

Universidad
Politécnica
de Cartagena



industriales
etsii UPCT

Simulación numérica con elementos finitos de un micro-relé

Titulación: Ingeniería Industrial

Alumno: César Alfaro Sánchez

Directores: Juan Álvaro Fuentes
Moreno y Francisco
Periago Esparza

Cartagena, 7 de octubre de 2013

Índice

1	Introducción	4
1.1	Objetivos	4
1.2	El método de los elementos finitos	4
1.3	FreeFem++.....	5
2	El MEF en electromagnetismo.....	6
2.1	Magnitudes y ecuaciones base en electromagnetismo	6
2.2	Ecuaciones diferencial y variacional del potencial magnetostático	7
3	Un par de ejemplos académicos.....	10
3.1	Conductores coaxiales de sección rectangular	10
3.1.1	Procedimiento de resolución.....	10
3.1.2	Delimitación y mallado de la zona de cálculo	11
3.1.3	Definición de \mathbf{j}	12
3.1.4	Definición del espacio de elementos finitos	13
3.1.5	Resolución del problema	13
3.1.6	Resultados	14
3.1.7	Código del programa	15
3.2	Máquina estática con entrehierro largo	16
3.2.1	Procedimiento de resolución.....	16
3.2.2	Delimitación y mallado de la zona de cálculo	17
3.2.3	Definición de \mathbf{j}	18
3.2.4	Definición de la permeabilidad magnética	19
3.2.5	Definición del espacio de elementos finitos	21
3.2.6	Resolución del problema	21
3.2.7	Resultados	23
3.2.8	Código del programa	25
4	Análisis de micro-relé en 3D.....	26
4.1	Descripción del problema.....	26
4.2	Procedimiento de resolución.....	28
4.3	Delimitación y mallado de la zona de cálculo	28
4.3.1	Mallado del hierro	30
4.3.2	Mallado del cobre.....	32
4.3.3	Mallado del aire.....	33

4.3.4	Definición de \mathbf{j}	37
4.3.5	Definición de la permeabilidad magnética	39
4.3.6	Definición del espacio de elemento finitos	40
4.3.7	Resolución del problema	40
4.4	Resultados	42
4.5	Código del programa	45
Bibliografía		46
Anexos.....		47
Anexo I: Código de <i>FreeFem++</i> para el problema "Conductores coaxiales de seccion rectangular"		47
Anexo II: Código de <i>FreeFem++</i> para el problema "Máquina estática con entrehierro largo"		49
Anexo III: Código del <i>FreeFem++</i> para la simulación del micro-relé.....		54
Anexo IV: Código de Matlab para el ajuste de la curva $\mu - B$		75

1 Introducción

En este apartado se pretende realizar una breve presentación del proyecto así como dar una visión general sobre el programa informático utilizado en el desarrollo del trabajo. También se realiza una introducción del método matemático que el programa utiliza, de forma que se comprendan lo mejor posible los pasos seguidos durante el desarrollo del proyecto.

1.1 Objetivos

El principal objetivo del presente proyecto es utilizar el programa *FreeFem++* para la simulación de un micro-relé. Este es un proceso que se realiza de forma habitual en los procesos de diseño en empresas con el objetivo de optimizar los prototipos.

De cara a la consecución de este objetivo se realizarán las operaciones necesarias para trasladar el problema real al programa tanto en su geometría como en las ecuaciones que lo rigen. Por ello, con el objetivo de validar el proceso de resolución para el problema del micro-relé, se resolverán previamente dos problemas electromagnéticos más sencillos tal y como se presentan en esta memoria.

1.2 El método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica que permite resolver ecuaciones diferenciales de forma numérica y aproximada. Por tanto, es útil en todos aquellos problemas que, bien por su compleja geometría, o bien por la ausencia de una solución analítica, requieren una solución aproximada.

El método parte de la base de la división del espacio en que se quiere resolver el problema en una serie de elementos discretos o elementos finitos. Este proceso, llamado discretización, permite tratar el problema general en un conjunto de subdominios, con el fin de abordar el cálculo en una serie de puntos concretos en lugar de hacerlo en los infinitos puntos del dominio.

Con carácter general, el MEF cuenta con los siguientes pasos:

1. **Formulación del problema en forma variacional o débil.** Se trata de transformar la ecuación diferencial a resolver en una nueva forma integral cuya solución puede calcularse por el método de los elementos finitos. Se puede garantizar que una solución de la ecuación diferencial (fuerte) será también solución de la forma débil. Como ejemplo de una de estas transformaciones se puede ver en el punto 2.2 de esta memoria.
2. **División del dominio en elementos finitos.** Consiste en la delimitación mediante líneas o superficies imaginarias de distintas zonas dentro del dominio, dando lugar a un espacio vectorial lineal de dimensión finita. Los elementos bidimensionales suelen tener forma triangular o cuadrangular, mientras que los tridimensionales suelen ser tetraedros o hexaedros. En cada elemento habrá una serie de puntos llamados nodos, en los que se realizará el cálculo de las incógnitas.
3. **Elección de las funciones de forma.** Estas funciones son la base vectorial del espacio de aproximación. Tienen la propiedad de valer 1 en un nodo del elemento y 0 en el

resto y permiten proyectar el problema a resolver sobre el espacio de elementos finitos.

4. **Resolución de las ecuaciones.** Finalmente se resuelven las ecuaciones que forman el sistema. El problema que realmente se resuelve es un sistema de ecuaciones algebraicos, que se expresa en forma matricial como:

$$Ku = f \quad (1.1)$$

Siendo u la matriz de incógnitas, f la de la función que rige el problema (puede ser una fuerza, una corriente eléctrica, ...) y K la llamada matriz de rigidez que depende de la discretización realizada y de las propiedades del sistema de que se trate. La resolución se realiza de forma numérica, habiendo múltiples métodos posibles.

El MEF en ingeniería permite resolver problemas que son muy difíciles de resolver por otros métodos. Esto ha permitido, en los procesos de diseño en los que tradicionalmente era necesario realizar y ensayar gran número de prototipos, reducir los tiempos y costes del diseño al permitir realizar las primeras fases del mismo mediante simulación.

1.3 FreeFem++

FreeFem++ es un software gratuito, desarrollado en la Universidad Pierre y Marie Curie de París, que se utiliza para resolver ecuaciones en derivadas parciales numéricamente utilizando el método de los elementos finitos. Tiene su propio lenguaje de programación y se puede utilizar para resolver muchos tipos de problemas de diferentes campos de la Física e Ingeniería: fluidos, calor, electromagnetismo,...

Permite realizar numerosas operaciones:

- Definir la geometría del sistema en 2D o 3D: tiene diferentes herramientas para reproducir cualquier geometría, ya sea creando elementos geométricos concretos o mediante descripción paso a paso. En 3D permite la realización de transformaciones para reproducir geometrías cambiantes.
- Permite realizar por separado el mallado de cada elemento del sistema, dando la opción al usuario de elegir el tamaño de los elementos o producir adaptaciones automáticas mediante sus propios algoritmos pre programados.
- Definición de la ecuación o ecuaciones que rigen el sistema, con posibilidad de seleccionar entre distintos tipos de elementos finitos para adaptarse a cada caso.
- Permite representar gráficamente los resultados permitiendo distintos tipos de visualización y opciones gráficas, así como el uso de herramientas de terceros para la visualización de resultados, como *gnuplot* y *medit*.
- Uso de numerosas herramientas externas a *FreeFem++*, simplemente incluyendo las librerías necesarias.

Para una mayor visión del empleo, estructura e instrucciones del lenguaje de *FreeFem++* se puede recurrir al manual de F. Hecht incluido en la bibliografía.

2 El MEF en electromagnetismo

A continuación se explican de forma básica los conocimientos y magnitudes clave, que se utilizarán a lo largo del trabajo, para la comprensión y aplicación del método de los elementos finitos a sistemas electromagnéticos.

2.1 Magnitudes y ecuaciones base en electromagnetismo

En primer lugar, de cara a la aplicación del MEF a sistemas electromagnéticos, es conveniente conocer las siguientes magnitudes y ecuaciones clave:

- Campo magnético (\vec{B}):

El campo magnético es un campo vectorial que representa la influencia magnética de las corrientes eléctricas y los materiales magnéticos. Según las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

De la ecuación (2.1) se extrae que el campo magnético es un campo solenoidal, mientras que la ecuación (2.2) es la base que se va a utilizar para resolver mediante el MEF los distintos sistemas electromagnéticos, teniendo en cuenta que en los casos en que el campo eléctrico \vec{E} es estacionario su derivada respecto del tiempo es nula.

- Potencial vector magnético o potencial magnetostático (\vec{A}):

Del hecho de que el campo magnético \vec{B} sea solenoidal, se deriva que éste puede escribirse como el rotacional de otro campo vectorial \vec{A} que es el denominado potencial vector magnético.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.3)$$

Para definir \vec{A} de forma unívoca es necesario, no obstante, establecer una condición extra a cumplir por la divergencia de \vec{A} y que en este caso será:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.4)$$

- Densidad de corriente (\vec{j}):

La densidad de corriente será otro de los parámetros importantes a la hora de realizar el problema. Se puede definir la densidad de corriente como un campo vectorial \vec{j} cuyo módulo es la intensidad por unidad de superficie en cada punto y su dirección y sentido el del movimiento de las cargas.

$$\vec{j} = \frac{dI}{ds} \vec{u} \quad (2.5)$$

Siendo \vec{u} el vector unitario en el sentido del movimiento de las cargas en el punto.

- Permeabilidad magnética (μ):

La permeabilidad magnética es la propiedad de los materiales que determina su capacidad para atraer y hacer pasar a su través los campos magnéticos. Tomando

como referencia la permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ se define la permeabilidad relativa (μ_r) de un material como:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.6)$$

- Intensidad de campo magnético (\vec{H}):

La intensidad de campo magnético es una magnitud vectorial cuyo uso toma especial sentido con la presencia de campos magnéticos en materiales magnéticos. En estos materiales, ante la presencia de un campo magnético, aparece una densidad de corriente de magnetización \vec{j}_m que se añade a la densidad de corriente libre \vec{j}_l . Así, en estos materiales:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Además, hay una relación entre los valores de \vec{B} , \vec{H} y μ , que viene dada por:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.8)$$

2.2 Ecuaciones diferencial y variacional del potencial magnetostático

A la hora de resolver los sistemas planteados en este trabajo, la primera parte será obtener el cálculo del potencial vector magnético. Para ello será necesario resolver la ecuación diferencial del potencial magnetostático, que se obtiene a partir de las propiedades fundamentales del campo magnetostático. Sustituyendo (2.3) en (2.2) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.9)$$

Lo cual, en coordenadas cartesianas y teniendo en cuenta (2.4) se puede expresar como:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.10)$$

Que será la ecuación diferencial del potencial magnetostático en coordenadas cartesianas. Si ahora se descomponen los vectores en cada una de sus componentes se obtienen tres componentes escalares:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 j_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 j_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 j_z \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otro lado, para que el programa *FreeFem++* sea capaz de resolver un problema es necesario obtener su forma variacional. Esto implica que son necesarios una forma bilineal $a(u, v)$, una lineal $l(f, v)$ y una condición de contorno para expresar el problema como:

$$\text{problem } P(u, v) = a(u, v) - l(f, v) + (\text{condiciones de contorno}); \quad (2.12)$$

Donde u, v, f serían funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

En primer lugar, la condición de contorno que se usará será la de $\vec{A} = 0$ en la frontera del dominio Ω . Esto es debido a que la suma de las corrientes en cualquier circuito va a ser nula, por lo que, siempre que se tome una frontera lo suficientemente alejada de los conductores

que producen el campo magnético, las aportaciones de cada \vec{j} al potencial magnético tienden a anularse. Por tanto nos queda:

$$\vec{A} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (2.13)$$

En segundo lugar, habrá que obtener la forma variacional de las ecuaciones (2.11), para ello tomando por ejemplo la primera de ellas, tenemos:

$$\nabla^2 A_x = \nabla \cdot (\nabla A_x) = -\mu_0 j_x \quad (2.14)$$

Introduciendo la función arbitraria v , que cumple las condiciones de contorno, y realizando la integral en todo el dominio Ω , se obtiene:

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla A_x) v \, d\Omega = \int_{\Omega} j_x v \, d\Omega \quad (2.15)$$

Haciendo integración por partes en el lado izquierdo:

$$\left[-\frac{1}{\mu_0} \nabla A_x v \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \nabla A_x \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} j_x v \, d\Omega \quad (2.16)$$

Y teniendo en cuenta que v cumple las condiciones de contorno, por lo que su valor es nulo en la frontera, quedaría finalmente:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \nabla A_x \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega} j_x v \, d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

Que es la forma débil o variacional del problema y la que hay que introducir en *FreeFem++*. Si ahora comparamos las ecuaciones (2.12) y (2.17), podemos identificar cada parte de la forma variacional con una de las funciones mediante las que se introducen los problemas en *FreeFem++*. De este modo:

- La función u de (2.12) será la componente A_x del potencial vector magnético. Por norma general, y por mantener la nomenclatura habitual de *FreeFem++*, se mantendrá el nombre de u para el potencial vector magnético en el código de *FreeFem++* y siempre que se haga referencia al programa en esta memoria.
- La función v de (2.12) se corresponderá con su homónima. Se trata en realidad de una función test, sin ningún significado físico particular.
- La función f de (2.12), que representa a la función matemática que rige el problema, se corresponderá con la componente j_x de la densidad de corriente.

El razonamiento seguido para obtener (2.17) es el mismo para la resolución de A_y y A_z , solo teniendo que utilizar en cada caso la correspondiente componente de la densidad de corriente.

Hay que tener en cuenta que las ecuaciones anteriores se refieren al caso en que los materiales en el sistema sean no magnéticos. Para el caso de materiales magnéticos, combinando las ecuaciones (2.7) y (2.8), la ecuación diferencial que resulta es:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{j}_l \quad (2.18)$$

Aunque esta ecuación pueda parecer análoga a (2.9) su resolución no lo es, ya que hay una diferencia fundamental en la permeabilidad magnética. En materiales magnéticos, la permeabilidad no presenta un valor uniforme y constante, sino que su valor en cada punto depende del valor de \vec{B} y del material de que se trate, y por tanto no se puede resolver del mismo modo.

Para resolverlo se hará uso del teorema del punto fijo, que nos permite afirmar que, siempre que una función $F(x)$ sea contractiva, existirá un punto fijo x_0 tal que $F(x_0) = x_0$ y que la sucesión $x, F(x), F(F(x)), \dots$ converge a dicho punto. Es decir, un proceso de resolución iterativo que se detalla en el punto 3.2.6 de esta memoria.

3 Un par de ejemplos académicos

Con el fin de presentar y comprender la metodología para la resolución del problema del micro-relé, se presenta en primer lugar la resolución de dos problemas de electromagnetismo más sencillos mediante *FreeFem++*.

3.1 Conductores coaxiales de sección rectangular

Este ejemplo se trata de un caso sencillo de un sistema electromagnético para tomar contacto con *FreeFem++*. El sistema se compone de un conductor de cobre de sección cuadrada, rodeado de aire y de otro conductor de cobre, tal y como se muestra en la Figura 3.1. Se considera que ambos conductores son rectos y largos comparados con las dimensiones mostradas.

