



Universidad
Politécnica
de Cartagena



Proyecto Fin de Carrera
**Estudio de vibraciones
transversales en vigas
dañadas**

Autor: Alicia Conesa Costa
Director: D. Enrique Castro Rodríguez

Índice

Capítulo 1: Introducción	3
1.1 Detección del daño.....	3
1.2 Técnicas de detección del daño.....	4
1.3 Bibliografía	7
Capítulo 2: Fundamentos teóricos	8
2.1 Vibraciones en una viga	8
2.2 Vibraciones transversales.....	8
2.3 Modelo de Euler-Bernoulli	9
2.3.1 Teoría de vigas de Euler-Bernoulli	9
2.3.2 Deformaciones y tensiones en las vigas	10
2.3.3 Esfuerzos internos en vigas	11
2.3.4 Ecuaciones de equilibrio.....	11
2.3.5 Cálculo de tensiones en vigas.....	12
2.3.6 Materiales utilizados	13
2.3.7 Barra apoyada en los dos extremos	14
2.4 Vibraciones transversales en una viga de Timoshenko	15
2.4.1 Teoría de la viga de Timoshenko	15
2.4.2 Derivación de las ecuaciones cuasiestáticos Timoshenko....	16
2.4.3 Dinámica de la viga de Timoshenko	19
2.4.4 Ecuaciones de derivación del haz combinado Timoshenko .	21
2.4.5 Efectos axiales.....	22
2.4.6 Amortiguamiento	23
2.4.7 Coeficiente de cizallamiento.....	24
2.5 Diferencia entre la Teoría de Timoshenko y la Teoría de Euler-Bernoulli.....	25
2.6 Bibliografía	26
Capítulo 3: Método de Simulación por Redes “MSR”	27
3.1 Método de Simulación por redes “MSR”	27

3.2 PSPICE.....	27
3.3 Modelo en red de Timoshenko	30
3.3.1 Construcción celdas elementales.....	30
3.3.2 Modelo en red de una viga apoyada en los dos extremos ..	36
3.4 Introducción del daño	38
3.4.1 Como se mete el daño en el programa Pspice	38
3.5 Bibliografía	39
<i>Capítulo 4: Simulaciones y resultados.....</i>	40
4.1 Introducción	40
4.2 Simulaciones Programa Pspice.....	41
4.3 Simulaciones en cuatro puntos de la viga	43
4.4 Simulación en todos los puntos.....	58
<i>Capítulo 5: Conclusiones</i>	74

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 DETECCIÓN DEL DAÑO

Casi todas las estructuras acumulan un daño gradual durante su vida útil. Un aspecto importante desde el punto de vista de la funcionalidad y seguridad de estas estructuras es la detección del daño, que con los avances recientes, se puede hacer un seguimiento del estado físico de un sistema estructural al alcance de la tecnología actual. Es importante detectar los posibles daños que puede tener una estructura, ya que permite disminuir costos de mantenimiento y evitar riesgos para las personas y la propia estructura.

Existen muchos procedimientos disponibles para detectar daño en estructuras; no existe un método perfecto, cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas.

Los ensayos no destructivos o NON - DESTRUCTIVE TESTING (NDT) se basan en un amplio grupo de técnicas de análisis utilizadas en la ciencia y la industria para evaluar las propiedades de un material, componente o sistema sin causar daño.

Se han desarrollado múltiples técnicas que se conocen como "STRUCTURAL HEALTH MONITORING" (SHM), que se basa en el trabajo a tiempo real, durante el funcionamiento de la estructura y que nos avisa cuando se produce un daño en la estructura.

Los SHM incluyen técnicas locales y globales en donde en este proceso de detección del daño se requiere:

- Excitar a la estructura
- Recoger la respuesta mediante sensores que transmiten y almacenan a una unidad central.
- Procesar las señales adquiridas, introduciendo variables características que sean sensibles a los mecanismos de daños esperados.
- Introducir y aplicar algoritmos para la identificación del daño a partir de las variables características.

Los pilares en los que se fundamenta este método son:

- Una medida precisa de los datos
- Desarrollo de un método numérico eficaz
- Modelo físico adecuado y cercano a la realidad

- El uso de algoritmos eficientes para extraer parámetros de daño

Algunas técnicas de los ensayos no destructivos (END) son: ultrasonidos, vibraciones, líquidos penetrantes,... [1]

Nosotros vamos a estudiar las vibraciones pre existen otros mucho métodos para la detección de daño. Se pueden dividir en tres grupos dependiendo del parámetro que cambiamos para estudiar dicho daño:

- *Métodos frecuenciales*
- *Métodos basados en la señal temporal*
- *Métodos Modales, basados en analizar los modos de vibración*

1.2 TÉCNICAS DE DETECCIÓN DEL DAÑO

Teniendo en cuenta estos métodos, a continuación, vamos a ver algunas técnicas para la detección del daño en una viga:

- **Utilizando redes neuronales artificiales y parámetros dinámicos:** una red neuronal *perceptron* multicapa combinada con el método Nelder-Mead Simplex para detectar daño en vigas. Los parámetros de entrada a la red se basan en frecuencias naturales y flexibilidad modal. Se considera que solo una cantidad específica de modos fueron identificados y que se dispone de mediciones en grados de libertad verticales.

La confiabilidad de la metodología propuesta se evalúa a partir de escenarios de daño aleatorios y de la definición de 3 tipos de error que la red puede cometer durante el proceso de detección del daño. Los resultados muestran que la metodología puede determinar confiablemente los escenarios de daño buscados. Sin embargo, su aplicación a vigas de gran tamaño puede verse limitada por el elevado costo computacional asociado al entrenamiento de la red.[2]

- **Usando frecuencias de anti-resonancia cruzadas:** Las redes neuronales artificiales son eficientes técnicas computacionales, usadas ampliamente para solucionar problemas complejos en muchos campos del conocimiento. El método se valida mediante

datos simulados y experimentales de una viga libre y empotrada en distintas situaciones de daño.

El estudio se estructura de la siguiente manera: Se generan los modelos en elementos finitos de las vigas y se crean las bases de datos analíticas de los casos de falla. Con las bases se entrenan las RNAs, luego se validan para después hacer la toma de datos experimentales. Con estos datos se validan experimentalmente las RNAs.

Más tarde se procede con la introducción de ruido a los datos analíticos y finalmente se comparan los resultados con los obtenidos anteriormente.

Se logran detectar todos daños inducidos en las vigas, teniendo más éxito en la viga libre debido a que el empotramiento implementado no pudo simular las condiciones de borde completamente, lo que se traduce en que los datos obtenidos no concuerdan con los datos simulados analíticamente, los cuales obedecen a un empotramiento perfecto.

Se estudia la introducción de ruido pseudo-aleatorio que sigue una distribución uniforme y una normal. Se concluye que el ruido mejora los resultados pero no logra acercarse del todo al caso experimental, por lo que se propone analizar otro método de introducción de ruido. [3]

- **Por cambio en amortiguamiento:** Se modelarán casos de daño mediante el cambio de las propiedades de amortiguamiento del material, posteriormente se obtendrá la respuesta dinámica y se procesarán los registros de aceleración mediante el método del decremento logarítmico para localizar el daño en la sección con base en los cambios con respecto a un caso de referencia (sin daño).

Estos modelos serán calibrados mediante pruebas de laboratorio donde el daño se inducirá mediante la adición de piezas artificiales que actuarán incrementando el amortiguamiento en ciertas secciones.

Se espera aportar a la comunidad un modelo de daño para detectar daño en vigas con base en el cambio de amortiguamiento. [4]

- **Transformada Wavelet:** Como técnica avanzada de tratamiento de señales para la discriminación de señales de vibración generadas por estructuras intactas y dañadas.

Esta técnica está muy bien desarrollada y aplicada en otros campos detectándose como una técnica muy válida para este fin. Podemos decir que el análisis de TW es una herramienta fundamental que permite determinar el daño y localizarlo. Se basa mediante el análisis local de una señal.

El análisis Wavelet permite usar grandes intervalos de tiempo para la información de bajas frecuencias y cortos intervalos para la información de altas frecuencias. Una de sus mayores ventajas es la habilidad de realizar un análisis local de la señal.[1]

- **Método de simulación por redes:** Para la modelización de vibraciones en estructuras. El objetivo es introducir este método para tratar de obtener mejoras sobre otros métodos.

Los fundamentos se basan en la elaboración de un modelo en red eléctrica equivalente al proceso físico en estudio y posterior simulación por el programa PSPICE. Es un modelo de red equivalente cuando las ecuaciones diferenciales que la dominan y las ecuaciones de la red elemental son iguales. Esta equivalencia determinará el campo de aplicación del método y establecerá la validez de la red.

Para obtener el modelo de red partiendo de un modelo matemático, se elabora una celda de red elemental, donde las ecuaciones con las variables matemáticas son independientes en el tiempo y la posición, que serán resueltas con el PSPICE.

La asociación de estas redes describirá un proceso en un medio finito donde ser exacto es muy importante para conectar bien cada celda elemental.[1]

El objetivo principal de este proyecto es estudiar la influencia de un daño, con unas determinadas frecuencias de vibración, y situando dicho daño en distintos puntos de una viga uniforme con el fin de detectarlo. Para su estudio, vamos a simular y analizar las vibraciones transversales en una viga.

Nos hemos basado en el “METODO DE SIMULACION POR REDES” (MSR), para la simulación de vibraciones transversales en vigas con daño y el análisis de la respuesta.

Utilizo el programa Pspice para la simulación de la vibración y estudiaré como varía el daño dependiendo de la posición en la que lo situemos en la viga y la frecuencia que le demos a dicha vibración.

1.3 BIBLIOGRAFÍA

[1] Enrique Castro Rodríguez, “Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet”. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2005

[2] Jesús D. Villalba, Ivan D. Gomez², José E. Laier, “Detección de daño en vigas utilizando redes neuronales artificiales y parámetros dinámicos”. Universidad Sao Paulo. 2012

[3] Álvaro Iván Rivera Torres, “Entrenamiento de una red neuronal para la detección de daños en una viga usando frecuencias de anti-resonancia cruzadas”. Proyecto fin de carrera. Universidad de Chile. 2013

[4] Josué H. González Z. y Ramsés Rodríguez R, “Detección de daño en vigas de concreto por cambios en amortiguamiento”. Universidad de Méjico

CAPITULO 2: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 VIBRACIONES EN UNA VIGA

Las vibraciones en una viga pueden ser tanto transversales como longitudinales, fenómeno que se conoce y estudia desde hace mucho tiempo. El estudio de las vibraciones longitudinales comienza con la formulación de Robert Hooke, en 1678, de la ley de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación para sólidos elásticos, que permitió obtener teóricamente la ecuación de las ondas longitudinales en una barra. El estudio de las vibraciones transversales comienza en 1744 con el desarrollo por Leonard Euler y Daniel Bernoulli del primer modelo para estas vibraciones, obteniendo la ecuación de movimiento que las rige y los modos normales para varias condiciones de contorno.

Desde entonces, se han elaborado varias técnicas para la obtención de soluciones teóricas, aunque todas recurren, inevitablemente, a la separación de las variables de de la ecuación, proporcionando una solución temporal y otra espacial que se han de combinar para obtener la solución general.

Las vibraciones longitudinales y transversales en una barra nunca se presentan independientemente. Aunque, en numerosas ocasiones un tipo de vibración predomina sobre el otro, de forma que los efectos de este último son despreciables y podemos considerar únicamente vibraciones longitudinales o transversales.

En este proyecto estudiaremos las vibraciones transversales, deduciremos su ecuación del movimiento estudiando un elemento de la barra y las fuerzas que actúan sobre él, lo que nos proporcionará una visión detallada y comprensible de los procesos que tienen lugar en la barra para que se produzca el movimiento.

No hay una teoría única de las vibraciones transversales sino que, dependiendo de las hipótesis y consideraciones efectuadas, existen diferentes modelos para este fenómeno físico. [1]

2.2 VIBRACIONES TRANSVERSALES

Para estudiar dichas vibraciones, deduciremos la ecuación del movimiento de las vibraciones trasversales considerando un elemento diferencial de la barra y las distintas fuerzas y momento que actúan sobre él.

A diferencia de las vibraciones longitudinales, no hay una teoría única de las vibraciones transversales sino que, dependiendo de las hipótesis y consideraciones efectuadas, existen diferentes modelos para este fenómeno físico.

La dinámica de vibración transversal para vigas se basa en cuatro modelos físicos fundamentales, y estos son:

- *Modelo de Euler- Bernoulli*
- *Modelo de Rayleigh*
- *Modelo de cizalladura ("shear model")*
- *Modelo de Timoshenko*

Los modelos más usados son Euler Bernoulli, por su sencillez a la hora de operar con él, y el modelo de Timoshenko, que es más completo. [1]

2.3 MODELO DE EULER-BERNOULLI

2.3.1 TEORÍA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

La teoría de vigas es una parte de la resistencia de materiales que permite el cálculo de esfuerzos y deformaciones en vigas.

Para el estudio de vigas se considera un sistema de coordenadas en que el eje X es siempre tangente al eje baricéntrico de la viga, y los ejes Y y Z coincidan con los ejes principales de inercia. Los supuestos básicos de la teoría de vigas para la flexión simple de una viga que flexiona en el plano XY son:

1. Hipótesis de comportamiento elástico: El material de la viga es elástico lineal, con módulo de Young E y coeficiente de Poisson despreciable.
2. Hipótesis de la flecha vertical. En cada punto el desplazamiento vertical sólo depende de x : $u_y(x, y) = w(x)$.
3. Hipótesis de la fibra neutra. Los puntos de la fibra neutra sólo sufren desplazamiento vertical y giro: $u_x(x, 0) = 0$.
4. La tensión perpendicular a la fibra neutra se anula: $\sigma_{yy} = 0$.

5. Hipótesis de Bernoulli. Las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares al eje de la viga una vez curvado.

Las hipótesis (1)-(4) juntas definen la teoría de vigas de Timoshenko. La teoría de Euler-Bernouilli es una simplificación de la teoría anterior, al aceptarse la última hipótesis como exacta (cuando en vigas reales es sólo aproximadamente cierta). El conjunto de hipótesis (1)-(5) lleva a la siguiente hipótesis cinemática sobre los desplazamientos:

$$u_x(x, y) = -y\theta \approx (x) = -y \frac{dw}{dx} \quad u_y(x, y) = w(x) \quad [2]$$

2.3.2 DEFORMACIONES Y TENSIONES EN LAS VIGAS

Se calculan las componentes del tensor de deformaciones a partir de estos desplazamientos se llega a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = -y \frac{d^2w}{dx^2} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{du_y}{dy} = 0 \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right)$$

A partir de estas deformaciones se pueden obtener las tensiones usando las ecuaciones de Lamé - Hooke, asumiendo: $\sigma_{yy} = 0, \sigma_{zz} = 0$

$$\sigma_{xx} = -Ey \frac{d^2w}{dx^2} \quad \sigma_{xy} = 0$$

Donde E es el módulo de elasticidad longitudinal, o módulo de Young, y G el módulo de elasticidad transversal.

Es claro que la teoría de Euler-Bernouilli es incapaz de aproximar la energía de deformación tangencial, para tal fin deberá recurrirse a la teoría de Timoshenko en la cual:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} - \theta_z \right) \quad [2]$$

2.3.3 ESFUERZOS INTERNOS EN VIGAS

A partir de los resultados anteriores y de las ecuaciones de equivalencia pueden obtenerse sencillamente el esfuerzo normal, el esfuerzo cortante y el momento flector al que está sometida una sección de una viga sometida a flexión simple en la teoría de Euler-Bernouilli:

$$N_x = \int_{\Sigma} \sigma_{xx} dydz = 0$$

$$V_y = \int_{\Sigma} \sigma_{xy} dydz = 2GA \frac{dw}{dx}$$

$$M_{\approx} = \int_{\Sigma} y\sigma_{xx} dydz = EI_z \frac{d^2w}{dx^2}$$

Donde, A área de la sección transversal, I_z el momento de inercia según el eje respecto al cual se produce la flexión. La última de estas ecuaciones es precisamente la ecuación de la curva elástica, una de las ecuaciones básicas de la teoría de vigas que relaciona los esfuerzos internos con el campo de desplazamientos verticales. [2]

2.3.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Las ecuaciones de equilibrio para una viga son la aplicación de las ecuaciones de la estática a un tramo de viga en equilibrio. Las fuerzas que intervienen sobre el tramo serían la carga exterior aplicada sobre la viga y las fuerzas cortantes actuantes sobre las secciones extremas que delimitan el tramo.

Si el tramo está en equilibrio eso implica que la suma de fuerzas verticales debe ser cero, y además la suma de momentos de fuerza a la fibra neutra debe ser cero en la dirección tangente a la fibra neutra. Estas dos condiciones sólo se pueden cumplir si la variación de esfuerzo cortante y momento flector están relacionada con la carga vertical por unidad de longitud mediante:

$$\frac{\partial V_y(x)}{\partial x} = p_y(x) \quad \frac{\partial M_z(x)}{\partial x} = V_y(x) \quad [2]$$

2.3.5 CÁLCULO DE TENSIONES EN VIGAS

El cálculo de tensiones en vigas generalmente requiere conocer la variación de los esfuerzos internos y a partir de ellos aplicar la fórmula adecuada según la viga esté sometida a flexión, torsión, esfuerzo normal o esfuerzo cortante. El tensor tensión de una viga viene dado en función de los esfuerzos internos por:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma & T_y & T_z \\ T_y & 0 & 0 \\ T_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde las tensiones pueden determinarse, aproximadamente, a partir de los esfuerzos internos.

Si se considera un sistema de ejes principales de inercia sobre la viga, considerada como prisma mecánico, las tensiones asociadas a la extensión, flexión, cortante y torsión resultan ser:

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} + \omega \frac{B_\omega}{I_\omega}$$

$$T_y = T_{y,cort} + T_{y,tor} \quad T_z = T_{z,cort} + T_{z,tor}$$

Donde:

- $\sigma, T_{i,tor}, T_{i,cort}$: Son las tensiones sobre la sección transversal: tensión normal o perpendicular, y las tensiones tangenciales de torsión y cortante.
- $N_x; M_y; M_z; B_\omega$, son los esfuerzos internos: esfuerzo axial, momentos flectores y bimomento asociado a la torsión.
- $A; I_y; I_z; \omega; I_\omega$, son propiedades de la sección transversal de la viga: área, segundos momentos de área (o momentos de inercia), alabeo y momento de alabeo.

Las máximas tensiones normal y tangencial sobre una sección transversal cualquiera de la viga se pueden calcular a partir de la primera ($\sigma_I \geq 0$) y tercera ($\sigma_{III} \leq 0$) tensión principal:

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (\tau_y^2 + \tau_z^2)} \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (\tau_y^2 + \tau_z^2)}$$

$$\sigma_{max} = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{III}|) \quad \tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

En vigas metálicas frecuentemente se usa como criterio de fallo el que en algún punto la tensión equivalente de Von Mises supere una cierta tensión última definida a partir del límite elástico, en ese caso, el criterio de fallo se puede escribir como:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}{2}} = \sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_y^2 + \tau_z^2)} > \sigma_u \quad [2]$$

2.3.6 MATERIALES UTILIZADOS

A lo largo de la historia, las vigas se han realizado de diversos materiales. El más idóneo de los materiales tradicionales ha sido la madera, puesto que puede soportar grandes esfuerzos de tracción, lo que no sucede con otros materiales tradicionales pétreos y cerámicos, como el ladrillo.

La madera sin embargo es material ortotrópico que presenta diferentes rigideces y resistencias según los esfuerzos aplicados sean paralelos a la fibra de la madera o transversales. Por esa razón, el cálculo moderno de elementos de madera requiere bajo sollicitaciones complejas un estudio más completo que la teoría de Navier-Bernoulli, anteriormente expuesta.

A partir de la revolución industrial, las vigas se fabricaron en acero, que es un material isótropo al que puede aplicarse directamente la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

El acero tiene la ventaja de ser un material con una relación resistencia/peso superior a la del hormigón, además de que puede resistir tanto tracciones como compresiones mucho más elevadas.

A partir de la segunda mitad del siglo XIX, en arquitectura, se ha venido usando hormigón armado y algo más tardíamente el pretensado y el

postensado. Estos materiales requieren para su cálculo una teoría más compleja que la teoría de Euler-Bernoulli. [2]

2.3.7 BARRA APOYADA EN LOS DOS EXTREMOS

En este caso las condiciones de contorno, desplazamiento y momento son nulos en cada extremo:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=0,t} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=L,t} = 0 \end{cases}$$

Y la condición de normalización, se obtiene que sus modos de vibración son:

$$Y_n(x) = \sin(\beta_n x)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación del movimiento para las vibraciones transversales forzadas es:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t)$$

Se puede asumir que la solución $y(x, t)$ es susceptible de ser desarrollada en función de los modos normales de vibración $Y_n(t)$ y de funciones temporales $q_n(t)$. [1]

2.4 VIBRACIONES TRANSVERSALES EN UNA VIGA DE TIMOSHENKO

2.4.1 TEORÍA DE LA VIGA DE TIMOSHENKO

La teoría de la viga de Timoshenko fue desarrollado por el científico de origen ucraniano Stephen Timoshenko a principios del siglo XX. El modelo tiene en cuenta la deformación por cizallamiento, por lo que es adecuado para describir el comportamiento de las vigas cortas, sándwich compuesto vigas o vigas sujetas a alta frecuencia de excitación cuando la longitud de onda se aproxima al espesor de la viga.

La ecuación resultante es de 4^o orden, pero a diferencia de teoría de la viga ordinaria, es decir, la teoría de Bernoulli-Euler, también hay que tener en cuenta la segunda derivada espacial. Ya que los mecanismos adicionales de deformación efectiva disminuyen la rigidez de la viga, mientras que el resultado es una mayor deflexión bajo una carga estática y menores predichos frecuencias propias para un conjunto dado de condiciones de contorno.

Este último efecto es más notable para las frecuencias más altas como la longitud de onda se hace más corta, y por lo tanto disminuye la distancia entre las fuerzas opuestas de cizallamiento.

Si el módulo de corte del material de la viga se acerca al infinito y por lo tanto el haz se vuelve rígido en la corte y si los efectos de rotación de inercia se dejan de lado, Timoshenko converge hacia la teoría de la viga ordinaria.

En estática, teoría de Timoshenko sin efectos axiales, los desplazamientos de la viga, se asume que se da por:

$$u_x(x, y, z) = -z\varphi(x); \quad u_y(x, y, z) = 0; \quad u_z(x, y) = w(x)$$

Donde (x, y, z) son las coordenadas de un punto en el haz, u_x, u_y, u_z son los componentes del vector de desplazamiento en las tres direcciones de coordenadas, φ es el ángulo de rotación de la normal a la superficie media de la viga, y w es el desplazamiento de la superficie media en el Z -Dirección.

