, si los pesos  $w_i$  son iguales, el denominador es constante y la curva (1.4) sólo consistiría en:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i$$

Se trata pues de una curva no racional. Lo mismo ocurre en el caso de la ecuación (1.5) correspondiente a una superficie.

Además, las funciones base  $B_{i,n}$  sólo son distintas de cero en los alrededores del punto  $P_i$  (para  $n = 3$  sólo son distintas de cero entre  $t_{i-1}$  y  $t_{i+2}$ ) lo que permite modificar la influencia de un punto de control de forma bastante local.

Las curvas NURBS tiene cuatro elementos fundamentales en su definición:

- **Puntos de control:** Definen una aproximación de la curva, y éstos podremos desplazarlos en el espacio, para así modificar la forma de

la superficie. La unión de estos creará un polígono que se denomina polígono de control.

- **Pesos:** Están asociados a los puntos de control, y sólo existen en curvas y superficies racionales. Cuanto mayor sea el peso en un punto de control mayor será la atracción que ejerce sobre la curva hacia el punto control. De manera opuesta, cuanto menor sea el peso en un punto de control se producirá un mayor alejamiento respecto del punto de control. De manera más concreta se puede ver que:
  - Si  $w > 1$  se produce un aproximación de la curva.
  - Si  $w = 1$  no se produce ninguna modificación respecto de la curva no racional.
  - Si  $0 < w < 1$  se produce un alejamiento de la curva siendo el límite la línea recta que une los puntos de control anterior y siguiente.
  
- **Nodos:** Son una lista de grado+N-1 números, donde N es el número de puntos de control. A veces, esta lista se denomina vector nodal, y debe cumplir varias condiciones técnicas. La manera estándar para asegurar que las condiciones técnicas se cumplan, es que sea creciente y limitar el número máximo de valores duplicados al grado. El número de veces que un valor nodal se duplica se denomina *multiplicidad nodal*. Se dice que un valor nodal es un nodo de multiplicidad total si es múltiplo de su grado. Si una lista de nodos se inicia con un nodo de multiplicidad completa, le siguen nodos simples, termina con un nodo de multiplicidad completa y los valores se espacian uniformemente, entonces los nodos son *uniformes*. Los que no cumplan esto se dicen que son *no uniformes*. Los valores duplicados del nodo en la mitad de la lista del nodo hacen que una curva de NURBS sea menos suave. En caso extremo, un nodo de completa multiplicidad en la mitad de la lista de nodos significa que hay un lugar en la curva NURBS que se puede doblar en un punto de torsión. Por esta razón, agregando y quitando nodos, y luego ajustando los puntos de control se pueden hacer formas más suaves o figuras torsionadas. Debido a que el número de nodos es

igual a  $N + \text{grado} - 1$ , si se agregan nodos también se agregan puntos de control, y si se quitan nodos se quitan puntos de control. Los nodos se pueden añadir sin cambiar la forma de la curva de NURBS. En general, quitar nodos cambiará la forma de una curva.

- **Grado:** El grado de la curva nos indicará si es cuadrática, cúbica, cuártica, etc. A mayor grado, manteniendo el polígono de puntos de control constante, la curva se suaviza más respecto al polígono de control, siendo de grado cero los puntos de control y de grado uno el polígono de control.

### 1.4.1. Propiedades de las curvas NURBS

Las propiedades que tienen las curvas NURBS son las siguientes:

- No negatividad:  $B_{i,p}(t) \geq 0 \forall i, p$  y  $t \in [0, 1]$
- Partición de la unidad:  $\sum_{i=0}^n B_{i,p}(t) = 1 \forall t \in [0, 1]$
- $B_{0,p}(0) = B_{n,p}(1) = 1$
- Para  $p > 0$ , todo  $B_{i,p}(t)$  alcanza un máximo en el intervalo  $t \in [0, 1]$
- Soporte local:  $B_{i,p}(t) = 0$  para  $t \notin [t_i, t_{i+p+1})$ . Además, en cada nodo dado, al menos  $p + 1$  de los  $B_{i,p}(u)$  son distintos de cero.
- Todas las derivadas de  $B_{i,p}(t)$  existen en el espaciado del nodo, la cual es una función racional con denominador distinto de cero. En un nodo,  $B_{i,p}(t)$  es  $p - k$  veces continuamente diferenciable, donde  $k$  es la multiplicidad del nodo.
- Si  $w_i = 1 \forall i$ , entonces  $B_{i,p}(t) = N_{i,p}(t) \forall t$

Y dando estas propiedades como resultado las siguientes características geométricas de las curvas NURBS:

- $Q(0) = P_0$  y  $Q(1) = P_n$ .
- Invarianza afín: una transformación afín de los puntos de control define una nueva curva que es la misma que la que se obtiene al aplicar a la

curva original dicha la transformación. Las curvas NURBS son también invariantes bajo las proyecciones en perspectiva.

- $Q(t)$  es infinitamente diferenciable en el intervalo del nodo y es  $p - k$  veces diferenciable en un nodo con multiplicidad  $k$ .
- Propiedad de la variación decreciente: ningún plano tiene más intersecciones con la curva que con el polígono de control.
- Una curva NURBS sin nodos interiores es una curva de Bézier racional, ya que  $N_{i,p}(t)$  se reduce a  $B_{i,n}(t)$ . Las curvas NURBS contienen B-Splines no racionales, y curvas de Bézier racionales y no racionales en casos especiales.
- Aproximación local: si movemos el punto de control  $P_i$  o cambiamos el peso  $w_i$  afectaremos sólo a la porción del intervalo  $t \in [t_i, t_{i+p+1})$ .

### 1.4.2. Propiedades de las superficies NURBS

Las propiedades de las funciones  $R_{i,j}(u, v)$  son aproximadamente las mismas que para las funciones básicas no racionales  $N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$

- No negatividad:  $R_{i,j}(u, v) \geq 0 \forall i, j, u, v$ .
- Partición de la unidad:  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$  para todo  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Soporte local:  $R_{i,j}(u, v) = 0$  si  $(u, v)$  está fuera del rectángulo dado por  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .
- En cualquier rectángulo de la forma  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$  por lo menos  $(p + 1)(q + 1)$  funciones base son distintas de cero.
- Extremos: si  $p > 0$  y  $q > 0$   $R_{i,j}(u, v)$  alcanza exactamente un valor máximo.
- $R_{0,0}(0, 0) = R_{n,0}(1, 0) = R_{n,m}(1, 1) = 1$ .

- Diferenciabilidad: en el interior del rectángulo formado por las líneas nodo  $u$  y  $v$  existen todas las derivadas parciales de  $R_{i,j}(u, v)$ . En el nodo  $u$  (nodo  $v$ ) es  $p - k$  (o  $q - k$ ) veces diferenciable en la dirección  $u$  ( $v$ ), donde  $k$  es la multiplicidad del nodo.
- Si todos los  $w_{i,j} = a$  para  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$  y  $a \neq 0$ ,  $R_{i,j}(u, v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \forall i, j$

Estas propiedades dan como resultado las siguientes características geométricas de las superficies NURBS:

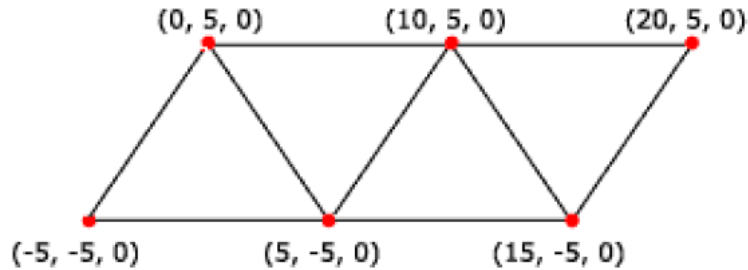
- Interpolación de un punto anguloso:  $S(0, 0) = P_{0,0}$ ,  $S(1, 0) = P_{n,0}$ ,  $S(0, 1) = P_{0,m}$  y  $S(1, 1) = P_{n,m}$
- Invarianza afín: se aplica a la superficie aplicándola a los puntos de control
- Modificaciones locales: si movemos  $P_{i,j}$  o cambiamos  $w_{i,j}$  afectaremos a la forma de la superficie sólo en el rectángulo  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$
- B-Splines no racionales, Bézier y superficies Bézier racionales son casos especiales de superficies NURBS.
- Diferenciabilidad:  $S(u, v)$  es  $p - k(q - k)$  veces diferenciable con respecto a  $u$  ( $v$ ) en el nodo  $u$  (nodo  $v$ ) de multiplicidad  $k$

### 1.4.3. Renderizado en tiempo real

El renderizado, en nuestro caso, es un proceso de cálculo complejo desarrollado por un ordenador destinado a generar una imagen 2D a partir de una escena 3D. Esto quiere decir, que en este proceso de cálculo se crea una imagen 2D que imita el espacio 3D de manera más o menos exacta, dependiendo del motor de renderizado y de la calidad que queramos obtener.

Para el renderizado de una superficie NURBS se necesitan dos pasos: primero, calcular los puntos que formarán la malla de control de la superficie, y luego, el envío de la malla de control a la aplicación 3D.

Figura 1.3: Ejemplo de tira triangular



Lo primero, llamado mosaico, consiste en transformar la definición matemática continua de una superficie en una definición discreta. Por algunas razones de complejidad y eficiencia, se usa el mosaico uniforme, esto quiere decir que se calculan los puntos de manera que estén uniformemente equiespaciados para los parámetros  $u$  y  $v$ .

A diferencia del primer paso, el segundo paso es dependiente de la aplicación 3D elegida. El método más eficiente para representar esta malla parece ser que es las tiras triangulares. De hecho, esta interpretación de un conjunto de puntos es la única que permite un menor uso de memoria, al contrario de la especificación de caras independientes.

El dibujo 1.3 se puede definir de dos maneras:

- Por un conjunto de triángulos; 4 triángulos definidos cada uno por 3 vértices, lo que implica que hay que mandarle a la aplicación 3D un total de 12 puntos
- Por tiras triangulares; la tira estaría definida por 6 vértices, lo cuales se enviarían a la aplicación 3D.

En ambos casos, el resultado es el mismo pero se puede observar que para el primer caso almacenamos puntos comunes de los triángulos para nada.

Primero, vamos a ver cómo se puede precalcular los valores de la función base, ya que calcularlos durante la creación del mosaico es muy costoso.



Hemos visto que los coeficientes de la representación polinómica de  $B_{i,n}$  son constantes entre dos nodos. Por lo tanto, excepto si cambiamos el vector de nodos, no necesitaremos calcular dichos coeficientes en cada mosaico. Esto es conveniente porque esos coeficientes requieren una evaluación recursiva, la cual es muy costosa.

En cuanto a las funciones base  $B_{i,n}$ , sabemos que, para unos valores dados  $(i, j)$ , sólo algunas de esas funciones serán distintas de cero; y más aún, este número es precisamente el orden de la superficie. Para que cada punto sea calculado, podemos entonces almacenar los valores de  $B_{i,m}(u)$  y  $B_{j,n}(v)$ . Finalmente, podemos preponderar las coordenadas  $(x, y, z)$  de los puntos de control. Como resultado de esto, sólo los cálculos de la suma en 1.4 influyen. Para calcular los vectores normales, necesitamos calcular las tangentes a la superficie en cada punto, en las direcciones  $u$  y  $v$ . El vector normal será el producto escalar de esos dos vectores tangentes. Esto se puede hacer gracias a la ecuación 1.4. También podemos precalcular las derivadas parciales de  $B_{i,n}$  y únicamente tendremos que realizar una suma para hacer el mosaico.

Finalmente, seremos capaces de usar el mosaico dinámico, esto quiere decir adaptar el valor del mosaico a la distancia de la superficie y a su volumen: si una superficie está muy lejos, sólo necesitaremos unos pocos vértices mientras que si la superficie está muy cerca, necesitaremos vértices extra para mostrar una superficie suave. Esto es un proceso vital cuando uno tiene que mostrar una gran cantidad de superficies, y así enviar únicamente la información más importante para la tarjeta gráfica.

Resumiendo, para el renderizado de una superficie tendremos que realizar cuatro pasos principales:

- Determinar los valores del mosaico (mosaico dinámico).
- Si los valores varían del anterior, precalcularemos los valores de la función base y sus derivadas otra vez.
- Hacer el mosaico de la superficie.
- Enviar los vértices a la tarjeta gráfica usando la aplicación 3D y la tira de triángulos.



# 2

## Pixar y los esquemas de subdivisión

---

En este capítulo nos ocupamos de los esquemas de subdivisión, y más concretamente de las superficies de subdivisión que están más relacionadas con el objetivo de este proyecto.

Para ello, se comentará cómo en los estudios de Pixar Animation (compañía de animación por ordenador especializada en 3D) se empezó utilizando superficies NURBS, y cómo debido a los problemas que surgieron de éstas, se buscó otro método que los solucionase (superficies de subdivisión). Antes de explicar el método que finalmente eligió Pixar, veremos los distintos tipos de superficies de subdivisión. Éstas se pueden agrupar atendiendo a unas características de los métodos como pueden ser: el tipo de regla de refinamiento, el tipo de la red de control o si son aproximantes o interpolantes.

Para finalizar se verán los motivos por los que Pixar eligió las superficies de subdivisión de Catmull-Clark. Y cómo crearon después una modificación de esta subdivisión, para poder generar superficies puntiagudas, y su posterior uso en otras aplicaciones relacionadas con la animación 3D como pueden ser: funciones de energía asociadas a la ropa, texturización o el sombreado.

## 2.1. Los esquemas de subdivisión y la animación de objetos en Pixar

La animación de objetos por ordenador consiguiendo un resultado creíble ha sido el reto que se ha planteado los estudios de Pixar Animation.

Anteriormente se habían usado superficies de NURBS para este fin, ya que la mayoría de los sistemas comerciales existentes integraban este método (Alias-Wavefront y SoftImage). Sin embargo las NURBS tienen limitaciones topológicas y sufren varios problemas como son su complejidad, su propensión a tener error numérico, y la dificultad de mantener la suavidad cuando se anima el objeto, teniendo que corregirse los errores de forma manual.