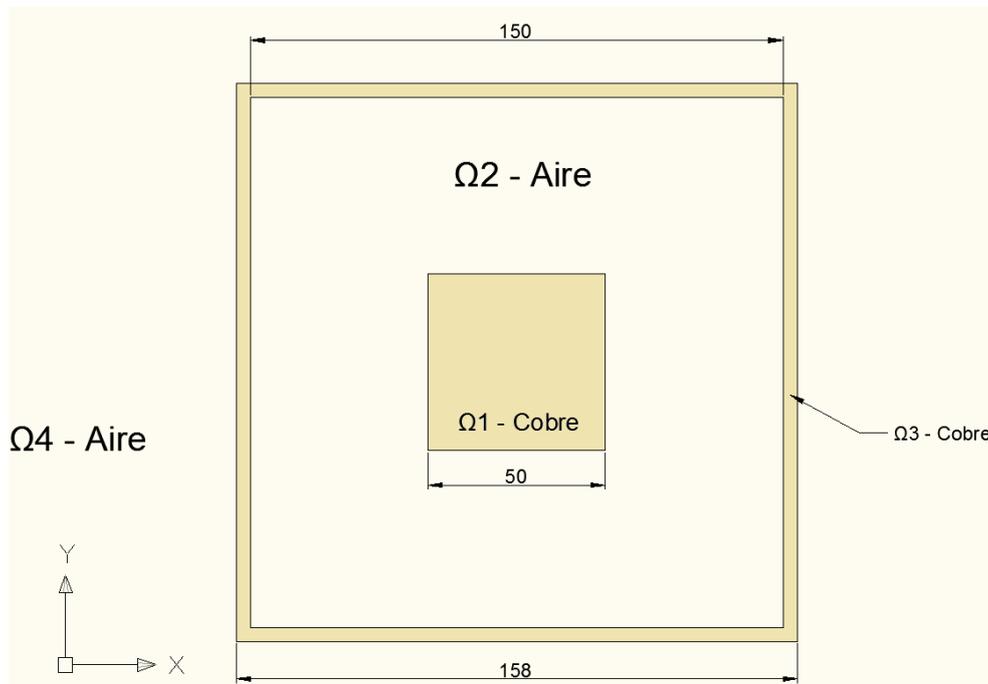


Figura 3.1: Esquema del problema 1, con medidas en mm

Los conductores de cobre están atravesados por corrientes de 7500 A cada uno, siendo el sentido de la corriente inverso entre ellos, saliente del papel en el conductor interior y entrante en el papel en el conductor exterior.

El objetivo del problema es calcular el potencial magnetostático \vec{A} en el dominio, así como el campo magnético \vec{B} generado por la corriente y por último la energía magnética W_{Ω} en todo el dominio.

3.1.1 Procedimiento de resolución

Para resolver el problema se realizarán los pasos que se muestran en la Figura 3.2. En primer lugar se hará una delimitación y mallado de la zona de estudio, se definirá \vec{j} en ese espacio y se resolverá la ecuación (2.17) para obtener \vec{A} . Por último a partir de este valor se procederá al cálculo de las otras magnitudes \vec{B} y W_{Ω} .

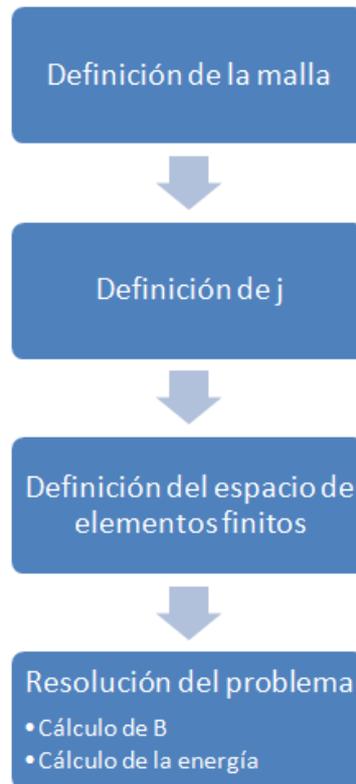


Figura 3.2: Proceso a seguir para la resolución del problema 1

3.1.2 Delimitación y mallado de la zona de cálculo

Aunque el sistema a estudiar está claramente delimitado en este caso, pues viene dado por los conductores, los efectos de las corrientes se extienden a la zona circundante. Se trata por tanto de una región de estudio abierta, pues las magnitudes que se quieren calcular no solo tienen valor en la región delimitada por los conductores sino que hay que tomar una región cuya frontera esté lo suficientemente alejada de los conductores para delimitar el problema. En este caso se tomó una región cuadrada de $400 \times 400 \text{ mm}$ centrada en el conductor interior, ya que suponía una distancia suficiente para que los efectos de las corrientes se anulasen. El origen de coordenadas del sistema se estableció, por razones de claridad en el centro del conductor interior.

El primer paso, una vez delimitada la región que se va a estudiar, es realizar el mallado. Este caso resulta sencillo pues bastará con una malla de forma cuadrada que cubra todo el espacio de estudio. Dado que tanto el cobre como el aire son materiales no magnéticos no es necesario distinguirlos por sus propiedades, se considerará que ambos presentan una permeabilidad magnética aproximadamente igual a la del vacío. Por lo tanto se usará un valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ en toda la zona estudiada.

Tampoco a la hora de decidir el tamaño de los elementos se encuentran muchas dificultades, ya que en este caso se puede usar un número de elementos relativamente elevado sin que eso conlleve grandes tiempos de ejecución. La malla utilizada es la que se muestra en la Figura 3.3, formada por 5000 elementos triangulares.

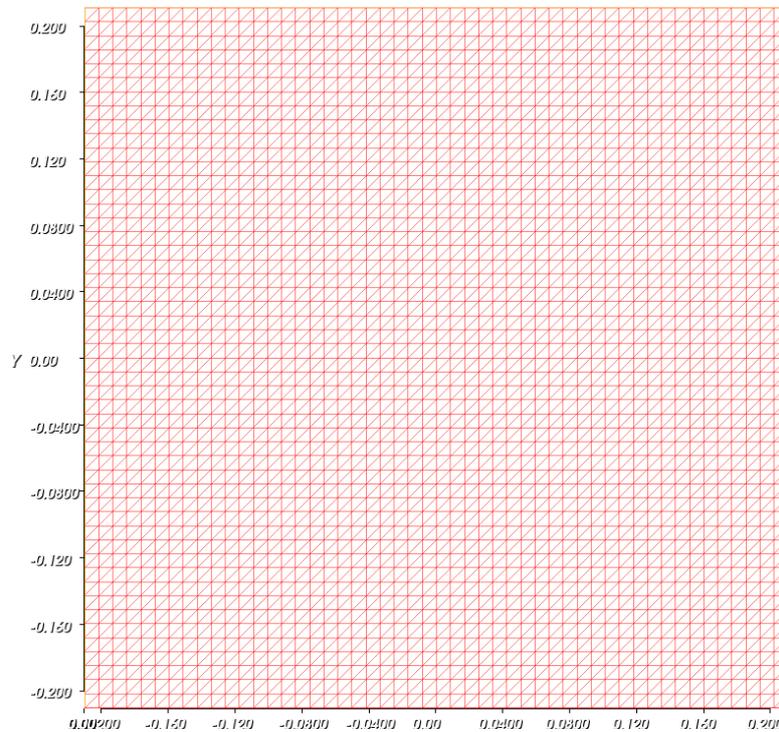


Figura 3.3: Mallado de la región de cálculo

3.1.3 Definición de \vec{j}

La densidad de corriente se calculará tal como se indica en la ecuación (2.5). Si en primer lugar prestamos atención a la dirección y sentido de la corriente, observamos que es perpendicular al plano XY , por lo que las componentes x e y de \vec{j} son nulas. En cuanto a j_z , en el interior de los conductores su valor será el que resulte de dividir los 7.500 A de corriente que los atraviesan entre su sección, siendo el sentido positivo el saliente del papel, mientras que su valor será nulo en las zonas de aire.

$$j_x = 0 \text{ en } \Omega$$

$$j_y = 0 \text{ en } \Omega$$

$$j_z \begin{cases} \frac{7500}{0.05^2} \text{ A/m}^2 \text{ en } \Omega_1 \\ 0 \text{ en } \Omega_2 \\ -\frac{7500}{(0.158^2 - 0.15^2)} \text{ A/m}^2 \text{ en } \Omega_3 \\ 0 \text{ en } \Omega_4 \end{cases} \quad (3.1)$$

En la Figura 3.4 se muestra el resultado de *FreeFem++* para todo el espacio del problema considerado.

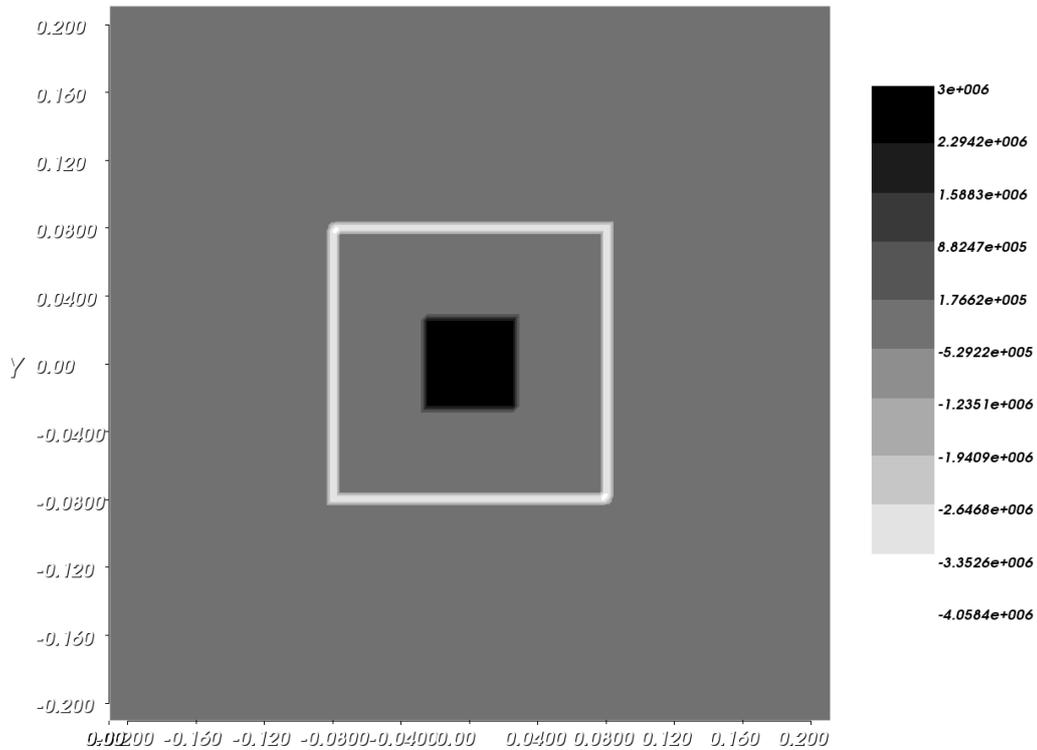


Figura 3.4: Distribución de valores de j en todo el dominio

3.1.4 Definición del espacio de elementos finitos

Antes de resolver el problema es necesario definir en el programa el espacio de elementos finitos, para poder declarar el tipo de las incógnitas cuyos valores se desea calcular, en este caso \vec{A} y \vec{B} .

Lo más importante a tener en cuenta a la hora de elegir el tipo de elementos es que, dado que el campo magnético se calculará derivando el potencial magnetostático, se elegirán elementos de un grado inferior. Así, se escogieron elementos P2 para el potencial y P1 para el campo.

3.1.5 Resolución del problema

Llegado a este punto, se procederá a calcular \vec{A} haciendo uso de la ecuación (2.17). Dado que en este caso j_x y j_y son nulas, solo será necesario calcular la componente A_z del vector, a la que en el código del programa se le asignará el nombre u .

3.1.5.1 Cálculo de \vec{B}

\vec{B} se calcula a partir del valor de \vec{A} según la ecuación (2.3). Teniendo en cuenta que solo hay componente z de \vec{A} , al calcular el rotacional tendremos componentes x e y de \vec{B} . En concreto, al desarrollar la expresión para el rotacional en dos dimensiones y coordenadas cartesianas se obtiene:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \tag{3.2}$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

Que será la expresión usada para el cálculo en *FreeFem++*.

3.1.5.2 Cálculo de la energía

Para calcular la energía del sistema en toda la región estudiada, se puede utilizar la siguiente expresión:

$$W_{\Omega} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \, dx \, dy \quad (3.3)$$

Para calcularla en regiones concretas del dominio, esta expresión no es útil, ya que no permite saber de qué forma queda distribuida la energía en cada zona, por ello se puede usar la expresión:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iint_{\Omega} B^2 \, dx \, dy \quad (3.4)$$

3.1.6 Resultados

Los resultados arrojados por el programa se muestran en la Figura 3.5 y la Figura 3.6. En primer lugar, se puede apreciar que el potencial magnetostático presenta sus valores máximos en la zona central del sistema, y decrece progresivamente hacia afuera, hasta cumplir la condición de contorno $A_z = 0$ en la frontera.

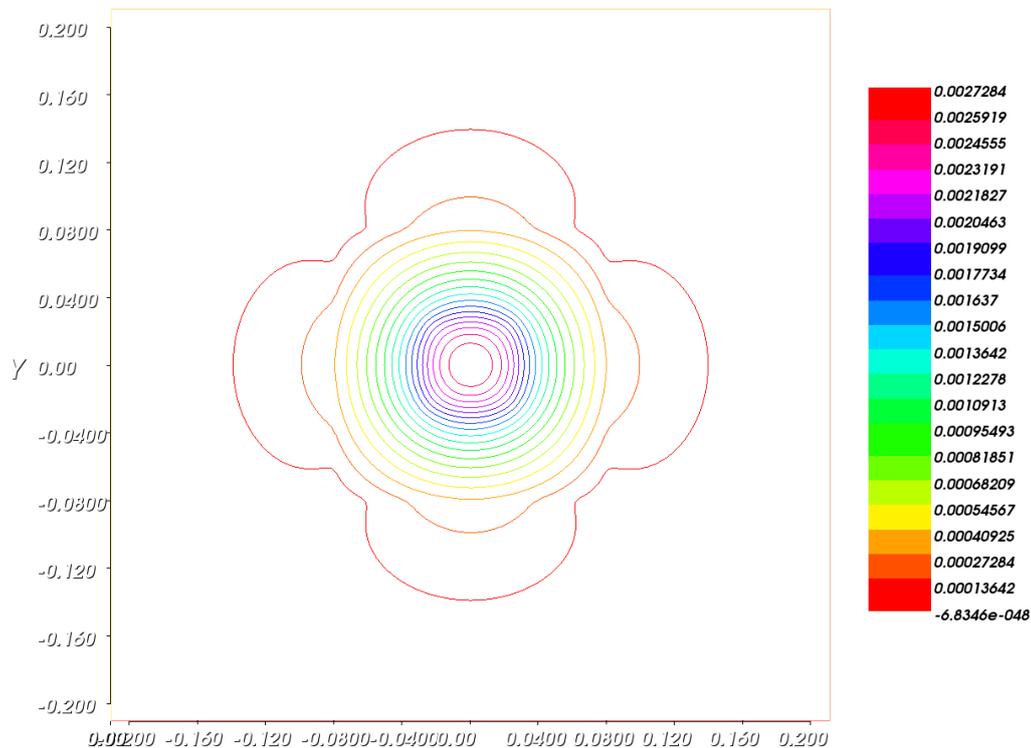


Figura 3.5: Potencial magnetostático

Por su parte en la Figura 3.6 se puede apreciar como \vec{B} aumenta desde el conductor central hacia el exterior, presentando un máximo entre ambos conductores, disminuyendo su valor al aproximarnos al interior del conductor externo, y quedando fuera de éste un valor residual muy inferior al resto, aunque no nulo.