Las ecuaciones que rigen el sistema son las siguientes desacopladas de las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q(x, t)$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{kAG} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

Donde,

- A es el área de sección transversal.
- E es el módulo elástico.
- G es el módulo de cizallamiento.
- I es el momento de inercia.
- k , llamado el coeficiente de cizallamiento Timoshenko, depende de la geometría. Normalmente, $k = 5/6$ para una sección rectangular.
- $q(x, t)$ es una carga distribuida (fuerza por unidad de longitud).

La teoría de Timoshenko para el caso estático es equivalente a la teoría de Euler-Bernoulli cuando el último término anterior se descuida, una aproximación que es válida cuando:

$$\frac{EI}{kL^2AG} \ll 1$$

Donde, L es la longitud de la viga.

Combinando las dos ecuaciones da, para un haz homogéneo de sección transversal constante,

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{kAG} \frac{d^2q}{dx^2} \quad [2]$$

2.4.2 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES CUASISTÁTICOS TIMOSHENKO

A partir de los supuestos cinemáticos para una viga Timoshenko, los desplazamientos de la viga están dados por:

$$u_x(x, y, z, t) = -z\varphi(x, t); u_y(x, y, z, t) = 0; u_z(x, y, z, t) = w(x, t)$$

Luego, a partir de las relaciones tensión-desplazamiento para pequeñas deformaciones, las deformaciones que no son cero sobre la base de los supuestos de Timoshenko son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Dado que la deformación real de cizallamiento en el haz no es constante sobre la sección transversal se introduce un factor de corrección k de tal manera que;

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} k \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

La variación en el interior de la energía del haz es:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_L \int_A (\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dA dL = \\ &= \int_L \int_A \left[-z\sigma_{xx} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + \sigma_{xz} k \left(-\delta\varphi + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \right] dA dL \end{aligned}$$

Definir,

$$M_{xx} := \int_A z\sigma_{xx} dA; Q_x := k \int_A \sigma_{xz} dA$$

Entonces,

$$\delta U = \int_L \left[-M_{xx} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + Q_x \left(-\delta\varphi + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \right] dL$$

La integración por partes, y observando que debido a las condiciones de contorno de las variaciones son cero en los extremos de la viga, conduce a,

$$\delta U = \int_L \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) \delta\varphi - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w \right] dL$$

La variación en el trabajo externo realizado sobre la viga por una carga transversal $q(x,t)$ por unidad de longitud es,

$$\delta W = \int_L q \delta w dL$$

Entonces, para un haz de cuasiestático, el principio del trabajo virtual da,

$$\delta U = \delta W \Rightarrow \int_L \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) \delta\varphi - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + q \right) \delta w \right] dL = 0$$

Las ecuaciones que rigen para la viga son, desde el teorema fundamental del cálculo de variaciones,

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q = 0$$

Para una viga elástica lineal,

$$M_{xx} = \int_A z \sigma_{xx} dA = \int_A z E \varepsilon_{xx} dA = - \int_A z^2 E \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA = -EI \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$Q_x = \int_A \sigma_{xz} dA = \int_A 2G \varepsilon_{xz} dA = \int_A kG \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA = kAG \left(-\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Por lo tanto las ecuaciones que rigen para el haz puede ser expresado como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] + q = 0$$

Combinando las dos ecuaciones da:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = q$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi - \frac{1}{kAG} \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad [2]$$

2.4.3 DINÁMICA DE LA VIGA DE TIMOSHENKO

En teoría de Timoshenko sin efectos axiales, los desplazamientos de la viga se asume que se da por

$$u_x(x, y, z, t) = -z\varphi(x, t); \quad u_y(x, y, z, t) = 0; \quad u_z(x, y, z, t) = w(x, t)$$

Donde (x, y, z) son las coordenadas de un punto en el haz, u_x, u_y, u_z son los componentes del vector de desplazamiento en las tres direcciones de

coordenadas, φ es el ángulo de rotación de la normal a la superficie media de la viga, y w es el desplazamiento de la superficie media en el Z -Dirección.

Partiendo de la premisa anterior, la teoría de Timoshenko, lo que permite a las vibraciones, se puede describir con los acoplados lineales ecuaciones en derivadas parciales acopladas:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)]$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)$$

Donde las variables dependientes son $w(x, t)$, el desplazamiento de traslación de la viga, y $\varphi(x, t)$ el desplazamiento angular.

Además:

- ρ es la densidad del material de la viga (pero no la densidad lineal).
- A es el área de sección transversal.
- E es el módulo elástico.
- G es el módulo de cizallamiento.
- I es el momento de inercia.
- k , llamado el coeficiente de cizallamiento Timoshenko, depende de la geometría. Normalmente, $k = 5/6$ para una sección rectangular.
- $q(x, t)$ es una carga distribuida (fuerza por unidad de longitud).

Estos parámetros no son necesariamente constantes.

Para un elástico lineal, haz isotrópico, homogéneo de sección transversal constante estas dos ecuaciones se pueden combinar para dar:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{EI m}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Jm}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = q(x, t) + \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad [3][4][5][6]$$

2.4.4 ECUACIONES DE DERIVACIÓN DEL HAZ COMBINADO TIMOSHENKO

Las ecuaciones que rigen la flexión de una viga homogénea Timoshenko de sección transversal constante son:

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = kAG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + q(x, t); \quad m := \rho A$$

$$(2) \quad J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right); \quad J := \rho I$$

De la ecuación (1), suponiendo suavidad apropiada,

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{m}{kAG} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{q}{kAG}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = m \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - kAG \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \right)$$

De (3), suponiendo suavidad apropiado,

$$(5) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = - \frac{m}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

Diferenciando la ecuación (2) da:

$$(6) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} = \frac{EI}{J} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{kAG}{J} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

De las ecuaciones (4) y (6),

$$(7) \quad \frac{1}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{m}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{EI}{J} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{kAG}{J} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

De las ecuaciones (3) y (7),

$$(8) \quad \frac{1}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{m}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{EI}{J} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{m}{J} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{J}$$

Tapando ecuación (5) en (8) da:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{mJ}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\ = -\frac{mEI}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \end{aligned}$$

Reorganizar para obtener:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{mEI}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = q + \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad [3][4][5][6] \end{aligned}$$

2.4.5 EFECTOS AXIALES

Si los desplazamientos de la viga están dadas por:

$$u_x(x, y, z, t) = u_0(x, t) - z\varphi(x, t); \quad u_y(x, y, z, t) = 0; \quad u_z(x, y, z) = w(x, t)$$

Donde u_0 es un desplazamiento adicional en el X Dirección, entonces las ecuaciones de gobierno de una viga de Timoshenko tomar la forma:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] + q(x, t)$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = N(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)$$

Donde $J = \rho I$ y $N(x, t)$ es una fuerza axial aplicada externamente. Cualquier fuerza axial externa está equilibrada por la tensión resultante:

$$N_{xx}(x, t) = \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz$$

Donde σ_{xx} es la tensión axial y el espesor de la viga se ha supuesto que ser $2h$.

La ecuación del haz combinado con efectos de fuerza axial se incluye:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{mEI}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = q + \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad [3][4][5][6] \end{aligned}$$

2.4.6 AMORTIGUAMIENTO

Si, además de las fuerzas axiales, suponemos una fuerza de amortiguación que es proporcional a la velocidad con la forma:

$$\eta(x) \frac{\partial w}{\partial t}$$

Las ecuaciones acopladas que rigen para una viga de Timoshenko tomar la forma:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta(x) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] + q(x, t)$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = N \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right)$$

Y la ecuación combinada se convierte:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(J + \frac{mEI}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{J\eta(x)}{kAG} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta(x)) \frac{\partial w}{\partial t} = q + \frac{J}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad [3][4][5][6]$$

2.4.7 COEFICIENTE DE CIZALLAMIENTO

Determinación del coeficiente de corte no es sencilla (ni se los valores determinados ampliamente aceptado, es decir, hay más de una respuesta), por lo general se debe cumplir:

$$\int_A \tau dA = kAG\varphi$$

El coeficiente de cizallamiento es dependiente de la relación de Poisson. Los enfoques de las expresiones más precisas son tomados por muchos científicos, entre ellos Stephen Timoshenko, Raymond D. Mindlin, Cowper GR, John W. Hutchinson, etc.

En las prácticas de ingeniería, las expresiones proporcionadas por Stephen Timoshenko son lo suficientemente buenos para los casos generales.

Para sólido rectangular de sección transversal,

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$$

Para circular sección transversal maciza,

$$k = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu} \quad [3][4][5][6]$$

2.5 DIFERENCIA ENTRE LA TEORÍA DE TIMOSHENKO Y LA TEORÍA DE EULER-BERNOULLI

La diferencia fundamental entre la teoría de Euler-Bernoulli y la teoría de Timoshenko es que en la primera el giro relativo de la sección se aproxima mediante la derivada del desplazamiento vertical, esto constituye una aproximación válida sólo para piezas largas en relación a las dimensiones de la sección transversal, y entonces sucede que las deformaciones debidas al esfuerzo cortante son despreciables frente a las deformaciones ocasionadas por el momento flector. [7]

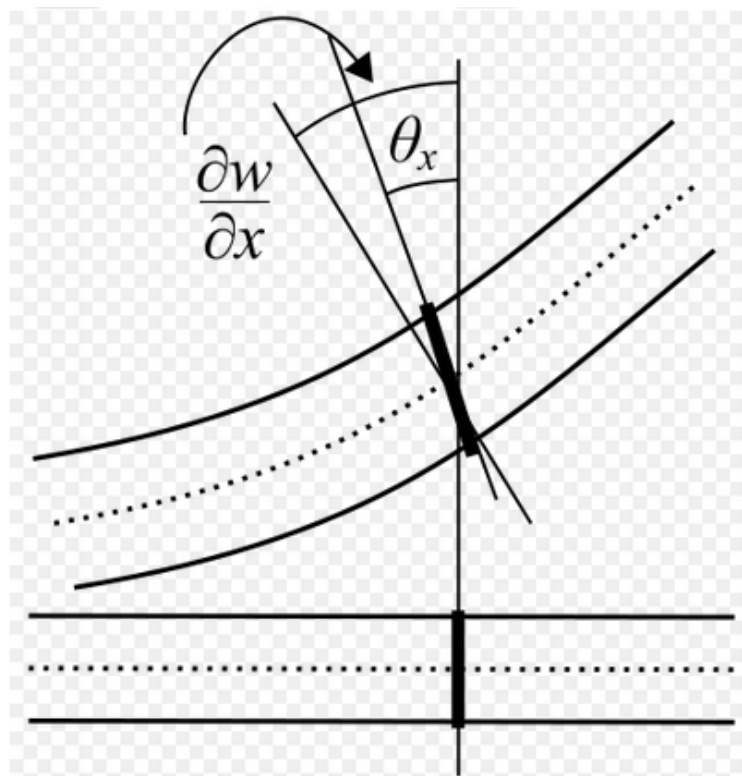


Ilustración 1: Esquema de la deformación de una viga que ilustra la diferencia entre la **teoría de Timoshenko** y la **teoría de Euler-Bernoulli**.

2.6 BIBLIOGRAFÍA

[1] Enrique Castro Rodríguez, “Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet”. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2005.

[2] Monleón Cremades, S., *Análisis de vigas, arcos, placas y láminas*, Ed. UPV, 1999.

[3] Timoshenko, SP, 1921, *En el factor de corrección para el corte de la ecuación diferencial para las vibraciones de las barras transversales de sección transversal uniforme*, Philosophical Magazine, p. 744.

[4] Timoshenko, SP, 1922, *en las vibraciones de las barras transversales de sección transversal uniforme*, Philosophical Magazine, p. 125.

[5] Thomson, WT, 1981, Teoría de vibraciones con aplicaciones

[6] Rosinger, HE y Ritchie, IG, 1977, *en la corrección de Timoshenko para el corte en el vibrante vigas isotrópicos*, J. Phys. D: Appl. Phys., vol. Pp 10, 1461-1466.

[7] Timoshenko, Stephen; Godier J.N..McGraw-Hill. ed. Theory of elasticity.

CAPÍTULO 3: MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES “MSR”

3.1 MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES “MSR”

Este método se basa en la elaboración de un modelo en red eléctrica equivalente al proceso físico en estudio, y su posterior simulación mediante un programa de resolución de circuito. Se considera un modelo en red equivalente al proceso físico estudiado cuando las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan y las ecuaciones de la red elemental coinciden. Esta equivalencia determinará el campo de aplicación del método y establecerá la validez del modelo en red. La técnica deriva de las teorías de Peusner, conocidas como *Termodinámica de redes*, y en ningún caso debe ser confundido con la tradicional y clásica analogía electro-magnética. El MSR es en esencia y en desarrollo, un método numérico.

Para obtener el modelo en red se elabora la celda en red elemental, es decir, la correspondiente al proceso localizado en un volumen elemental. Para ello, las ecuaciones matemáticas con las variables independientes posición y tiempo, son discretizadas según la metodología de diferencias finitas, respecto de la variable posición, quedando continua la variable tiempo. Esta dependencia es finalmente resuelta por el programa PSPICE.

La asociación de tales redes elementales describirá el proceso en un medio finito, siendo la descripción tanto más exacta cuanto mayor sea el número de celdas elementales conectadas. El método tiene la ventaja de que el Pspice es un sofisticado programa de simulación de redes, de altas prestaciones, con continuos reajustes del tamaño de paso, y con compensación automática de situaciones de “overflow” y “underflow”.

El MSR ha sido usado para la resolución de problemas tanto lineales como no lineales en diferentes procesos físicos, de los que resaltaremos su aplicación al estudio de procesos de electrodo, fenómenos de transporte de membranas y fenómenos de transferencia de calor, en todos ellos con excelentes resultados. [1]

3.2 PSPICE

Una de las bases del MSR son los programas de simulación de circuitos, que se ejecutan con el programa PSPICE. Dicho programa es el que hemos utilizado para la simulación del daño en este proyecto.

El software PSpice se programa, con un lenguaje sencillo sin disposiciones especiales para la ordenación de datos, este programa realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente advirtiéndonos de los posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución.

También admite la programación a través de una interfaz gráfica (aplicación *Schematics*), que construye y ejecuta los programas de análisis, aumentando rapidez de programación y la versatilidad del método en determinadas aplicaciones.

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red. Esta contiene:

- a) Las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de mono puertas
- b) Las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, propias de la teoría de circuitos, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito.
- c) La información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo, dando lugar toda esta información a un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales.

A continuación exponemos una breve explicación tanto teórica como esquemática del funcionamiento de este programa.

En el análisis de continua PSPICE determina el punto de trabajo, es decir, los valores de polarización de sus componentes en ausencia de excitaciones alternas. Para el análisis transitorio PSPICE parte del intervalo de tiempo $(0,t)$ solicitado, que puede ser menor o mayor que la duración del transitorio, y facilita los datos en forma de listado o mediante gráficas. Si los resultados se quieren en forma tabular el usuario debe indicar el instante inicial, el final, el paso temporal y el número de variables listadas; si se solicitan en forma gráfica, una simple sentencia de programa permite organizarlos y almacenarlos para ser utilizados con ese propósito en cada momento.

Los algoritmos utilizados en PSPICE, son el resultado de implementaciones, modificaciones y comparaciones cuidadosas de los métodos numéricos existentes en el contexto especial de la simulación especial de circuitos.

En el proceso de simulación el circuito se presenta al ordenador como un conjunto de ecuaciones matemáticas, que mediante procedimientos de análisis numérico, nos proporciona la información que buscamos.

Un usuario principalmente necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

El programa se estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito (aunque existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos), resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc., que se introducen uno a uno indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos.

Una vez obtenido todos los datos se puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito con medidas reales.

La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales, que interaccionan entre ellos a través de una estructura de datos que es almacenada en un área común del programa.

Estos subprogramas son:

- *Entrada*
- *Organización*
- *Análisis*
- *Salida*
- *Utilidades*

El modelo de utilización del programa:

- **Formulación del problema y plan de estudio:** Hay que definir de manera correcta los objetivos, detalles específicos que se quieren cubrir, alternativas de diseño y de los criterios de evaluación.
- **Recolección de datos y definición del modelo:** La Información y los datos deben de ser guardados a la medida de lo posible para ser usados en la determinación de aspectos operativos y de las distribuciones de las variables aleatorias usadas en el modelo.
- **¿Valido?:** La validación la vamos a efectuar a lo largo de todo el estudio.
- **Construcción del programa y verificación:** Hay que decidir que lenguaje usar.
- **Corridas piloto:** Se hacen para validar el modelo verificado y lo veremos con más detalle más adelante.

- **Diseño de experimentos:** Hay que decidir que diseños del sistema se simularan y en cada caso hay que decidir sobre el tiempo de corrida de la simulación, las condiciones iniciales, la longitud del estado transitorio, y el número de replicaciones.
- **Corridas de producción:** Son para producir datos para medir el desempeño de los diseños de interés.
- **Análisis de salidas:** Es unas técnicas estadísticas son usadas para analizar las salidas de las corridas de producción.
- **Documentación, presentación e implementación de los resultados:** Es importante documentar los supuestos realizados así como el programa mismo. [1]

3.3 MODELO EN RED DE TIMOSHENKO

3.3.1 CONSTRUCCIÓN CELDAS ELEMENTALES

Las ecuaciones del movimiento, en forma adimensional, para las vibraciones transversales en el modelo de Timoshenko son:

$$\frac{1}{\beta} V - \frac{\partial M}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

con las ecuaciones constitutivas:

$$V = \frac{\partial y}{\partial x} - \Psi \quad (2.3)$$

$$M = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.4)$$

Se trata de dos ecuaciones del movimiento acopladas, tanto directamente entre sí como a través de las ecuaciones constitutivas.

Como tenemos dos ecuaciones del movimiento, es necesario construir dos celdas elementales, una para cada ecuación, con sus variables flujo y potencial correspondientes.

Así, para la primera celda elemental, elaborada a partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3), elegimos como variable potencial el desplazamiento transversal de la barra, y como variable flujo la fuerza transversal, mientras para la segunda celda elemental, elaborada a partir de las ecuaciones (2.1) y (2.4), tomamos como variable potencial el ángulo de torsión de la barra, y como variable flujo el momento de torsión de la barra.

A efectos de notación, llamaremos a la celda elemental correspondiente a la ecuación (2.2) celda a , mientras que a la celda elemental correspondiente a la ecuación (2.1) celda b , y los flujos y potenciales de dicha celda se notarán como:

$$\Phi^a \rightarrow y \quad J^a \rightarrow V \quad (2.5)$$

$$\Phi^b \rightarrow \Psi \quad J^b \rightarrow M \quad (2.6)$$

Así, para la construcción de la celda a partimos de la ecuación:

$$\frac{\partial J^a}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Dado que la forma de la ecuación (2.7) es idéntica a la de la ecuación (2.5), la celda elemental será la misma que la los circuitos auxiliares, salvo por el valor de los parámetros y por el circuito auxiliar que proporciona $J_{i\pm\Delta}^a$.

Para obtener $J_{i\pm\Delta}^a$ partimos de la ecuación:

$$J^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial x} - \Phi^b \quad (2.8)$$

que al aproximarla por diferencias finitas queda en la forma:

$$J_{i+\Delta}^a = \frac{\Phi_{i+1}^a - \Phi_i^a}{\Delta x} - \Phi_{i+\Delta}^b$$

$$J_{i-\Delta}^a = \frac{\Phi_i^a - \Phi_{i-i}^a}{\Delta x} - \Phi_{i-\Delta}^b \quad (2.9)$$

que son las expresiones que proporcionan el flujo para las fuentes de flujo situadas a izquierda y derecha del nodo i .

A continuación, se muestra la celda elemental a y sus circuitos auxiliares.

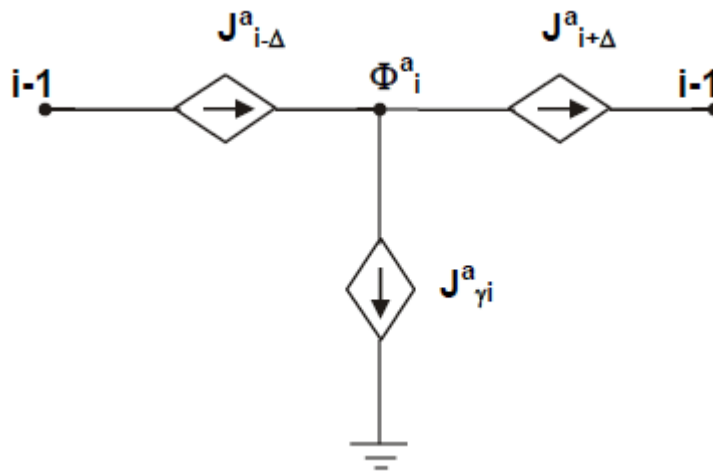


Ilustración 2: Celda elemental a correspondiente a la ecuación (2.2). Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral.

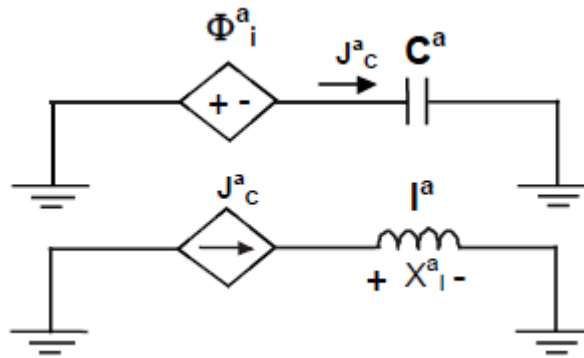


Ilustración 3: Circuitos auxiliares de la celda elemental a . Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral.

La celda b se construye a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\beta} J^a - \frac{\partial J^b}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi^b}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

que al discretizarla queda como:

$$\frac{\Delta x}{\beta} J_{i+\Delta}^a - J_{i+1}^b + J_i^b - \Delta x \alpha \frac{\partial^2 \Phi^b}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

En las siguientes figuras se tiene la celda elemental b con sus circuitos auxiliares. Hay que señalar que, debido a la forma en que se encuentran acopladas las ecuaciones 2.1 y 2.4, las variables Φ^a y Φ^b no corresponden a los mismos puntos de la barra, sino que Φ^a se localiza en los nodos que hemos notado como i , que se encuentran en las posiciones $x=i\Delta x$, mientras que Φ^b se localiza en los nodos $i\pm\Delta$, que se encuentran en las posiciones $x=(i\pm 1/2)\Delta x$.

Del mismo modo, la variable J^b se localiza en los nodos $i\pm\Delta$, igual que Φ^b , y J^a en los nodos i , los mismos que Φ^a .

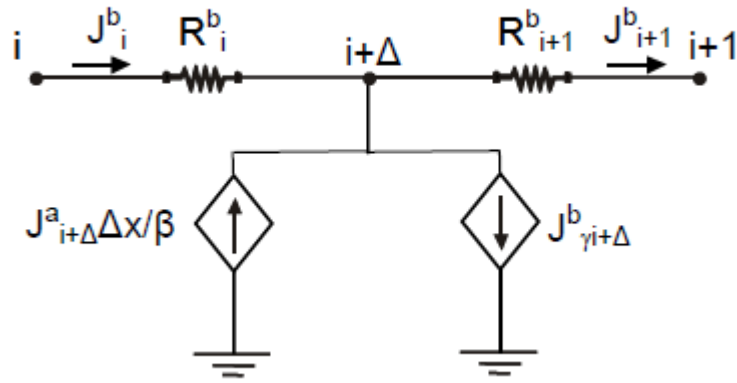


Ilustración 4: Celda elemental b correspondiente a la ecuación (2.1). Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral.