Ante estos problemas Pixar buscó un nuevo método que los solucionase, y se optó por los esquemas de subdivisión, en particular por el algoritmo de Catmull-Clark, desarrollado en 1978 por Edwin Catmull (vinculado a Pixar) y Jim Clark.

Otras empresas de animación también han utilizado esquemas de subdivisión, pero los han aplicado a modelos poligonales, mientras que Pixar lo utilizó para crear superficies suaves a trozos.

Los esquemas de subdivisión supusieron un gran avance en el proceso de producción, tanto en el renderizado del objeto como en la animación. Los diseñadores tenían más libertad para definir sus modelos al ser este sistema más estable y no tener que añadir características especiales como pasaba con las NURBS. Como consecuencia de la estabilidad del método de los esquemas de subdivisión se reducía, con respecto a la NURBS, el tiempo y el esfuerzo necesarios para retocar los modelos cuando se animaban. También se usaron los esquemas de subdivisión para la animación de la ropa de los personajes, aunque aparecieron nuevas dificultades. La forma de actuar en este caso suponía dos pasos, primero era necesario definir un función de energía sobre las mallas de subdivisión, y segundo crear un simulador físico para calcular las colisiones de manera eficiente. Con respecto a las colisiones no suponía un gran esfuerzo crear este simulador, ya que habían obtenido mucha información relevante para esta cuestión de su trabajo con las NURBS.

A partir del algoritmo de Catmull-Clark de subdivisión de superficies, Pixar creó un sistema de animación denominado Marionette y otro sistema de renderización denominado RenderMan. Estos sistemas le permitieron crear a Geri, el protagonista de *Geri's game* (y ganar un oscar con la película). Específicamente, estos esquemas fueron usados para crear la cabeza de Geri, sus manos y su ropa (ver figuras 2.1 y 2.2 )

Figura 2.1: Malla de control de la cabeza de Geri

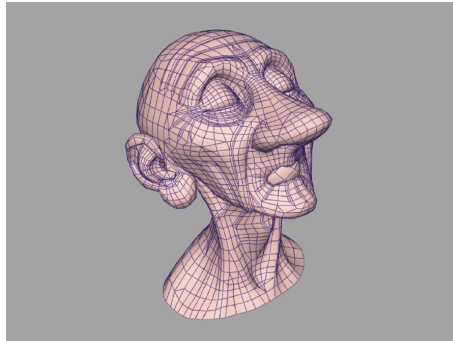


Figura 2.2: Imagen de la animación Geri's Game



## 2.2. Superficies de subdivisión

Las superficies de subdivisión son métodos de diseño gráfico por ordenador que permiten representar una superficie suave por medio de una malla

poligonal. Su principal ventaja es que permiten la representación de superficies con topologías arbitrarias, superando de esa forma las limitaciones topológicas de las B-splines. El proceso consiste en ir subdividiendo las caras poligonales de la malla para aproximarse a la superficie suavizada.

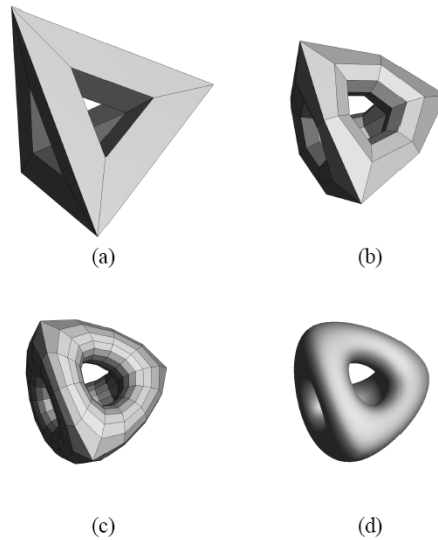
El origen de estas técnicas se encuentra en los trabajos de G. Chaikin, que describió las curvas como límite de una secuencia de subdivisiones. Inspirados en esta idea se publicaron en 1978 dos trabajos realizados independientemente que suponen el inicio de las superficies de subdivisión. Estos trabajos fueron realizados por Doo y Sabin y por Caltmull y Clark. Sin embargo, desde su aparición hasta 1995 se hicieron pocos progresos en el tema. En la década de los 90, el avance en la teoría de la aproximación, el análisis numérico y la computación gráfica han posibilitado un gran desarrollo de este tipo de superficies; los nuevos resultados teóricos y prácticos incluyen el análisis de los esquemas de subdivisión clásicos, y la propuesta de nuevos esquemas así como el estudio de la continuidad de las funciones generadas y el tratamiento de los vértices extraordinarios.

Una superficie de subdivisión se crea por una serie de refinamientos sucesivos de una superficie poliédrica inicial o de control  $S_0$  y produce nuevas superficies poliédricas cada vez con más caras. En el límite se obtiene una superficie diferenciable, pero en la práctica es suficiente con realizar el proceso unas pocas veces.

Estas superficies tienen las ventajas que señalábamos en la introducción del trabajo. En particular se tienen las siguientes:

- *Eficiencia:* Se utilizan sólo un pequeño número de puntos del nivel anterior para el cálculo de un nuevo punto; por ello es un método fácil de calcular y de implementar.
- *Topologías arbitrarias:* Admite superficies de distinto género topológico y con distintas valencias en los vértices de la red.
- *Control de las características de la superficie:* Se puede controlar la forma y el tamaño de características tales como pliegues, crestas, bordes puntiagudos.

Figura 2.3: Subdivisión recursiva de una malla topológicamente compleja. (a) malla de control; (b) después de una subdivisión; (c) después de dos subdivisiones; (d) la superficie límite



- *Geometría compleja*: Por ser un método basado en refinamientos repetidos, resulta muy adecuado para Multirresolución y Compresión.

## 2.3. Tipos de superficies de subdivisión

Los esquemas de subdivisión pueden clasificarse según:

- El tipo de regla de refinamiento (Inserción de vértices o recorte de esquinas).
- El tipo de red de control (triangular o cuadrilateral).
- Si es aproximante o interpolante.

Resultan así las siguientes clases:

<b>Inserción de vértices</b>		
	<i>Redes triangulares</i>	<i>Redes cuadriláteras</i>
<i>Aproximante</i>	<b>Loop</b>	<b>Catmull-Clark</b>
<i>Interpolante</i>	<b>Butterfly modificado</b>	<b>Kobbelt</b>

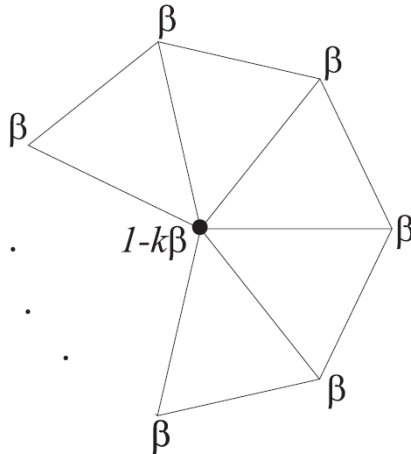
<b>Recorte de esquinas</b>
Doo-Sabin
Midedge

Vamos a comentar ahora estos criterios de clasificación. Hay que señalar que estos esquemas de subdivisión definidos en mallas de topología arbitraria se basan en esquemas de subdivisión regular; se trata pues de una clasificación de esquemas de subdivisión regulares. En estos esquemas hay que agregar reglas para la manipulación de los vértices extraordinarios.

- Tipo de malla:** Los esquemas de subdivisión actúan sobre mallas de control regulares, esto quiere decir que los vértices de las mallas corresponden a puntos equiespaciados en el plano. Pero las caras de la malla de control pueden generarse de diferentes maneras. Lo natural es que las caras sean polígonos regulares, pudiendo usarse tres tipos diferentes: cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares (estos últimos son los más inusuales).
- Inserción de vértices y recorte de esquinas:** Además del tipo de malla también hay que saber como se van a obtener las nuevas subdivisiones. Existen dos maneras diferentes: inserción de vértices y recorte de esquinas. Cuando se usa la *inserción de vértices*, cada lado de la cara se divide en dos y la cara se divide en cuatro polígonos del mismo tipo. Los vértices antiguos se mantendrán y los nuevos vértices se colocaran en los bordes, y para el caso de los cuadriláteros se añadirá un vértice más. Es lo que ocurre, por ejemplo, en el esquema Loop, definido sobre una malla triangular (figura 2.4). Los nuevos vértices son los negros y están situados en los antiguos ejes (deformados); los vértices antiguos se conservan.



Figura 2.4: Esquema de Loop con sus respectivos coeficientes



En el caso del *recorte de esquinas*, por cada cara antigua se crea una cara similar y se conectan las nuevas caras creadas. Resultan así dos nuevos vértices por cada eje antiguo y una nueva cara por cada eje y cada vértice. Los vértices antiguos desaparecen. Geométricamente equivale a cortar los vértices (dando lugar a una cara) y cortar los ejes (dando también lugar a una cara). Este tipo de subdivisión es apropiada, sobre todo, para mallas cuadriláteras.

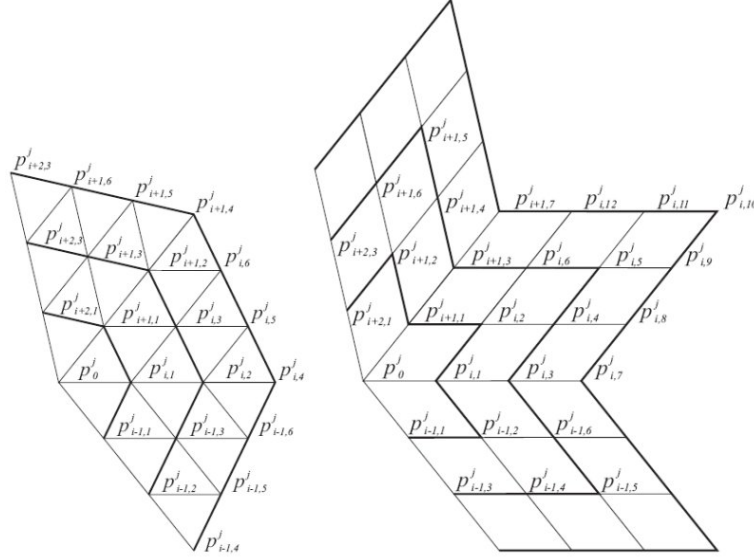
- Aproximación e interpolación:** Para los esquemas de subdivisión que usan la inserción de vértices se puede usar la aproximación o la interpolación. En general, para cada vértice existe una secuencia de puntos de control correspondiente a cada nivel de subdivisión. Si todos los puntos se mantienen entonces se dice que el esquema es de interpolación, si no se llamará de aproximación. La interpolación es muy interesante, ya que los puntos de control originales se conservan en todas las superficies refinadas y son también puntos del límite de la superficie, lo cual nos permite controlarlos de una manera más intuitiva. Además, muchos de los algoritmos se pueden simplificar bastante, y por lo tanto los cálculos son más sencillos. Pero la calidad de estas

superficies no es tan buena como las obtenidas por los esquemas de aproximación y tampoco converge tan rápido al límite de la superficie.

### 2.3.1. Notación y terminología

- **Vértices regulares y extraordinarios:** Hemos visto hasta ahora que los esquemas de subdivisión definidos por mallas triangulares crean nuevos vértices de valencia 6 en el interior. En los bordes, los nuevos vértices creados tendrán valencia 4. De manera parecida, en las mallas cuadrangulares tanto en esquemas de inserción de vértices como en recorte de esquinas sólo generan vértices de valencia 4 en el interior, y 3 en los bordes. Por consiguiente, después de varias subdivisiones, muchos de los vértices en una malla tendrán una de estas valencias (6 en el interior y 4 en los bordes para mallas triangulares; 4 en el interior y 3 en los bordes en mallas cuadrangulares). Los vértices con estas valencias se llaman *regulares* y para los vértices de valencia distinta a éstas se llaman *extraordinarios*.
- **Notación de los vértices cerca de un vértice fijo:** En la figura 2.5 se muestra la notación que se usa para los puntos de control en los esquemas de subdivisión triangulares y cuadrangulares cerca de un vértice fijo. Típicamente, se necesita para los vértices extraordinarios. También se usa para los vértices regulares cuando se quiere calcular las posiciones límite y los vectores tangentes.
- **Vértices pares e impares:** Para los esquemas de inserción de vértices (fundamental), los vértices de la malla más burda son también vértices de la malla refinada. Para cualquier nivel de subdivisión, todos los vértices nuevos que son creados en ese nivel se llaman *impares*. Los vértices heredados del nivel anterior se llaman *pares*.
- **Vértices de caras y lados:** Para los esquemas triangulares (Loop y Butterfly modificado), existe sólo un tipo de vértices impares. Para esquemas cuadrangulares, algunos vértices son añadidos cuando los lados

Figura 2.5: Numeración de los vértices de una malla cerca de un vértice extraordinario



de la malla del nivel más burdo son divididos, para las caras se insertan otros vértices. Estos dos tipos de vértices impares se llaman vértices *de lado* y *de cara* respectivamente.

- Bordes y pliegues:** Se necesita especificar reglas especiales para los bordes de una malla. Estas reglas se suelen elegir de manera que la curva en el borde de la superficie límite no dependa de ningún vértice de control interior, y sea suave o suave a trozos (continuidad  $C^1$  o  $C^2$ ). Las mismas reglas se pueden usar para introducir características puntiagudas en superficies  $C^1$ : algunos lados interiores puede ser añadidos como aristas, y las reglas para los bordes se aplican para todos los vértices que se añaden en tales lados.
- Máscara:** A veces se define una regla de subdivisión a partir de su *máscara*. La máscara es un dibujo que muestra los puntos de control usados para calcular un nuevo punto de control, el cual se denota por un punto negro.

Los esquemas de refinamiento de las superficies de subdivisión pueden ser clasificados en dos grandes categorías: interpolatorios y aproximatorios. Los esquemas interpolatorios necesitan ajustarse a la posición original de los vértices en la malla original. Los esquemas aproximatorios no; éstos se pueden ajustar a estas posiciones como se necesite. En general, los esquemas aproximatorios tienen una mejor suavidad, pero las aplicaciones de edición que permite a los usuarios ajustar de manera exacta las necesidades de la superficie, requieren un paso de optimización. Esto ocurre de manera similar a las superficies y curvas de splines, mientras que para los B-splines no.