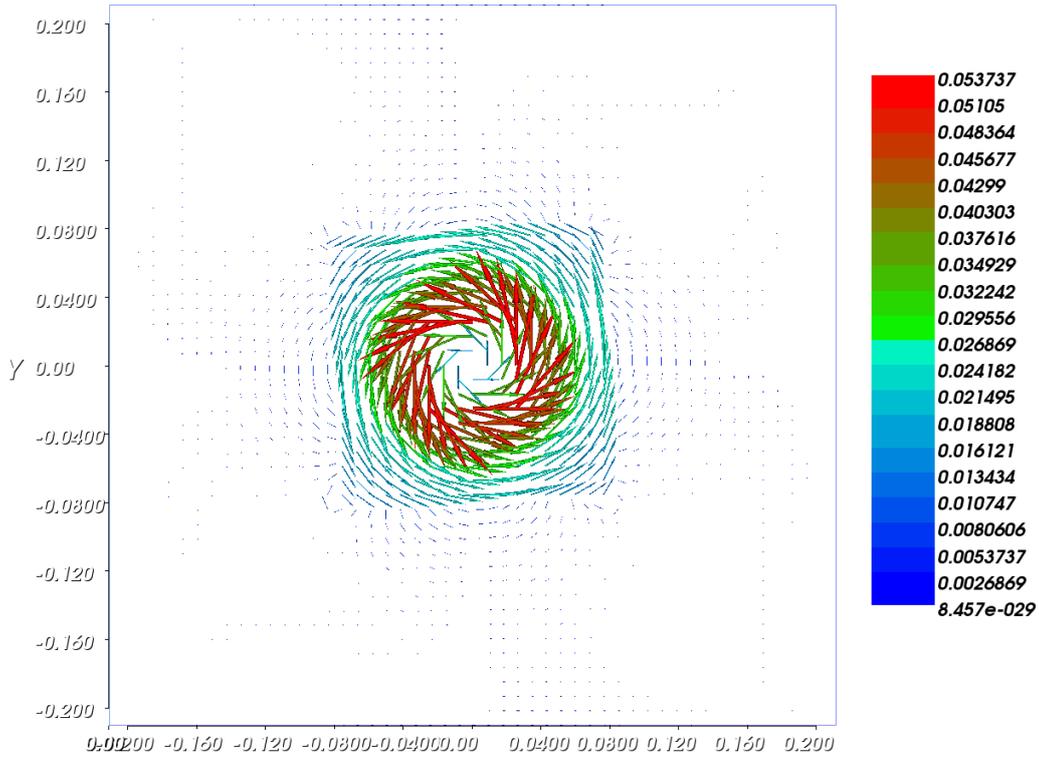


Figura 3.6: Representación vectorial del campo magnético \vec{B}

Finalmente, los valores obtenidos para la energía magnética calculados son los de la Tabla 3.1. Dado que desconocemos la longitud de los cables en la dirección perpendicular al plano XY , los resultados se muestran en J/m . Se puede ver que los valores totales para ambas ecuaciones son similares, aunque la ecuación (3.3) no permite conocer cómo queda distribuida en las distintas zonas del dominio.

Observando los valores de energía en las distintas zonas, se aprecia que la zona de aire entre los dos conductores es la que acumula la mayor cantidad de energía como corresponde a los mayores valores de \vec{B} en su interior.

	En Ω_1	En Ω_2	En Ω_3	En Ω_4	En Ω
$W_\Omega = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \, dx \, dy$					8.247 J/m
$W = \frac{1}{2\mu_0} \iint_{\Omega} B^2 \, dx \, dy$	1.520 J/m	6.381 J/m	0.108 J/m	0.270 J/m	8.279 J/m

Tabla 3.1: Valores de energía obtenidos para cada ecuación

3.1.7 Código del programa

En el Anexo I se incluye el código de *FreeFem++* para la resolución de este problema.

3.2 Máquina estática con entrehierro largo

En este caso se tiene una máquina electromagnética alimentada con corriente continua. Su sección se muestra en la Figura 3.7. Se puede apreciar que está formada por cuatro conductores de cobre de sección cuadrada en los que la densidad de corriente es de 1 A/mm^2 . En los dos conductores que se encuentran en la parte derecha la corriente es saliente del papel, mientras que en las que se encuentran en la izquierda la corriente es entrante. La longitud perpendicular al plano mostrado en la Figura 3.7 es de 3 m .

Alrededor de las bobinas se encuentra un entrehierro de aire, y alrededor de éste se puede apreciar el hierro de la máquina.

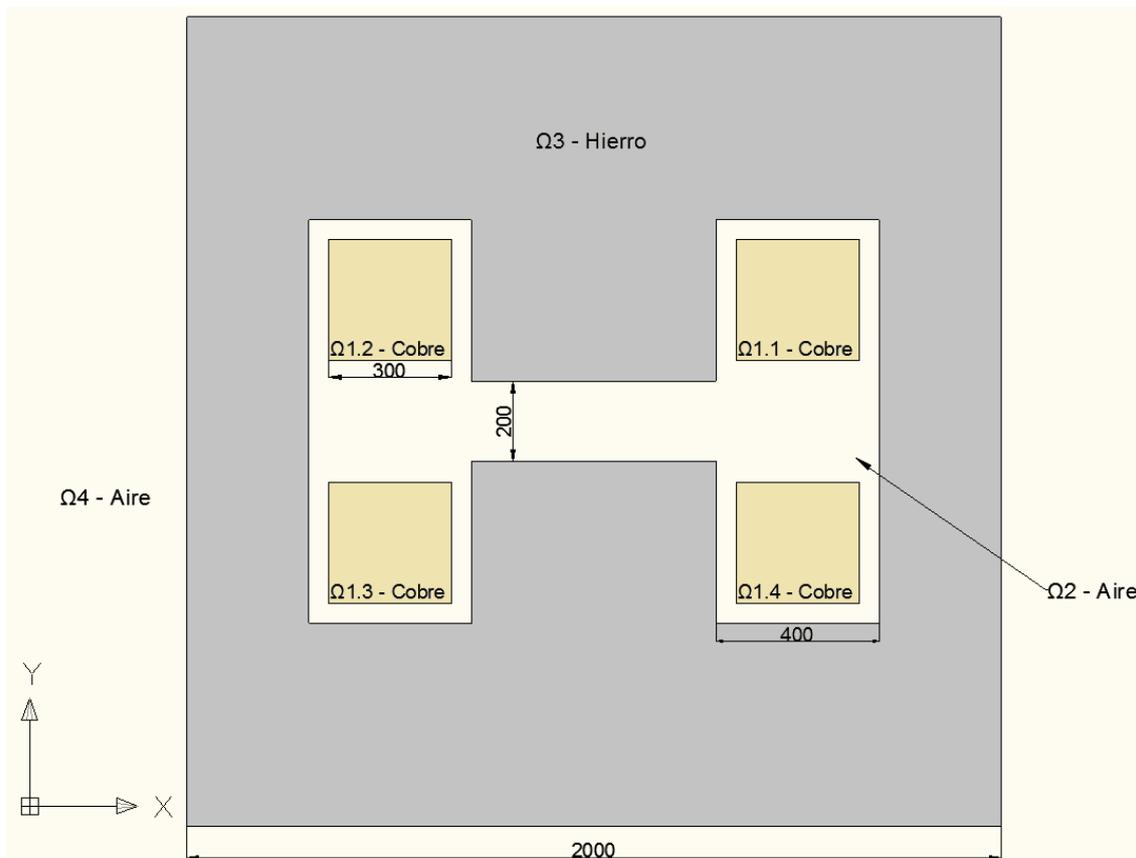


Figura 3.7: Geometría del segundo problema con medidas en mm

El objetivo del problema es hallar el potencial \vec{A} y el campo magnético \vec{B} producido por las corrientes, además de la permeabilidad relativa μ_r en el hierro y la intensidad de campo magnético \vec{H} resultante. También se calculará la energía magnética W_Ω en todo el dominio y en cada zona, cobre, aire y hierro, por separado.

3.2.1 Procedimiento de resolución

La diferencia principal entre este problema y el anterior radica en la presencia del material magnético que, tal y como se muestra en la Figura 3.8 obliga al cálculo de la permeabilidad magnética.

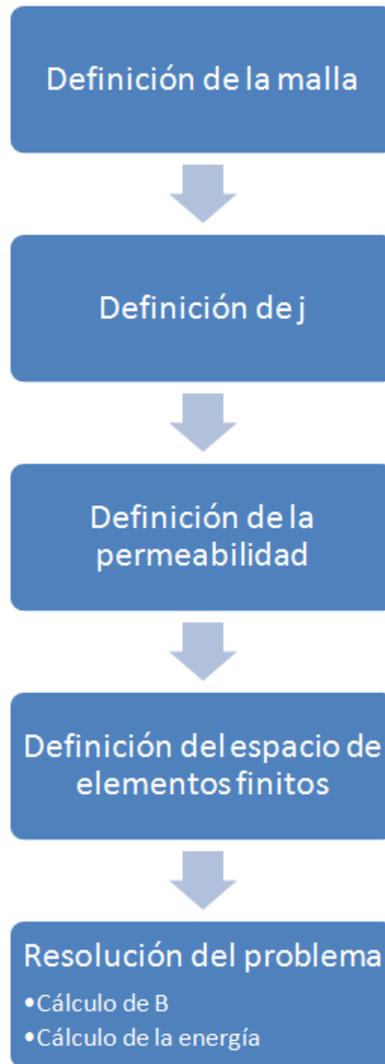


Figura 3.8: Procedimiento para la resolución del problema 2

3.2.2 Delimitación y mallado de la zona de cálculo

En este caso, la zona de cálculo se limitará al borde de hierro de la máquina, no siendo necesario extender la zona de cálculo al aire circundante. Esto es debido a que el hierro, como material magnético, presenta una permeabilidad magnética varias veces superior a la del aire. Por tanto, al estar todo el conductor rodeado de hierro, las líneas de campo \vec{B} se cierran en el interior del hierro, ya que lo contrario implicaría recorrer caminos de menor permeabilidad magnética y más largos. El origen de coordenadas se situaría en el centro del sistema por la mayor comodidad a la hora de definir las dimensiones.

En cuanto al mallado, en este caso se realizó una división de la zona de cálculo por regiones. Esto respondía a dos necesidades. La primera sería la de estructurar y organizar el código de una forma más clara y fácil de entender, dada la mayor complejidad del sistema. La segunda se debería al propio comportamiento del sistema, pues en este caso las regiones de aire y cobre, no presentan las mismas características que la región de hierro, pues su permeabilidad magnética es diferente. La división en regiones de la zona de cálculo permite delimitar con exactitud hasta donde llegan las zonas con un comportamiento u otro respecto de la permeabilidad magnética y evitan los errores debidos a un mallado impreciso.

Por tanto, a la hora de realizar el mallado, se produjo la división del espacio en las cuatro zonas correspondientes a las bobinas, la correspondiente al entrehierro y la correspondiente al hierro, tal como muestra la Figura 3.9. La malla está compuesta por un total de 39.188 elementos triangulares.

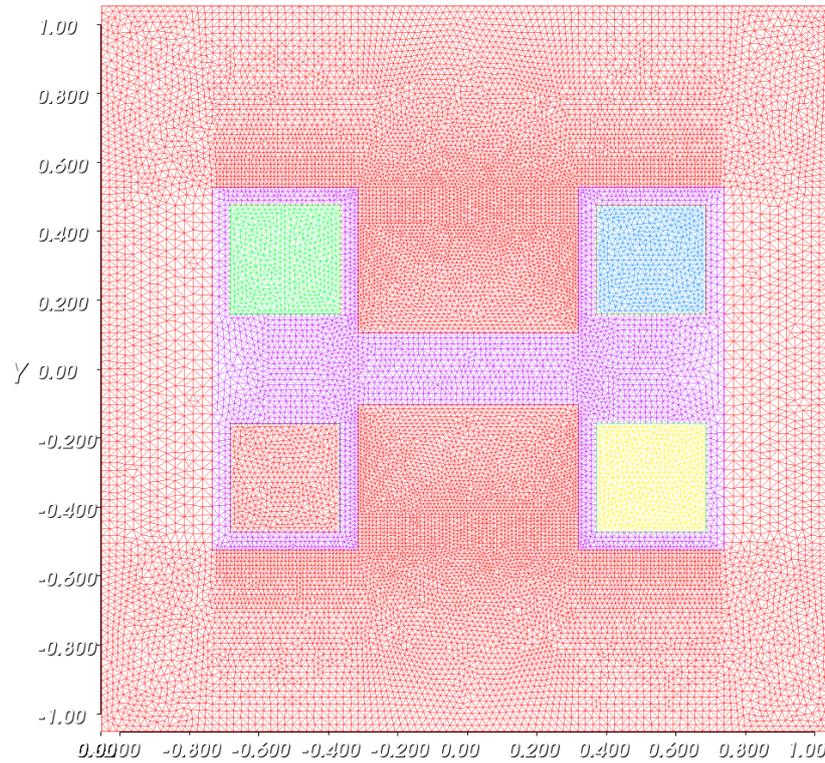


Figura 3.9: Mallado de la máquina electromagnética, formado por 39.188 triángulos

3.2.3 Definición de \vec{j}

Como se mencionó anteriormente, en este caso las bobinas presentan una densidad de corriente en su interior de 1 A/mm^2 . De igual modo que en el caso anterior, al ser la corriente perpendicular al plano XY , la densidad de corriente solo presentará componente en z . Por tanto en este caso el valor de \vec{j} será el mostrado en (3.5).

$$\begin{aligned}
 j_x &= 0 \text{ en } \Omega \\
 j_y &= 0 \text{ en } \Omega \\
 j_z &\begin{cases} 10^6 \text{ A/m}^2 \text{ en } \Omega_{1.1} \text{ y } \Omega_{1.4} \\ -10^6 \text{ A/m}^2 \text{ en } \Omega_{1.2} \text{ y } \Omega_{1.3} \\ 0 \text{ en } \Omega_2 \text{ y } \Omega_3 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

En la Figura 3.10 se muestra como queda la densidad de corriente representada en *FreeFem++*.

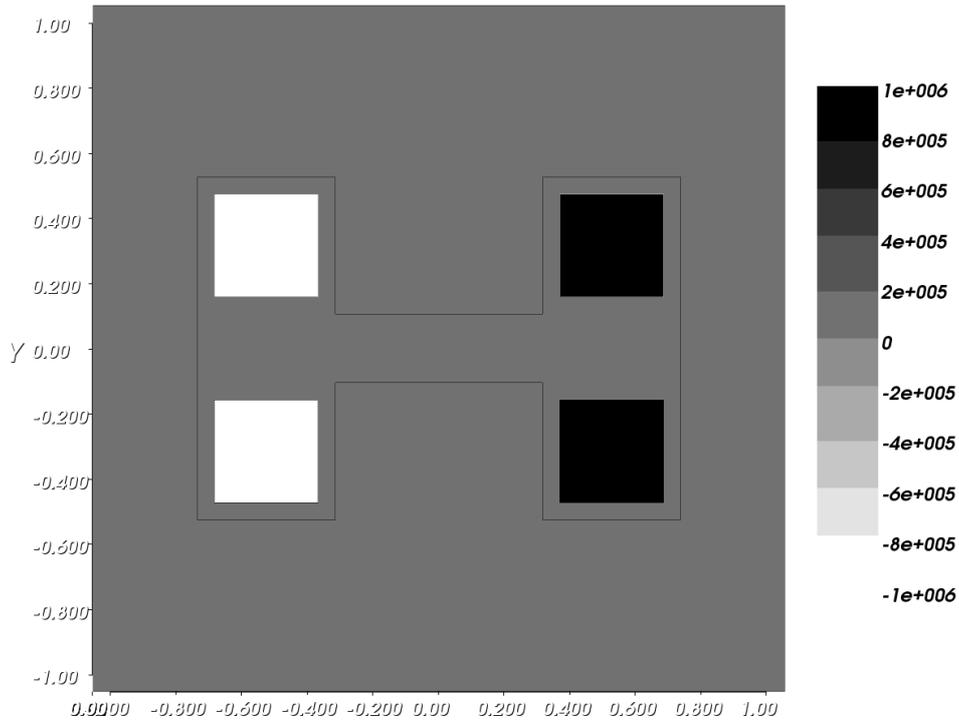


Figura 3.11: Representación de j en FreeFem++

3.2.4 Definición de la permeabilidad magnética

En cuanto a la permeabilidad magnética, para las regiones de cobre y aire, se seguirá utilizando el valor de permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

Mención aparte merece el caso del hierro, ya que como material magnético su permeabilidad magnética depende en cada punto del valor del campo magnético \vec{B} . Por tanto, para este material, en lugar de un valor concreto del dato de permeabilidad tenemos la curva característica $B - H$ que se relaciona con μ según (2.8). La curva para el tipo de hierro del problema es la que se muestra en la Figura 3.12.