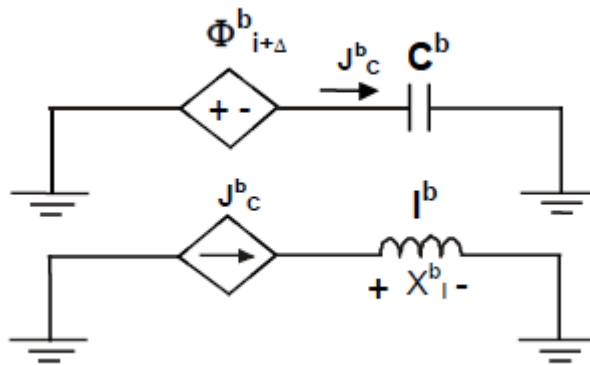


Ilustración 5: Circuitos auxiliares de la celda elemental b . Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral.

El modelo en red se construye mediante la conexión en cascada de dos celdas elementales a , en paralelo con la conexión en cascada de las celdas elementales b .

Las condiciones de contorno se incorporan a las celdas situadas en los extremos según corresponda, como se realiza en las secciones siguientes al estudiar la barra con los dos extremos apoyados y la barra amordazada-carga másica.

Del mismo modo que al llevar a cabo la simulación de las vibraciones longitudinales y las transversales con el modelo de Euler-Bernouilli, al construir los modelos en red y simular las vibraciones transversales con el modelo de Timoshenko hemos trabajado con $N=150$, esto es, 150 celdas elementales a conectadas entre sí en paralelo con 150 celdas elementales b conectadas entre sí.

Para los parámetros de las ecuaciones,

$$\frac{1}{\beta}V - \frac{\partial M}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

hemos utilizado los mismos valores que *Ekwaro-Osire et al* [2] en,

$$M_0 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{\Delta x^2} = 0$$

$$M_N = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{\Delta x^2} = 0$$

que son $\alpha = 0.19695$ y $\beta = 0.00305$.

A modo de síntesis, en la siguiente tabla se especifica el valor de los distintos parámetros del circuito de cada celda elemental. [1]

Tabla 1: Valores de los distintos parámetros de las celdas elementales a y b y expresiones de las fuentes de flujo de la celda a. Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral.

<i>Celda elemental a</i>		<i>Celda elemental b</i>	
$C^a = (\beta \Delta x)^{1/2}$	$I^a = (\beta \Delta x)^{1/2}$	$C^b = (\alpha \Delta x)^{1/2}$	$I^b = (\alpha \Delta x)^{1/2}$
$J_{i+\Delta}^a = \frac{\Phi_{i+1}^a - \Phi_i^a}{\Delta x} - \Phi_{i+\Delta}^b$	$J_{i-\Delta}^a = \frac{\Phi_i^a - \Phi_{i-i}^a}{\Delta x} - \Phi_{i-\Delta}^b$	$R_i^b = \Delta x/2$	$R_{i+1}^b = \Delta x/2$

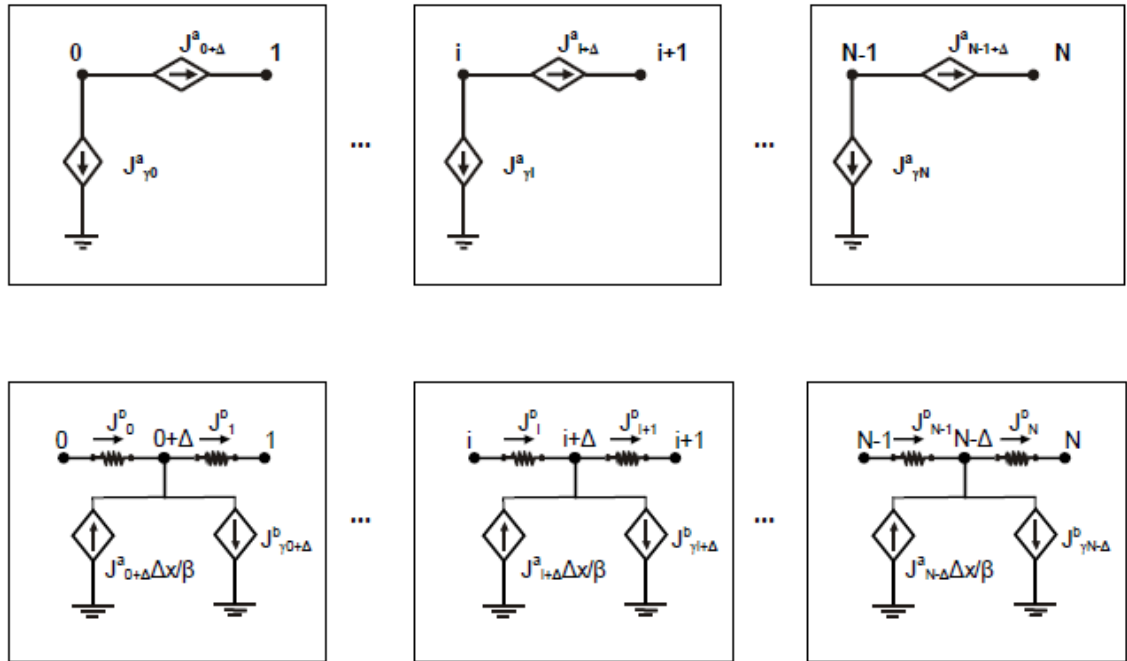


Ilustración 6: Conexión de las celdas elementales del modelo de Timoshenko. Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral. [1]

3.3.2 MODELO EN RED DE UNA VIGA APOYADA EN LOS DOS EXTREMOS

Las condiciones de contorno de esta barra consisten en que el desplazamiento y el momento son nulos en los extremos.

$$y(0, t) = 0 \quad y(1, t) = 0 \quad M(0, t) = 0 \quad M(1, t) = 0$$

Con ello, en esta barra se cumple que:

$$\text{sen}(a)\text{senh}(b) = 0 \quad \text{sen}(a)\text{sen}(\tilde{b}) = 0$$

Por lo que:

$$a_n = n\pi \quad \tilde{b}_n = n\pi$$

Y los modos de vibración tienen la forma:

$$Y(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}(ax) \\ \frac{-a^2 + \omega^2 \beta}{a} \cos(ax) \end{array} \right\}$$

$$N = \int_0^1 YM(Y)dx = \frac{\beta + \alpha\beta(-a^2 + \beta\omega^2)/a}{2}$$

Las relativas al desplazamiento se imponen sobre la celda elemental a , conectando los extremos de la celda inicial y final a tierra, mientras que las relativas al momento de torsión se especifican en la celda elemental b haciendo que las resistencias R_0^b y R_N^b tengan un valor infinito. [1]

Por tanto, el modelo en red queda de la siguiente forma:

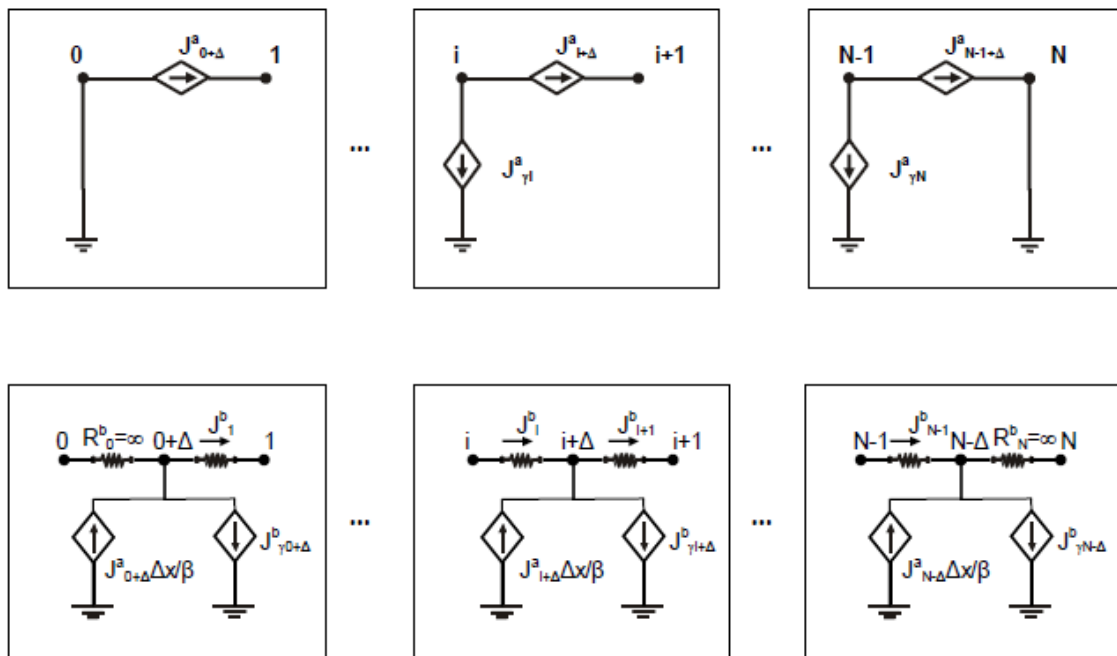


Ilustración 7: Modelo en red para la barra apoyada en los dos extremos. Fuente: Enrique Castro Rodríguez, "Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet". Tesis doctoral. [1]

3.4 INTRODUCCIÓN DEL DAÑO

3.4.1 COMO SE METE EL DAÑO EN EL PROGRAMA PSpICE

Como ya hemos dicho, el objetivo principal de este proyecto es estudiar la influencia de un daño, con unas determinadas frecuencias de vibración, y situando dicho daño en distintos puntos de una viga uniforme con el fin de detectarlo. Para su estudio, utilizamos el programa Pspice.

Llamaremos, a , a la longitud relativa del daño, a la cual le hemos dado un valor de 0,6. Esto quiere decir que nuestro daño afecta al 60% de la anchura de la viga.

Para introducir el daño en el programa tendremos que multiplicar por C_q y C_m en el punto donde queremos que se produzca.

$$\Delta v = C_q kGA \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right) \Big|_{x=L} \quad [3]$$

$$\Delta \psi = C_m EI \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad [3]$$

Donde C_q y C_m ;

$$C_q = \frac{W}{EA} q \quad [3]$$

$$C_m = \frac{W}{EA} \Theta \quad [3]$$

Donde, $q(\alpha)$ y $\Theta(\alpha)$ son funciones que dependen de la longitud relativa a , donde $a = \alpha$:

$$q(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 (-0.22 + 3.82\alpha + 1.54\alpha^2 - 14.64\alpha^3 + 9.60\alpha^4) \quad [3]$$

$$\Theta(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 (5.93 - 19.69\alpha + 37.14\alpha^2 - 35.84\alpha^3 + 13.12\alpha^4) \quad [3]$$

Para estudiar cómo afecta el daño a la viga lo cambiaremos de posición. En este proyecto lo vamos a poner en cinco puntos distintos de la viga a estudiar cómo afecta tanto la posición como la frecuencia.

3.5 BIBLIOGRAFÍA

[1] Enrique Castro Rodríguez, “Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el Método de Redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet”. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2005

[2] S.Ekwaro-Osire, D.H.S. Maithripala, j.M. Berg “A series expansion approach to interpreting the spectra of the Timoshenko beam”. Journal of sound and Vibration, 240, pp. 667-678 (2001)-

[3] Journal of sound and Vibration, Volumen 290, 2006, Pag 640-653

CAPITULO 4: SIMULACIONES Y RESULTADOS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos vamos a centrar en la evaluación del daño, y como este daño nos afecta a la estructura que vamos a colocar, que en este caso es una viga.

Tenemos una viga de variables adimensionales, supongamos 1 metro de anchura, y estará dividida en 150 partes, vamos a seleccionar 5 puntos donde estudiar cómo afecta el daño; primero haremos la simulación para una viga sin daño y luego poniendo un daño en los puntos seleccionados para ver como este afecta a la viga.

Vamos a estudiar cómo afecta el daño cambiando la frecuencia de vibración, las frecuencias que hemos escogido son:

- $v=5$
- $v=10$
- $v=15$
- $v=25$
- $v=40$

Una vez elegidos los puntos que vamos a estudiar bajo un criterio concreto y adecuado estudiaremos el daño que se produce en esos puntos.

En este caso hemos elegido cinco puntos de los 150 posibles que son:

- 10
- 50
- 75
- 100
- 125

A la posición de los puntos la llamaremos x .

Cuando hemos definido los puntos de estudio, voy a proceder a evaluar el daño que producen solo estos puntos en nuestra viga. Primero lo haremos solo en 4 puntos de esta y empezaremos haciendo la simulación sin daño. Estos cuatro puntos serán:

- 15
- 50
- 90
- 125

4.2 SIMULACIONES PROGRAMA PSPICE

Como ya hemos dicho anteriormente vamos a estudiar cómo afecta un daño a una viga. Primero dividimos la viga en 150 partes, de éstas hemos seleccionado cinco puntos donde estudiaremos la vibración cuando no hay daño y cuando si lo hay.

El daño puede definirse de forma general como un cambio producido en el sistema que afecta adversamente a su funcionamiento actual o futuro. La premisa básica para la detección de daño basada en vibraciones es que este alterará significativamente las propiedades de rigidez, masa o energía de un sistema que, como consecuencia, alterará su respuesta dinámica.

Cuando hacemos la simulación sin daño no ponemos ni C_q , ni C_m ya que este es nulo.

En este proyecto lo que se intenta explicar es como puede afectar el daño a una viga dependiendo de donde lo pongamos y dependiendo de la frecuencia de vibración que se le dé, y aplicando una fuerza senoidal de 100N. Lo vamos a estudiar en cinco puntos que son: 10, 50, 75, 100 y 125

Vamos en primer lugar a proceder a abrir el archivo en formato (*.cir), vamos a la barra de tareas donde pone simulación hacemos doble clic y dejamos correr el programa.

Cuando el programa termina de hacer la simulación, genera un nuevo archivo con el formato (*.out) donde estarán los datos que nos harán falta para el estudio; para así de este obtener todos los valores de vibraciones de nuestro punto de estudio mediante el MODELO DE TIMOSHENKO, y un archivo con el formato (*.dat) donde aparece la gráfica de los datos.

Empezaremos a simular el daño, por ejemplo, en el punto número 10 de nuestra viga, primero sin daño y luego situando el daño en dicho punto y vemos como varían los datos que nos proporciona el programa. Para situar el daño en este punto, tenemos que colocar C_q y C_m .

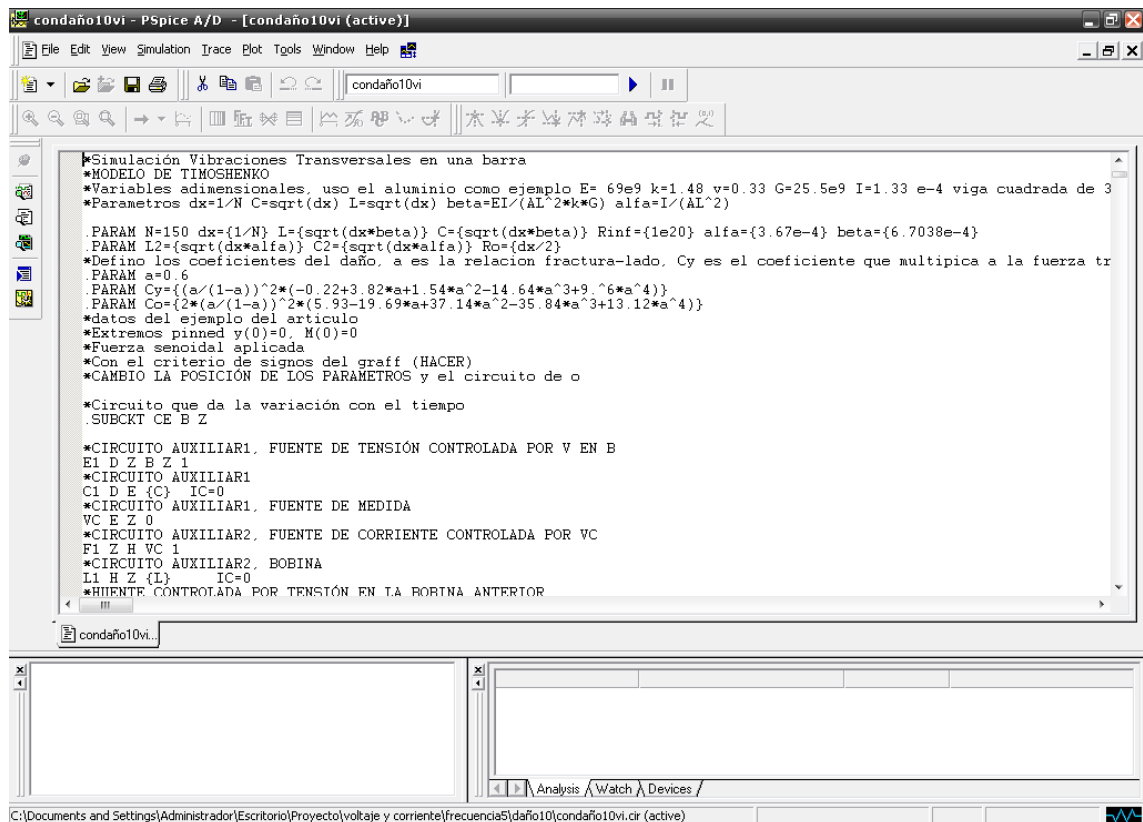
Para empezar a usar el programa tenemos que definir los parámetros:

```
*Variables adimensionales, uso el aluminio como ejemplo E= 69e9 k=1.48 v=0.33 G=25.5e9 I=1.33 e-4 viga cuadrada de 3
*Parametros dx=1/N C=sqrt(dx) L=sqrt(dx) beta=EI/(AL^2*k*G) alfa=I/(AL^2)
.PARAM N=150 dx={1/N} L={sqrt(dx*beta)} C={sqrt(dx*beta)} Rinf={1e20} alfa={3.67e-4} beta={6.7038e-4}
.PARAM L2={sqrt(dx*alfa)} C2={sqrt(dx*alfa)} Ro={dx/2}
*Defino los coeficientes del daño, a es la relacion fractura-lado, Cy es el coeficiente que multiplica a la fuerza tr
.PARAM a=0.6
.PARAM Cy={{(a/(1-a))^2*(-0.22+3.82*a+1.54*a^2-14.64*a^3+9.6*a^4)}}
.PARAM Co={{2*(a/(1-a))^2*(5.93-19.69*a+37.14*a^2-35.84*a^3+13.12*a^4)}}
*datos del ejemplo del articulo
*Extremos pinned y(0)=0 M(0)=0
*Fuerza senoidal aplicada
```

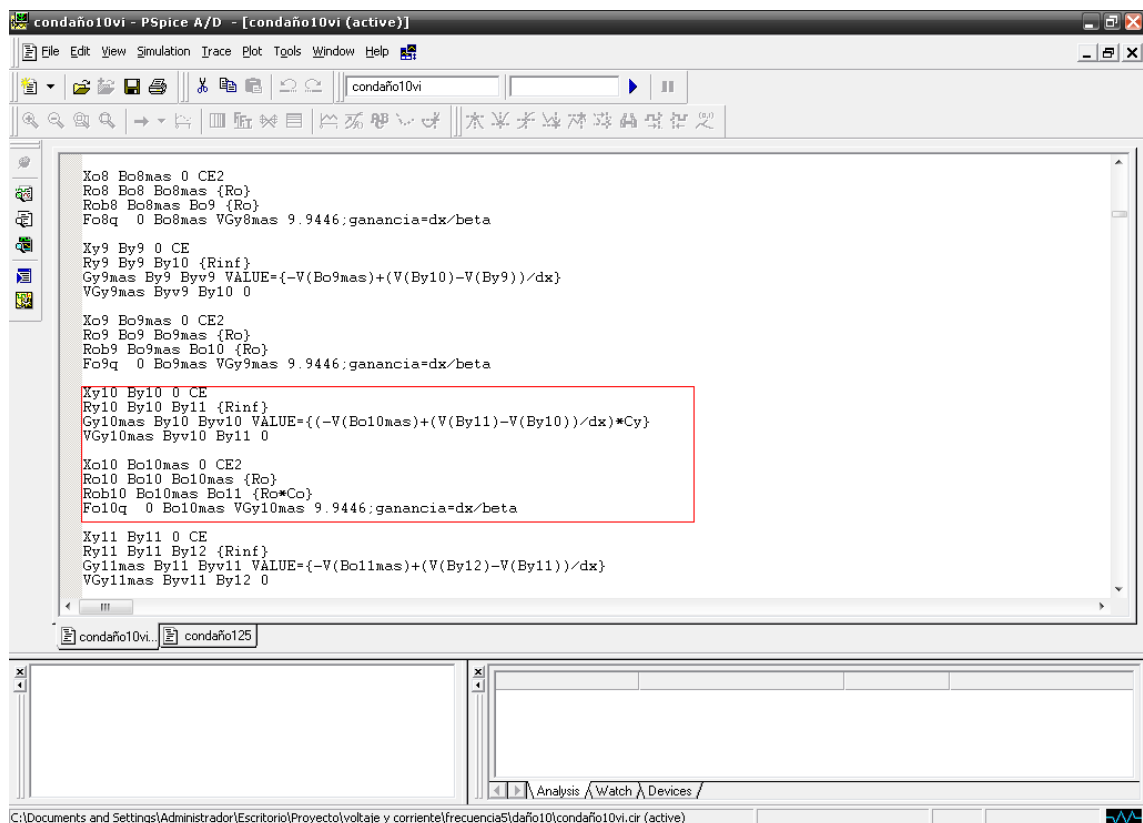
Donde;

- N, es el numero de partes en las que hemos dividido la viga.
- a, es la relación fractura-lado.
- Cy, coeficiente que multiplica a la fuerza transversal en ese punto.
- Co, coeficiente que multiplica al momento

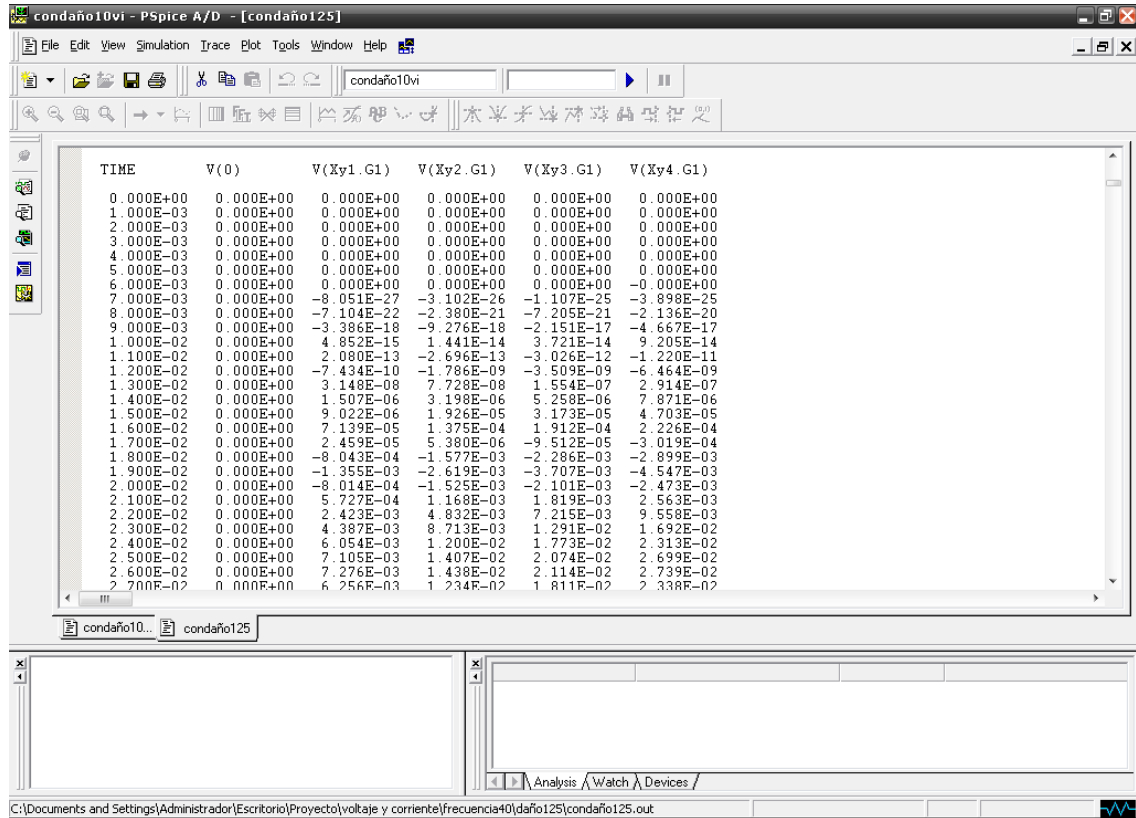
Definiremos el daño (en el programa Pspice $C_q = C_y$ y $C_m = C_0$):



Quando ya hemos definido los parámetros en el programa ponemos C_q y C_m en el punto donde queramos que esté nuestro daño, en este caso en $x=10$:



Una vez ejecutado y finalizada la simulación, el programa genera un archivo con el formato (*.out) el cual nos da todos los datos de la simulación del programa de las 150 partes en las que hemos dividido la viga y en todos los puntos de dicha viga:



Creamos una hoja de Excel donde meteremos todos los datos, la de la simulación con daño y la simulación sin daño. Luego, restaremos las dos columnas, representaremos dicha resta y compararemos los resultados

4.3 SIMULACIONES EN CUATRO PUNTOS DE LA VIGA

Primero nos centraremos solo en 4 puntos de la viga que son 15, 50, 90 y 125.