Existe también otra división en los esquemas de superficies de subdivisión, según el tipo de polígono que usan, cuadriláteros o triángulos.

### 2.3.2. Esquemas de subdivisión interpolatorios

Aproximación significa que las superficies límite se aproximan a la malla inicial y que después de la subdivisión, los nuevos puntos de control generados no están en la superficie límite. Ejemplos de tipos de esquemas de subdivisión aproximatorios son:

- **Catmull y Clark (1978) [21]:** Utilizaron B-splines bicúbicos uniformes generalizados para generar sus esquemas de subdivisión. Para mallas arbitrarias iniciales, este esquema genera superficies límite que son  $C^2$  continuas en cualquier punto menos en los vértices extraordinarios donde son  $C^1$  continuas.
- **Doo y Sabin (1978) [30]:** El segundo esquema de subdivisión fue creado por Doo y Sabin quienes extendieron el método de Chaikin para recorte de esquinas en curvas a las superficies. Usaron la expresión analítica de superficies B-splines bi-cuadráticas uniformes para generar su procedimiento de subdivisión para producir superficies límite  $C^1$  con topología arbitraria para mallas arbitrarias iniciales.
- **Loop (1987) [52]:** Propuso un esquema de subdivisión basado en un box-spline cuártica de seis vectores directores para tener una regla para

generar superficies límite de clase  $C^2$  en cualquier punto, excepto en los vértices extraordinarios donde son de clase  $C^1$ .

- **Esquema de subdivisión de Mid-Edge:** Este esquema fue propuesto de manera independiente por Peters y Reif (1997) [57] y Habib y Warren (1999) [41]. El primero usó el punto medio de cada lado para construir la nueva malla. El segundo usó un box-spline cuatro-direccional para construir el esquema. Este esquema genera superficies límite  $C^1$  sobre las mallas iniciales con topología arbitraria.
- **Esquema de subdivisión  $\sqrt{3}$ :** Este esquema fue desarrollado por Kobbelt (2000) [48] y ofrece algunos aspectos interesantes: puede manejar mallas triangulares arbitrarias, es de clase  $C^2$  en cualquier punto excepto en los vértices extraordinarios donde es  $C^1$  y ofrece un refinamiento natural adaptativo cuando se necesita. Sus peculiaridades son: es un esquema dual para mallas triangulares y tiene una tasa de refinamiento más suave que los primitivos.

### 2.3.3. Esquemas de subdivisión aproximatorios

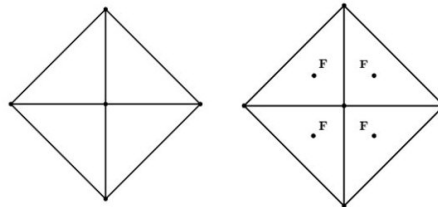
En estos esquemas, después de la subdivisión, los puntos de control de la malla original y los nuevos puntos de control generados son interpolados sobre el límite de la superficie. Dyn, Levin y Gregory (1990) [36] en un trabajo pionero, extendieron el esquema de subdivisión interpolatorio de cuatro puntos para curvas a un esquema de subdivisión para superficies denominado esquema Butterfly. Zorin, Schröder y Swelden (1996) [62] observaron que el esquema Butterfly no podía generar superficies suaves para mallas triangulares irregulares y por lo tanto modificaron este esquema. Kobbelt (1996) [47] generalizó el esquema de subdivisión interpolatorio de cuatro puntos para curvas a un esquema de subdivisión del producto tensorial para superficies.

## 2.4. El algoritmo de subdivisión de superficies de Catmull-Clark

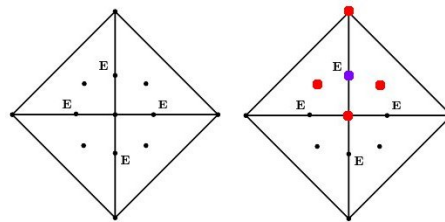
El algoritmo de subdivisión de superficies de Catmull-Clark se usa en el diseño gráfico por ordenador para crear superficies suaves y adecuadamente diferenciables. Es una generalización de las superficies B-spline uniformes bi-cúbicas con topología arbitraria.

Una superficie de Catmull-Clark se define recursivamente partiendo de una malla poliédrica. Los vértices de esa malla los denominaremos *puntos originales*. A partir de esos puntos originales se genera un nuevo *punto de cara* para cada cara y un nuevo *punto de borde* para cada borde de la cara y con ellos se construyen nuevos vértices para la etapa siguiente de subdivisión. Indicamos a continuación el esquema de subdivisión.

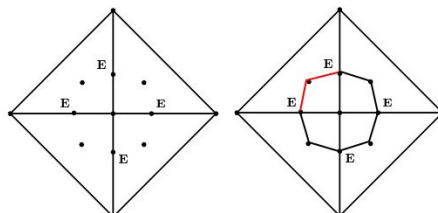
- En cada cara se añade un *punto de cara*
  - El punto de cara (indicado con F en la figura) es el centroide de todos los vértices de esa cara



- Para cada borde se construye un *punto de borde*
  - El punto de borde se construye como un promedio entre los vértices correspondientes a dicho borde y los puntos de cara de las caras limítrofes (aparecen indicados con E en la figura, en rojo los puntos utilizados para promediar el punto E en azul).

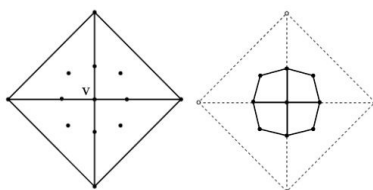


- Cada punto de cara se conecta mediante una recta con cada uno de los puntos de borde y así se construyen bordes de la nueva etapa.



- Los nuevos vértices se calculan como un promedio entre  $Q$ ,  $2R$  y  $\frac{n-3}{n}S$  donde:
  - para cada vértice original  $S$ , se consideran todas las  $n$  caras que pasan por  $S$  y se construye el promedio  $Q$  de los puntos de cara correspondientes a cada una de dichas caras;
  - con los puntos medios de los bordes que pasan por  $S$  se construye el promedio  $R$ .

En la figura aparece el nuevo vértice  $V$  (que coincide, en este caso con el antiguo) y el resultado de la subdivisión



Cuando ya se tienen las superficies de subdivisión modeladas y animadas, surgen unas nuevas metas interesantes que conseguir antes de que sea renderizada. La libertad topológica que hace a las superficies de subdivisión tan interesantes para el modelado y la animación significa que generalmente no admiten parametrizaciones aconsejables para el mapeado de la textura. Las texturas sólidas y la proyección de texturas pueden solventar algunas necesidades de producción, es posible llegar aún más lejos usando sombras

programables en combinación con campos escalares definidos sobre la superficie.

Como hemos mencionado anteriormente, los pliegues infinitamente puntiagudos son muy interesantes para representar superficies suaves a trozos. Sin embargo, las superficies del mundo real nunca son infinitamente puntiagudas. Por ejemplo la esquina de un tablero, es suave cuando la miramos lo suficientemente cerca. Para los propósitos de la animación a veces suele ser deseable conseguir formas estrictamente curvadas. Con este fin, Pixar construyó una generalización del esquema Catmull-Clark para admitir pliegues semi-puntiagudos, es decir pliegues con una agudeza controlable.

Una aproximación para obtener pliegues semi-puntiagudos era desarrollar unas reglas de subdivisión cuyos pesos estuviesen parametrizados por la agudeza del pliegue. Esta aproximación es difícil porque puede ser un poco complicado descubrir las reglas que nos permiten obtener las propiedades de suavidad deseables de la superficie límite. Otra dificultad que se señala de este método, es que tal aproximación es muy probable que llevase a una colección de reglas dependientes del número y configuración de los pliegues en un vértice. Por ejemplo, un vértice con dos pliegues semi-pronunciados que pasen a través de él usará un conjunto de reglas diferentes de un vértice que sólo tenga uno que pase a través de él.

Esta aproximación se usó para un proceso sencillo llamado subdivisión híbrida. La idea general era usar un conjunto de reglas para un número finito pero arbitrario de niveles de subdivisión, seguido de otro conjunto de reglas que son aplicadas en el límite. La suavidad por tanto dependía sólo del segundo conjunto de reglas. La subdivisión híbrida podía ser usada para obtener pliegues semi-pronunciados usando las reglas de agudeza infinitesimal durante los primeros niveles de subdivisión, seguido del uso de las reglas de suavidad para los posteriores pasos de subdivisión. Intuitivamente esto sirve para superficies que son pronunciadas en los niveles más groseros, pero suaves en niveles más finos.

Para crear un escenario en la situación general donde la agudeza pueda variar a lo largo de un pliegue, se consideraron dos casos especiales:



- Uno en el que se subdividía un borde puntiagudo con la regla de agudeza en el borde, un número concreto de veces. De esta forma, aumentaba la agudeza con cada subdivisión.
- Y otro en el que se interpola linealmente agudezas adyacentes.

En lo que se refiere a la simulación física comentaremos algunos aspectos concretos relacionados con las superficies de subdivisión; se trata de las cuestiones que más interesan para nuestro estudio.

Para la simulación física, definieron generalmente las propiedades básicas de un material con una función de energía para representar la atracción o resistencia del material a varias posibles deformaciones. Típicamente, la energía era especificada como una integral de superficie o como una suma discreta de términos los cuales eran funciones de las posiciones de los trozos de la superficie o de vértices de control. El primer tipo de especificación se asocia al crecimiento de una aproximación de un elemento finito, mientras el segundo está más asociado con métodos de diferencias finitas.

Las aproximaciones de elementos finitos son posibles con las superficies de subdivisión, y de hecho algunas integrales relevantes de superficies de subdivisión pueden ser calculadas analíticamente. En general, sin embargo, las integrales de superficies de elementos finitos pueden ser calculadas a través de la cuadratura numérica, y esto lleva a una colección de casos especiales en los puntos extraordinarios. Pixar eligió evitar estos casos especiales adoptando una aproximación de diferencias finitas, aproximando la ropa con un modelo en el cual todas las masas están concentradas en los puntos de control.

Fuera de los puntos extraordinarios, las mallas de Catmull-Clark que aparecen en la subdivisión se convierten en unas cuadrículas regulares cuadrangulares. Esto los hace inmejorablemente adecuados para representar tejidos entrelazados, los cuales son también generalmente descritos localmente por una estructura enrejillada. En la construcción de funciones de energía para la simulación de la ropa, usan los bordes de la malla de subdivisión que corresponde con las direcciones de la trama de la simulación del tejido entrelazado.

A partir de lo que hemos comentado antes, vieron que con sólo unos saltos de longitud fija a lo largo de los bordes de la malla, la ropa simulada podía

experimentar desviaciones arbitrarias sin problemas. Una de las soluciones que vieron para prevenir estas desviaciones fue introducir saltos de longitud fijada a lo largo de las diagonales. El problema con esta aproximación es que los saltos grandes a lo largo de la diagonal hacen que la malla sea muy rígida, y los saltos diagonales suaves permiten a la malla desviarse excesivamente. Se aborda entonces este problema introduciendo un término de energía el cual es proporcional al producto de las energías de dos saltos diagonales de longitud fijada. Con estos saltos de longitud fijada a lo largo de los bordes y las contribuciones diagonales de la energía, el material simulado, a diferencia de la ropa real, puede doblarse sin problemas.

En una simulación física, la manera más fácil de aproximar las colisiones es hacer interactuar cada elemento geométrico con el resto de elementos geométricos. Pero se puede observar que si el número de objetos fuese  $N$ , entonces el número de simulaciones que habría que realizar serían  $N^2$ , por lo que si  $N$  fuese muy grande se realizarían demasiadas simulaciones. Para paliar esto pensaron en utilizar un algoritmo que lo simplificase de alguna manera, barajándose dos métodos principalmente. Uno de ellos es el de distribuir los elementos en una estructura de datos tridimensionales basada en volúmenes. El otro, que es por el que optaron, fue el distribuir los elementos en una estructura de datos bidimensional basada en superficies, ya que éste tenía una serie ventajas sobre el otro:

- La jerarquía puede ser fijada, y no necesita ser regenerada cada vez que la geometría se mueve.
- El almacenamiento puede ser completamente repartido estáticamente.
- No existe nunca una necesidad de rebalancear el árbol.
- Los bordes muy cortos en la superficie no necesitan crear ramificaciones en el árbol.

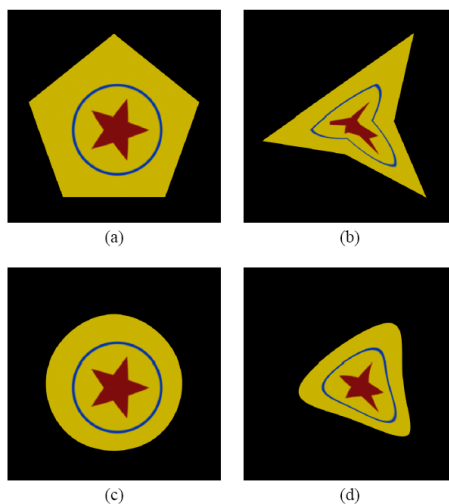
Ahora pasaremos a ver como se pueden añadir algunos campos más asociados a las superficies de subdivisión para poder implementar más partes de la producción.

Las superficies NURBS son texturizadas usando cuatro métodos principales: mapeando texturas paramétricas, texturas procedimentales, pintura 3D, y texturas sólidas. Es sencillo aplicar pintura 3D y texturización sólida virtualmente en cualquier tipo de primitiva, así que estas técnicas pueden ser fácilmente aplicadas a superficies de subdivisión en texturas. Está menos claro, sin embargo, como aplicar el mapeado de texturas paramétricas, y más generalmente, el texturizado procedimental de las superficies de subdivisión ya que no están definidas paramétricamente, a diferencia de las NURBS.