Curva B-T del hierro

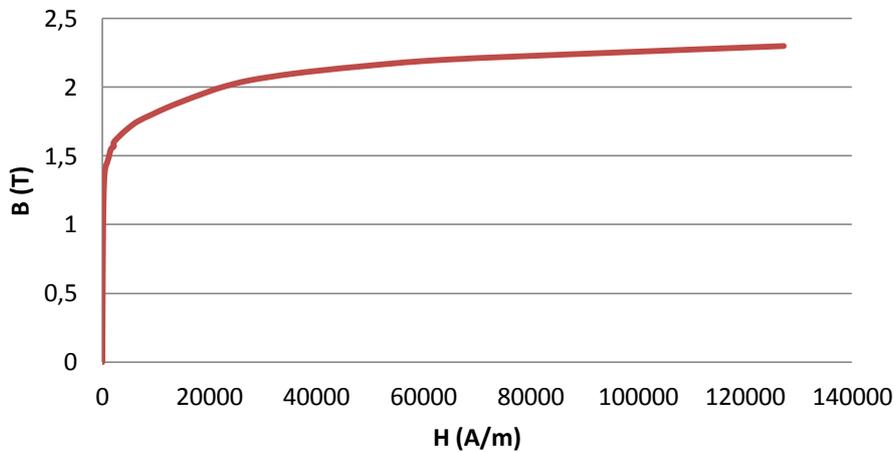


Figura 3.12: Curva B-T del hierro

En la Figura 3.12 se puede observar cómo a partir de ciertos valores de \vec{H} , el campo magnético apenas aumenta, lo que implica que su permeabilidad magnética se reduce mucho, acercándose al valor de la permeabilidad en el vacío.

Más interesante para nosotros podría ser representar directamente los valores de μ_r a partir de la ecuación (2.8), dando lugar a la curva $\mu_r - \vec{B}$ que se muestra en la Figura 3.13.

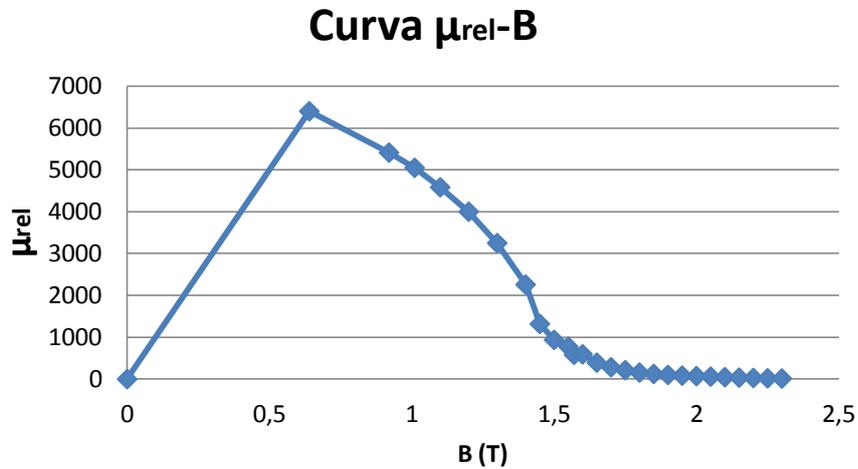


Figura 3.13: Curva $\mu_{rel} - B$

Para poder introducir en el programa esta característica del material, se decidió hacer un ajuste que permitiera calcular, de la forma más aproximada posible, el valor de la permeabilidad correspondiente al campo magnético existente en cada punto del hierro. El tipo de curva utilizada, dada la forma de la curva fue una exponencial en función del módulo de \vec{B} , del tipo:

$$\mu \cong \frac{B}{C_1 * (e^{C_2 * B} + C_3)} \quad (3.6)$$

Siendo C_1 , C_2 y C_3 los coeficientes a encontrar para ajustar la curva.

Este ajuste se realizó bajo el criterio de minimizar el error entre los datos numéricos de la curva real y los resultantes de la curva que se usa para el ajuste. La curva obtenida que cumplía este criterio es la ecuación (3.7).

$$\mu = \frac{B}{H} \cong \frac{B}{0.82706 * (e^{4.59635 * B} + 80.20517)} \quad (3.7)$$

En la Figura 3.14 se muestran las representaciones gráficas de los datos y la curva mediante la que se produjo el ajuste, viendo que ambas se acercan de forma aproximada. En el Anexo IV se incluye el código de Matlab con el que se realizó el ajuste.

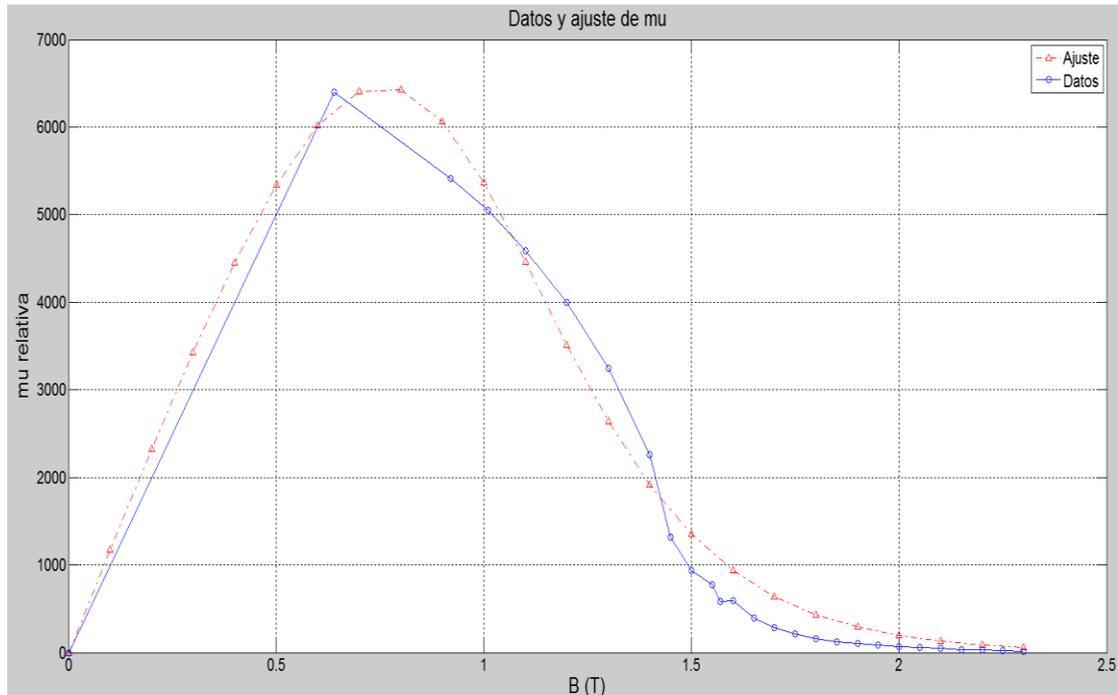


Figura 3.14: Ajuste de la curva $\mu_{rel} - B$ en el hierro

3.2.5 Definición del espacio de elementos finitos

En este caso, la elección del tipo de elementos para representar las magnitudes a calcular fue igual a la del problema anterior, eligiendo elementos P2 para el potencial vector magnético y P1 para el campo \vec{B} que se calcula derivando el potencial. Se usaron además los elementos constantes (P0) para la variable *reg* que se utiliza para almacenar y utilizar los números de región que *FreeFem++* asigna a cada zona del mallado.

3.2.6 Resolución del problema

En este caso, la resolución del problema incluirá un paso adicional al caso del primer problema. Como hemos visto, en el hierro el valor de la permeabilidad va a ser distinto en cada punto, y va a depender del módulo de \vec{B} . Se da, por tanto, el caso de que es necesario conocer μ para resolver la ecuación (2.18), pero a la vez es necesario conocer el valor de \vec{B} para hallar la permeabilidad magnética. Se trata de un problema no lineal, que no podemos resolver directamente.

3.2.6.1 Cálculo de \vec{B}

La solución es usar un algoritmo iterativo, empezando con la suposición de un valor uniforme en todo el hierro para la permeabilidad magnética. El problema así obtenido se puede resolver de la misma forma que (2.17), permitiéndonos obtener los valores de \vec{A} y \vec{B} . El valor del campo magnético nos permitirá a su vez calcular una primera aproximación de μ con la que podemos resolver de nuevo el problema. Este esquema, recogido en la Figura 3.15, se repetiría hasta que dos iteraciones consecutivas presentaran unos resultados similares, con lo que consideraremos que hemos hallado una solución para el problema no lineal.

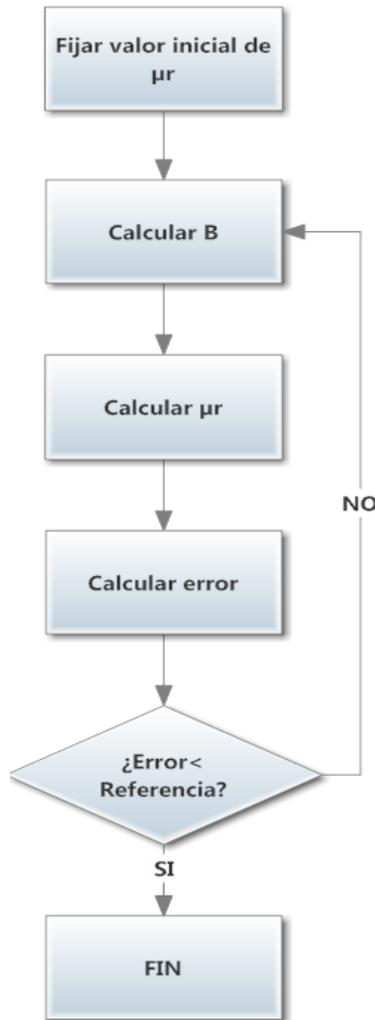


Figura 3.15: Proceso para calcular B y μ_r

Las fases de que consta el proceso son las siguientes:

- Fijar un valor inicial de μ_r : se trataría de elegir para el hierro un valor de permeabilidad que se encuentre dentro de los valores normales en la curva de la Figura 3.13.
- Calcular B: tras resolver el problema de la forma habitual, tomando el valor inicial de permeabilidad, se calcularía \vec{B} según (3.2) y su módulo como:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (3.8)$$

- Calcular μ_r : una vez obtenido el valor de B, se puede aplicar la ecuación (3.7) para obtener el nuevo valor de la permeabilidad en el material magnético. Sin embargo, con el objetivo de evitar cambios bruscos entre iteraciones debidos a inexactitudes en la función de aproximación de μ , no se utilizó en el cálculo la ecuación (3.7) directamente sino que se añadió otro término que hacía el nuevo valor de permeabilidad dependiente del actual. Esta relación vendría regulada por una variable llamada *Avance* de la forma que se indica en (3.9).

$$u_{i+1} = Avance * \frac{B}{0.82706 * (e^{4.59635*B} + 80.20517)} + (1 - Avance) * \mu_i \quad (3.9)$$

Con $0 < Avance < 1$.

- Calcular el error: el error tendrá la misión de dar una idea de lo que ha cambiado el valor del potencial magnético obtenido de resolver el problema entre dos iteraciones. Se calculará de acuerdo a la ecuación (3.10).

$$\iint_{\Omega} |A_{i-1} - A_i| dx dy \quad (3.10)$$

Cuando este valor sea suficientemente pequeño querrá decir que hemos convergido a una solución lo suficientemente aproximada, y el cálculo se da por finalizado.

3.2.6.2 Cálculo de la energía magnética

Para calcular la energía magnética en los materiales magnéticos se utilizará la expresión:

$$W_m = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H} dx dy \quad (3.11)$$

Este resultado deberá multiplicarse por los 3 metros de longitud que presenta la máquina para hallar el valor total de energía. Se puede observar que la expresión (3.4), utilizada en el problema anterior, es un caso concreto de (3.11) con $\mu_r = 1$.

Para calcular el valor total de energía en todo el espacio estudiado también se puede usar la ecuación (3.3) que se usó en el anterior problema.

3.2.7 Resultados

En la Figura 3.16 se muestran los resultados del potencial A , que son las líneas de campo de \vec{B} . Se puede ver que la distribución de potenciales es simétrica, siendo en la mitad derecha potenciales positivos y en la izquierda negativos debido a los opuestos sentidos de las corrientes en las bobinas. También se aprecia cómo el potencial presenta sus valores máximos en la parte del hierro más cercana a las bobinas, decreciendo su valor hasta anularse en la parte exterior.

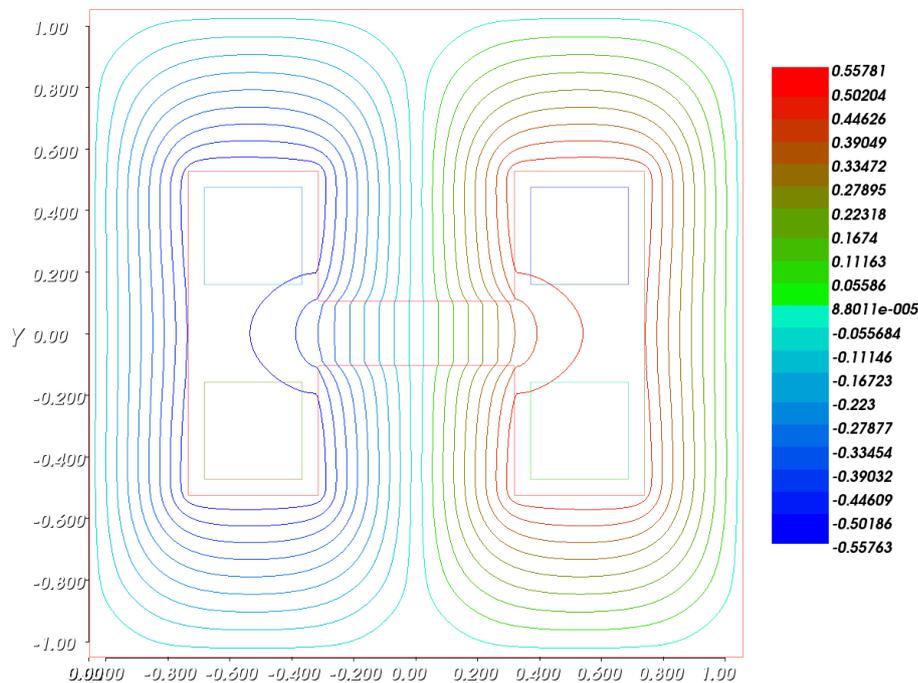


Figura 3.16: Potencial A_z

En la Figura 3.17 tenemos los valores y direcciones del vector \vec{B} en el dominio. Se aprecia cómo sigue la dirección de las líneas equipotenciales de A y cómo los valores mayores se alcanzan en las esquinas del material magnético ya que los trayectos son más cortos, y las derivadas de A mayores.