Además, lo vamos a estudiar para distintas frecuencias de vibración que serán:

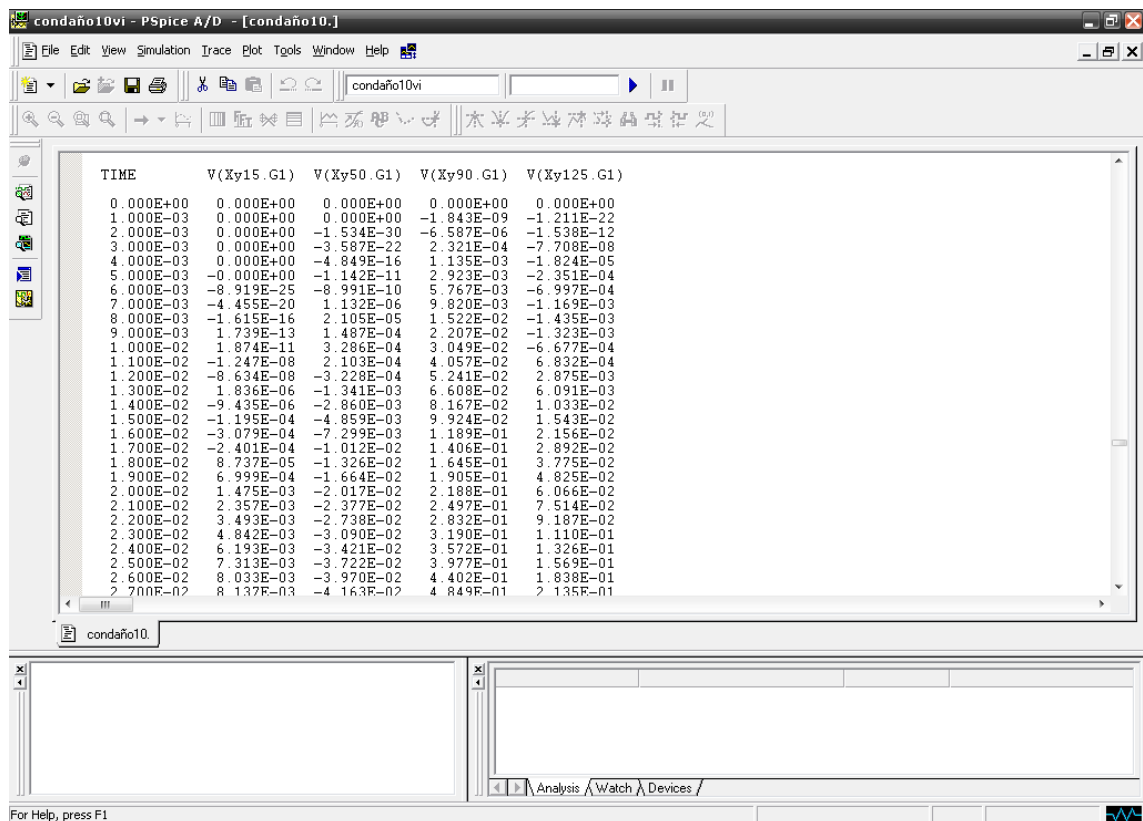
- $v=5$
- $v=10$
- $v=15$
- $v=25$
- $v=40$

Aplicamos una fuerza senoidal:

```
*Fuerza aplicada
Iaplicada 0 Bv100 SIN(0 1 5)
```

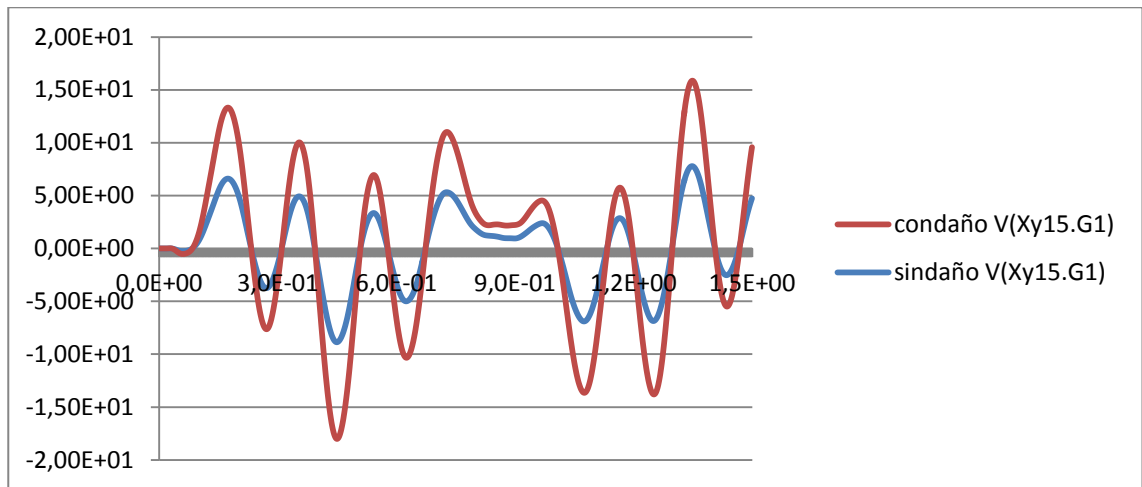
El programa genera un archivo con el formato (*.out) el cual nos da todos los datos de la simulación. La haremos tanto con daño como sin daño y restaremos ambos resultado. Estos datos los pasamos a un Excel y hacemos una tabla para posteriormente representarlos en gráficas.

A continuación, compararemos los resultados y vemos en cuál de los cuatro puntos afecta más el daño y en cual menos.



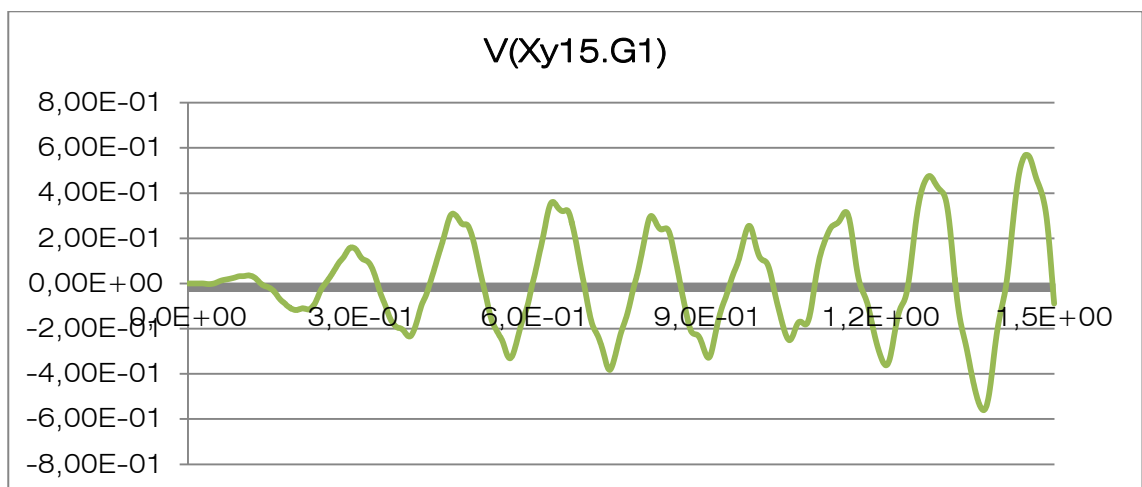
- o Cuando el daño lo situamos en $x=10$. Vamos a estudiarlo para las cinco frecuencias citadas anteriormente.

Como ya hemos dicho haremos la tabla en Excel. Aquí un ejemplo del estudio en un punto, 15 y frecuencia 5; comparación de con daño y sin daño:



Gráfica 1: Comparación con daño y sin daño para una viga en el punto, 15 y frecuencia 5.

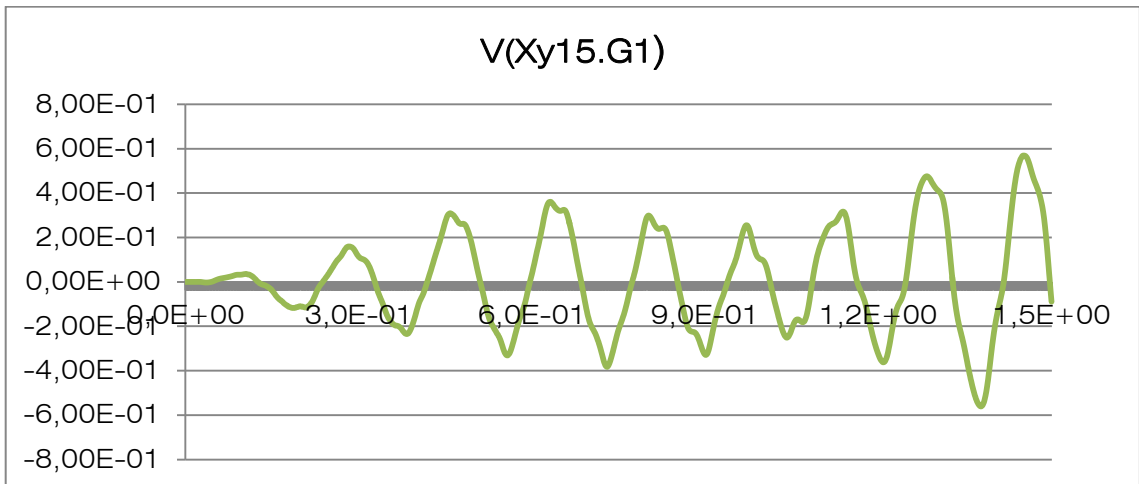
y la resta de ambos:



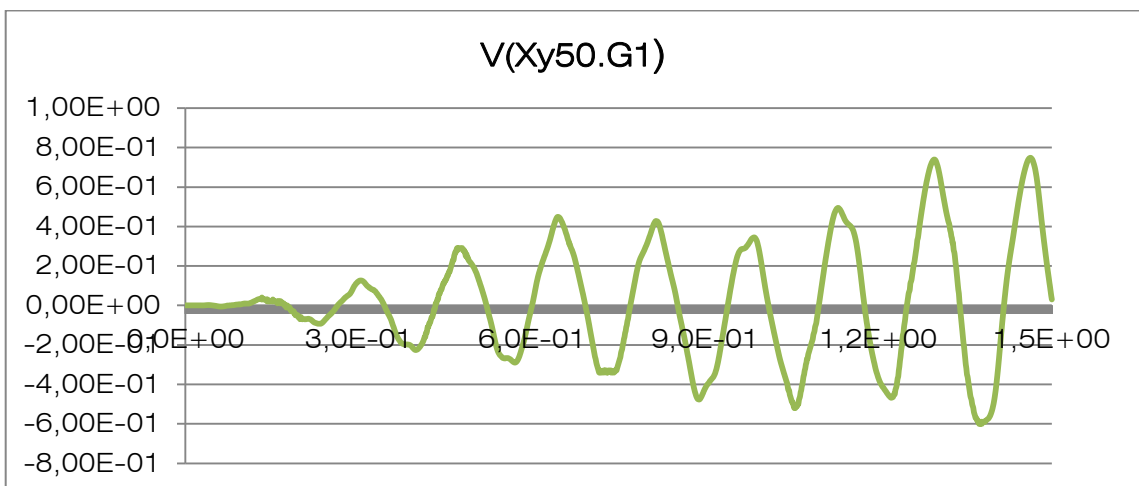
Gráfica 2: Resta de los resultados para, 15.

Voy a hacer esto para todas las frecuencias.

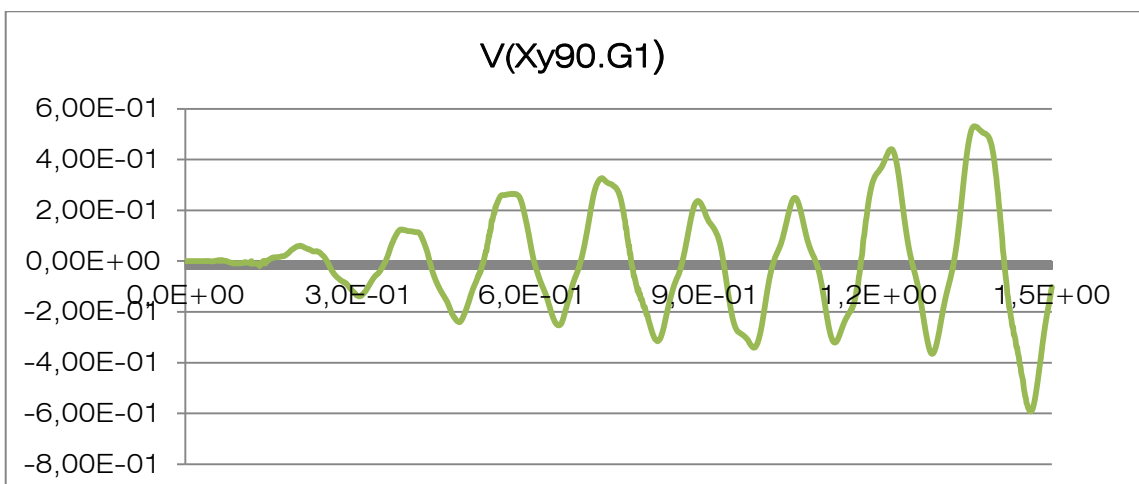
- Para $\nu = 5$; gráficas en los puntos dichos anteriormente:



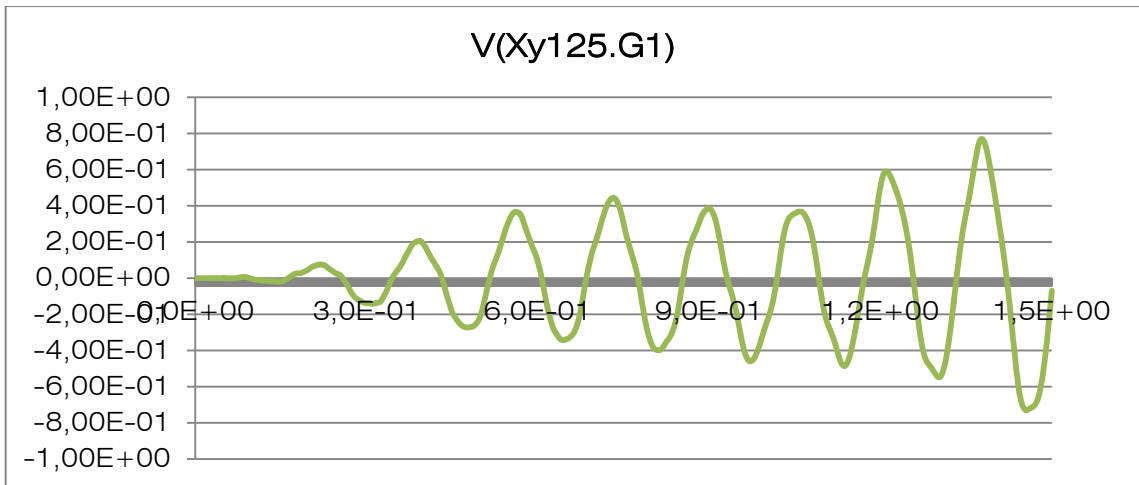
Gráfica 3: Resto de los resultados para, 15 y frecuencia=5.



Gráfica 4: Resto de los resultados para, 50 y frecuencia=5.

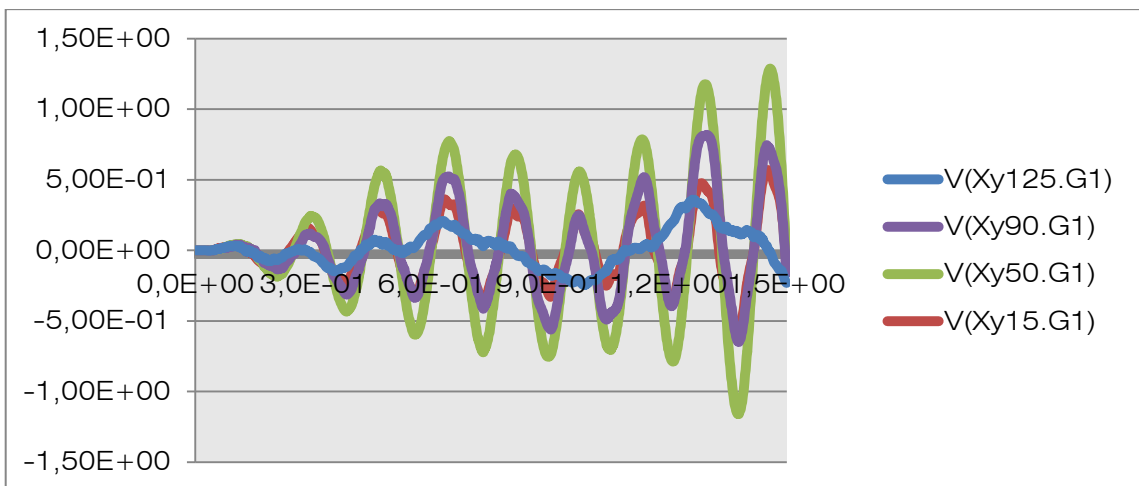


Gráfica 5: Resto de los resultados para, 90 y frecuencia=5.



Gráfica 6: Resta de los resultados para, 125 y frecuencia=5.

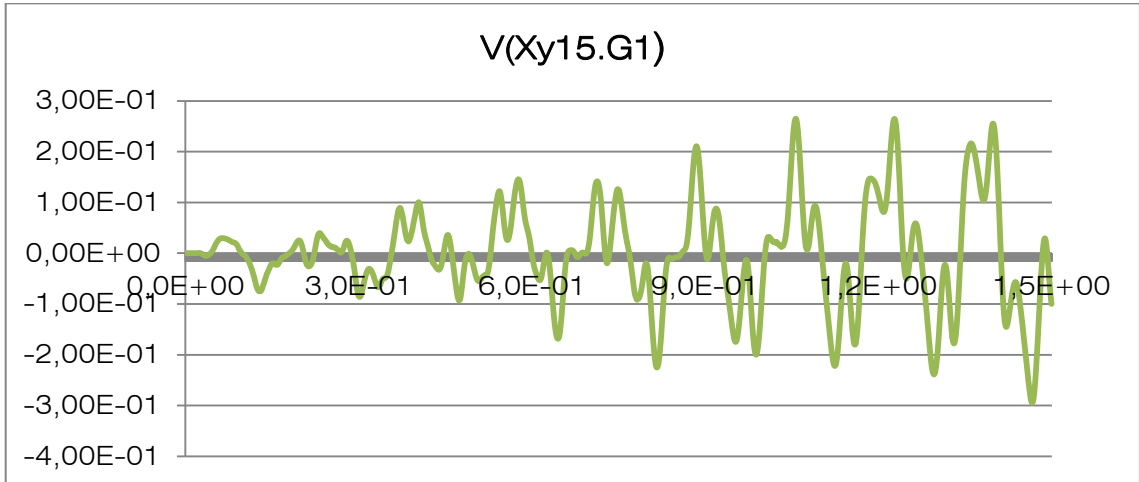
Comparación:



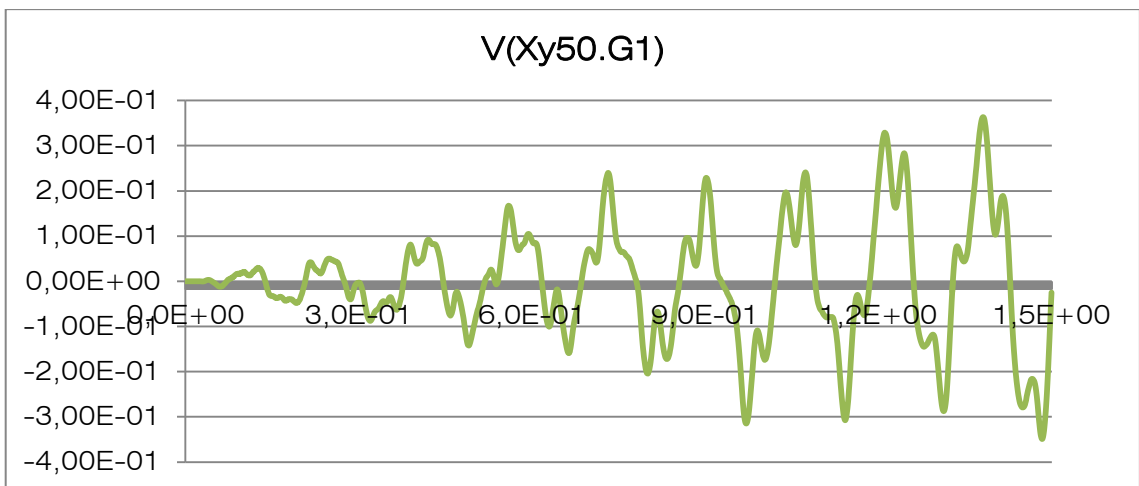
Gráfica 7: Comparación de la resta de los resultados para los cuatro puntos anteriores, y frecuencia=5.