En cuanto al mapeado de texturas, las superficies de subdivisión son más similares a los modelos poligonales. El actual método estándar del mapeado de texturas de un modelo poligonal es asignar unas coordenadas de texturas para cada uno de los vértices. Si las caras del polígono consisten sólo en los triángulos y cuadriláteros, las coordenadas de la textura pueden ser interpoladas a lo largo de la cara del polígono durante la búsqueda de conversión usando interpolación lineal o bilineal. Las caras con más de cuatro lados planteaban un gran reto. Una aproximación era preprocesar el modelo dividiendo cada cara en una colección de triángulos y/o cuadriláteros, usando algún esquema promedio para crear coordenadas de textura en los nuevos vértices introducidos. Una dificultad con esta aproximación es que las coordenadas de la textura no son diferenciables a lo largo de los bordes de la malla original o preprocesada. Como muestran las figuras 2.6 (a) y (b), estas discontinuidades pueden aparecer como artefactos visuales en la textura especialmente cuando el modelo es animado.

La situación para las superficies de subdivisión es mejor que para los modelos poligonales. Las coordenadas de textura variables suavemente se obtienen si las coordenadas de la textura asignadas a los vértices de control son subdivididas usando las mismas reglas de subdivisión que usamos para las coordenadas geométricas. En otras palabras, las posiciones de los puntos de control y de subdivisión se pueden pensar como pertenecientes a un plano de 5 dimensiones de coordenadas. Las dos nuevas coordenadas de este plano corresponden a la textura y serían una función escalar variante sobre la superficie. Estos nuevos campos también se pueden utilizar con otros fines a parte de la texturización, como puede ser el sombreado. Para la asignación

Figura 2.6: Texturas



de estos valores escalares en los vértices de la malla de control a veces se emplea el especificar el valor del campo directamente en un número pequeño de puntos de control, y luego determinar el resto por interpolación usando suavizado de Laplace. En otros casos, se especifican los valores escalares del campo pintando un mapa de intensidad en una o más imágenes renderizadas de la superficie.

Después de haber visto todo lo anterior llegan a la implementación de superficies de subdivisión y más concretamente de superficies semi-puntiagudas de Catmull-Clark como primitiva geométrica para su sistema de producción. Dichas superficies necesitan que todas las primitivas sean convertibles en cuadrículas micropoligonales. Por lo tanto cada tipo de primitiva tiene que ser capaz de dividirse en una colección de subparches limitándose ella misma, y troceándose en una cuadrícula de micropolígonos. Cada cara de una malla de control de Catmull-Clark puede ser asociada con un parche sobre la superficie, así que, el primer paso renderizando un superficie Catmull-Clark es dividirla en una colección de parches individuales. Siendo la malla de control para cada parche una cara de la malla de control junto con las caras adyacentes y sus vértices. Para enlazar cada parche, usamos el conocimiento de que

una superficie de Catmull-Clark está relacionada con la envolvente convexa de su malla de control. Ahí tomamos la caja ligada a los puntos de la malla para que sea la caja ligada en el parche. Una vez ligada, la primitiva es probada para determinar si es troceable; no será troceable si troceando se produce una cuadrícula con demasiados micropolígonos o una gran variedad de tamaños de los micropolígonos. Si el parche no es troceable, entonces dividiremos cada parche realizando unos pasos de subdivisión para crear cuatro nuevos subparches primitivos. Si el parche es troceable, se subdivide repetidamente hasta que genere una cuadrícula con el número requerido de micropolígonos.

Una importante propiedad de las superficies de Catmull-Clark es que tiene a parches de B-splines bicúbicos para todas las caras, excepto aquellas en las proximidades de un punto extraordinario o de una zona puntiaguda. Ahí, en cada nivel de división, a veces es posible identificar uno o más subparches como parches B-splines. Conforme se van dividiendo, muchas de las superficies pueden ser recorridas por parches de B-splines. Aprovechando estas características se obtienen tres ventajas. Primero, el tamaño fijado  $4 \times 4$  de un parche de B-splines permite más eficiencia en el uso de memoria porque no se necesita almacenar información sobre la conectividad de los vértices. Segundo, la característica de que un parche de B-splines, a diferencia del parche de Catmull-Clark, puede ser dividido independientemente en cualquiera de las direcciones paramétricas, hace posible reducir la cantidad total de divisiones. Tercero, existen algoritmos eficientes y fáciles de entender para trocear parches de B-splines.

Se entiende que una ventaja de los pliegues semi-puntiagudos sobre pliegues puntiagudos infinitesimalmente, es que el primero da normales variando suavemente a lo largo de un pliegue, mientras que la última no lo hace. Esto implica que si la superficie es desplazada de la dirección de la normal en una zona plegada, se fragmentará en pliegues puntiagudos infinitesimales pero no en uno semi-puntiagudo.

En resumen, Pixar valora extremadamente positivo el hecho de usar superficies de subdivisión, ya que permite a los creadores de modelos fijar puntos de control de la manera más natural: capturando rasgos geométricos de los modelos (sin que esto influya en el mantenimiento de una estructura cua-

driculada regular como pasa en los modelos de NURBS). Esta libertad ha tenido dos consecuencias principales: la primera, es la reducción considerable del tiempo necesitado para planificar y construir un modelo inicial; y la segunda, y tal vez más importante, permite al modelo inicial ser definido localmente. Una de las cosas que hay que tener en cuenta es el cuidado para esconder las uniones entre los parches de NURBS, u obligar a los puntos de control cerca de las uniones a crear por lo menos la ilusión de suavidad.

Con el desarrollo de pliegues semi-puntiagudos y campos escalares para el sombreado, han conseguido eliminar dos de los obstáculos para el uso de las superficies de subdivisión en la producción. Con el desarrollo de una estructura eficiente de datos para las colisiones con subdivisión, se han definido unas superficies de subdivisión bastante apropiadas para la simulación física. También se ha dado otro uso más a las superficies de subdivisión, como es el de la simulación de la ropa a partir de una función de energía. Gracias a todos estos factores y a las propiedades de las superficies de subdivisión de Catmull-Clark, han conseguido un renderizado de alta calidad.

# 3

## Esquemas interpolatorios multiresolución no lineales

---

En este capítulo se presenta un esquema interpolatorio multiresolución no lineal. El objetivo es la reconstrucción a trozos de una función utilizando para ello cuatro puntos en soportes pequeños y un esquema interpolatorio recursivo. Se persigue la convergencia y estabilidad del esquema, que genere funciones límite con buen nivel de suavidad y que evite el fenómeno Gibbs; fenómeno que aparece cerca de las discontinuidades de salto y que no puede ser evitado usando esquemas interpolatorios lineales.

El núcleo central del capítulo lo constituye el reciente trabajo de Amat S., Dadourian K. y Liandrat J. [12] en el que se presenta un nuevo esquema de subdivisión ternaria no lineal, convergente con regularidad mayor que uno y estable (pequeñas variaciones de los datos iniciales generan curvas que están próximas), que además evita el fenómeno Gibbs, siendo la primera vez que se consigue un esquema con esas propiedades tan deseables.

En el capítulo se describe el método de interpolación básico de Lagrange sobre el que apoyan otros métodos interpolatorios multiresolución binarios y ternarios.

### 3.1. Introducción

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior, los esquemas de subdivisión son herramientas útiles para generar curvas y superficies suaves. Para esquemas convergentes, partiendo de un conjunto discreto de puntos con la

información inicial y usando reglas básicas de baja complejidad computacional es posible obtener curvas o superficies como límites de sucesiones de puntos obtenidos al aplicar recursivamente el esquema de subdivisión.

Un ejemplo simple de esquema de subdivisión es la familia de los esquemas de subdivisión interpolatorios basados en el método de interpolación de Lagrange que ha sido estudiado en [27]. Otro ejemplo es la familia de los esquemas de subdivisión por splines estudiados por Catmull y Clark en [21].

El esquema interpolatorio de cuatro puntos ([31], [34]) es un esquema lineal convergente de la primera familia que involucra un conjunto de cuatro puntos en cada subdivisión y para la cual la función límite es de clase  $C^1$ . El algoritmo de Chaikin [23] es un ejemplo de esquema de subdivisión de splines con una menor complejidad que el esquema anterior y con mayor suavidad en la función límite, ya que es de clase  $C^{2-}$ .

Recordemos que si  $p$  es un número natural con  $C^p(\mathbb{R})$  se denota el espacio de las funciones que pueden derivarse  $p$  veces y que su  $p$ -ésima derivada es continua. Cuanto mayor es  $p$  mejores son las propiedades de regularidad de  $f$ . En la definición que sigue se precisa el significado que tiene  $C^{2-}$ , y en general de  $C^\alpha$  para otros valores de  $\alpha$ .

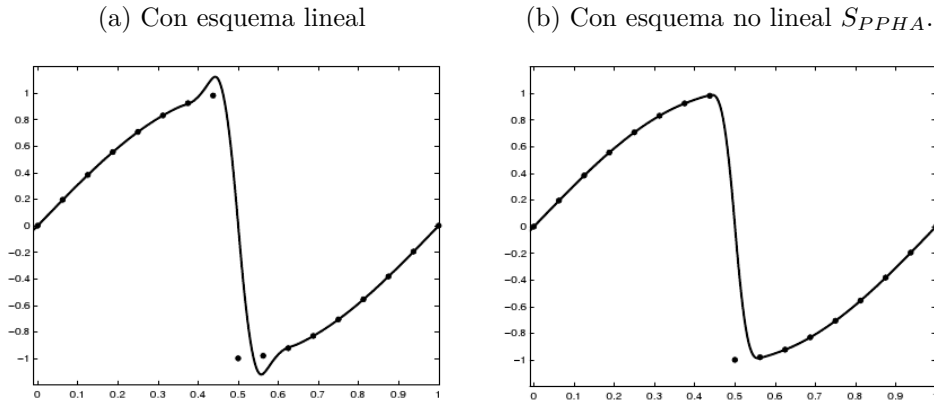
**Definición 3.1.1** Sea  $f$  una función definida en  $\mathbb{R}$ .

1. Para  $0 < \alpha < 1$  diremos que  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$  si  $f$  es acotada y existe una constante  $C$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
2. Para  $\alpha > 1$  diremos que  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$  si, representando con  $[\alpha]$  la parte entera de  $\alpha$ , ocurre que  $f$  es  $[\alpha]$  veces derivable siendo dicha derivada  $f^{([\alpha])}$  una función acotada perteneciente a  $C^{\alpha-[\alpha]}$
3.  $C^{\alpha-} = \{f : f \in C^\beta, \forall \beta < \alpha\}$ .

Que el procedimiento iterativo converja, la regularidad de la función límite y la complejidad del esquema de subdivisión son cuestiones importantes. Pero en las aplicaciones, como dibujo geométrico asistido por ordenador o en el procesamiento de imágenes, también es importante el orden de aproximación que caracteriza la precisión del esquema.



Figura 3.1: Fenómeno Gibbs. Con los mismos datos de partida ( $\bullet$ ), la función límite presenta el fenómeno Gibbs al usar esquemas lineales, gráfica (a), y no lo presenta usando el esquema no lineal  $S_{PPHA}$ , gráfica (b).



En relación con el último aspecto mencionado, en los esquemas de subdivisión lineales puede aparecer el llamado fenómeno Gibbs. El fenómeno consiste en que cuando una función tiene una discontinuidad de salto en un punto, es decir, hay fuertes variaciones en los datos iniciales, en la función límite obtenida con esquemas de subdivisión lineal se generan oscilaciones cerca del punto de discontinuidad que no se hacen pequeñas aunque se aumente el número de iteraciones en el proceso de reconstrucción (véase la figura 3.1). Observado por el físico A. Michelson, el fenómeno fue explicado en 1899 por J.W. Gibbs, de quien toma su nombre.

En la última década se han hecho varios intentos para mejorar las propiedades de los esquemas de subdivisión lineales, dando origen a los esquemas de subdivisión no lineales. Con estos nuevos esquemas de subdivisión se trata de evitar el fenómeno Gibbs, pero con ellos aparecen nuevas dificultades: las reglas de subdivisión pasan a depender de los datos, algo que no ocurre en los esquemas lineales, y la estabilidad, que para los esquemas lineales está garantizada si son convergentes, en el caso de los no lineales no lo está y es necesario añadir propiedades de estabilidad.

Hay varias familias de esquemas no lineales, como son los ENO, WENO o

PPH, contruidos como perturbaciones del esquema lineal interpolatorio de Lagrange basado en cuatro puntos y polinomios de grado 3. Son esquemas interpolatorios que tratan de evitar el fenómeno Gibbs. Se conocen pocos resultados sobre convergencia y estabilidad de los mismos y desgraciadamente están caracterizados por una baja regularidad de la función límite, que sólo es de tipo  $C^{1-}$ . Además el esquema ENO es inestable.

### 3.2. Esquemas multirresolución

Un esquema de multirresolución conecta de forma biyectiva una sucesión discreta  $f^L$ , donde  $L$  representa un nivel de resolución, con una sucesión de la forma

$$\{f^0, d^1, \dots, d^{L-1}\},$$

donde  $f^0$  representa una discretización inicial en el nivel de resolución más grosero y cada una de las sucesiones  $d^k$  representan los detalles necesarios para recuperar  $f^k$  a partir de  $f^{k-1}$ . Así pues, una representación multiresolución de  $f^L$  es cualquier sucesión de tipo  $\{f^0, d^0, d^1, \dots, d^{L-1}\}$  donde  $f^k$  es una aproximación de  $f^L$  para resolución  $k < L$  y  $d^k$  hace referencia a detalles requeridos para recuperar  $f^{k+1}$  a partir de  $f^k$ . El par  $\{f^k, d^k\}$  contiene la misma información que  $f^{k+1}$  y por tanto lo mismo es cierto para  $\{f^0, d^0, d^1, \dots, d^{L-1}\}$  y  $f^L$ .

En el caso de algoritmos lineales eso corresponde a un cambio de base.

El objetivo es tener la misma información pero escrita de otra forma que permita distinguir entre las partes más y menos importantes de la señal. Más concretamente, por construcción, los detalles serán pequeños en regiones donde las  $f^k$  se aproximen bien a partir del nivel inferior  $f^{k-1}$ . Esta propiedad es crucial en las aplicaciones.