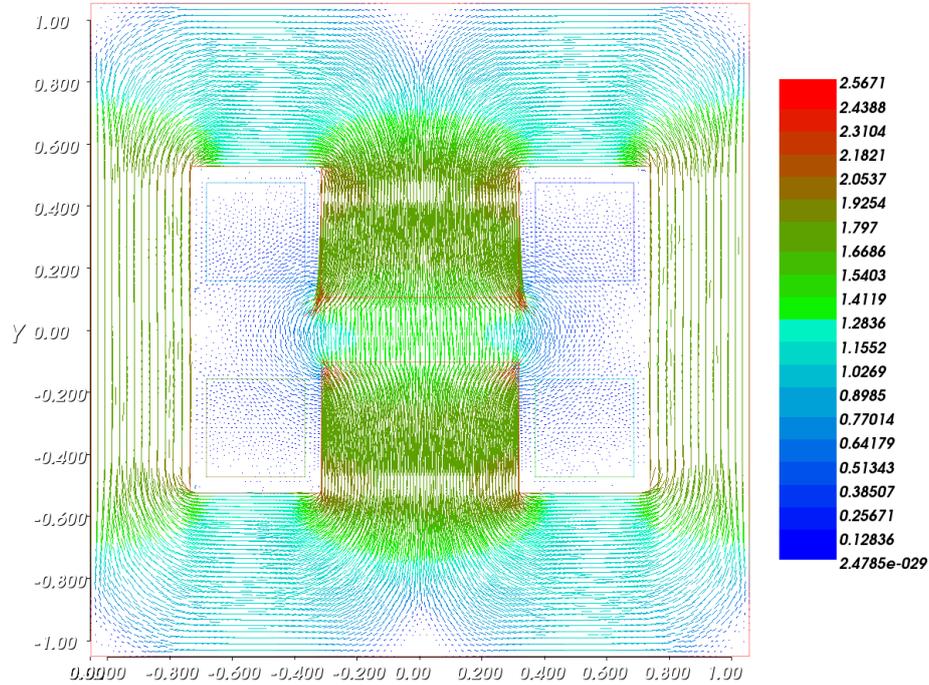


Figura 3.17: Representación de vector \vec{B}

En cuanto al valor calculado para la permeabilidad magnética, éste tenderá a ser mayor en los puntos en que \vec{B} tenga un valor cercano a 0.7 T y menor donde \vec{B} sea máximo o mínimo según la Figura 3.13. El resultado del cálculo se puede apreciar en la Figura 3.18, donde se muestran los valores de μ_r .

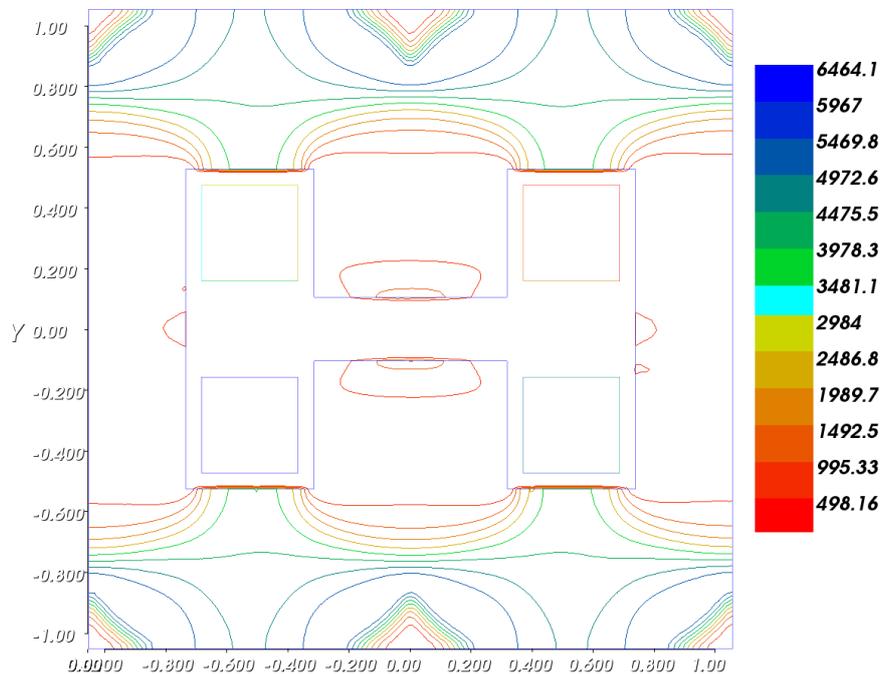


Figura 3.18: Valores de μ_r en el hierro

La intensidad de campo magnético se obtendrá a partir de \vec{B} y de μ a partir de (2.8). En la Figura 3.19 se muestra su módulo. Se puede apreciar que su valor es alto en los materiales no magnéticos ya que μ es mucho menor en ellos y especialmente en la zona central del entrehierro, donde los valores de \vec{B} son, además, apreciables.

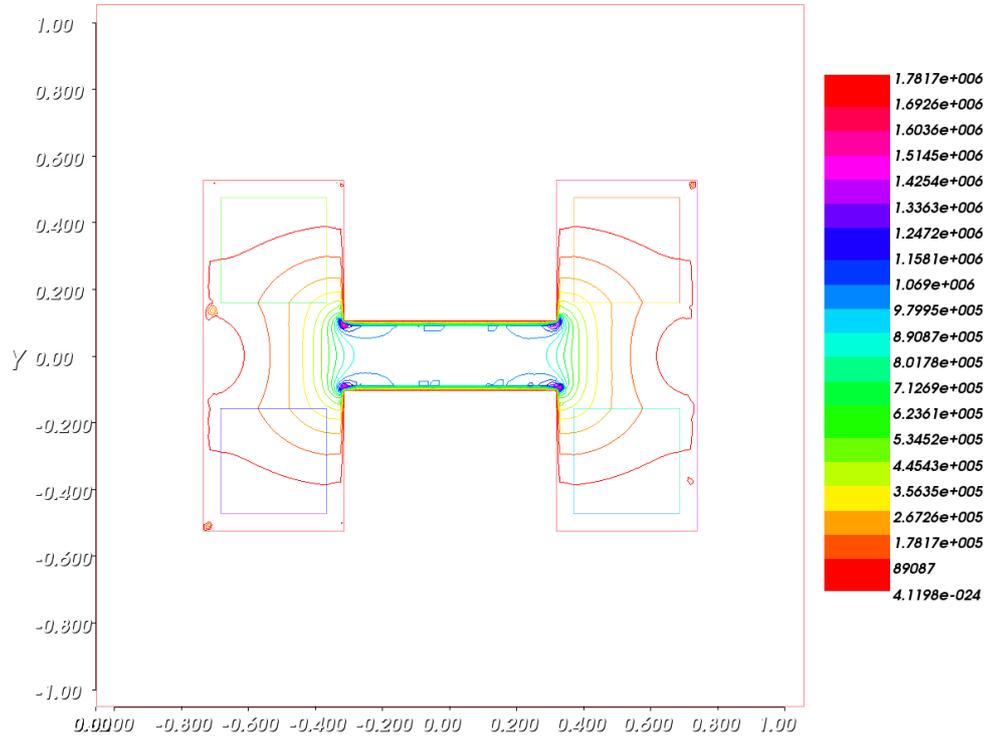


Figura 3.19: Módulo de \vec{H}

Por último, los valores obtenidos para la energía son los mostrados en la Tabla 3.2, en los que se aprecia que la mayor parte de la energía se concentra en el entrehierro, ya que en el hierro el valor de \vec{H} es muy bajo en comparación con los valores que se alcanzan en el entrehierro.

	W_{aire}	W_{cobre}	W_{hierro}	W_{total}
$W_m = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dx \, dy$	291.575 J	14.975 J	9.540 J	316.089 J
$W_{\Omega} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \, dx \, dy$				292.388 J

Tabla 3.2: Valores de energía magnética obtenidos

3.2.8 Código del programa

En el Anexo II se incluye el código para la resolución de este problema.

4 Análisis de micro-relé en 3D

Una vez resueltos los ejemplos anteriores, se realizó la simulación de un micro relé. La idea sería realizar el mismo tipo de simulaciones que se realizan en los ciclos de prediseño de relés industriales. La simulación se realizó en tres dimensiones, siendo por tanto significativamente más compleja y con mayor coste computacional que los casos anteriores, pero utilizando la misma base en el procedimiento a seguir.

4.1 Descripción del problema

El diseño del relé es el mostrado en la Figura 4.1. Se trata de un relé industrial de pequeñas dimensiones, cuyo funcionamiento se quiere analizar.

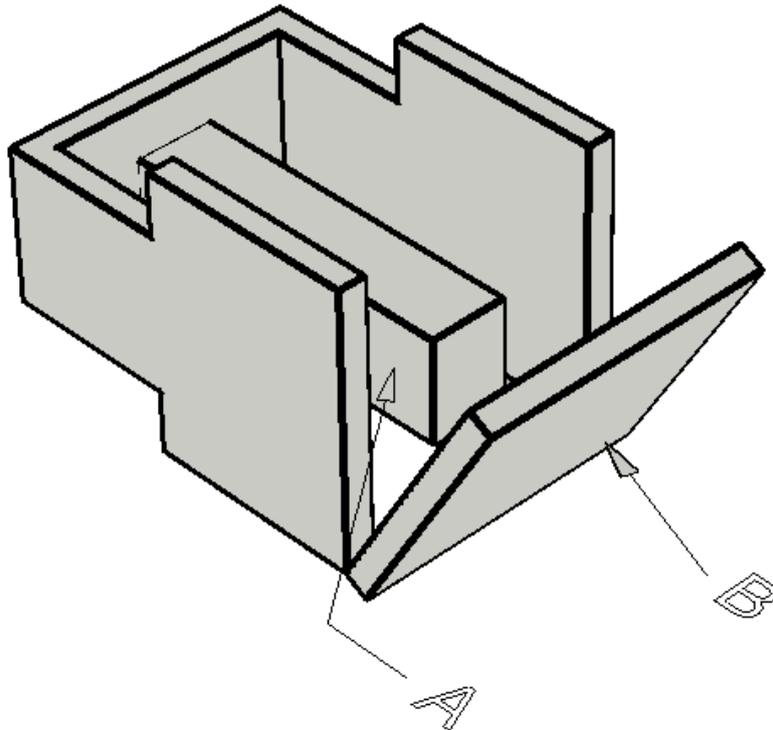


Figura 4.1: Geometría del micro-relé

La bobina de cobre que se usa para controlar el funcionamiento del relé se encuentra enrollada en la parte central o núcleo (A) tal y como se muestra en la Figura 4.2. Por esta bobina discurrirá, cuando se active el relé, la corriente eléctrica.

El relé dispone además de una parte móvil (B) que puede rotar en torno a un eje de giro situado en la parte inferior del relé. El movimiento de esta parte constituye la clave del funcionamiento del relé haciendo posible o no el contacto eléctrico, por lo que se quiere analizar el comportamiento del relé para distintas posiciones de la misma.

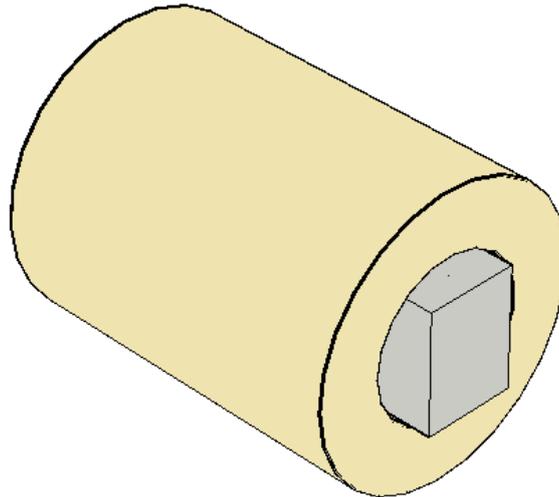


Figura 4.2: Disposición del cobre en el relé

Por último se pueden ver las dimensiones del relé en la Figura 4.3.

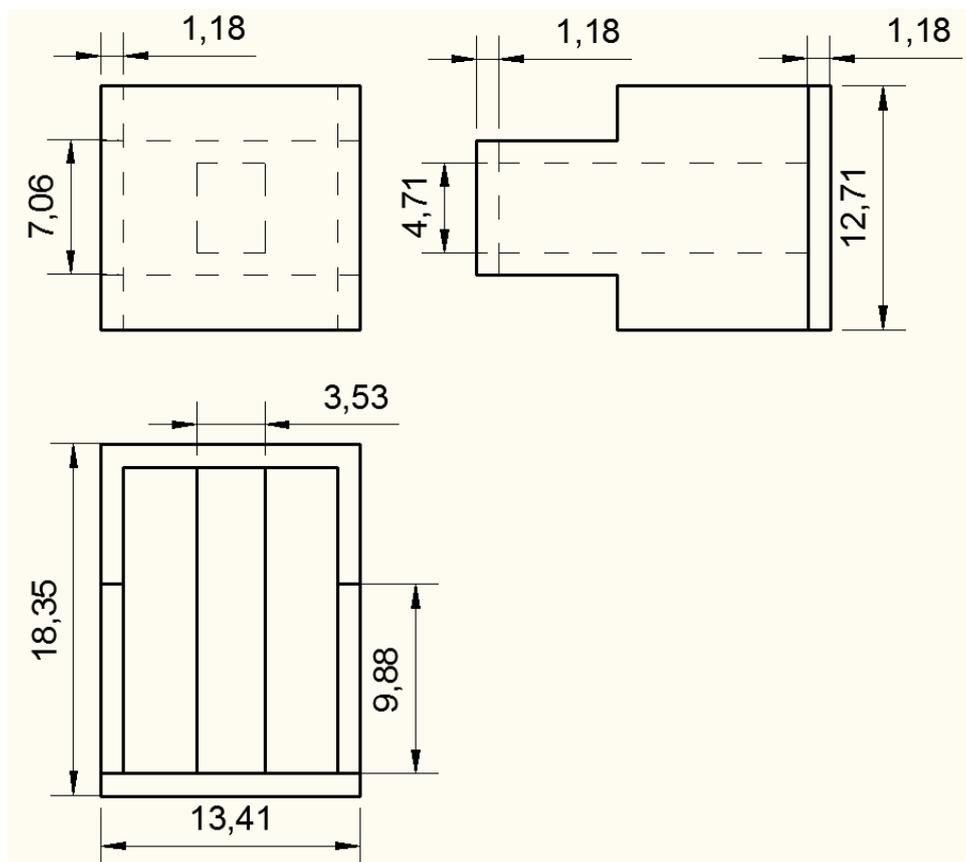


Figura 4.3: Alzado, planta y perfil del micro-relé con dimensiones en mm

El objetivo final del problema sería, dados la geometría del mismo y la intensidad de corriente que circula por el cobre, determinar el par debido a la fuerza magnética que se ejerce sobre la parte móvil del relé para distintos ángulos de apertura de la misma y examinar de esta manera la evolución que sufre durante el funcionamiento.

4.2 Procedimiento de resolución

En la Figura 4.4 se muestra el proceso que se va a seguir para resolver este problema. Las diferencias principales se encuentran a la hora de definir la geometría y el mallado, por la existencia de una tercera dimensión. Además, en este caso, de cara a resolver el problema, calcularemos la fuerza magnética y el par sobre la parte móvil del relé, tal y como se indica en los siguientes puntos.



Figura 4.4: Proceso de resolución para el problema del relé

4.3 Delimitación y mallado de la zona de cálculo

Si observamos la geometría de la Figura 4.1 podemos ver que el contorno del problema no está claramente acotado, ya que el material magnético no encierra todo el conductor. Eso quiere decir que la región de estudio se encuentra abierta, pues los efectos del funcionamiento del relé se extienden a la zona circundante.

En realidad, al encontrarse el conductor parcialmente rodeado de un material magnético como el hierro, el campo magnético tenderá a anularse en las zonas exteriores del hierro, por lo que no será necesario que la zona de aire estudiada alrededor del relé sea de gran tamaño, teniendo en cuenta además que, en un problema en tres dimensiones, añadir un volumen adicional incrementará notablemente el número de elementos de la malla y, consecuentemente, el tiempo de cálculo. Se decidió tomar para las simulaciones una longitud de aire alrededor del relé que fuera, en cada dirección, la misma que la longitud del relé.

Para construir y mallar el relé, la primera decisión a tomar es la distribución de los ejes. La manera de trabajar del programa a la hora de definir mallas tridimensionales afecta a la decisión, ya que el proceso utilizado en este caso consiste en la creación de una malla inicial en dos dimensiones (ejes X e Y) a la que posteriormente se da la altura (eje Z).