También sacaremos el punto máximo de daño de cada punto y lo compararemos con los demás. Donde se produzca el máximo será al que le afecte más el daño. Haciendo esto podemos observar que el daño afecta más a 125 luego 50, 90 y 15.

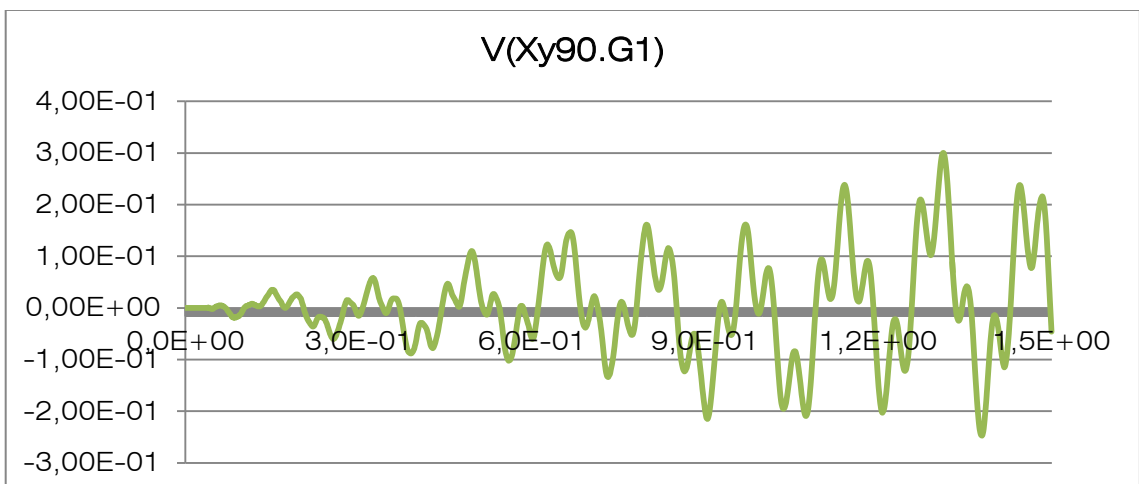
- Para $v=10$:



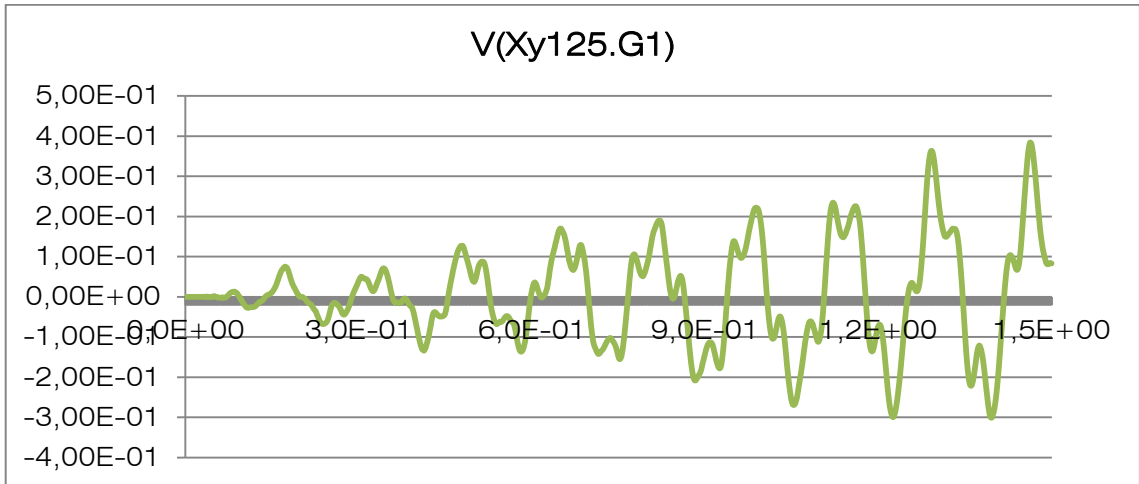
Gráfica 8: Resto de los resultados para, 15 y frecuencia=10.



Gráfica 9: Resto de los resultados para, 50 y frecuencia=10.

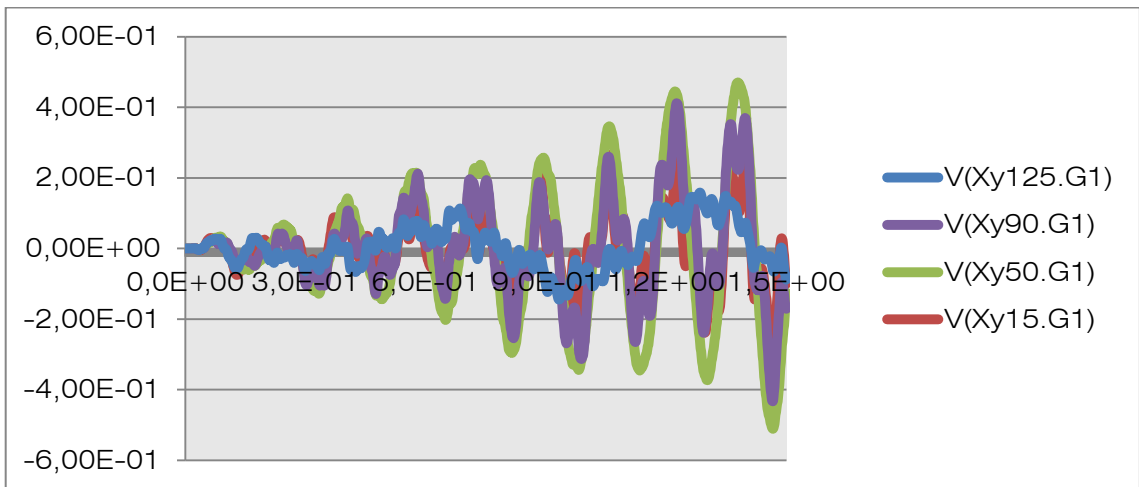


Gráfica 10: Resto de los resultados para, 90 y frecuencia=10.



Gráfica 11: Resta de los resultados para, 125 y frecuencia=10.

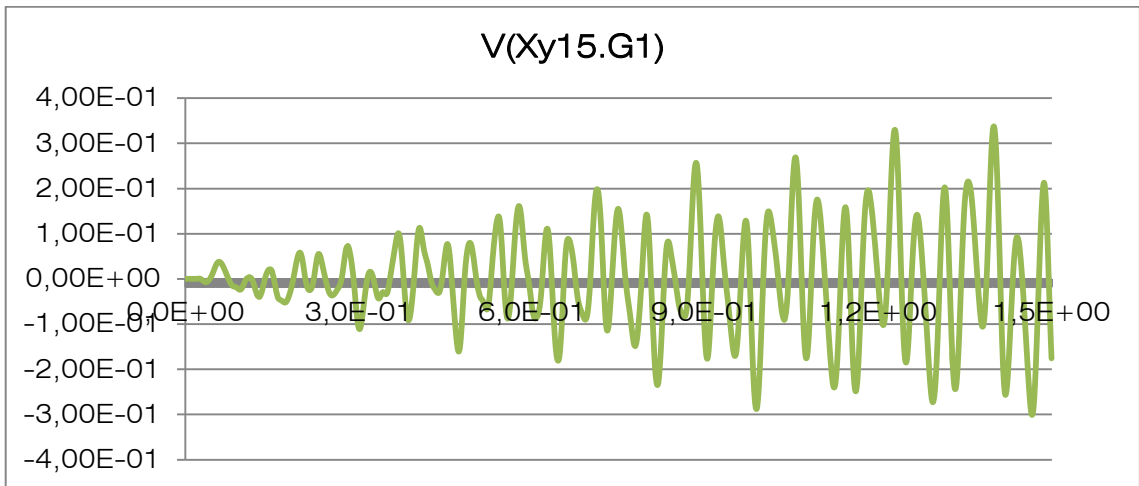
Comparación:



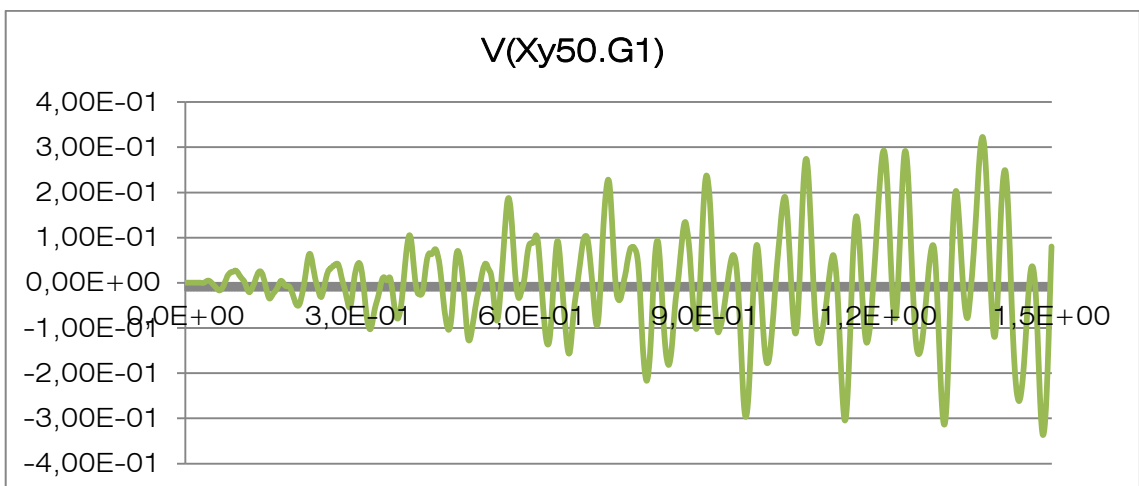
Gráfica 12: Comparación de la resta de los resultados para los cuatro puntos anteriores, y frecuencia=10.

El daño afecta más a 125 luego 50, 90 y V15.

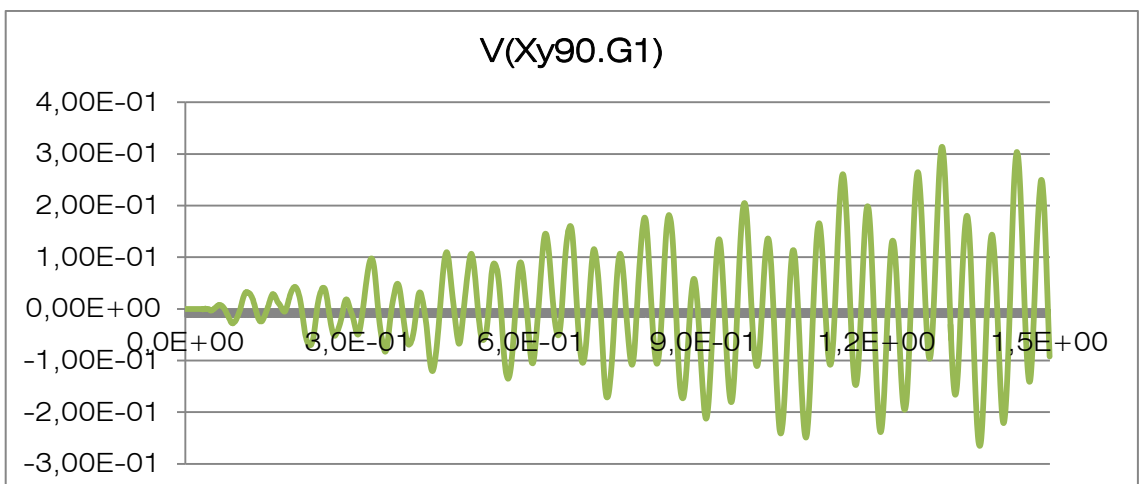
- Para $\nu = 15$:



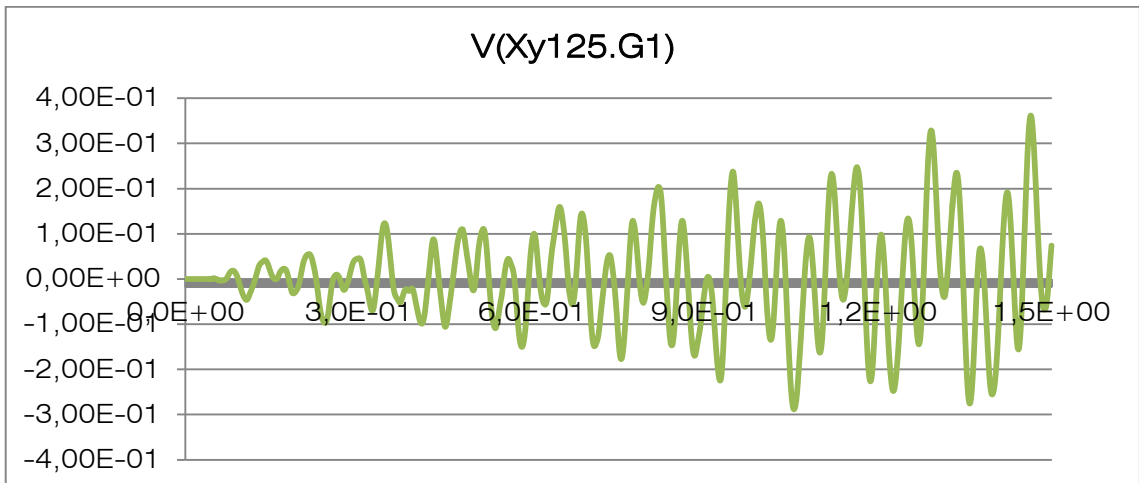
Gráfica 13: Resto de los resultados para, 15 y frecuencia=15.



Gráfica 14: Resto de los resultados para, 50 y frecuencia=15.

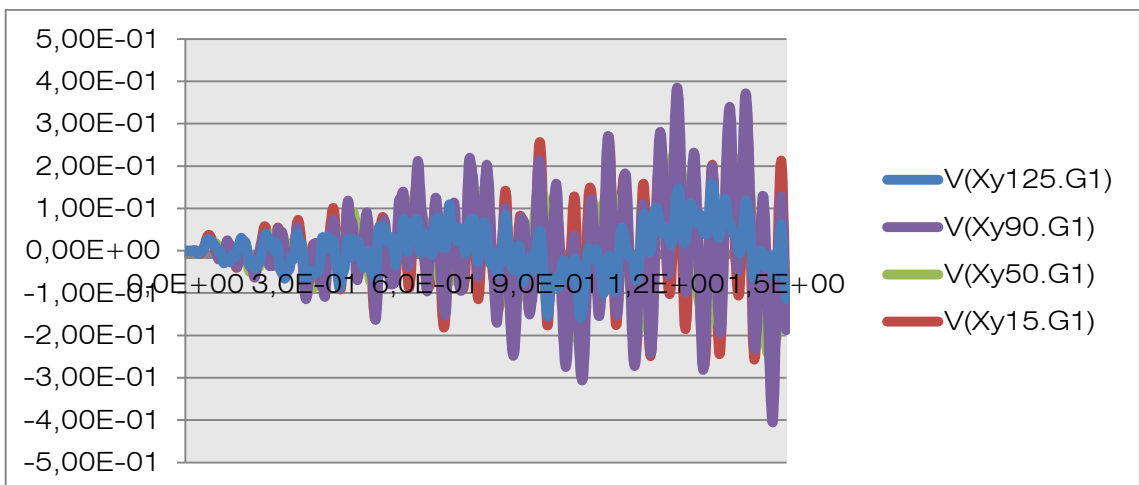


Gráfica 15: Resto de los resultados para, 90 y frecuencia=15.



Gráfica 16: Resta de los resultados para, 125 y frecuencia=15.

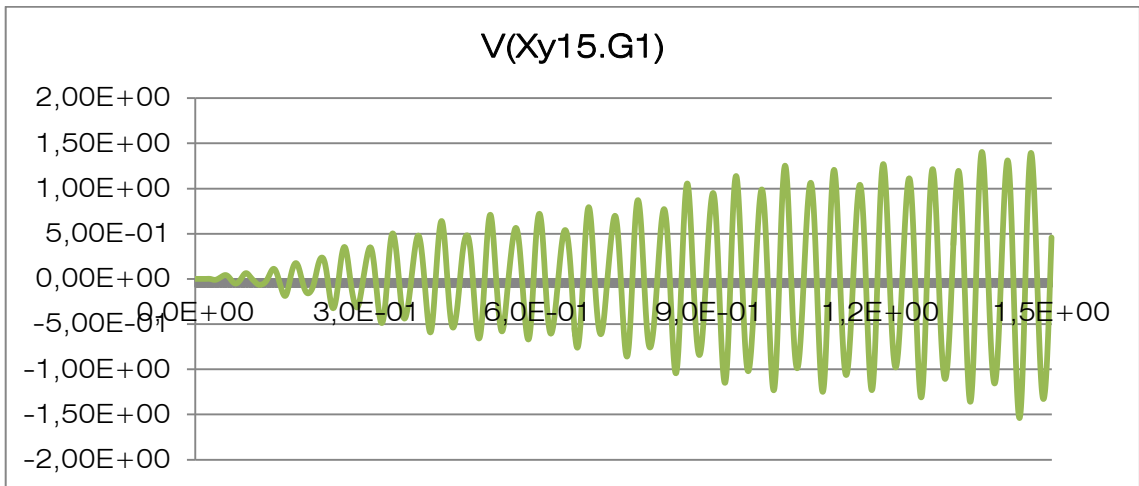
Comparación:



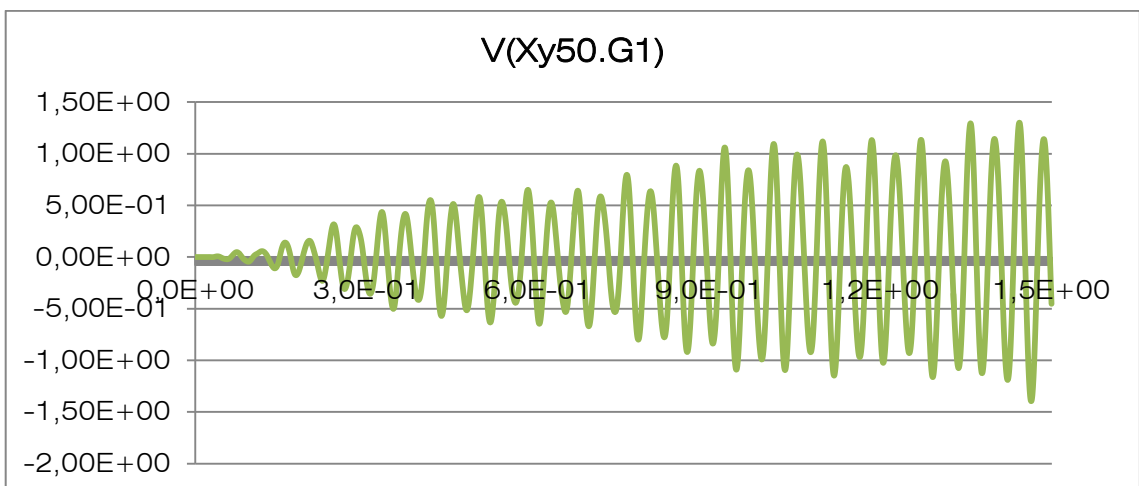
Gráfica 17: Comparación de la resta de los resultados para los cuatro puntos anteriores, y frecuencia=15.

El daño afecta más a 125 luego 15, 50 y 90.

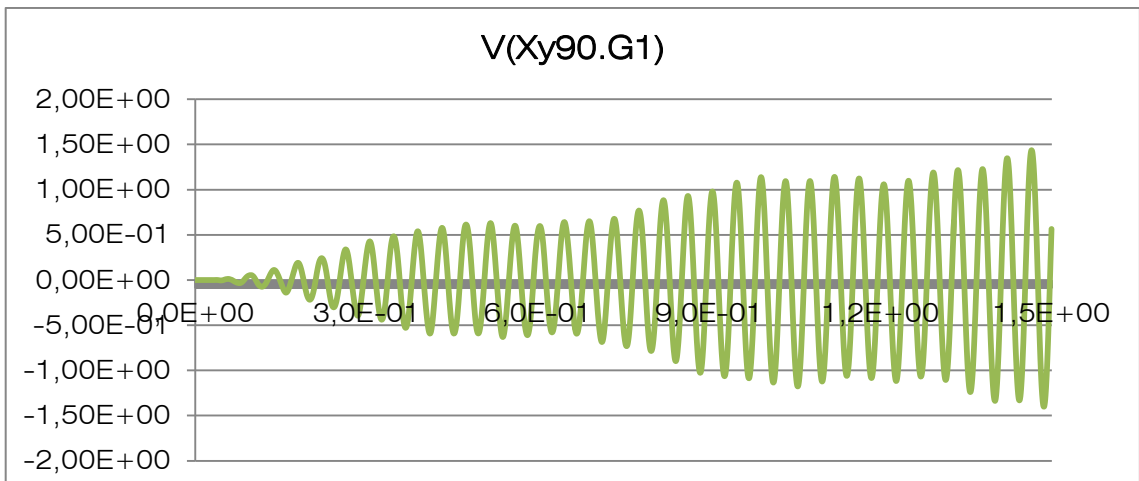
- Para $\nu = 25$:



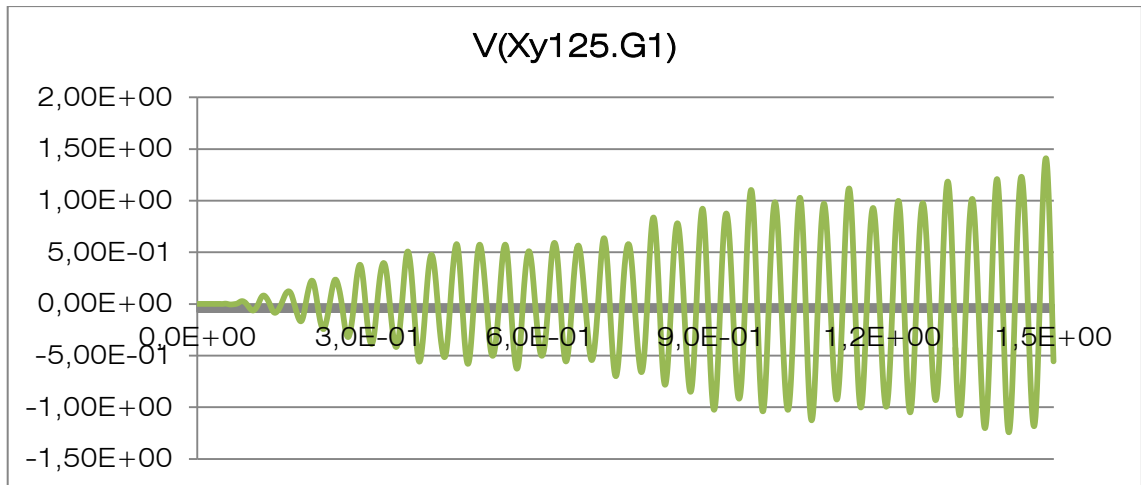
Gráfica 18: Resto de los resultados para, 15 y frecuencia=25.