En los últimos años, varias propuestas para mejorar las multirresoluciones lineales clásicas de tipo wavelet han dado lugar a multirresoluciones no lineales. El carácter no lineal es usado para intentar obtener mejores aproximaciones que permitan tener el mayor número de detalles pequeños.

Amat y otros en [13], presentaron una nueva multirresolución no lineal en

el contexto de compresión de imágenes. Usando un esquema tipo producto tensorial, esta multirresolución esta basada en una reconstrucción no lineal llamada PPH (Piecewise Polynomial Harmonic). Se analizó el esquema en términos de convergencia y estabilidad, siguiendo las ideas presentadas en [22] y los experimentos numéricos para la compresión de imágenes demostraron que puede ser considerado como una buena alternativa a los algoritmos lineales.

La estabilidad de los esquemas multirresolución es una propiedad imprescindible, ya que, en las aplicaciones con frecuencia se modifican los datos antes de recuperar la sucesión original. Un algoritmo no estable no permitiría tener un control del error que se comete. Y en caso no lineal la estabilidad no es consecuencia ni de la convergencia ni de la estabilidad del esquema de subdivisión asociado.

En [15] se establece la estabilidad de la multirresolución PPH. Otros estudios similares pueden consultarse en [29], [56] y [26].

Este tipo de reconstrucciones no lineales tienen diversas aplicaciones entre las que se encuentran: reconstrucciones para métodos capturadores de choques en la aproximación de leyes de conservación [3], [4], [28], [54], procesamiento de señales [1], [5], [18], [16], compresión de imágenes y videos [13], [6], [7], [17], [24] eliminación de ruido en imágenes [8], [55], modelos geométricos [13], [25], [35], [37], [38].

### 3.3. Multirresolución interpolatoria

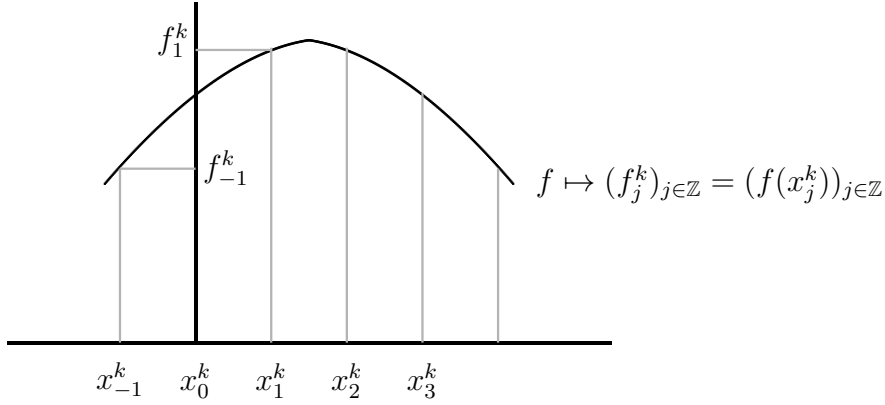
Consideraremos un conjunto encajado de mallados binarios en  $\mathbb{R}$ :

$$X^k = \{x_j^k\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad x_j^k = \frac{j}{2^k}$$

determinado por los números diádicos de orden  $k$ , que fija un factor de escala.

$$\begin{array}{cccccccc} | & x_{-3}^k & | & x_{-2}^k & | & x_{-1}^k & | & x_0^k & | & x_1^k & | & x_2^k & | & X^k \\ \hline & \frac{-3}{2^k} & & \frac{-2}{2^k} & & \frac{-1}{2^k} & & 0 & & \frac{1}{2^k} & & \frac{2}{2^k} & & \frac{3}{2^k} & & \frac{4}{2^k} \end{array}$$

Figura 3.2: Discretización puntual de una función para una malla



Dado un mallado  $X^k$  y una función real continua y acotada  $f$  definida en  $\mathbb{R}$ , una *discretización puntual* correspondiente a  $X^k$  es una aplicación

$$\mathcal{D}_k : C_B(\mathbb{R}) \longrightarrow V^k$$

definida por la fórmula (véase la figura 3.2)

$$\mathcal{D}_k(f) := f^k = (f_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} = (f(x_j^k))_{j \in \mathbb{Z}}$$

donde  $C_B(\mathbb{R})$  es el conjunto de funciones continuas y acotadas sobre  $\mathbb{R}$  y  $V^k$  el espacio de sucesiones reales para la resolución dada por  $X^k$ .

Un *operador reconstrucción* asociado a esta discretización es cualquier inversa por la derecha  $\mathcal{R}_k : V^k \longrightarrow C_B(\mathbb{R})$  de  $\mathcal{D}_k$ , es decir tal que  $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k = \text{Identidad}$ , lo que significa que para toda  $f^k \in V^k$ ,  $\mathcal{R}_k f^k$  es una función continua y acotada que verifica

$$(3.1) \quad (\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k),$$

es decir, que discretizando la función reconstruida, en los puntos de la malla, se recuperan los valores utilizados para construirla, pero no necesariamente ocurre lo mismo en los demás puntos.

Las sucesiones de operadores  $\{\mathcal{D}_k\}$  y  $\{\mathcal{R}_k\}$  definen un *esquema de multiresolución*.

El *operador de predicción*, definido por  $\mathcal{D}_{k+1}\mathcal{R}_k : V^k \rightarrow V^{k+1}$ , define un esquema de subdivisión. La relación (3.1) implica que el esquema de subdivisión es interpolatorio. Si  $\mathcal{R}_k$  es una reconstrucción no lineal, el esquema de subdivisión correspondiente es también no lineal, (ver [19] para más detalles).

Los esquemas de subdivisión binaria utilizados en [34, 32, 27] han sido ampliados en los últimos años con la utilización de los esquemas de división ternarios propuestos en [45, 46, 60, 61, 20]. En los sistemas ternarios se considera un conjunto doblemente infinito mallas regulares anidadas:

$$X^j = \{x_n^j\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad x_n^j = \frac{n}{3^j},$$

donde  $j$  corresponde al parámetro de escala.

Los operadores de discretización puntual y de reconstrucción se definen de forma análoga al caso binario. El operador de predicción definido por  $\mathcal{D}_{j+1}\mathcal{R}_j$  actúa desde el nivel más basto de discretización  $V^j$  correspondiente a  $j$  en el nivel más fino  $V^{j+1}$  correspondiente a  $j+1$ .

Debido a que el operador de discretización  $\mathcal{D}_{j+1}$  está referido a la malla  $X^{j+1}$  que contiene a la malla  $X^j$ , un operador de predicción  $\mathcal{D}_{j+1}\mathcal{R}_j$  se identifica con un esquema de subdivisión interpolatoria [19, 27]. Además puesto que para muchas funciones  $f$  se cumple que  $\mathcal{D}_{j+1}\mathcal{R}_j f^j \neq f^{j+1}$  es necesario añadir detalles, llamados  $d^j$ , a  $\mathcal{D}_{j+1}\mathcal{R}_j$  para recuperar  $f^{j+1}$ . Las transformadas multiresolución (véase [19]) realizan la conexión entre  $f^L$  y la sucesión  $\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}$ .

El interés por estos modelos ha ido en aumento al demostrarse (Hassan et al. [45]) que se pueden conseguir mayores niveles de suavidad y un soporte más pequeño sustituyendo los esquemas binarios por los ternarios en el, así llamado, esquema de interpolación estacionario de 4 puntos. En [20] se ha introducido un esquema de subdivisión interpolatoria ternaria no estacionaria de 4 puntos que proporciona al usuario un parámetro de tensión que convenientemente utilizado puede generar curvas límite de clase  $\mathcal{C}^2$  con variaciones notables de perfil.

Todas estas aproximaciones están relacionadas con esquemas de subdivisión linear y, en particular, con el fenómeno Gibbs que aparece cuando se presentan discontinuidades en los datos.

Las representaciones multiresolución de los datos son herramientas útiles para aplicaciones en el procesamiento de señales de audio y vídeo o en dibujos animados.

De nuevo, debido al fenómeno Gibbs, la eficiencia de las descomposiciones multiresolución lineales, por ejemplo para compresión de señales, está generalmente limitado por la presencia de discontinuidades.

Además, en aplicaciones al procesamiento de señales, la representación multi-escala  $\{f^0, d^0, d^1, \dots, d^{L-1}\}$  se procesa generalmente obteniendo una sucesión  $\{\hat{f}^0, \hat{d}^0, \hat{d}^1, \dots, \hat{d}^{L-1}\}$  cercana, pero diferente, a la sucesión original.

Recientemente varios intentos para mejorar los esquemas clásicos de subdivisión lineal y los algoritmos multiresolución asociados han llevado a varios esquemas multiresolución no lineales, pero en ese marco sólo hay disponibles unos pocos resultados de convergencia y estabilidad, [2, 10, 15, 22, 26, 29, 49, 53, 56].

### 3.3.1. Reconstrucciones lineales: interpolación de Lagrange

Dados  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$  del plano, la interpolación de Lagrange consiste en determinar un polinomio  $L$  de grado  $n$  a lo más, que pasa por dichos puntos. Se trata de un problema de naturaleza algebraica lineal: determinar los coeficientes  $a_0, a_1, a_2 \dots, a_n$  que hacen que el polinomio  $L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  cumpla las  $n + 1$  ecuaciones siguientes:

$$L(x_i) = y_i \quad \text{para } i = 0, 1, 2 \dots n.$$

El sistema lineal de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas siempre tiene solución y es única. De hecho puede obtenerse una fórmula explícita para dicho polinomio:

$$(3.2) \quad L(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x)$$

donde cada  $l_j$  es el polinomio de grado  $n$  definido por

$$l_j(x) = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \frac{x - x_1}{x_j - x_1} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}.$$

Con esa definición es claro que  $L$  es un polinomio de grado  $n$ , al serlo los  $l_j$ , y también que  $L(x_i) = y_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . La unicidad de  $L$  es inmediata porque de existir dos polinomios de grado  $n$  que fueran soluciones del problema, digamos  $L_1, L_2$ , entonces  $L_1 - L_2$  sería un polinomio de grado  $n$  con  $n + 1$  ceros, lo cual sólo es posible si  $L_1$  coincide con  $L_2$ .

Como acabamos de demostrar, el polinomio interpolador es único, sin embargo la forma de escribirlo no lo es. Y aunque la fórmula (3.2) resulta muy elegante, tiene el inconveniente de que cambiar un único punto requiere recalcular todos los polinomios  $l_j$ . Hay otra forma de escribir el polinomio interpolador, llamada forma de Newton, que resulta preferible en muchos casos.

$$L(x) = \sum_{j=0}^n a_j n_j(x) \text{ donde } n_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

y los  $a_j = [y_0, y_1, \dots, y_j]$ , para  $0 \leq j \leq n$ , son las *diferencias divididas* definidas recursivamente por las fórmulas

$$\begin{aligned} [y_0] &:= y_0 & [y_0, y_1, y_2, y_3] &:= \frac{[y_1, y_2, y_3] - [y_0, y_1, y_2]}{x_3 - x_0} \\ [y_0, y_1] &:= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \dots & \\ [y_0, y_1, y_2] &:= \frac{[y_2, y_1] - [y_1, y_0]}{x_2 - x_0} & [y_0, \dots, y_n] &:= \frac{[y_1, y_2, \dots, y_n] - [y_0, \dots, y_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

Cuando los puntos  $y_j$  están dados por una función, es decir,  $y_j = f(x_j)$ , lo anterior se escribe en la forma

$$\begin{aligned} f[x_0] &:= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &:= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, x_2] &:= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\ &\dots \end{aligned}$$

Las técnicas interpolatorias de Lagrange son independientes de los datos y se usan para definir operadores de reconstrucción interpolatorios *lineales*  $(\mathcal{R}_k^{\mathcal{L}} f^k)(x)$  que son polinomios a trozos definidos en cada subintervalo

$[x_j^k, x_{j+1}^k]$  como la única interpolación polinómica asociada al conjunto de datos

$$\{f_{j+m}^k, m \in \mathcal{S}\}$$

con  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(r, s) = \{-s, -s+1, \dots, -s+r\}$ .

Las interpolaciones lineales de Lagrange pierden su orden de aproximación con la presencia de singularidades ([19]). De hecho, si  $f$  tiene una discontinuidad de salto en  $[x_{j-1}^k, x_j^k]$ , es fácil ver que cualquier diferencia dividida basada en un conjunto de  $s+1$  puntos conteniendo a  $\{x_{j-1}^k, x_j^k\}$  verifica que

$$f[x_l^k, \dots, x_{l+s}^k] = O([f])/h_k^s,$$

donde  $[f] = |f_j^k - f_{j-1}^k|$ . Por lo tanto, cada vez que se cruza la singularidad el error es de la forma

$$f(x) = \mathcal{I}_l(x) + O([f]),$$

lo que significa que el orden de la predicción es cero.

### 3.3.2. Reconstrucciones no lineales: interpolación PPH

La reconstrucción que vamos a realizar en esta sección es una de carácter no lineal de cuarto orden en regiones de suavidad. Se basa en una interpolación polinómica a trozos siguiendo las ideas introducidas por Amat, Busquier y Candela en [3] para la reconstrucción de flujos en leyes de conservación. La media aritmética

$$\frac{x+y}{2}$$

que se utiliza en otros procedimientos es sustituida por la denominada interpolación PPH (Piecewise Polynomial Harmonic)  $PPH : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(3.3) \quad PPH(x, y) := \frac{xy}{x+y} (\text{sgn}(xy) + 1)$$

donde  $\text{sig}(x)$  representa el signo de  $x$ , cuyo valor es  $+1$  para  $x \geq 0$  y  $-1$  para  $x < 0$ .

Mientras que la media aritmética satisface una estimación

$$\frac{x+y}{2} \leq \max\{|x|, |y|\}$$



la media armónica verifica una estimación mucho más adecuada para el objetivo que se persigue, pues cumple, como es sencillo comprobar,

$$\text{PPH}(x, y) \leq 2 \min\{|x|, |y|\}.$$

La función  $\text{PPH}$  puede escribirse también en la forma

$$\text{PPH}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y verifica además otras propiedades interesantes (para más detalles véase [15], [13], [59]) que quedan reflejadas en la proposición que sigue.