Debido a la geometría del relé y, especialmente, a la necesidad de mallar todo el aire que lo rodea, así como el interior del relé, la distribución de ejes se eligió como se muestra en la Figura 4.5:

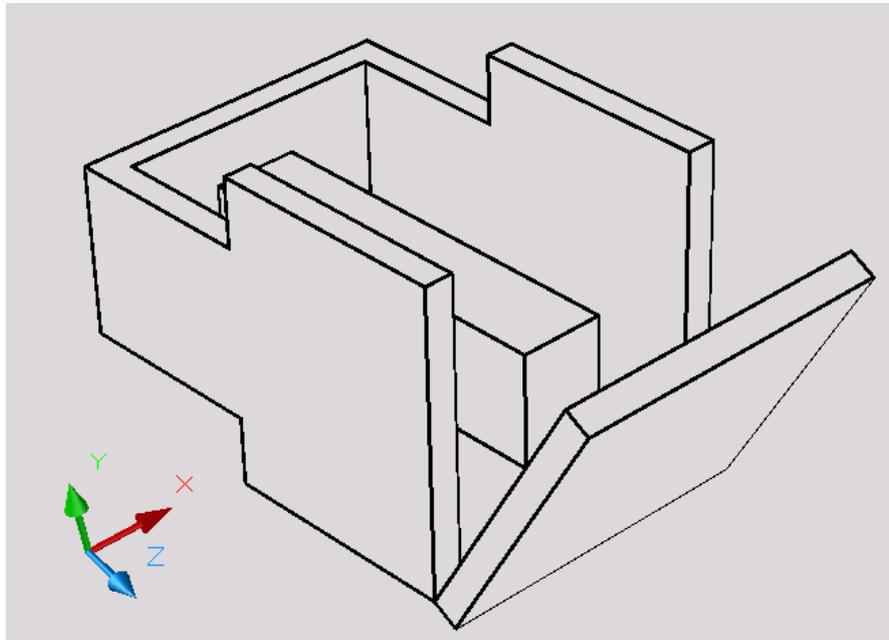


Figura 4.5: Disposición seleccionada para los ejes

La elección se hizo teniendo en cuenta que la parte más complicada de mallar, dada su forma, sería la parte de aire que se encuentra entre el núcleo de hierro y la bobina de cobre y la que se encuentra entre la bobina y la parte exterior de hierro. Gracias a la elección del eje z, es posible crear esas mallas como simple paso a 3D de la malla 2D que se muestra en la Figura 4.6, que se crea sencillamente restando mallas rectangulares y circulares, evitando de esta forma tener que realizar una transformación 3D en la malla para crear la forma cilíndrica.

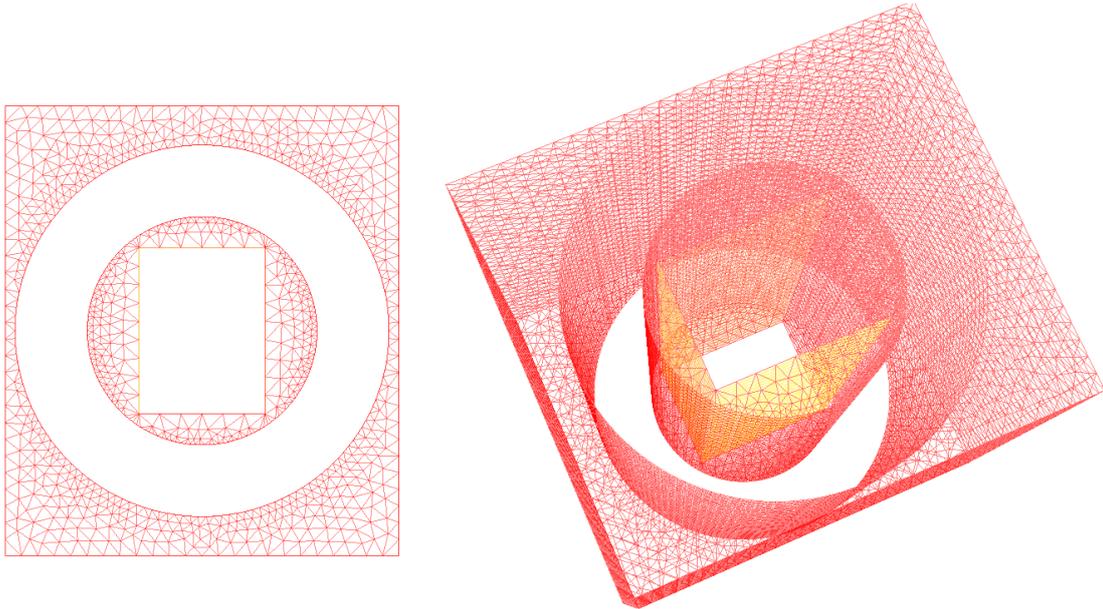


Figura 4.6: Mallado del aire interior al relé y al cobre en 2D y 3D

En cuanto a la colocación del origen de coordenadas, se decidió que este estuviera en el centro del núcleo de hierro, es decir, en medio del relé, de forma que se simplificara la referencia a los distintos puntos del mismo aprovechando la simetría respecto del plano YZ y del plano XZ (en caso de que la parte móvil se encuentre cerrada) que presenta el relé.

4.3.1 Mallado del hierro

El mallado del relé en sí está constituido por la superposición de varias mallas creadas de forma independiente. Esto es debido a la necesidad de que cada parte del relé tenga unas coordenadas z diferentes. Por ello se crearon 5 distintas zonas malladas, mostradas en la Tabla 4.1, para crear cada una de las partes con distintas coordenadas en z que forman parte del hierro. Posteriormente todas estas mallas se unieron en una única malla que las agrupaba y que permitía tratar el relé como un todo en el programa. En la Figura 4.7 se muestra el resultado.

Por último, en cuanto al número de elementos, siguiendo la máxima de parametrizar el código lo más posible de cara a hacer cambios rápidamente, se decidió calcular y almacenar en una variable la longitud de cada una de las aristas del relé. De esta forma el número de elementos en cada arista se establecería como el producto entre la longitud y un factor n_{Fe} que se usaría para hacer fácilmente un aumento o disminución del número de elementos. De esta forma el mallado sería lo más uniforme posible y fácilmente adaptable. En la configuración final, el mallado de toda la parte de hierro estaba constituido por 103.194 tetraedros.

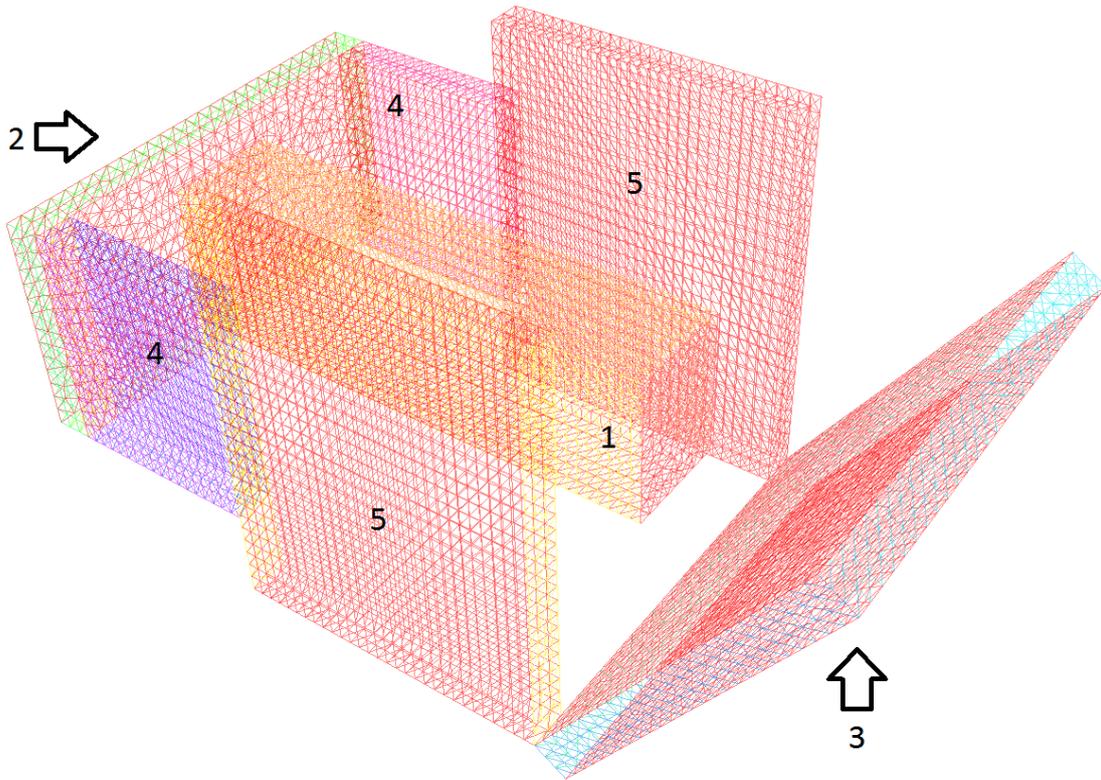


Figura 4.7: Imagen del relé mallado en FreeFem++

Malla	Número	Nombre de malla	Localización	Multiplicador
Hierro3D	1	CHierro3D	Núcleo de hierro	n_{Fe}
	2	FoHierro3D	Parte trasera	n_{Fe}
	3	FrHierro3D	Parte móvil	n_{Fe}
	4	lateralFoHierro3D	Parte lateral trasera a ambos lados	n_{Fe}
	5	lateralFrHierro3D	Parte lateral delantera a ambos lados	n_{Fe}

Tabla 4.1: Identificación de mallas para formar el relé

4.3.1.1 Diseño de la parte móvil del relé

Dada la necesidad de realizar simulaciones del funcionamiento del relé para distintos ángulos de apertura de la parte móvil durante el proceso de activación, se consideró necesario parametrizar la malla de forma que el mismo código pudiera realizar diversas simulaciones para distintas distribuciones.

Para ello se aprovechó el comando "*transfo*" de *FreeFem++* que permite realizar transformaciones sobre mallas. Esta función permite, a partir de una malla inicial que se crea del mismo modo que cualquier otra, dar una función matemática en cada uno de los tres ejes coordenados para crear una malla distinta y que se ajuste a las necesidades.

En este caso el objetivo era crear las funciones necesarias para que, en función de un parámetro "Angulo" introducido en el programa, la parte móvil pudiera formar cualquier ángulo, dentro de un intervalo aceptable, con el resto del relé.

En primer lugar, en el eje X , no es necesaria ninguna transformación tal y como muestra la ecuación (4.1), ya que es paralelo al eje de giro y se conserva la coordenada x en todo el volumen de la parte móvil para cualquier ángulo.

$$F_{x_{FrHierro}} = x \quad (4.1)$$

En el eje Y , observamos dos efectos, por un lado como consecuencia del abatimiento, la coordenada y tendrá un nuevo valor máximo en función del coseno del ángulo de apertura. Por otro lado, en función de la coordenada z , habrá un decremento adicional, ya que la parte más alejada del eje de giro sufre un descenso mayor. Este descenso irá asociado al seno del ángulo de apertura. Incluyendo estos dos factores, la fórmula para la transformación en el eje Y será la mostrada en (4.2).

$$F_{y_{FrHierro}} = y_{eje\ giro} + (y - y_{eje\ giro}) * \cos \theta - (z - z_{eje\ giro}) * \sin \theta \quad (4.2)$$

En el eje Z , el efecto será similar tal y como muestra la ecuación (1.1), habrá que tener en cuenta por un lado que el valor de la coordenada z disminuye al multiplicarse por el coseno del ángulo de apertura y que además las zonas superiores más alejadas del eje de giro sufren un mayor alejamiento de su zona original, afectado por el seno del ángulo de apertura.

$$F_{z_{FrHierro}} = z_{eje\ giro} + (y - y_{eje\ giro}) * \sin \theta + (z - z_{eje\ giro}) * \cos \theta \quad (4.3)$$

4.3.2 Mallado del cobre

La disposición del cobre será la de un cilindro hueco colocado alrededor del núcleo del relé, sin llegar a tocar al hierro en ningún punto. Está formado por una sola malla a la que se dio el nombre de *Cobre3D* tal y como se muestra en la Figura 4.8.

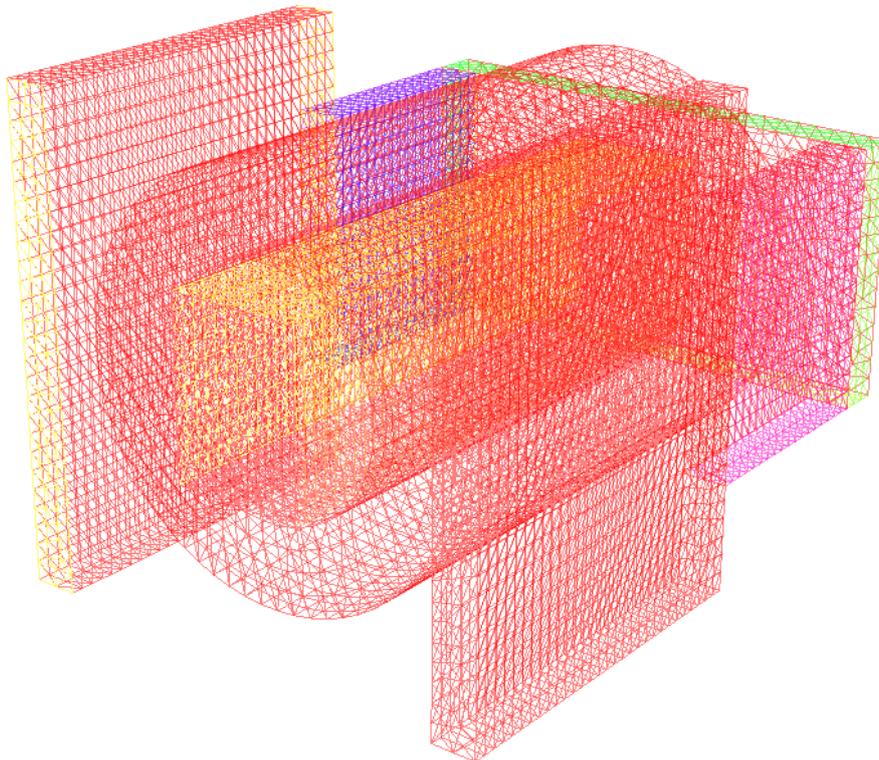


Figura 4.8: Disposición y mallado del cobre alrededor del núcleo de hierro

La forma de elegir el número de elementos fue el mismo elegido para el hierro, en función de las longitudes calculadas en cada dimensión y utilizando un multiplicador n_{Cu} para poder modificar fácilmente el número de elementos, que finalmente quedó en 32.214 tetraedros.

4.3.3 Mallado del aire

El aire es posiblemente la zona más difícil de mallar, ya que se encontrará en todos los huecos dejados en el resto de mallas y tendrá que rodear, también, todo el relé hasta completar la zona de cálculo. Además, como la zona ocupada por el relé depende del ángulo de apertura de la parte móvil, la zona ocupada por el aire también deberá ser modificable.

Del mismo modo que el hierro, fue necesario dividir la zona de aire en diversas mallas que una vez unidas constituirían toda la malla de aire y permitirían darle un tratamiento único en el programa a toda la zona.

4.3.3.1 Aire interior al relé

La idea llevada a cabo para el mallado del aire fue rellenar inicialmente todos los huecos del relé hasta conseguir que relé y aire tuvieran la forma de un prisma rectangular y, una vez conseguido esto, mallar el exterior del relé. Con este objetivo se crearon cuatro mallas, dos para rellenar el interior y dos para los bordes del relé. Estas mallas se muestran en la Figura 4.9 y se detallan en la Tabla 4.2.