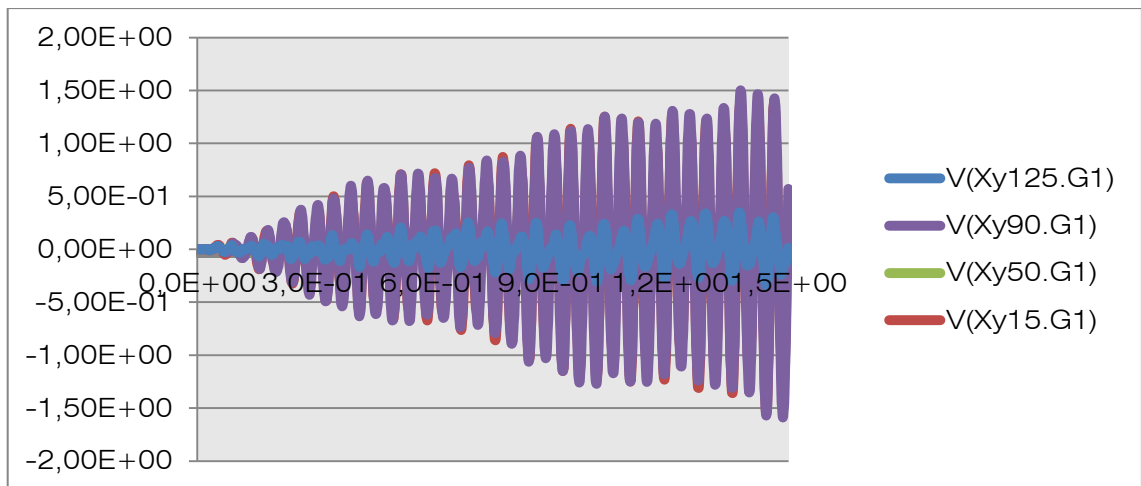
Gráfica 19: Resto de los resultados para, 50 y frecuencia=25.



Gráfica 20: Resto de los resultados para, 90 y frecuencia=25.

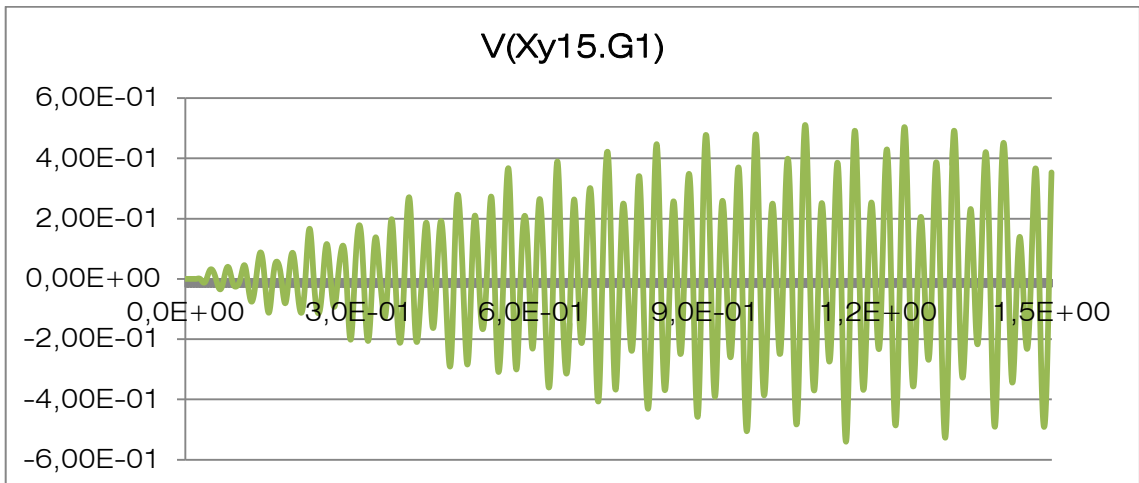


Comparación:

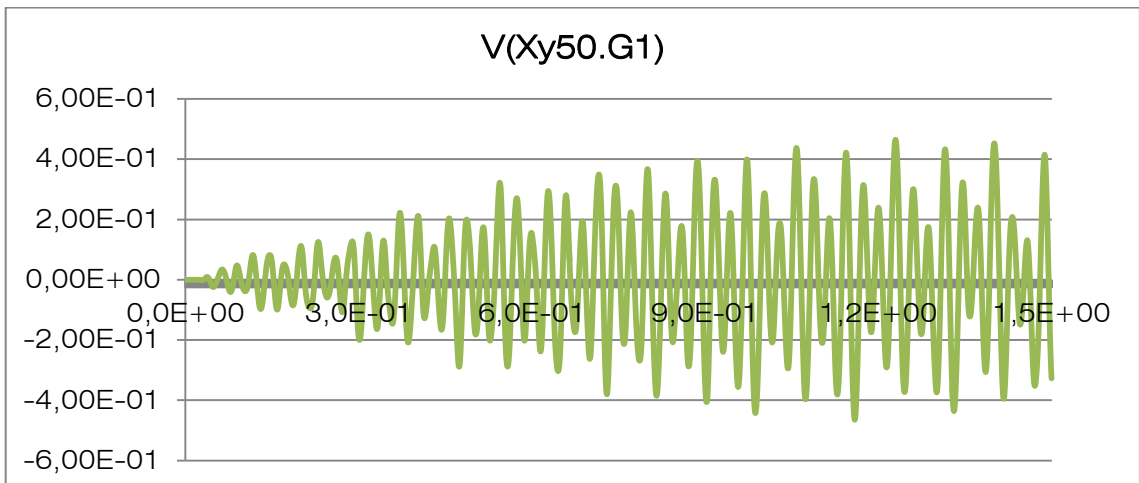


El daño afecta más a 15 luego 90, 125 y 50.

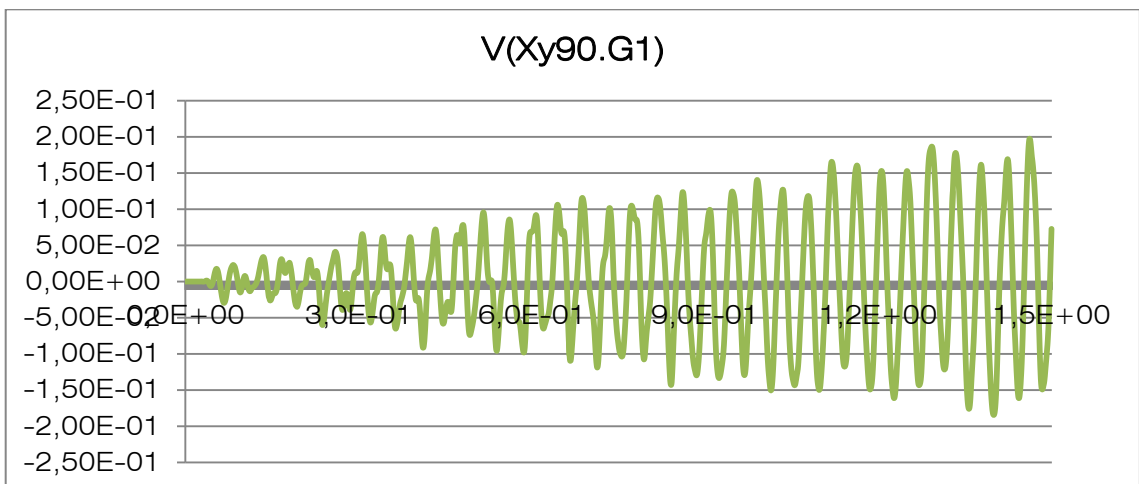
- Para $v = 40$:



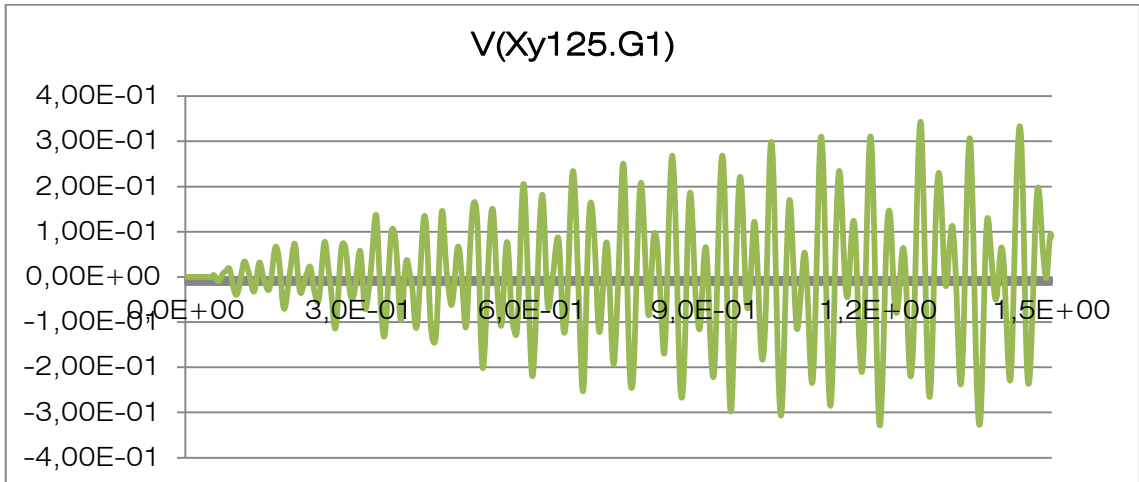
Gráfica 23: Resto de los resultados para, 15 y frecuencia=40.



Gráfica 24: Resto de los resultados para, 50 y frecuencia=40.

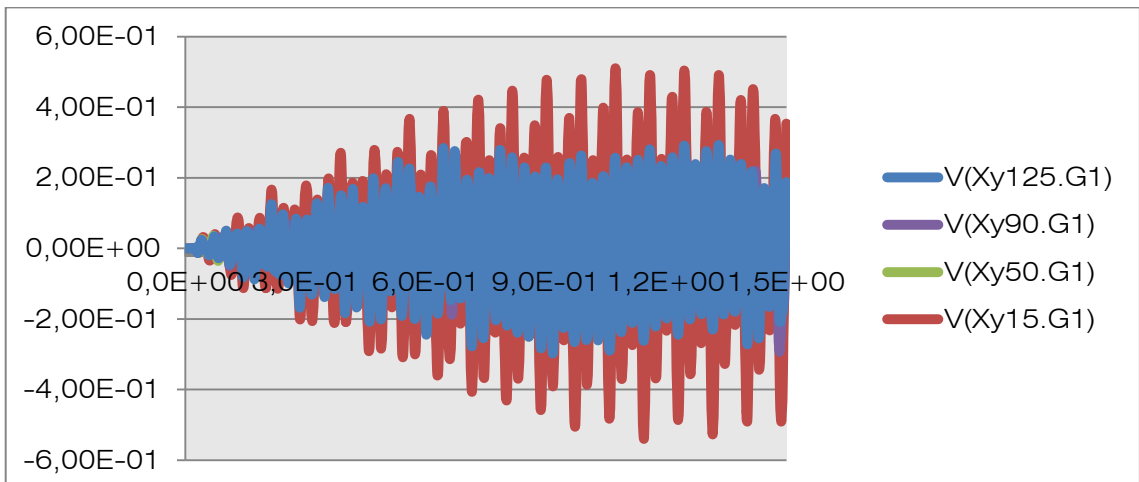


Gráfica 25: Resto de los resultados para, 90 y frecuencia=40.



Gráfica 26: Resto de los resultados para, 125 y frecuencia=40.

Comparación:



Gráfica 27: Comparación de la resta de los resultados para los cuatro puntos anteriores, y frecuencia=40.

El daño afecta más a 15 luego 50, 125 y 90.

Esto se hace con todos los puntos para ver cómo afecta el daño a la viga según la frecuencia y donde se sitúe:

Tabla 2: Como afecta el daño a la viga en el punto 10 para todas las frecuencias.

	Daño en 10			
	Máximo			Mínimo
v 5	125	50	90	15
v 10	125	50	90	15
v 15	125	15	50	90
v 25	15	90	125	50
v 40	15	50	125	90

Tabla 3: Como afecta el daño a la viga en el punto 50 para todas las frecuencias.

	Daño en 50			
	Máximo			Mínimo
v 5	50	125	90	15
v 10	50	90	125	15
v 15	90	50	125	15
v 25	15	50	50	125
v 40	50	15	125	50

Tabla 4: Como afecta el daño a la viga en el punto 75 para todas las frecuencias.

	Daño en 75			
	Máximo			Mínimo
v 5	90	50	125	15
v 10	90	50	125	15
v 15	90	50	125	15
v 25	50	90	125	15
v 40	50	15	125	90

Tabla 5: Como afecta el daño a la viga en el punto 100 para todas las frecuencias.

	Daño en 100			
	Máximo			Mínimo
v 5	15	125	90	50
v 10	50	90	125	15
v 15	90	50	125	15
v 25	50	90	15	125
v 40	50	15	125	90

Tabla 6: Como afecta el daño a la viga en el punto 125 para todas las frecuencias.

	Daño en 125			
	Máximo			Mínimo
v 5	125	50	90	15
v 10	50	125	15	90
v 15	50	125	15	90
v 25	15	90	50	125
v 40	50	15	125	90

Cada uno lleva un color con el fin de ver más claro cómo cambian los máximos y mínimos para las distintas frecuencias, situando el daño en el mismo punto. Donde,

- 15 es el color naranja
- 50 es el color verde
- 90 es el color rojo
- 125 es el color azul

Una vez tenemos el estudio en estos cuatro puntos y para todas las frecuencias vamos a estudiar cómo afecta a todos los puntos de la viga.

4.4 SIMULACIÓN EN TODOS LOS PUNTOS

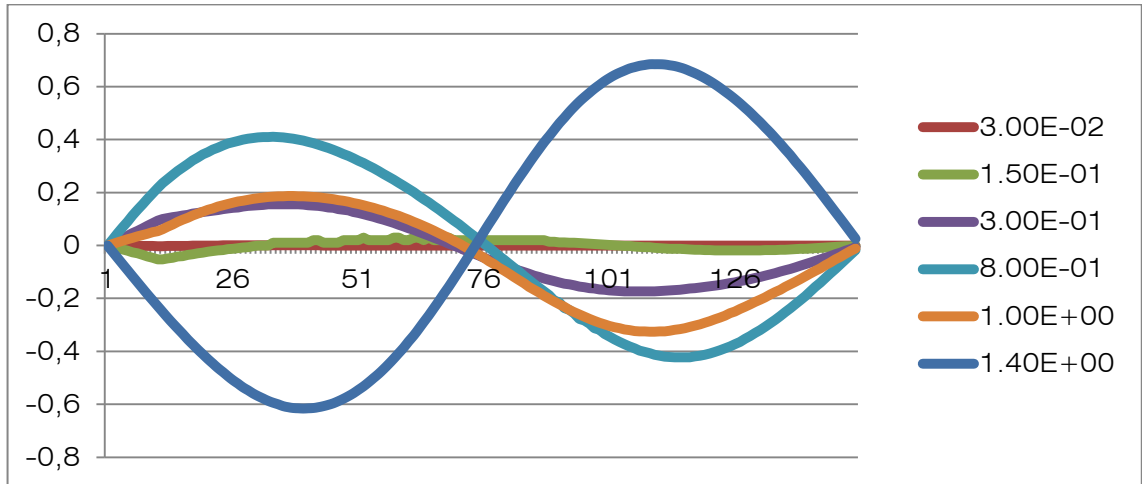
Vamos a estudiar cómo afecta el daño en los 150 puntos en los que hemos dividido la viga.

Situaremos el daño en los mismos puntos de antes (*10, 50, 75, 100 y 125*) y con las mismas frecuencias (*5, 10, 15, 25 y 40*) pero esta vez veremos cómo afecta a todos los puntos de la viga y en seis periodos de tiempo elegidos aleatoriamente.

Para ello voy a explicar paso por paso el procedimiento:

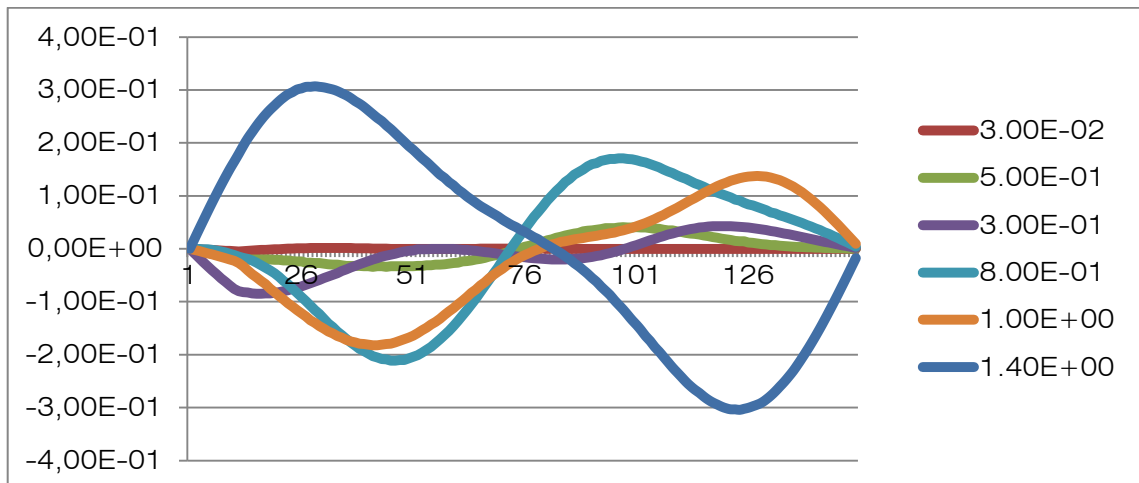
1. Simulamos el programa Pspice como ya hemos explicado en los puntos 4.3 y 4.4, pero, en este caso, para todos los puntos de la viga
2. Una vez hecho en un mismo punto la simulación con daño y sin daño nos lo llevamos a un Excel.
3. Elegimos seis periodos de tiempo aleatorios que son:
 - *3.00E-02*
 - *1.50E-01*
 - *3.00E-01*
 - *8.00E-01*
 - *1.00E+00*
 - *1.40E+00*
4. Compararemos en cada punto y para cada frecuencia los datos con daño y sin daño, pero solo en esos intervalos de tiempo.
5. Compararemos las restas de daño y sin daño hechas en el punto 4.
6. Por último, acotaremos los máximos y mínimos, cogiendo los puntos de corte en el eje X, y compararemos con los resultados del apartado anterior para ver si vemos alguna similitud.

- Cuando $x=10$
 - Para $\nu = 5$:



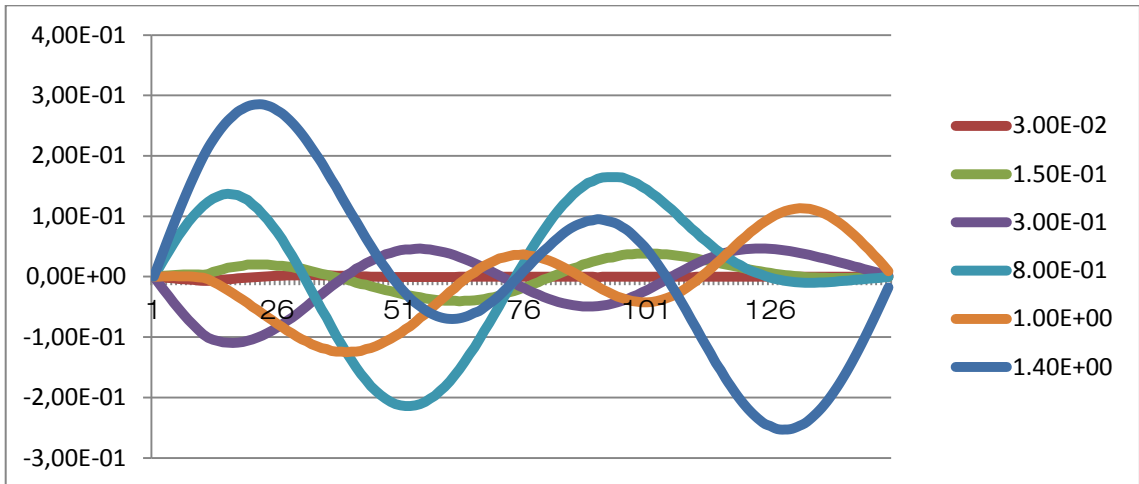
Gráfica 28: Punto 10 para una frecuencia 5 y en ocho intervalos de tiempo. Fuente: Propia

- Para $\nu = 10$:



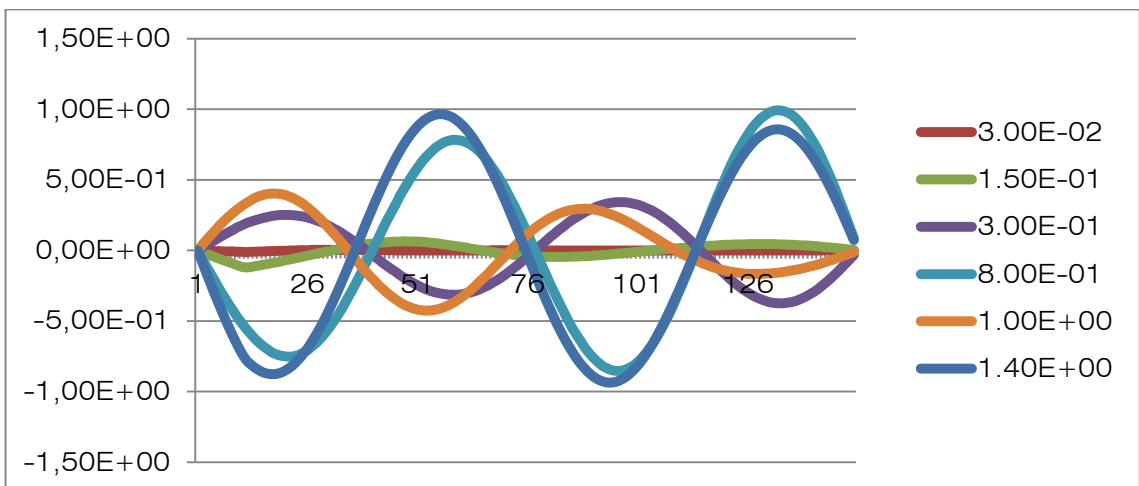
Gráfica 29: Punto 10 para una frecuencia 10 y en ocho intervalos de tiempo.