**Proposición 3.3.1** *Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la media armónica  $\text{PPH}(x, y)$  satisface*

1.  $\text{PPH}(x, y) = \text{PPH}(y, x)$ .
2.  $\text{PPH}(x, y) = 0$  si  $xy \leq 0$ .
3.  $\text{PPH}(-x, -y) = -\text{PPH}(x, y)$ .
4.  $\text{PPH}(x, y) = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \min(|x|, |y|) \left[ 1 + \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \right]$ .
5.  $|\text{PPH}(x, y)| \leq \max(|x|, |y|)$ .
6.  $|\text{PPH}(x, y)| \leq 2 \min(|x|, |y|)$ .
7. Para  $x, y > 0$ ,  $\min(x, y) \leq \text{PPH}(x, y) \leq \frac{x+y}{2}$ .
8. Si  $x = O(1)$ ,  $y = O(1)$ ,  $|y - x| = O(h)$  y  $xy > 0$  entonces

$$\left| \frac{x+y}{2} - \text{PPH}(x, y) \right| = O(h^2).$$

9.  $|\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2)| \leq 2 \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ .

Esta técnica no lineal de interpolación permite construir un operador de reconstrucción con ciertas propiedades interesantes. En primer lugar, cada trozo de polinomio se construye con un conjunto de cuatro datos centrados  $\{x_{j-1}^k, x_j^k, x_{j+1}^k, x_{j+2}^k\}$ . En segundo lugar, tiene el mismo orden que la

interpolación lineal en regiones de suavidad. El orden se reduce cerca de las singularidades, pero se mantiene suficientemente para no generar el fenómeno de Gibbs.

Considerando las diferencias divididas

$$e_{j-\frac{1}{2}}^k = f[x_{j-1}^k, x_j^k], \quad e_{j+\frac{1}{2}}^k = f[x_j^k, x_{j+1}^k], \quad e_{j+\frac{3}{2}}^k = f[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k],$$

$$D_j^k = f[x_{j-1}^k, x_j^k, x_{j+1}^k], \quad D_{j+1}^k = f[x_j^k, x_{j+1}^k, x_{j+2}^k],$$

la interpolación PPH asociada a conjunto centrado  $f_{j-1}^k, f_j^k, f_{j+1}^k, f_{j+2}^k$  tiene la siguiente forma

$$(3.4) \quad \tilde{P}_j(x_{j+\frac{1}{2}}^k) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} \tilde{D}^k h^2.$$

donde

$$(3.5) \quad \tilde{D}^k = \text{PPH}(D_j^k, D_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{2D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k} & \text{si } D_j^k D_{j+1}^k > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es interesante compararla con la interpolación de Lagrange  $P_j(x)$

$$(3.6) \quad P_j(x_{j+\frac{1}{2}}^k) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} \frac{D_j^k + D_{j+1}^k}{2} h^2.$$

Aplicando que

$$(3.7) \quad \left| 2 \frac{D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k} \right| \leq 2 \min(|D_j^k|, |D_{j+1}^k|) = O(1),$$

se obtiene que  $\tilde{D}^k = O(1)$ , en lugar de  $O(\frac{1}{h})$ , como en el caso lineal cuando una discontinuidad existe en  $[x_{j-1}^k, x_j^k]$  o en  $[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k]$ .

Cuando los valores son próximos las dos medias son parecidas, pero la media armónica siempre es dos veces más pequeña que el mínimo de los valores. Esta propiedad es la clave para la no aparición del fenómeno de Gibbs en la reconstrucción PPH.

Las principales propiedades que verifica la reconstrucción PPH son las siguientes:

- 1) Por construcción los datos utilizados en la reconstrucción son siempre centrados.
- 2) Si  $f$  es un polinomio de grado menor o igual a 2,

$$D_j^k = D_{j+1}^k = \frac{D_j^k + D_{j+1}^k}{2} = \tilde{D}^k,$$

y por lo tanto la reconstrucción PPH reproduce polinomios de grado 2.

- 3) Si  $f \in C^4$  y  $D_j^k D_{j+1}^k > 0$ , usando desarrollos de Taylor se obtiene que

$$\begin{aligned} 2 \frac{D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k} &= \frac{f''(x_{j+\frac{1}{2}}^k)}{2} + O(h^2), \\ \frac{D_j^k + D_{j+1}^k}{2} &= \frac{f''(x_{j+\frac{1}{2}}^k)}{2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, en regiones de suavidad, la diferencia entre las dos medias es de orden  $O(h^2)$ , y la reconstrucción alcanza su orden óptimo 4.

- 4) Cuando  $D_j^k D_{j+1}^k \leq 0$ ,  $\tilde{P}(x_{j+1/2}^k) = \frac{f_{j+1}^k + f_j^k}{2}$ . En este caso el orden se reduce a dos incluso en regiones de suavidad. Mediante traslaciones se puede evitar esta reducción de orden.
- 5) Si existe una discontinuidad en  $[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k]$  y  $D_j^k D_{j+1}^k > 0$ , por la propiedad (3.7) el fenómeno de Gibbs típico en las reconstrucciones lineales no aparece. Además, el orden de aproximación permanece  $O(h^2)$  en este caso.

### 3.4. El marco básico para el esquema

El esquema introducido por Amat, Dadourian y Liandrat [12] puede considerarse como un ejemplo particular del esquema interpolatorio multiresolución de Harten [44, 19] transformado con la aplicación de refinamientos ternarios, introducidos en la sección 3.3, página 43.

## Dos resultados generales

Amat, Dadourian y Liandrat en [10] realizan un estudio general de la convergencia y estabilidad de esquemas diádicos no lineales asociados con perturbaciones particulares de esquemas de subdivisión lineales. Adaptados los procedimientos a la subdivisión triádica, eso se corresponde con esquemas de subdivisión no lineales  $S_{NL}f$  que pueden ser definidos mediante

$$(3.8) \quad \begin{cases} (S_{NL}f)_{3n} &= f_n \\ (S_{NL}f)_{3n+1} &= (Sf)_{3n+1} + F(\delta f)_{3n+1} \\ (S_{NL}f)_{3n+2} &= (Sf)_{3n+2} + F(\delta f)_{3n+2} \end{cases}$$

donde  $F$  es un operador no lineal en  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ ,  $\delta$  es un operador lineal en  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  y  $S$  es un esquema de subdivisión lineal, interpolatoria y convergente.

Recordemos las definiciones.

**Definición 3.4.1** *Un esquema de subdivisión triádica  $S$  se dice convergente si  $\forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}), \exists g \in C^0(\mathbb{R})$  tal que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |(S^j f)_n - g(\frac{n}{3^j})| = 0$ .*

*En tal caso se escribe  $g = S^\infty f$ .*

**Definición 3.4.2** *Un esquema de subdivisión convergente se dice estable si*

$$\exists C < +\infty \text{ tal que } \forall f^0, g^0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}), \quad \|S^\infty f - S^\infty g\|_{L^\infty} \leq \|f^0 - g^0\|_{\ell^\infty}.$$

Usando ideas de [10] pueden probarse los siguientes resultados.

### **Teorema 3.4.3 (Convergencia)**

*Si  $S$  es un esquema de subdivisión lineal convergente y si  $S_{NL}$ ,  $F$  y  $\delta$  verifican*

$$(3.9) \quad \exists M > 0 \text{ tal que } \forall d \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F(d)\|_\infty \leq M \|d\|_\infty,$$

$$(3.10) \quad \exists L > 0, \exists c < 1 \text{ tal que } \forall f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta S_{NL}^L(f)\|_\infty \leq c \|\delta f\|_\infty,$$

*entonces el esquema de subdivisión  $S_{NL}$  definido en (3.8) es convergente.*

**Teorema 3.4.4 (Regularidad)**

Sean  $S$  y  $S_{NL}$  verificando las hipótesis del teorema 3.4.3. Si  $S$  es  $C^{\alpha^-}$  convergente entonces, para toda sucesión  $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$  se cumple que  $S_{NL}^\infty(f) \in C^{\beta^-}$  donde  $\beta = \min\left(\alpha, -\frac{\log_3(c)}{L}\right)$ .

Recordemos que el significado de  $C^{\alpha^-}$  ha sido introducido en la definición 3.1.1.

**Teorema 3.4.5 (Estabilidad)**

Si  $S_{NL}$ ,  $F$  y  $\delta$  verifican

1.  $\exists M > 0$ , tal que  $\forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$(3.11) \quad \|F(d_1) - F(d_2)\|_\infty \leq M \|d_1 - d_2\|_\infty,$$

2.  $\exists c < 1$ , tal que  $\forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$(3.12) \quad \|\delta(S_{NL}(f) - S_{NL}(g))\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty,$$

entonces la transformada multiresolución asociada al esquema no lineal  $S_{NL}$  es estable.

## 3.5. Un esquema de subdivisión ternaria no lineal

En esta sección introducimos un esquema de subdivisión ternaria no lineal como una perturbación del esquema lineal introducido en [45]. En [20, 29, 56] pueden encontrarse otros esquemas ternarios no lineales.

Hassan et al. en [45] muestran que puede obtenerse un mayor nivel de regularidad y un soporte más pequeño para el, así llamado, esquema de interpolación estacionario de 4 puntos mediante la sustitución del esquema binario por el ternario. Dado un real  $w$ , que recibe el nombre de parámetro

de tensión, se analiza el siguiente esquema ternario de subdivisión:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (S_w f)_{3n} &= f_n, \\ (S_w f)_{3n+1} &= a_0 f_{n-1} + a_1 f_n + a_2 f_{n+1} + a_3 f_{n+2}, \\ (S_w f)_{3n+2} &= a_3 f_{n-1} + a_2 f_n + a_1 f_{n+1} + a_0 f_{n+2}, \end{aligned}$$

siendo

$$a_0 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{6}w, \quad a_1 = \frac{13}{18} + \frac{1}{2}w, \quad a_2 = -\frac{7}{18} - \frac{1}{2}w \quad \text{and} \quad a_3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}w.$$

El valor  $w = \frac{1}{27}$  corresponde al esquema ternario de Lagrange, y se denota por tanto como  $S_{\frac{1}{27}}$ .

En [45] se prueba que *el esquema (3.13) converge para  $0 \leq w < \frac{1}{2}$  y la función límite tiene*

- *regularidad  $C^2$  para  $\frac{1}{15} < w < \frac{1}{9}$ ,*
- *regularidad  $C^{(1+\beta)-}$  con  $\beta = -\log_3(1 - 2w)$  para  $w \in ]0, \frac{1}{15}] \cup [\frac{1}{9}, \frac{1}{2}[$*
- *y regularidad  $C^{1-}$  para  $w = 0$ .*

En [20] puede encontrarse una generalización del esquema usando un parámetro de tensión no estacionario (i.e. un valor de  $w$  diferente para cada nivel  $j$ ).

Una debilidad importante de ese esquema interpolatorio lineal es que se producen oscilaciones (fenómeno Gibbs) en la función límite cuando el esquema arranca de una discretización de una función discontinua (véase la figura 3.3 (a)). A fin de evitar estas oscilaciones se requiere una modificación no lineal del esquema.

El esquema no lineal de [12] tiene sus raíces en los esquemas introducidos por Harten, Osher, Engquist y Chakravarthy en [42, 43] para la interpolación de flujos en la solución numérica de leyes de conservación hiperbólicas. En todos estos trabajos las oscilaciones cerca de las discontinuidades son controladas usando los, así llamados, limitadores de flujo que se basan en la sustitución de las medias aritméticas  $AMEAN(x, y) = \frac{x+y}{2}$  por otro tipo de medias.

El esquema inicial de [42, 43], esquema ENO (essentially non oscillatory scheme), presenta varios inconvenientes, entre los que señalamos:

- pérdida de precisión en regiones suaves con datos de entrada específicos,
- corrimientos en ciertas discontinuidades,
- suavizado de las esquinas,
- soporte demasiado grande.

Se han propuesto varios remedios, entre los cuales se encuentra el trabajo de Marquina [54], Amat, Busquier y Candela [3], Serna y Marquina [58].

El esquema no lineal que vamos a analizar aquí sigue la línea de [13] y [15], y está basado en la sustitución de la media aritmética por la media PPH definida en la página 46 mediante la fórmula (3.3).

Comenzamos proponiendo dos nuevas formulaciones del esquema (3.13):

$$\begin{aligned}
 (S_w f)_{3n} &= f_n, \\
 (S_w f)_{3n+1} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} + \frac{w}{3}f_{n+2} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \\
 (S_w f)_{3n+2} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} - \frac{w}{3}f_{n+2} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 (S_w f)_{3n} &= f_n, \\
 (S_w f)_{3n+1} &= -\frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_{n+1} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \\
 (S_w f)_{3n+2} &= \frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_{n+1} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

donde AMEAN representa la media aritmética, i.e.,  $\text{AMEAN}(x, y) = \frac{x+y}{2}$ .

El esquema no lineal  $S_{\text{PPH}}$  que proponemos, eliminando  $w$  en la notación, está dado entonces por

- $(S_{\text{PPH}}f)_{3n} = f_n,$

- si  $|d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|,$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} (S_{\text{PPH}}f)_{3n+1} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} + \frac{w}{3}f_{n+2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \\ (S_{\text{PPH}}f)_{3n+2} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} - \frac{w}{3}f_{n+2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \end{aligned}$$

- si  $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|,$

$$\begin{aligned} (S_{\text{PPH}}f)_{3n+1} &= -\frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \\ (S_{\text{PPH}}f)_{3n+2} &= \frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned}$$

donde, recordemos,  $\text{PPH}(x, y) = \frac{xy}{x+y}(\text{sgn}(xy) + 1)$ , con  $\text{sgn}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  y  $\text{sgn}(x) = -1$  si  $x < 0$  y  $(d^2 f)$  está definido por  $d^2 f_n = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$ .