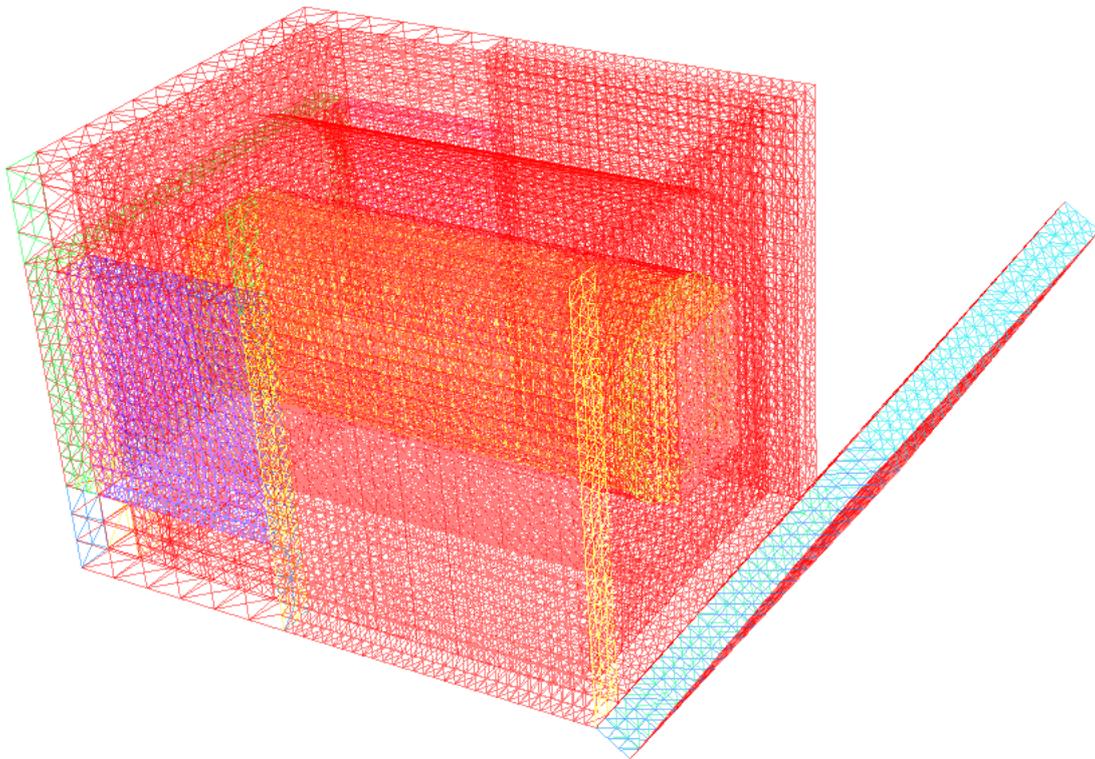


Figura 4.9: Relé rodeado de las mallas de aire necesarias para formar un prisma

El número de elementos viene en este caso regido también por la longitud de cada arista de los distintos elementos de malla de forma que fuese lo más uniforme posible. De igual modo que en los casos anteriores, se introdujeron multiplicadores para cambiar el número de elementos $n_{AireInt}$ para el aire dentro de las paredes del relé y n_{Aire} para las partes de aire que rellenan los huecos en las paredes. El número de tetraedros en la ejecución fue de 62.724.

Malla	Número	Nombre de malla	Localización	Multiplicador
Aire3D	1	IntCuAire3D	Entre el núcleo del relé y el cobre	$n_{AireInt}$
	2	ExtCuAire3D	Entre las paredes del relé y el cobre	$n_{AireInt}$
	3	lateralFoAire3D	En los laterales de las paredes del relé	n_{Aire}
	4	FoFeAire3D	En la pared trasera del relé	n_{Aire}

Tabla 4.2: Mallas en el interior y más cercanas al relé

4.3.3.2 Aire alrededor de la parte móvil

En caso de que la parte móvil estuviese cerrada, con esto ya estaría mallada una zona prismática del espacio y se podría pasar a mallar al aire exterior. Sin embargo, con la parte móvil abierta sería necesario mallar además la parte de aire que se crea entre el prisma de la Figura 4.9 y la parte móvil.

Se trata de una zona de mallado complejo, debido a la necesidad de mallar un espacio de forma cambiante en función del ángulo de apertura y que debe quedar completamente cerrada para que el mallado que hay que colocar alrededor sea sencillo. Además, en el caso de que el ángulo de apertura fuese cero, esta malla debería desaparecer completamente. En cuanto al número de elementos, también sería necesario parametrizarlo, ya que el volumen de esta zona puede cambiar mucho de un caso a otro.

Para asegurar que la malla era correcta en todas las condiciones se usó un conjunto de 5 zonas malladas alrededor de la parte móvil, tal y como se muestra en la Figura 4.10 y la Tabla 4.3.

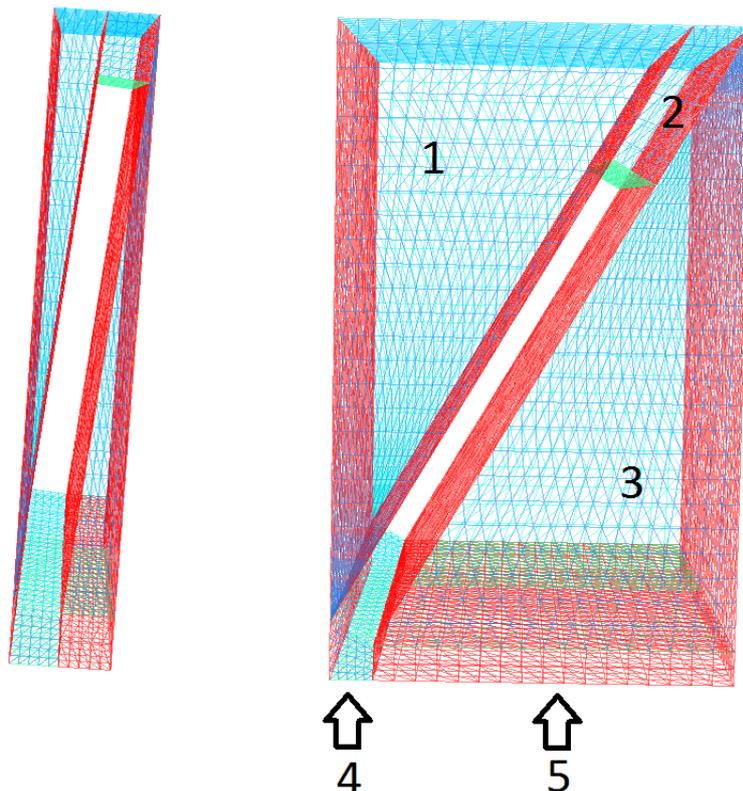


Figura 4.10: Mallado del aire alrededor de la parte móvil para apertura de 5° (izquierda) y 30° (derecha)

Malla a la que pertenece	Identificación	Nombre de malla	Localización	Multiplicador
Aire3D	1	IntFrAire3D	Entre la parte móvil y el resto del relé	$n_{AireParteMovil}$
	2	SupFrAire3D	Superior a la parte móvil	$n_{AireParteMovil}$
	3	ExtFrAire3D	En la parte externa de la parte móvil	$n_{AireParteMovil}$
	4	InfFrAire3D	Debajo de ExtFrAire3D	$n_{AireParteMovil}$
	5	InfFeAire3D	Debajo de la parte móvil	$n_{AireParteMovil}$

Tabla 4.3: Identificación de las mallas alrededor de la parte móvil

Mención aparte merece el caso en que el ángulo de apertura de la parte móvil es cero, ya que en este caso estas mallas no existirían. Por eso en ese caso particular la parte de código en que se crea este mallado es omitido por el programa de forma que estas mallas no son creadas.

El número de elementos de cada una de estas mallas depende del caso concreto de apertura de la parte móvil, ya que los grandes cambios de volumen hacen necesario un mallado adaptable. Para ello se calculó en función del ángulo el tamaño de cada zona y se condicionó el número de elementos a ese tamaño y a un factor $n_{AireParteMovil}$ para disminuir o aumentar su número. El número total de tetraedros que forman esta malla depende del ángulo de apertura de la parte móvil, siendo para un ángulo de 10° de 67.215 en la ejecución final.

4.3.3.3 Región externa de mallado más fino

A la hora de realizar el mallado de aire alrededor del prisma más cercano al relé, se constató que debido a la amplia región de estudio, no se podía dar un mallado muy fino a esta zona si se quería conseguir tiempos de ejecución razonables.

Por ello se observó la necesidad de que el mallado externo fuera más fino y más preciso en la zona más cercana al hierro, especialmente en la zona que se encuentra en contacto con el mismo, ya que los efectos del relé sobre esta zona de aire son mucho más acusados que en el resto del aire exterior.

Para ello se creó una zona de un espesor de 1 mm alrededor del relé en el que simplemente se utilizó un factor $n_{FinoAireExt}$, diferente al del aire exterior, como multiplicador para el número de elementos, de forma que éste fuera mayor por unidad de longitud. Esta zona se encontraría rodeando en cada caso a todas las mallas anteriores. El resultado es el que se muestra en la Figura 4.11, donde se muestra también el relé en su interior. Las mallas que componen esta parte del aire son las que se muestran en la Tabla 4.4 y el número total de elementos durante la ejecución final fue de 52.116.

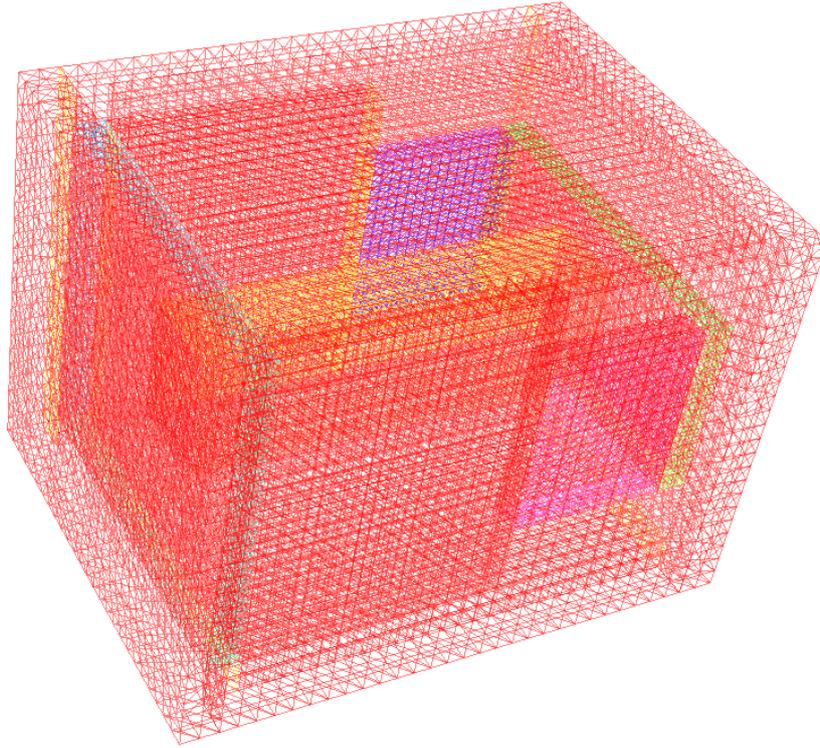


Figura 4.11: Capa de aire exterior con mallado más fino, con el relé en su interior

Malla	Nombre de malla	Localización	Multiplicador
Aire3D	InfySupFinoAire3D	Inferior y superior al relé	$n_{FinoAireExt}$
	lateralFinoAire3D	A ambos lados del relé	$n_{FinoAireExt}$
	FrFinoAire3D	Al frente del relé	$n_{FinoAireExt}$
	FoFinoAire3D	Parte lateral trasera a ambos lados	$n_{FinoAireExt}$

Tabla 4.4: Mallas que forman la capa de aire más fina alrededor del relé

4.3.3.4 Aire exterior

Finalmente, rodeando a todas las mallas anteriores se encontraría la malla de aire exterior. Estará formada por tres mallas, una que rodea los bordes laterales y otras dos para las partes de fondo y frente del dominio. Será la zona de mallado menos fino, y será sobre ella sobre la que se cumpla la condición de contorno. El multiplicador correspondiente a esta malla será $n_{AireExt}$ y es la que se muestra en la Figura 4.12.

En la tabla Tabla 4.5 se detallan las mallas que forman el aire exterior, siendo el número total de tetraedros que contienen de 78.894.

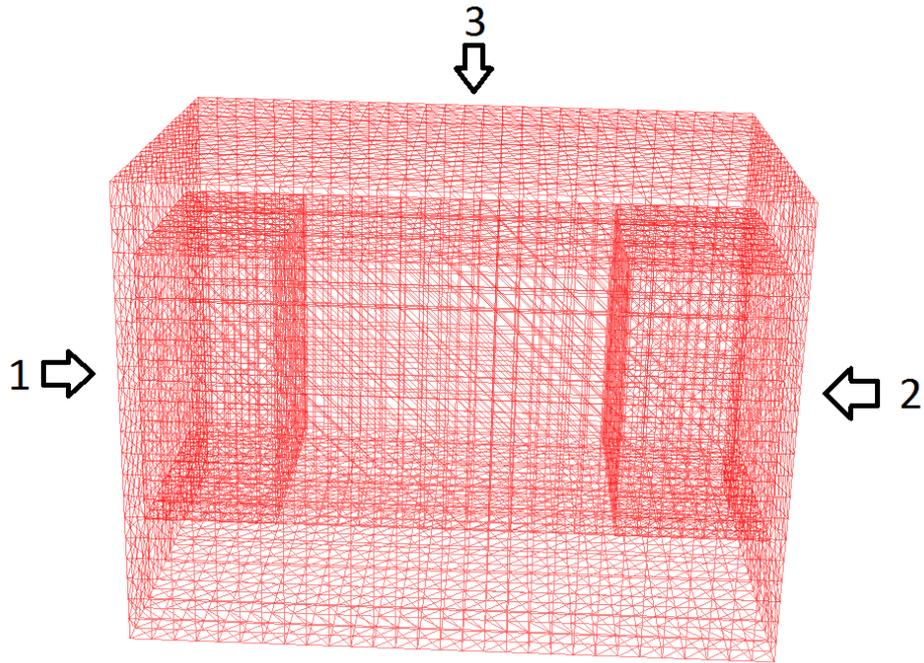


Figura 4.12: Representación del aire exterior en FreeFem++

Malla a la que pertenece	Identificación	Nombre de malla	Localización	Multiplicador
Aire3D	1	FrAire3D	Al frente del relé	$n_{ExtAire}$
	2	FoAire3D	Al fondo del relé	$n_{ExtAire}$
	3	ExtAire3D	En los laterales del relé	$n_{ExtAire}$

Tabla 4.5: Mallas que forman el aire más exterior

4.3.4 Definición de \vec{j}

A diferencia de los casos anteriores, en este no hay una sola componente no nula de \vec{j} . La corriente se va a encontrar circulando por toda la región de cobre en sentido horario alrededor del núcleo del relé y será nula fuera de la zona de cobre.

Así, dentro de la bobina de cobre, el módulo de \vec{j} será el resultante de dividir en cada punto los *Avuelta* de corriente entre la sección de cobre que atraviesan, que será la del rectángulo formado al cortar longitudinalmente la zona de cobre, tal y como se muestra en la Figura 4.13. En cuanto a la dirección y sentido serán los que se muestran en (4.4) que describen una circunferencia en sentido horario.

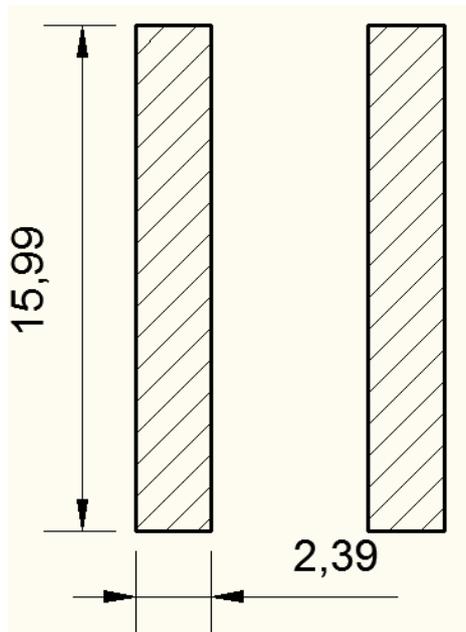


Figura 4.13: Sección longitudinal del cilindro de cobre con medidas en mm

$$j_x \begin{cases} 0 \text{ en Hierro3D y Aire3D} \\ \frac{75}{15,99 \times 2,39} \cos\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) \text{ A/mm}^2 \text{ en Cobre3D} \end{cases}$$

$$j_y \begin{cases} 0 \text{ en Hierro3D y Aire3D} \\ \frac{75}{15,99 \times 2,39} \left(-\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)\right) \text{ A/mm}^2 \text{ en Cobre3D} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$j_z = 0 \text{ en } \Omega$$

El resultado en *FreeFem++*, en el que se representa \vec{j} en forma vectorial, es el mostrado en la Figura 4.14.