○ Para $\nu = 15$:



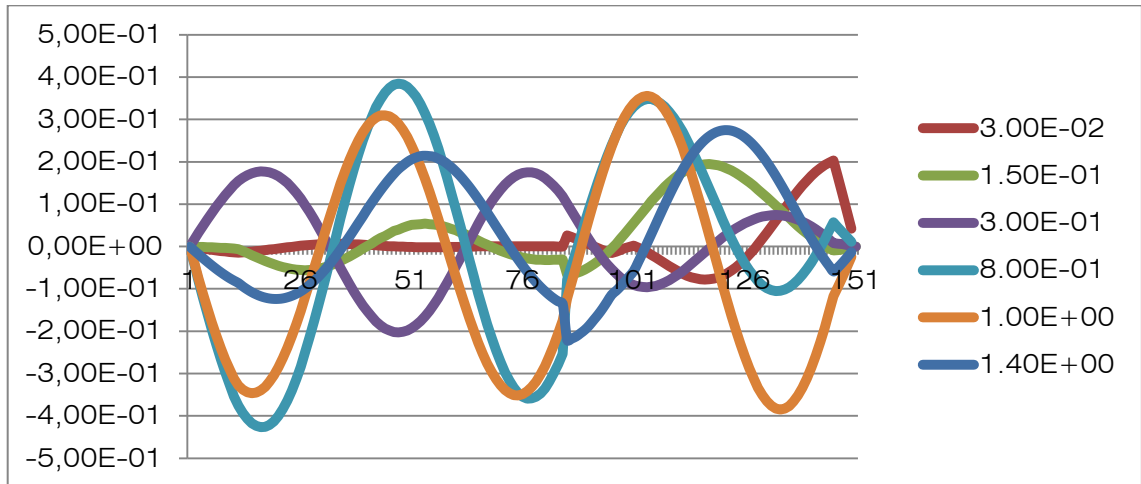
Gráfica 30: Punto 10 para una frecuencia 15 y en ocho intervalos de tiempo.

○ Para $\nu = 25$:



Gráfica 31: Punto 10 para una frecuencia 25 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $v = 40$:



Gráfica 32: Punto 10 para una frecuencia 40 y en ocho intervalos de tiempo.

A continuación, hemos hecho una tabla con los puntos donde la vibración es cero:

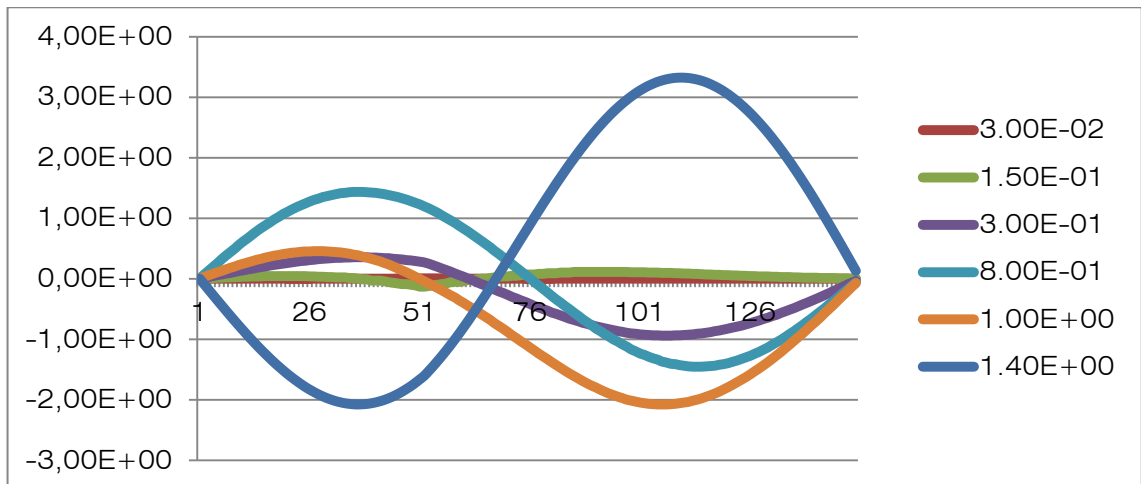
Tabla 7: Acotación de máximos y mínimos para el punto 10 y todas las frecuencias.

<i>Daño 10</i>	
<i>v 5</i>	71-77
<i>v 10</i>	62-83
<i>v 15</i>	31-38/65-87/105-112
<i>v 25</i>	29-41/66-78/105-115
<i>v 40</i>	24-48/59-74/88-104/118-128/142-144

Según las tablas del punto anterior, y comparándolos con estas, los máximos siempre se encuentran entre los intervalos de máximos y mínimos de estas graficas.

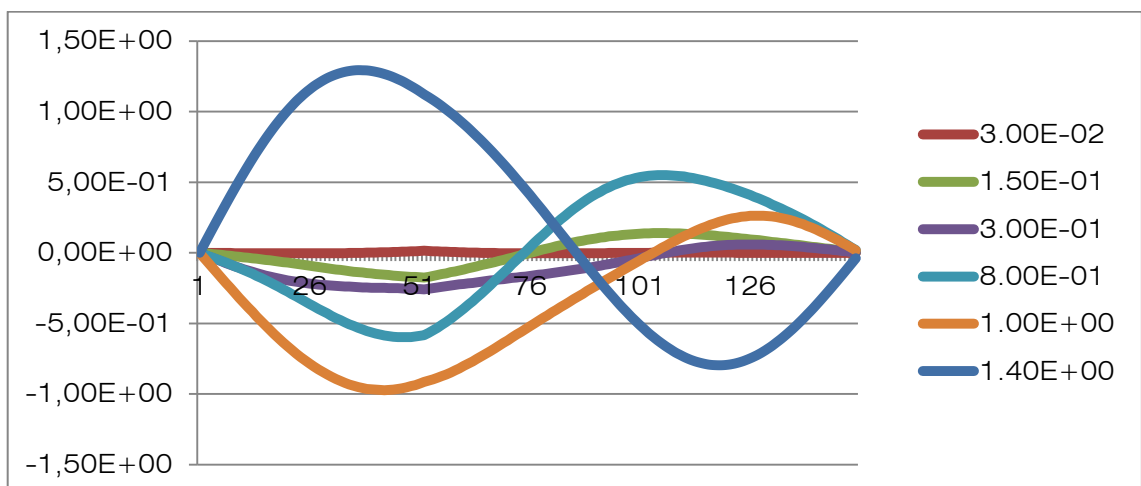
Pero también depende mucho del tiempo que cojamos varia más o menos la vibración con el daño.

- Cuando $x=50$
 - Para $v = 5$:



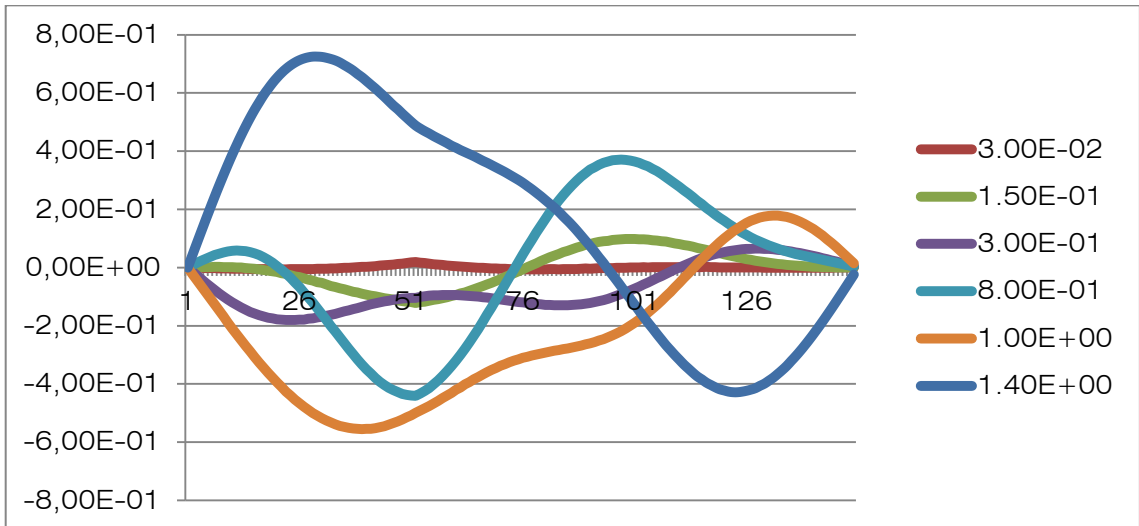
Gráfica 33: Punto 50 para una frecuencia 5 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $v = 10$:



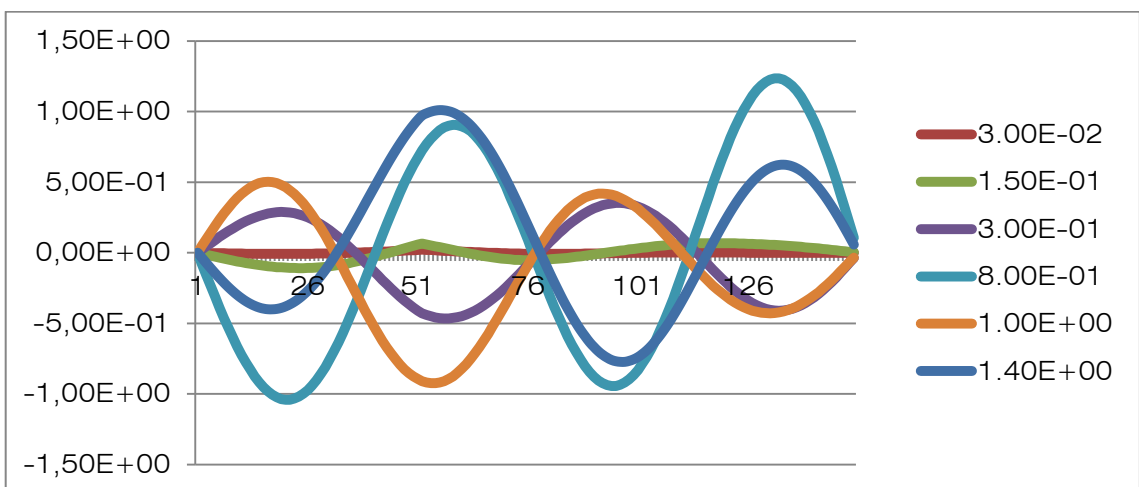
Gráfica 34: Punto 50 para una frecuencia 10 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 15$:



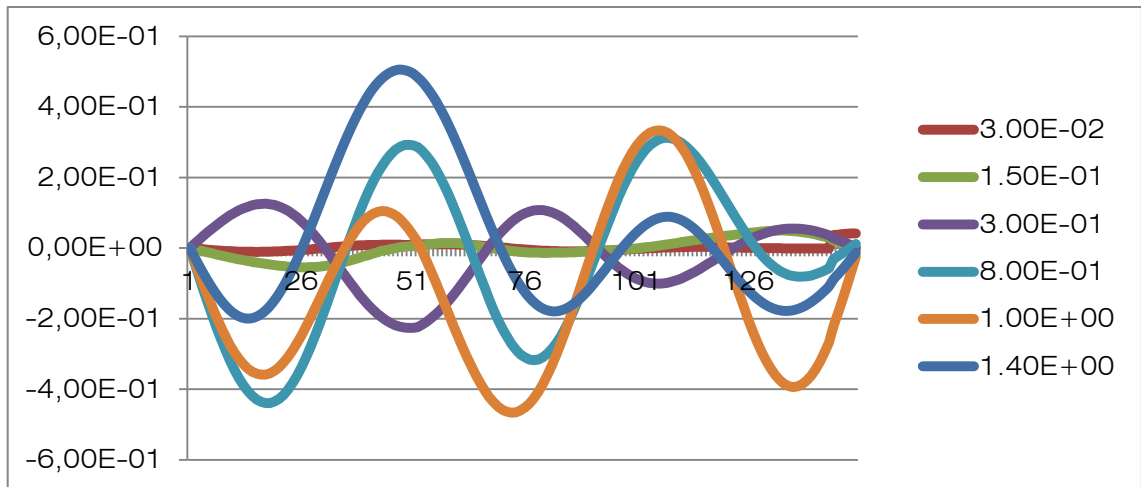
Gráfica 35: Punto 50 para una frecuencia 15 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 25$:



Gráfica 36: Punto 50 para una frecuencia 25 y en ocho intervalos de tiempo.

- o Para $v = 40$:



Gráfica 37: Punto 50 para una frecuencia 40 y en ocho intervalos de tiempo.

A continuación, hemos hecho una tabla con los puntos donde la vibración es cero:

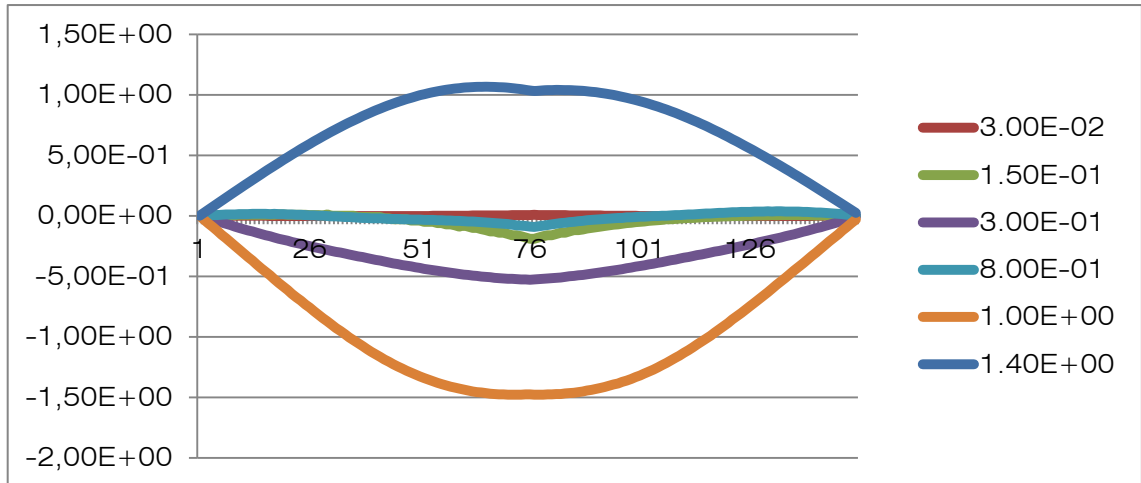
Tabla 8: Acotación de máximos y mínimos para el punto 50 y todas las frecuencias.

<i>Dañó 50</i>	
v 5	51-76
v 10	75-87/104-108
v 15	17-22/74-75/95/110-113
v 25	32-45/78-79
v 40	26-36/51-53/64-80/90-97/108-122

Según las tablas del punto anterior, y comparándolos con estas, los máximos siempre se encuentran entre los intervalos de máximos y mínimos de estas graficas.

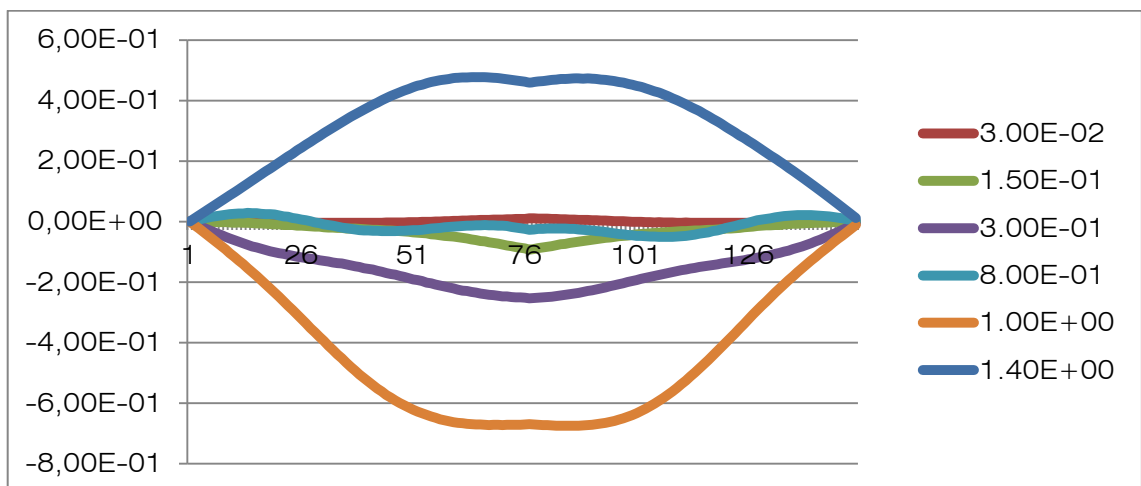
Pero también depende mucho del tiempo que cojamos varia más o menos la vibración con el daño.

- Cuando $x=75$
 - Para $\nu =5$:



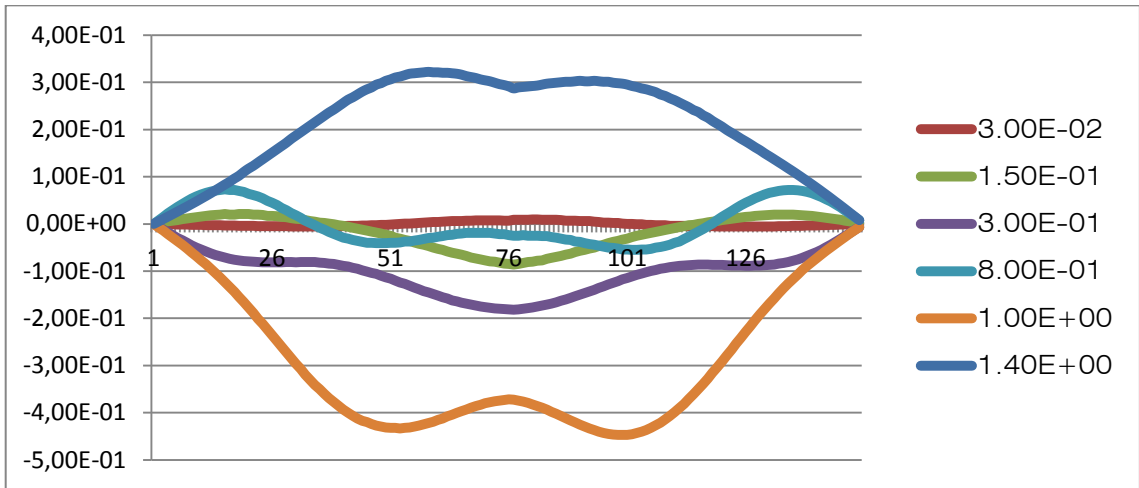
Gráfica 38: Punto 75 para una frecuencia 5 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu =10$:



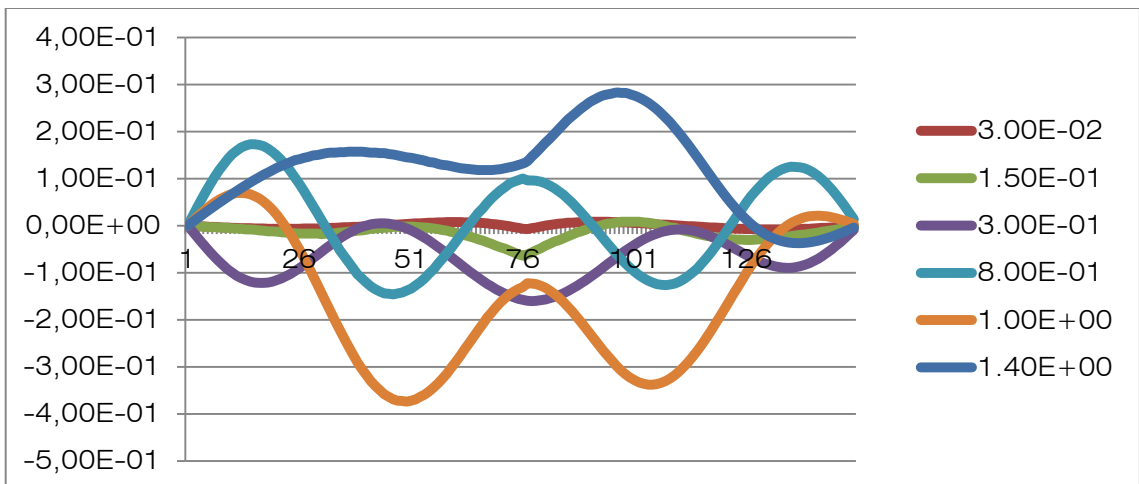
Gráfica 39: Punto 75 para una frecuencia 10 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 15$:



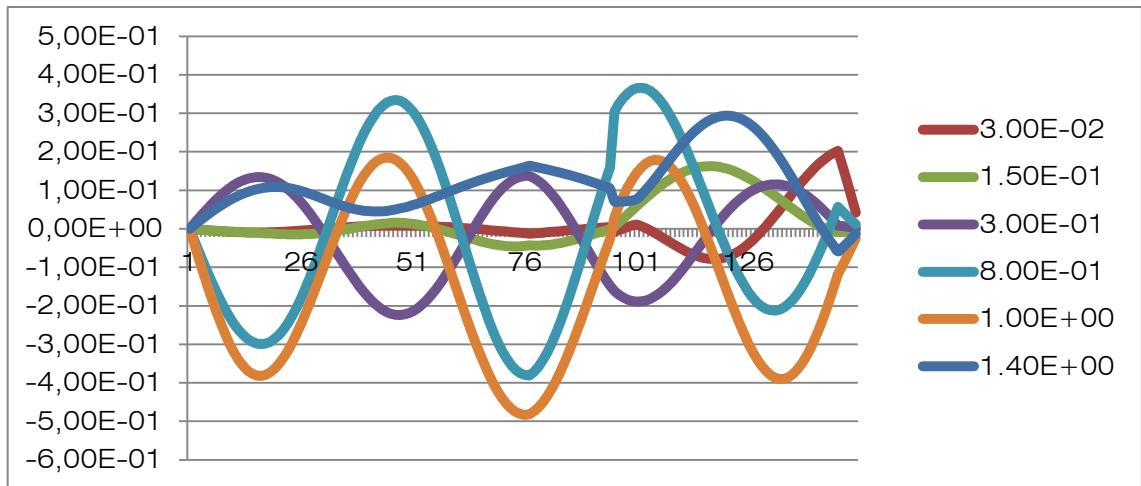
Gráfica 40: Punto 75 para una frecuencia 15 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 25$:



Gráfica 41: Punto 75 para una frecuencia 25 y en ocho intervalos de tiempo.

- o Para $v = 40$:



Gráfica 42: Punto 75 para una frecuencia 40 y en ocho intervalos de tiempo.