### 3.5.1. Convergencia

En primer lugar reescribimos el esquema  $S_{\text{PPH}}$  definido por las ecuaciones (3.16) como una perturbación particular del esquema lineal ternario  $S_w$ , el cual es un esquema convergente con función límite en el espacio  $C^1$ , para  $0 \leq w < \frac{1}{2}$ .

Para todo  $f \in l^\infty(\mathbb{R})$  se tiene

$$S_{\text{PPH}}f = S_w f + F(d^2 f),$$



donde  $F$  es la función definida por

$$F(d^2 f)_{3n} = 0;$$

$$F(d^2 f)_{3n+1} = \begin{cases} (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})(\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})), \\ \quad \text{si } |d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|; \\ (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})(\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})), \\ \quad \text{si } |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|; \end{cases}$$

(3.17)

$$F(d^2 f)_{3n+1} = \begin{cases} (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})(\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})), \\ \quad \text{si } |d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|; \\ (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})(\text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})), \\ \quad \text{si } |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|. \end{cases}$$

Podemos del resultado general presentado en el Teorema 3.4.3 obtener la convergencia del esquema no lineal (3.16) así como la regularidad de las funciones límite.

### **Teorema 3.5.1 (Convergencia)**

La constante de contracción de la ecuación (3.10) escrita para  $S_{\text{PPH}}$  es

$$c = \text{máx} \left( \frac{2 + 3w}{9}, \frac{1}{9} + w, \frac{1 - w}{3} \right).$$

Además, para  $0 \leq w < \frac{8}{9}$ , el esquema  $S_{\text{PPH}}$  definido por (3.16) es uniformemente convergente.

### **Teorema 3.5.2 (Regularidad)**

Para toda sucesión  $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , la función límite  $S_{\text{PPH}}^\infty f$  pertenece a  $C^{\beta-}$  con

- $\beta = \text{mín}(1 - \log_3(1 - 2w), -\log_3(c)) > 1$  para  $0 < w \leq 2/9$ ,
- $\beta = 1$  para  $w = 0$  y
- $\beta = -\log_3(c) < 1$  for  $\frac{2}{9} \leq w < 8/9$ .

**Observación 3.5.3** Señalemos que la regularidad teórica del Teorema 3.5.2 está próxima a la regularidad numérica que puede ser evaluada siguiendo [49] (véase la tabla 3.1).

Tabla 3.1: Comparación de las constantes de regularidad estimadas teóricamente (teorema 3.5.2) y numéricamente [49].

$w$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
regularidad teórica	1,035	1,0868	1,1072	0,738	0,136
regularidad numérica	1,02	1,065	1,17	0,8775	0,26

### 3.5.2. Estabilidad del esquema multiresolución interpolatorio no lineal asociado

Usando el Teorema 3.4.5 se obtiene

#### **Teorema 3.5.4 (Estabilidad)**

*El algoritmo multiresolución no lineal asociado a  $S_{\text{PPH}}$  es estable para  $0 \leq w < \frac{2}{15}$ .*

### 3.5.3. Propiedades de las funciones límite

En esta sección analizamos rigurosamente las propiedades de las funciones límite y particularmente el comportamiento del esquema en presencia de discontinuidades.

A pesar de que nuestro objetivo es diferente del que motivó las proposiciones iniciales de Harten et al. [42, 43], vamos a volver sobre algunos inconvenientes del esquema ENO mencionados en la sección 3.5. Puesto que la malla de nuestro esquema tiene cuatro puntos, la amplitud de la plantilla ENO mencionada como un inconveniente desaparece. Además debemos mencionar otro inconveniente que es la no estabilidad del esquema de subdivisión ENO (véase, por ejemplo, [22]).

Con relación al primer orden de aproximación se verifica la siguiente proposición.

**Proposición 3.5.5** *Para toda función  $g \in C^4([0, 1])$  y  $h > 0$ , si*

$$f = g((nh))_{n \in \mathbb{Z}},$$

*entonces*

*si  $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces*

$$\|(S_{\text{PPH}}f)_n - g(\frac{hn}{3})\|_{\infty} = O(h^4),$$

*en otro caso*

$$\|(S_{\text{PPH}}f)_n - g(\frac{hn}{3})\|_{\infty} = O(h^3).$$

PRUEBA

De acuerdo con la Proposición 3.3.1, tenemos que si  $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces

$$|\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{AMEAN}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})| = O(h^4).$$

En consecuencia, de acuerdo con la definición de  $S_{\text{PPH}}$ ,

$$\|S_{\text{PPH}}f - S_w f\|_{\infty} = O(h^4).$$

Puesto que el esquema  $S_w$  es de orden de aproximación 4 obtenemos el resultado cuando  $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$ .

De no ser así, la reproducción de los polinomios de la parte lineal en la definición de  $S_{\text{PPH}}$  (3.16) lleva a

$$\|(S_{\text{PPH}}f)_n - g(\frac{hn}{3})\|_{\infty} = O(h^3). \quad \square$$

Desde un punto de vista numérico el esquema  $S_{\text{PPH}}$  no sufre oscilaciones incluso aunque los datos originales provengan de la discretización de una función discontinua (véase la Figura 3.3).

De acuerdo con D. Gottlieb y C.W. Shu [40], dada una función discontinua  $f$  y su discretización  $f^h$  definida por  $f_n^h = f(nh)$ , el fenómeno Gibbs tiene que ver con las propiedades de  $S^{\infty} f^h$ . Y puede ser caracterizado por dos hechos ([40]):

Figura 3.3: Comparación de las funciones límites obtenidas, arrancando desde  $(\bullet)$ , para un parámetro de tensión  $w = \frac{1}{11}$ .

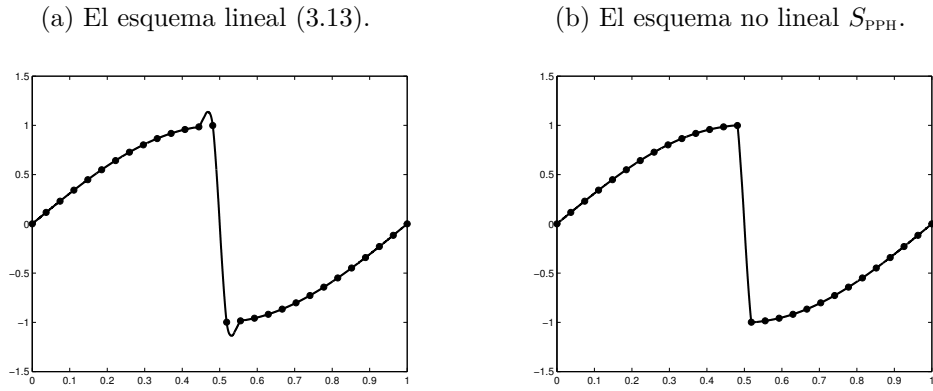
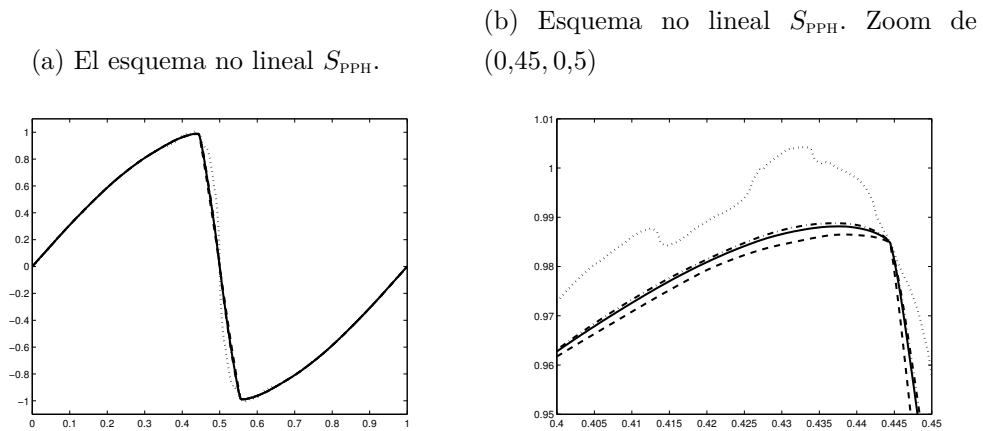


Figura 3.4: Esquema no lineal  $S_{PPH}$  para diferentes valores del parámetro de tensión  $w$ .  $w = \frac{1}{27}$  — —,  $w = \frac{1}{11}$  —,  $w = \frac{1}{9}$  - . -,  $w = \frac{1}{2}$  . . . .



1. Lejos de la discontinuidad la convergencia de  $S^\infty(f^h)$  hacia  $f$  es bastante lenta y para cada punto  $x$  es

$$|f(x) - (S^\infty f^h)(x)| = O(h).$$

2. Cerca de la discontinuidad hay diferencias por exceso o defecto que no

disminuyen al reducir el valor de  $h$ ; es decir

$$\|f - (S^\infty f^h)\|_\infty \text{ no tiende a cero con } h.$$

Cuando están involucrados operadores lineales en la construcción de  $S^\infty f^h$  estos dos hechos están relacionados con propiedades específicas de funciones elementales (a veces bases biortogonales) tales como compacidad o no compacidad del soporte, que tiene influencia en 1, y oscilaciones que tiene influencia en 2. En nuestro contexto tales funciones no existen.

Sin embargo los esquemas no lineales  $S_{\text{PPH}}$  no adolecen del fenómeno oscilatorio de Gibbs como se adivina en la Figura 3.3. De hecho se tiene:

**Proposición 3.5.6** *Dado  $0 \leq \xi \leq h$ , para cada función  $f$  definida por:*

$$\begin{aligned} \forall x \leq \xi, f(x) &= f_-(x) \text{ con } f_- \in C^\infty(]-\infty, \xi]), \\ \forall x > \xi, f(x) &= f_+(x) \text{ con } f_+ \in C^\infty([\xi, +\infty[), \end{aligned}$$

y discontinua en  $\xi$ , se tiene, suponiendo que  $f_-(\xi) > f_+(\xi)$  :

- si  $|x| \geq \frac{5}{2}h$ ,  $|f(x) - (S_{\text{PPH}}^\infty f^h)(x)| = O(h^3)$ ,
- si  $|x| \leq \frac{5}{2}h$ ,  $f_+(0) + O(h) \leq (S_{\text{PPH}}^\infty f^h)(x) \leq f_-(h) + O(h)$ .

## 3.6. Test numéricos

Presentamos a continuación algunas comparaciones entre los esquemas multiresolución asociados con el esquema lineal ternario de subdivisión  $S_{\frac{1}{27}}$  y el esquema de subdivisión ternario no lineal al sistema  $S_{\text{PPH}}$  para diferentes valores de  $w$ .

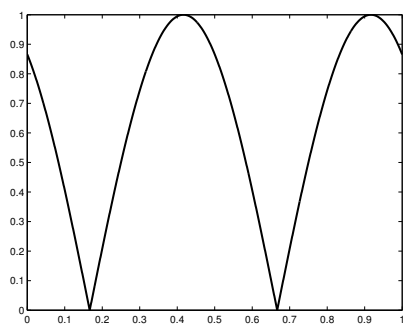
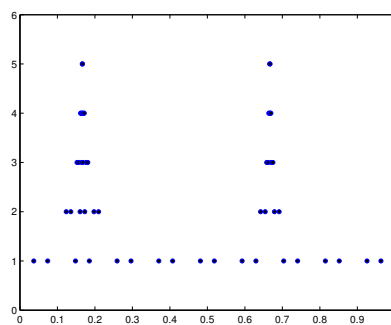
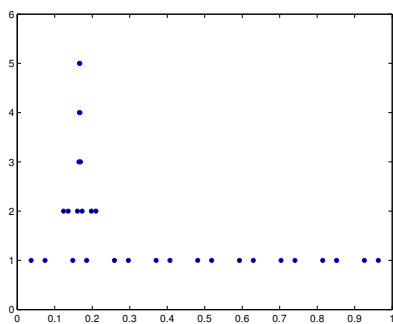
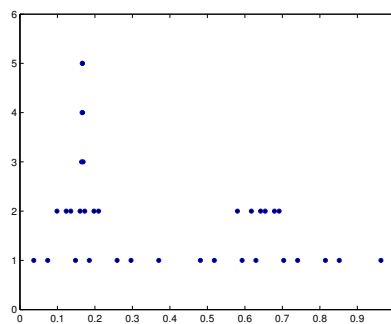
Los datos iniciales fueron obtenidos mediante una discretización regular tomando 2049 puntos en  $[0, 1]$  para una función con puntos angulosos localizados en  $x = \frac{1}{6}$  y  $x = \frac{2}{3}$  (véase la Figura 3.5).

Dado un entero  $0 < L$  y un número real  $\varepsilon$ , consideramos el operador truncación  $\text{tr}_L^\varepsilon$  definido como

$$\text{tr}_L^\varepsilon(\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}) = (\{f^0, \hat{d}^0, \dots, \hat{d}^{L-1}\}),$$

Figura 3.5: Comparación de los detalles no nulos restantes, tras la truncación de parámetros  $L = 5$  y  $\varepsilon = 10^{-3}$  para la multiresolución asociada. Para cada coeficiente no nulo  $d_n^j$ , aparece dibujado un punto en la posición  $(n3^{-j}, j+1)$ .

(a) Función original

(b) el esquema lineal ternario  $S_{\frac{1}{27}}$ (c) el esquema no lineal ternario  $S_{\text{PPH}}$  con  $w = \frac{1}{11}$ (d) el esquema no lineal ternario  $S_{\text{PPH}}$  con  $w = \frac{1}{2}$ 

con

$$\hat{d}_j^k = \begin{cases} 0 & |d_j^k| \leq \varepsilon, \\ d_j^k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para  $L = 5$  y  $\varepsilon = 10^{-3}$  los detalles no truncados aparecen dibujados en la Figura 3.5. El número  $nnz$  de los detalles no truncados y el error después de recuperar  $f^L$  están evaluados en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Comparación de las descomposiciones multiresolución truncadas para  $L = 5$  y  $\varepsilon = 10^{-3}$  para la función de la Figura 3.5 (a).