A continuación, hemos hecho una tabla con los puntos donde la vibración es cero:

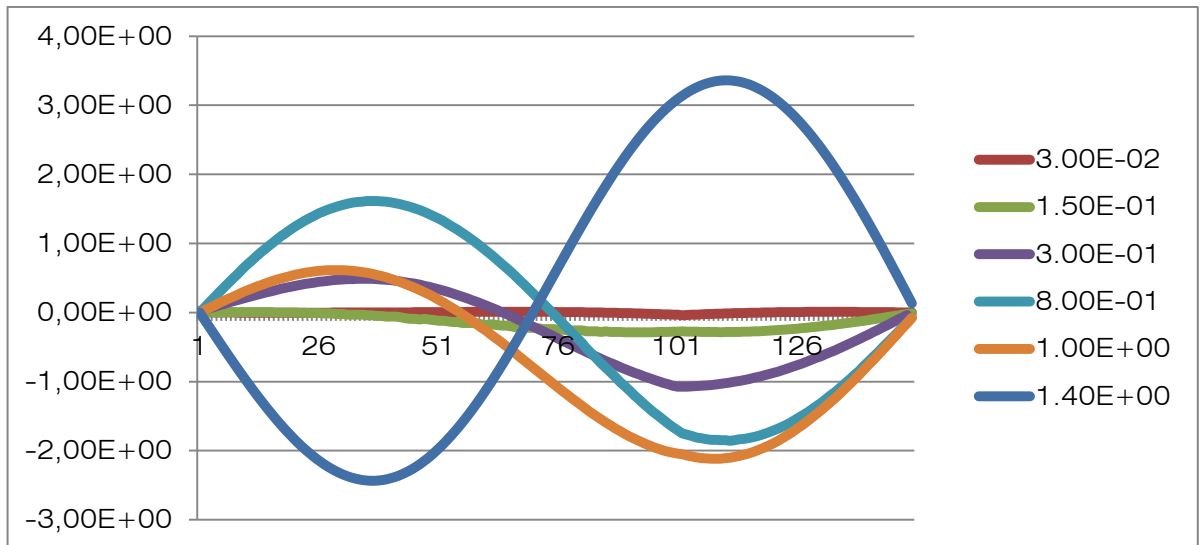
Tabla 9: Acotación de máximos y mínimos para el punto 75 y todas las frecuencias.

<i>Daño 75</i>	
v 5	28-30
v 10	30/124
v 15	37-41/112-117
v 25	32/47-54/64-68/79/91-93//104/117-122/128-133
v 40	22-39/56-64/86-95/117-120/142-144

Según las tablas del punto anterior, y comparándolos con estas, los máximos siempre se encuentran entre los intervalos de máximos y mínimos de estas graficas.

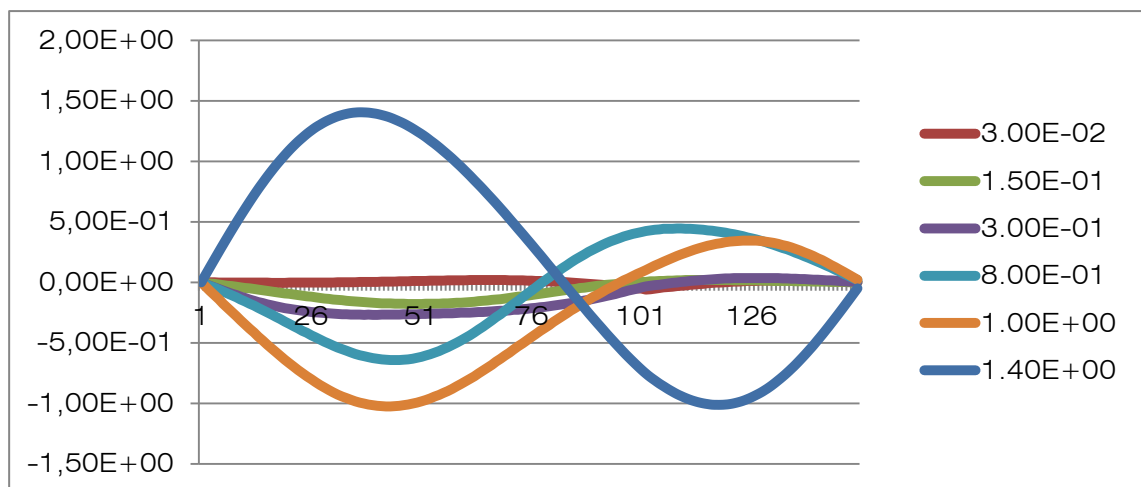
Pero también depende mucho del tiempo que cojamos varia más o menos la vibración con el daño.

- Cuando $x=100$
 - Para $v = 5$:



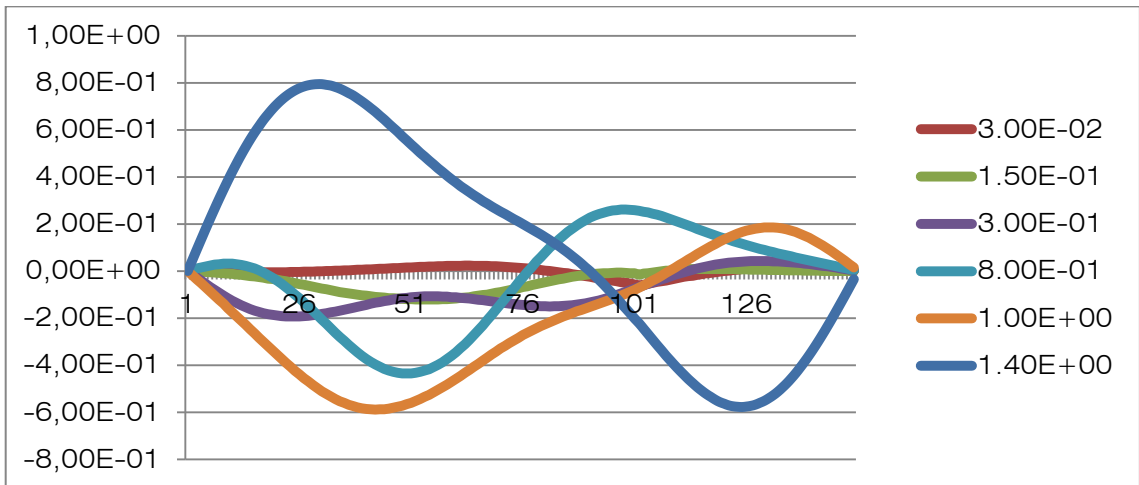
Gráfica 43: Punto 100 para una frecuencia 5 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $v = 10$:



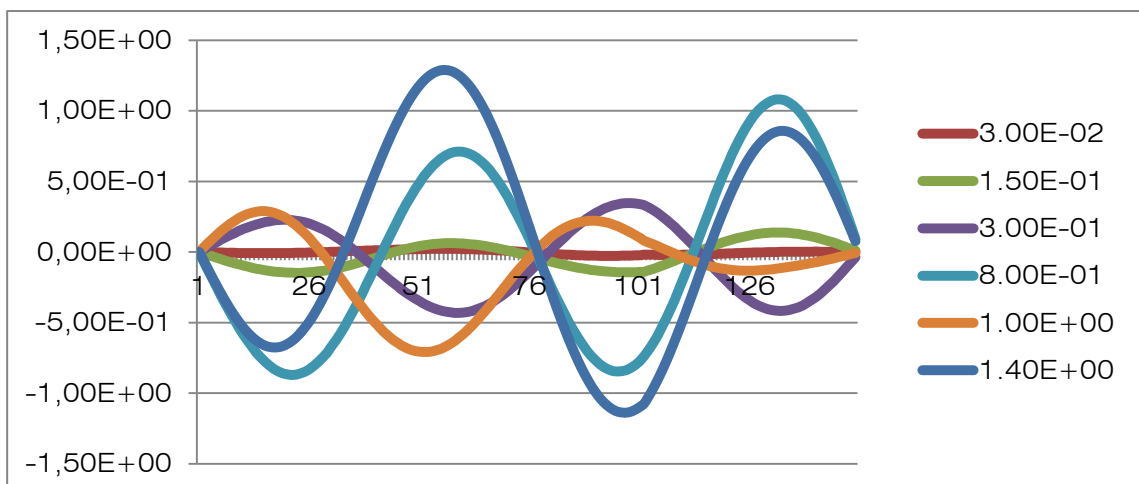
Gráfica 44: Punto 100 para una frecuencia 10 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 15$:



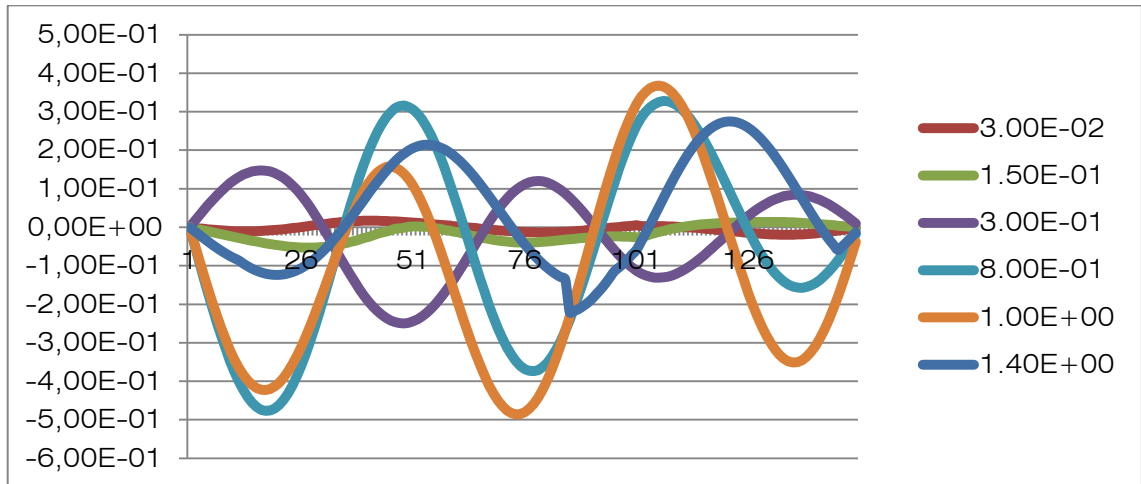
Gráfica 45: Punto 100 para una frecuencia 15 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $\nu = 25$:



Gráfica 46: Punto 100 para una frecuencia 25 y en ocho intervalos de tiempo.

- o Para $v = 40$:



Gráfica 47: Punto 100 para una frecuencia 40 y en ocho intervalos de tiempo.

A continuación, hemos hecho una tabla con los puntos donde la vibración es cero:

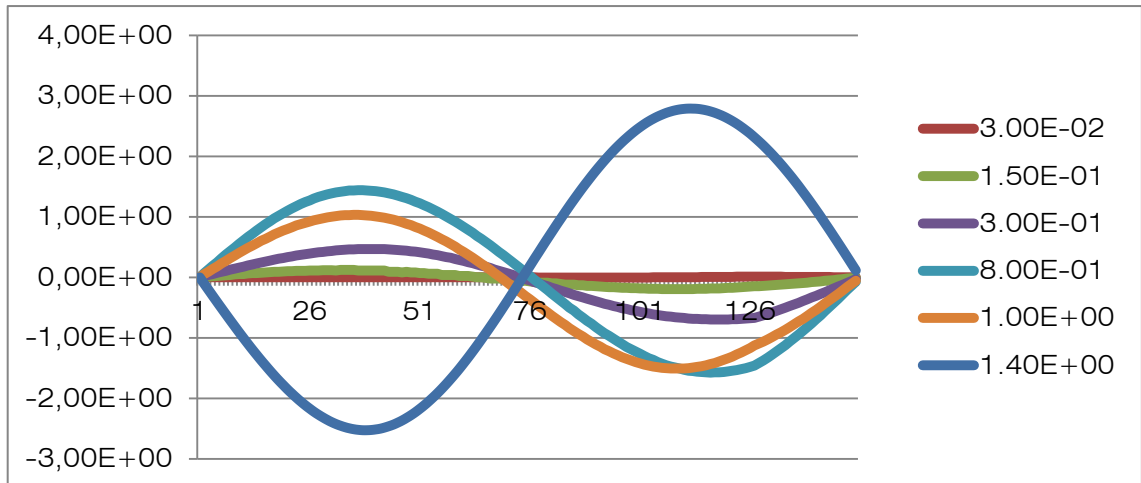
Tabla 10: Acotación de máximos y mínimos para el punto 100 y todas las frecuencias.

<i>Dañó 100</i>	
v 5	56-75
v 10	77-96
v 15	19/45/78-79/92/109-113/122
v 25	29-46/65-79/104/116
v 40	28-36/49-67/91-93/111-112/121-125

Según las tablas del punto anterior, y comparándolos con estas, los máximos siempre se encuentran entre los intervalos de máximos y mínimos de estas graficas.

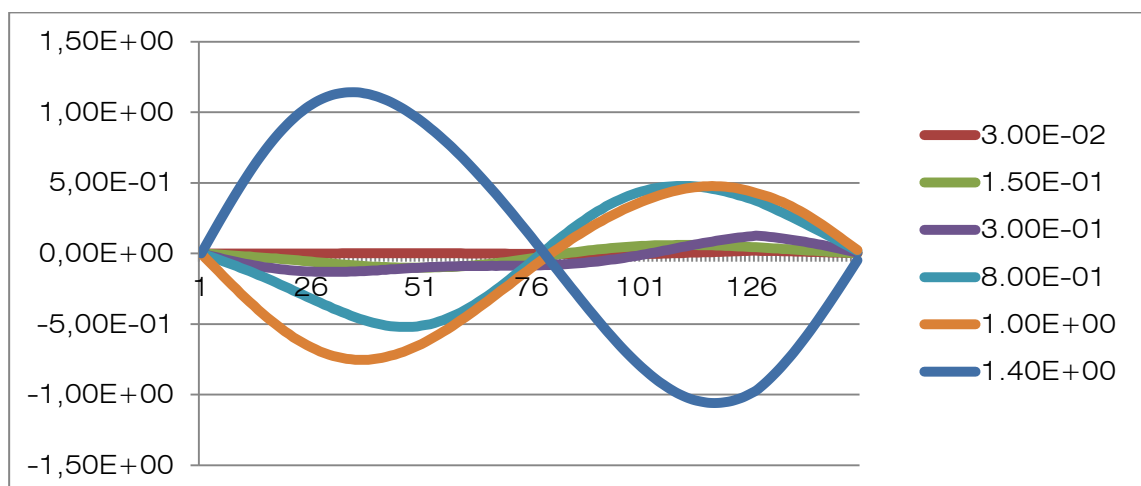
Pero también depende mucho del tiempo que cojamos varia más o menos la vibración con el daño.

- Cuando $x=125$
 - Para $v = 5$:



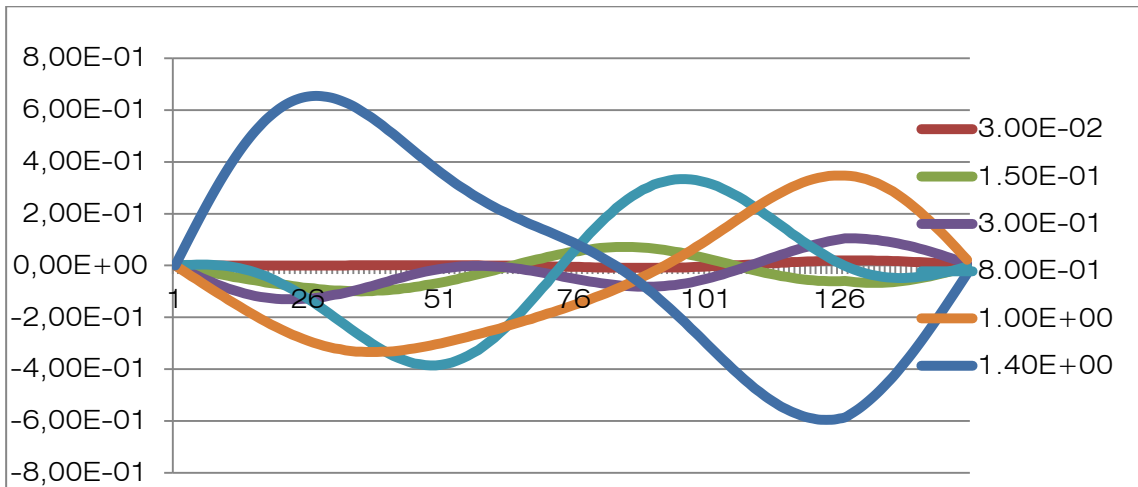
Gráfica 48: Punto 125 para una frecuencia 5 y en ocho intervalos de tiempo.

- Para $v = 10$:



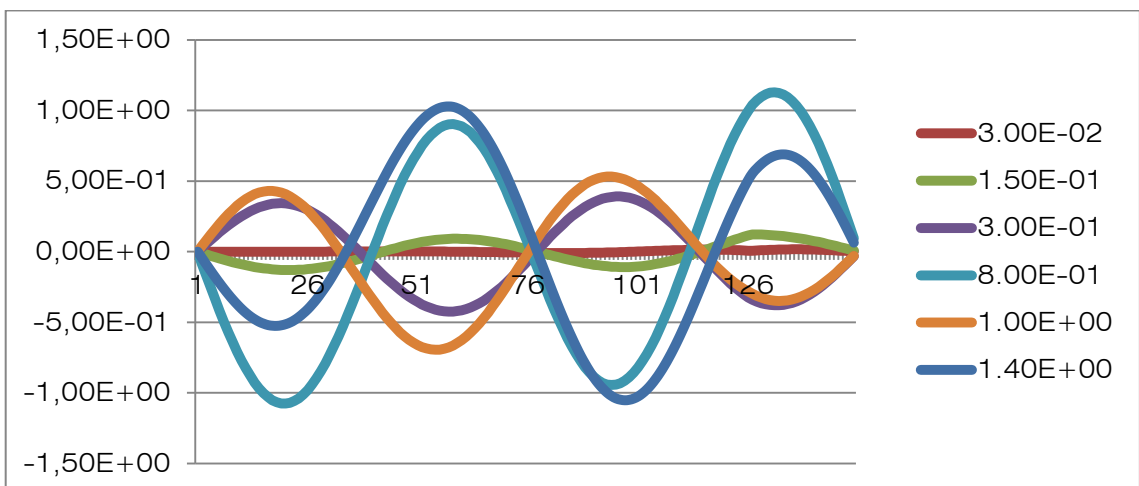
Gráfica 49: Punto 125 para una frecuencia 10 y en ocho intervalos de tiempo.

o Para $\nu = 15$:



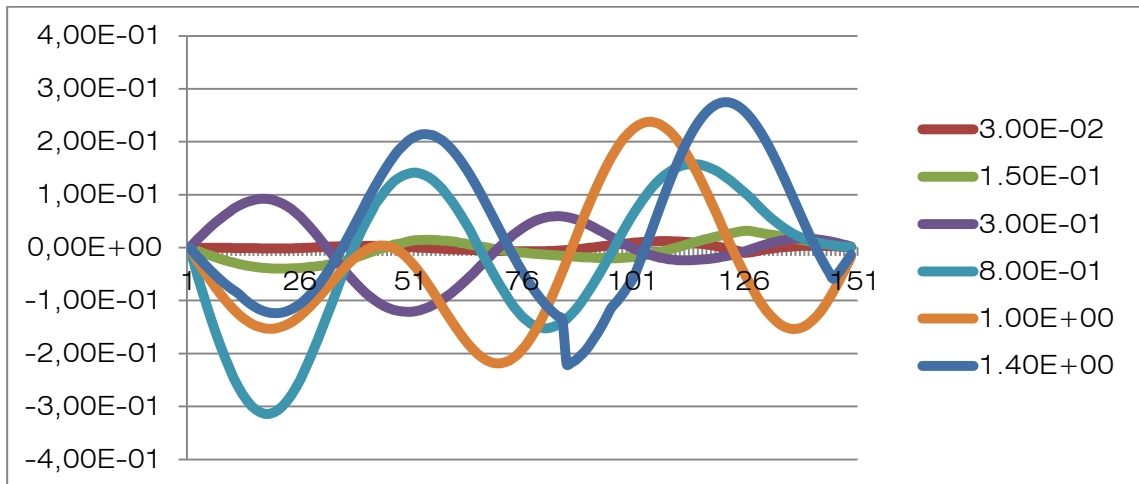
Gráfica 50: Punto 125 para una frecuencia 15 y en ocho intervalos de tiempo.

o Para $\nu = 25$:



Gráfica 51: Punto 125 para una frecuencia 25 y en ocho intervalos de tiempo.

- o Para $v = 40$:



Gráfica 52: Punto 125 para una frecuencia 40 y en ocho intervalos de tiempo.

A continuación, hemos hecho una tabla con los puntos donde la vibración es cero:

Tabla 11: Acotación de máximos y mínimos para el punto 125 y todas las frecuencias.

<i>Daño 125</i>	
<i>v 5</i>	70-77
<i>v 10</i>	78-80
<i>v 15</i>	69/74/84/91/106-108/1
<i>v 25</i>	33-44//74-80
<i>v 40</i>	32-47/67-74/87-104/110-128

Según las tablas del punto anterior, y comparándolos con estas, los máximos siempre se encuentran entre los intervalos de máximos y mínimos de estas graficas.

Pero también depende mucho del tiempo que cojamos varia más o menos la vibración con el daño.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

Como se expuso en el primer capítulo, este proyecto nace con el objetivo de hacer un estudio sobre cómo afecta un daño definido para distintas frecuencias en una viga apoyada.

Me he basado en el método de simulación por redes "MSR", simulación numérica de fenómenos ondulatorios y vibratorios, en concreto al proceso físico de vibraciones transversales en barras. Para ello he utilizado el programa Pspice.

El primer objetivo que me planteé fue estudiar cómo afectan distintas frecuencias a una viga con un daño y una fuerza determinados, por medio del programa Pspice.

Cogí cinco puntos de la viga (10, 50, 75, 100 y 125) e hice la simulación con daños y sin daño en cada uno de ellos y para cada una de las frecuencias elegidas (5, 10, 15, 25 y 40).

A continuación, me centré en cuatro puntos de la viga (15, 50, 90 y 125), estudié en cuál de ellos se producía más daño y en cuál menos. Para ello resté ambas gráficas de cada punto y frecuencia e hice una tabla donde recogía los resultados hallados, máximos y mínimos valores de daño.

Luego, realice lo mismo, pero esta vez en todos los puntos de la viga y solo me centré en seis intervalos de tiempo elegidos aleatoriamente ($3.00E-02$, $1.50E-01$, $3.00E-01$, $8.00E-01$, $1.00E+00$, $1.40E+00$).

En otras tablas acoté cuando la vibración era nula en cada una de las frecuencias y para esos intervalos de tiempo.

La conclusión que hallo de esto es que, dependiendo del intervalo de tiempo que cojamos cambian el máximo y mínimo valor en nuestros puntos de daño. Esto es debido a que dependiendo del tiempo puede subir más bruscamente el daño, por lo tanto, no podemos compararlo bien con nuestros datos primarios.

También se puede observar que cuanto más tiempo pasa, la amplitud del daño es mayor y todas siguen la misma grafica.

Respecto a la frecuencia, conforme esta es mayor, las graficas tienen más cortes con el eje X , como podríamos esperar.

Todos los puntos siguen la misma grafica, menos cuando situamos el daño en el punto 75 que en las frecuencias 5, 10 y 15 no corta al eje X .

Como conclusión final y una de las más importantes, ya que sobre esta se basa mi proyecto es que la amplitud de cada una de las frecuencias varia con el punto donde situemos el daño y del punto de donde

observamos, la amplitud puede aumentar, disminuir o seguir una tendencia constante.

Por lo tanto, es necesario considerar el comportamiento en varios puntos de la viga para poder realizar una evaluación del daño.