	$E_\infty$	$E_1$	$E_2$	$nnz$
Lineal ternario $S_{\frac{1}{27}}$	$8,51 \times 10^{-4}$	$1,92 \times 10^{-5}$	$9,18 \times 10^{-7}$	67
$S_{\text{PPH}}, w = \frac{1}{27}$	<b><math>8,00 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>8,44 \times 10^{-5}</math></b>	<b><math>3,37 \times 10^{-6}</math></b>	45
$S_{\text{PPH}}, w = \frac{1}{11}$	$9,37 \times 10^{-4}$	$1,16 \times 10^{-4}$	$5,17 \times 10^{-6}$	<b>43</b>
$S_{\text{PPH}}, w = \frac{1}{2}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$3,35 \times 10^{-4}$	$8,06 \times 10^{-6}$	51

En la Tabla 3.2 y la Figura 3.5 parece que todos los algoritmos se comportan de forma similar con relación a la precisión en la aproximación a la señal original. Sin embargo el número de coeficientes no nulos de detalle es significativamente menor en el esquema no lineal.

El último test está relacionado con la comparación numérica de  $S_{\text{PPH}}$  y  $S_{\text{ENO}}$  para la generación de curvas bidimensionales en presencia de puntos angulosos. En la Figura 3.6 se aprecia que  $S_{\text{PPH}}$  proporciona resultados significativamente mejores sin oscilaciones espurias cerca de las esquinas.

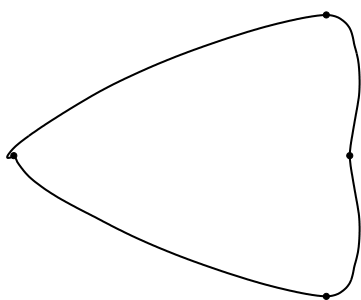
## 3.7. Conclusiones

Los nuevos esquemas de subdivisión no lineal que se han presentado tienen las siguientes propiedades:

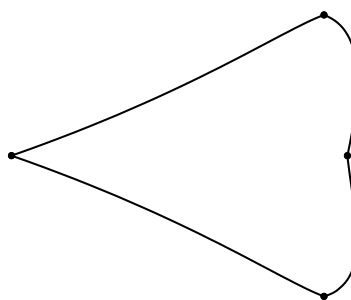
- son esquemas de interpolación ternarios, que convergen hacia funciones de regularidad superior a uno;

Figura 3.6: Comparación de generación de la curva a partir de los puntos iniciales (●).

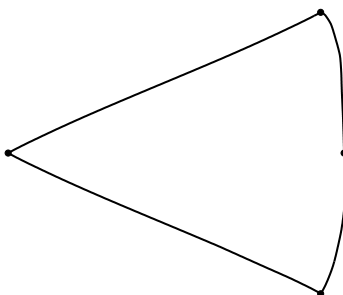
(a) el esquema lineal ternario  $S_{\frac{1}{27}}$ .



(b) el diádico no lineal  $S_{\text{ENO}}$



(c) el esquema ternario no lineal  $S_{\text{PPH}}$  with  $w = \frac{1}{27}$



- si los datos iniciales provienen de discretizar una función discontinua, las funciones límite no oscilan, a diferencia de lo que ocurre en los clásicos esquemas interpolatorios lineales;
- las transformadas multiresolución asociadas son estables.

Y constituyen la primera familia de esquemas que comparten simultáneamente esas propiedades tan deseables.



# Bibliografía

- [1] Ali I., Amat S. y Trillo J.C., (2006). Point values Hermite multiresolution for non-smooth noisy signals. *Computing*, **77** 3, 223–236.
- [2] Amat S., Aràndiga F., Cohen A. y Donat R., (2002). Tensor product multiresolution analysis with error control for compact image representation. *Signal Processing*, **82**(4), 587-608.
- [3] Amat S., Busquier S. y Candela V.F., (2003). A polynomial approach to Piecewise Hyperbolic Method, *Int.J. Computational Fluid Dynamics* **17**(3), 205-217.
- [4] Amat S., Busquier S. y Candela V.F., (2003). Local Total Variation Bounded methods for hyperbolic conservation laws, *J. of Comp. Methods in Sciences and Engineering*, **3**(3), 193-200.
- [5] Amat S., Busquier S., El Kebir D. y Molina J., (2002). Compression of locally oscillatory signals with discontinuities, *International Mathematical J.*, **2**(12), 1141-1156.
- [6] Amat S., Busquier S. y Trillo J.C., (2005). Stable Interpolatory Multiresolution in 3D , *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, **2**(2), 177-188.
- [7] Amat S., Busquier S. y Trillo J.C., (2005). Non-linear Harten's Multiresolution on the Quincunx Pyramid , *J. of Comp. and App. Math.*, **189** (1-2), 555-567.

- 
- [8] Amat S., Cherif H. y Trillo J.C., (2005). Denoising using Linear and Nonlinear Multiresolutions, *Engineering of Computations*, **22** 7, 877-891.
- [9] Amat S., Dadourian, K. y Liandrat J., (2006). On the convergence of various subdivision schemes using a perturbation teorema, Curves and Surfaces Fitting: Avignon 2006, 1-10, Nashboro Press, Editors A. Cohen, J.L. Merrien and L. L. Schumaker.
- [10] Amat S., Dadourian K. y Liandrat J., (2008). *Nonlinear Subdivision Schemes and Associated Multiresolution Transforms*, submitted.
- [11] Amat, S., Dadourian, K. Liandrat, J., (2008) *On a  $C^2$ -nonlinear subdivision schema avoiding Gibbs oscillations*
- [12] Amat S., Dadourian K. and Liandrat J., (2010) On a nonlinear 4-point ternary and interpolatory multiresolution scheme eliminating the Gibbs phenomenon, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling* **7** (2), 261–280.
- [13] Amat S., Donat R., Liandrat J. y Trillo J.C., (2006). Analysis of a fully nonlinear multiresolution scheme for image processing, *Foundations of Computational Mathematics*, **6** (2), 193–225.
- [14] Amat S., Donat R., Liandrat J. y Trillo J.C., (2007). A fully adaptive PPH multiresolution scheme for image processing. *Mathematical and Computer Modelling*, **46** 1-2, 2-11.
- [15] Amat S. y Liandrat J., (2005). On the stability of the PPH nonlinear multiresolution, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **18** (2), 198-206.
- [16] Aràndiga, F., Baeza, A. y Donat, R., (2004). Discrete multiresolution based on Hermite interpolation: computing derivatives. Recent advances in computational and mathematical methods for science and engineering. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **9** 2, 263–273.

- 
- [17] Aràndiga, F. y Belda, Ana M., (2004). Weighted ENO interpolation and applications. Recent advances in computational and mathematical methods for science and engineering. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **9** 2, 187–195.
- [18] Aràndiga, F., Cohen, A., Donat, R. y Dyn, N., (2005). Interpolation and approximation of piecewise smooth functions. (English summary) *SIAM J. Numer. Anal.*, **43** 1, 41–57 (electronic).
- [19] Aràndiga F. y Donat R., (2000). Nonlinear Multi-scale Decomposition: The Approach of A. Harten, *Numerical Algorithms*, **23**, 175-216.
- [20] Beccari, C., Casciola, G. and Romani, L., (2007). An interpolating 4-point  $C^2$  ternary non-stationary subdivision scheme with tension control. *Comput. Aided Geom. Design*, **24** (4), 210-219.
- [21] Catmull E.E y Clark J.H., (1978). Recursively generated B-spline surfaces on topological meshes. *Computer Aided Design*, **19**(453), 350-355.
- [22] Cohen A., Dyn N. and Matei B., (2003). Quasi linear subdivision schemes with applications to ENO interpolation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **15**, 89-116.
- [23] Chaikin G., (1974). An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, **3**, 346-349.
- [24] Cohen, A., (2003). Numerical analysis of wavelet methods. Studies in Mathematics and its Applications, 32. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- [25] Cohen, A. y Dyn, N., (1996). Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis. *SIAM J. Math. Anal.*, **27** 6, 1745–1769.
- [26] Daubechies I., Runborg O. y Sweldens W., (2004). Normal multiresolution approximation of curves, *Const. Approx.*, **20** (3), 399-363.
- [27] Deslauriers G. and Dubuc S., (1989). Symmetric iterative interpolation processes, *Constr. Approx.*, **5**, 49-68.

- 
- [28] Donat, R. y Marquina, A., (1996). Capturing shock reflections: an improved flux formula. *J. Comput. Phys.*, **5** 1, 42–58.
- [29] Donoho D., Yu T.P-Y., (2000). Nonlinear pyramid transforms based on median interpolation. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**(5), 1030-1061.
- [30] Doo, D. and Sabin, M., (1978). Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points, *Computer-Aided Design*, **10** (6) 356–360
- [31] Dubuc S., (1986). Interpolation through an iterative scheme, *J. Math. Anal. Appl.*, **114**, 185-204.
- [32] Dyn N., (1992). Subdivision schemes in computer aided geometric design, *Advances in Numerical Analysis II., Subdivision algorithms and radial functions*, W.A. Light (ed.), Oxford University Press, 36-104. Prentice-Hall.
- [33] Dyn N., Floater M.S. y Hormann, K., (2005). A  $C^2$  four-point subdivision scheme with fourth order accuracy and its extensions. *Methods for Curves and Surfaces: Tromsø 2004*, 145-156, Nashboro Press, Editors M. Dæhlen and K. Mørken and L. L. Schumaker, Series: Modern Methods in Mathematics.
- [34] Dyn N., Gregory J. y Levin D., (1987). A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design, *Comput. Aided Geom. Design*, **4**, 257-268.
- [35] Dyn, N., Kuijt, F., Levin, D. y van Damme, R., (1999). Convexity preservation of the four-point interpolatory subdivision scheme. *Comput. Aided Geom. Design*, **16** 8, 789–792.
- [36] Dyn, N. , Levin, D. and Gregory, J.A., (1990). A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics* **9** (2), 160-169.
- [37] Dyn, N. y Levin, D., (2002). Subdivision schemes in geometric modelling. *Acta Numer.*, **11**, 73–144.

- 
- [38] Dyn, N., Levin, D. y Luzzatto, A., (2003). Refining oscillatory signals by non-stationary subdivision schemes. Modern developments in multivariate approximation, 125–142, *Internat. Ser. Numer. Math.*, 145, Birkhäuser, Basel.
- [39] Floater M.S. y Michelli C.A., (1998). Nonlinear stationary subdivision, Approximation theory: in memory of A.K. Varna, *edt: Govil N.K, Mohapatra N., Nashed Z., Sharma A., Szabados J.*, 209-224.
- [40] Gottlieb D. y Shu C-W., (1997). On the Gibbs phenomenon and its resolution, *SIAM Rev.*, **39** (4), 644-668.
- [41] Habib, A. and Warren, J., (1999). Edge and vertex insertion for a class C1 of subdivision surfaces. *Computer Aided Geometric Design* **16** (4): 223–247.
- [42] Harten A., Osher S.J., Engquist B. and Chakravarthy S., (1987). Some results on uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes. *Appl. Numer. Math.*, **2**, 347-377.
- [43] Harten A., Engquist B., Osher S.J. and Chakravarthy S.R., (1987). Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III, *J. Comput. Phys.* **71**, 231-303.
- [44] Harten A., (1996). Multiresolution representation of data II, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (3), 1205-1256.
- [45] Hassan M.F., Ivriissimtzis I.P., Dodgson N.A. and Sabin M.A., (2002). An interpolating 4-point ternary stationary subdivision scheme, *Comput. Aided Geom. Design*, **19**, 1-18.
- [46] Jeon M., Han D., Park K. and Choi G., (2005). Ternary univariate curvature-preserving subdivision. *J. Appl. Math. Comput.*, **18** (1-2), 235-246.
- [47] Kobbelt, L., (1996). Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology. *Computer Graphics Forum Eurographics '96* pp. 409 - 420.

- 
- [48] Kobbelt, L., (2000).  $\sqrt{3}$ -subdivision. Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH pp. 103–112.
- [49] Kuijt F., (1998). Convexity Preserving Interpolation: Nonlinear Subdivision and Splines. PhD thesis, University of Twente.
- [50] Kuijt F. y van Damme R., (1998). Convexity preserving interpolatory subdivision schemes. *Const. Approx.*, **14**, 609-630.
- [51] Levin, D., (1999). Using Laurent polynomial representation for the analysis of non-uniform binary subdivision scheme. *Advances in Computational Mathematics*, **11**, 41-54.
- [52] Loop, C., (1987). Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles, M.S. Mathematics thesis, University of Utah.
- [53] Marinov M., Dyn N. and Levin D., (2005). Geometrically controlled 4-point interpolatory schemes. In A. Le Mehaute, P.J. Laurent and L.L. Schumake eds., editors, *Advances in multiresolution for geometric modelling*, 301-315.
- [54] Marquina, A., (1994). Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, **15** 4, 892–915.
- [55] Matei, B., (2004). Denoising using nonlinear multiscale representations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338** 8, 647–652.
- [56] Oswald P., (2004). Smoothness of Nonlinear Median-Interpolation Subdivision, *Adv. Comput. Math.*, **20**(4), 401-423.
- [57] Peters, J. and Reif, U., (1997). The simplest subdivision scheme for smoothing polyhedra. *ACM Transactions on Graphics* **16** (4): 420–431.
- [58] Serna S. and Marquina A., (2004). Power ENO methods: a fifth-order accurate weighted power ENO method, *J.Sci.Comput.* **194**, 632-658.

- 
- [59] Trillo, J.C., (2006). Multirresolución no lineal y Aplicaciones, PhD in the University of Valencia, Spain.
- [60] Wang H. and Qin K., (2005). Improved ternary subdivision interpolation scheme. *Tsinghua Sci. Technol.*, **10** (1), 128-132.
- [61] Zheng H., Zhenglin Y., Zuoping C. and Hongxing Z., (2005). A controllable ternary interpolatory subdivision scheme. *Int. J. CAD/CAM*, **5**, number (1).
- [62] Zorin, D., Schröder, P. and Swelden, W., (1997). Interactive Multiresolution Mesh Editing, *Computer Graphics, Annual Conference Series*, **31**, pp. 259-268.