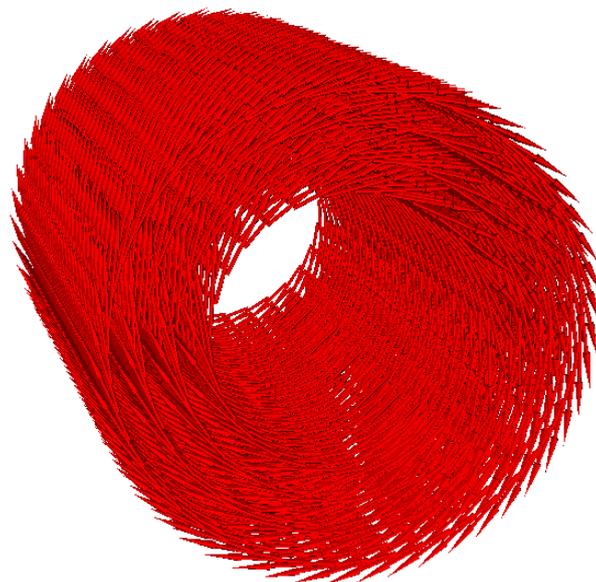


Figura 4.14: Densidad de corriente en el relé representada con *FreeFem++*

4.3.5 Definición de la permeabilidad magnética

De una forma similar a la del problema anterior, no contaremos con un valor fijo para la permeabilidad μ en el material magnético del relé, sino con una serie de valores que relacionan los valores de los módulos de \vec{H} y \vec{B} . Para el hierro de este problema la gráfica es la mostrada en la Figura 4.15.

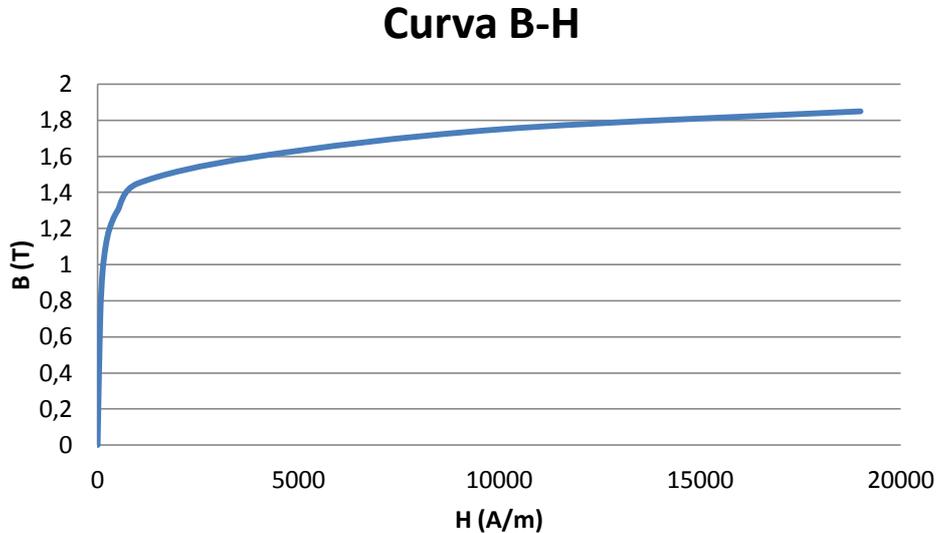


Figura 4.15: Curva B-H para el hierro del relé

Del mismo modo que en el caso anterior, se procedió a realizar el ajuste de estos valores mediante una ecuación matemática para poder introducirla en el programa. La curva sería del mismo tipo que (3.6), siendo los valores obtenidos para este tipo de hierro los que se muestran en (4.5)

$$\mu \cong \frac{B}{0.6744 * (e^{4.8665*B} + 81.5690)} \quad (4.5)$$

Curva que queda representada en la Figura 4.16 en comparación con los datos numéricos.

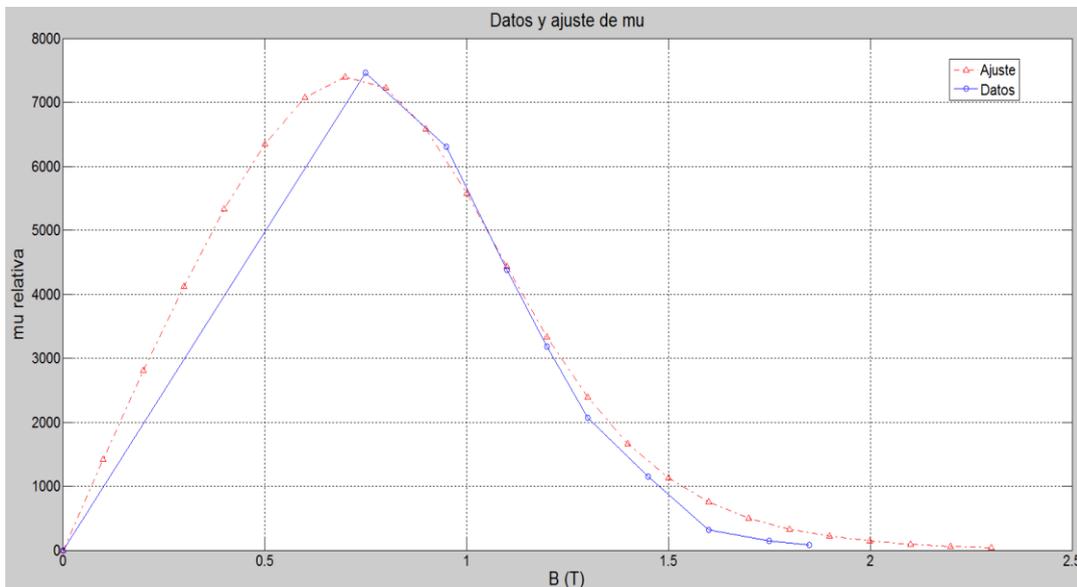


Figura 4.16: Comparación entre los datos y la curva de ajuste

Por su parte, en las regiones de cobre y aire, la permeabilidad seguirá teniendo el valor constante de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$.

4.3.6 Definición del espacio de elemento finitos

En este caso la definición de los elementos finitos para declarar las variables difiere de los casos anteriores en que, al ser elementos tridimensionales, hay que seleccionar este tipo de elementos. Aunque el tratamiento posterior en el programa es el mismo que para los elementos bidimensionales, en la definición se usarán elementos de grado 2 (P23d) para las incógnitas u, v y de un grado inferior (P13d) para el cálculo del campo magnético. Se seguirá manteniendo el tipo de elementos constantes (P03d) para la variable *regiones*, que se utiliza para trabajar con los números de región en *FreeFem++*.

4.3.7 Resolución del problema

Para obtener el potencial en este caso hay que resaltar en primer lugar, que al tener dos componentes no nulas de \vec{j} , habrá que resolver dos de las componentes del vector \vec{A} ya que a diferencia de los casos anteriores solo la componente A_z es nula. Por tanto en este caso, no tendremos uno sino dos problemas a resolver, que serán tratados como dos problemas independientes.

El hecho de que sea un problema tridimensional, afecta también a la expresión del cálculo de \vec{B} , como se muestra a continuación.

4.3.7.1 Cálculo de \vec{B}

Ante la presencia de material magnético, deberemos seguir el mismo proceso iterativo del problema anterior, tal como está indicado en la Figura 3.15 teniendo en cuenta que en este caso \vec{B} es tridimensional y \vec{A} tiene dos componentes no nulas, por lo que encontramos las siguientes diferencias:

- Calcular B: en este caso, en lugar de usar la expresión para espacios bidimensionales, habrá que desarrollar la expresión (2.3) para el caso tridimensional, tal y como se muestra en (4.6). Además para calcular el módulo tendremos que tener en cuenta la componente B_z que antes no existía.

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} \tag{4.6}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

- Calcular el error: En este caso tenemos dos componentes de \vec{A} para las que calcular el error. Para generalizarlo se consideró la suma de los errores en ambas componentes como el error total tal como se muestra en

$$E = \iiint_{\Omega} |A_{x_{i-1}} - A_{x_i}| dx dy dz + \iiint_{\Omega} |A_{y_{i-1}} - A_{y_i}| dx dy dz \tag{4.7}$$

4.3.7.2 Cálculo de la fuerza magnética (\vec{F}):

A la hora de calcular la fuerza magnética que se ejerce sobre el hierro como consecuencia del campo magnético creado, se presentan dos posibilidades.

La primera sería hacer uso de la expresión que define la fuerza magnética:

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dv \quad (4.8)$$

A partir de ella, y teniendo en cuenta la ecuación (2.2), quedaría que se puede calcular la fuerza como el resultado de la integral:

$$\vec{F} = \iiint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} dv \quad (4.9)$$

Sin embargo, aplicar esta integral de volumen para calcular la fuerza produce errores considerables, por lo que es preferible usar el método del tensor de Maxwell. Este método permite calcular la fuerza a través de una integral de superficie que encierra al volumen sobre el que se quiere obtener la fuerza magnética, por lo que solo es necesario calcular una integral de superficie.

Para la fuerza magnética y en coordenadas cartesianas tridimensionales, las tres componentes de la fuerza se calcularían según las ecuaciones (4.10).

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{\mu_0} \iint \left[\left(B_x^2 - \frac{B^2}{2} \right) n_x + B_x B_y n_y + B_x B_z n_z \right] ds \\ F_y &= \frac{1}{\mu_0} \iint \left[B_x B_y n_x + \left(B_y^2 - \frac{B^2}{2} \right) n_y + B_y B_z n_z \right] ds \\ F_z &= \frac{1}{\mu_0} \iint \left[B_x B_z n_x + B_y B_z n_y + \left(B_z^2 - \frac{B^2}{2} \right) n_z \right] ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

A la hora de realizar el cálculo, en lugar de tomar como superficie para la realización de la integral la de la parte móvil del relé, se tomó una superficie que se encontraba a $10 \mu m$ de la misma. Esto fue debido a que tomar esta pequeña zona alrededor de la zona de cálculo, permite reducir el error, como refleja el artículo "Some aspects of torque calculations in electrical machines" que aparece en la bibliografía.

4.3.7.3 Cálculo de la energía magnética

Para realizar el cálculo de la energía magnética se procederá de igual forma que en los casos anteriores, solo que extendiendo las ecuaciones (3.3) y (3.11) a la tercera dimensión.

4.3.7.4 Cálculo del par sobre la parte móvil

Teniendo en cuenta las posibilidades para calcular la fuerza magnética vistas anteriormente, será posible calcular el par sobre la parte móvil utilizando su definición como producto entre la fuerza y la distancia al eje de giro. El caso particular para nuestro relé es el que se muestra en la Figura 4.17.

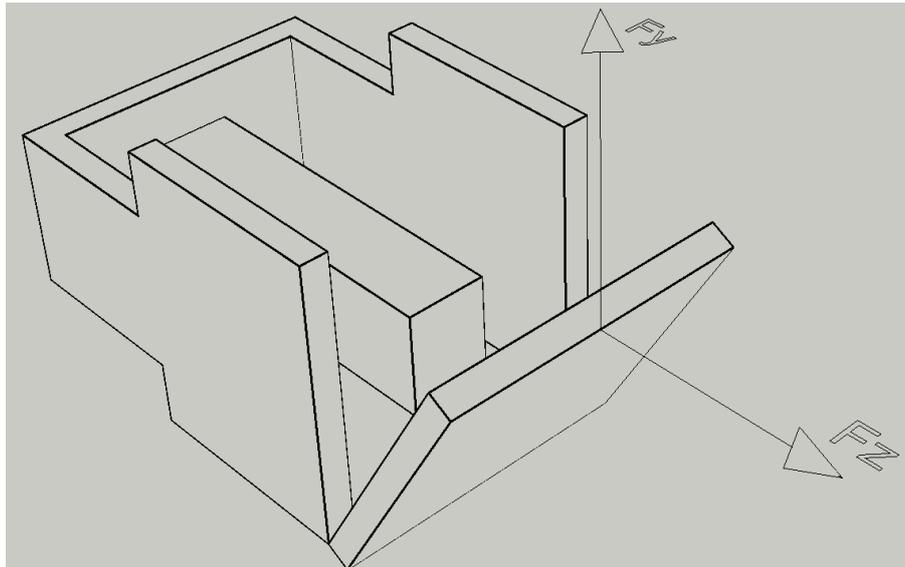


Figura 4.17: Representación de fuerzas magnéticas sobre la parte móvil

Las dos componentes de la fuerza que generan par son F_y y F_z , dado que F_x es paralela al eje de giro y genera un momento nulo. Considerando que el sentido positivo para el par es aquel que hace cerrarse a la parte móvil, el cálculo del par vendría dado por la ecuación (4.11).

$$T = F_y \cdot (z - z_{eje\ giro}) - F_z \cdot (y - y_{eje\ giro}) \quad (4.11)$$

Lo cual, sustituyendo los términos F_y y F_z por sus valores correspondientes mostrados en (4.10) permite el cálculo directo del par.

4.4 Resultados

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos en las simulaciones del relé. En primer lugar, en la Figura 4.18 se muestra un corte transversal del relé, en el que se representa el módulo del potencial vector magnético para una apertura de la parte móvil de cero grados.

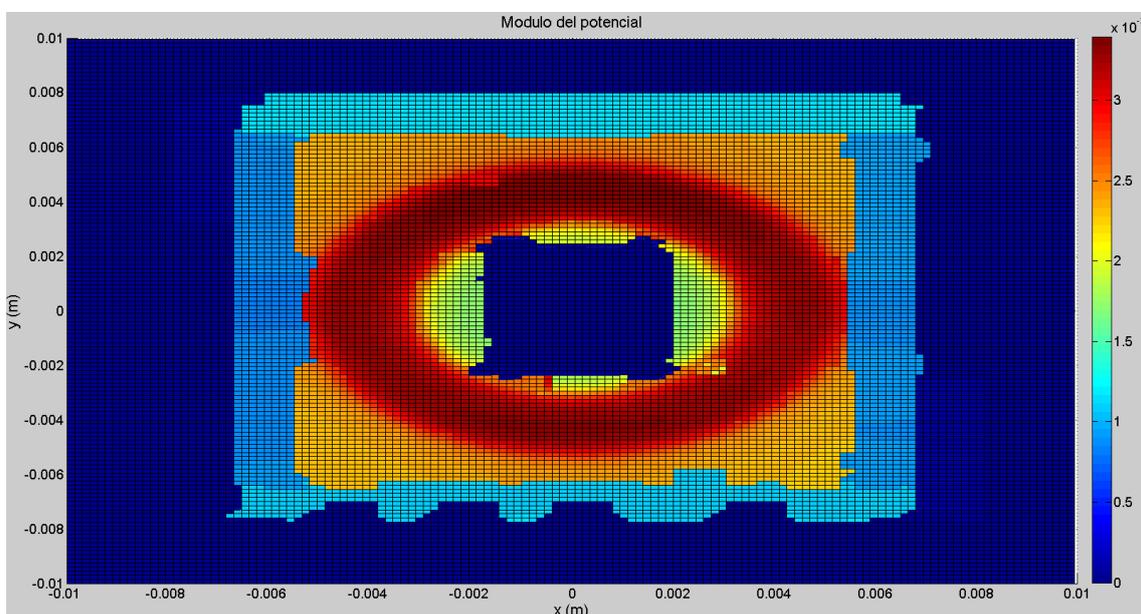


Figura 4.18: Módulo del potencial \vec{A} para 0° de apertura, corte transversal

Es interesante comparar este resultado con el obtenido cuando la apertura de esta parte móvil es de 10° , como se muestra en la Figura 4.19. Se puede observar como en esta ocasión el potencial deja de ser simétrico, siendo más alto en la parte superior, donde la distancia a la parte móvil es mayor y por tanto la permeabilidad magnética menor.

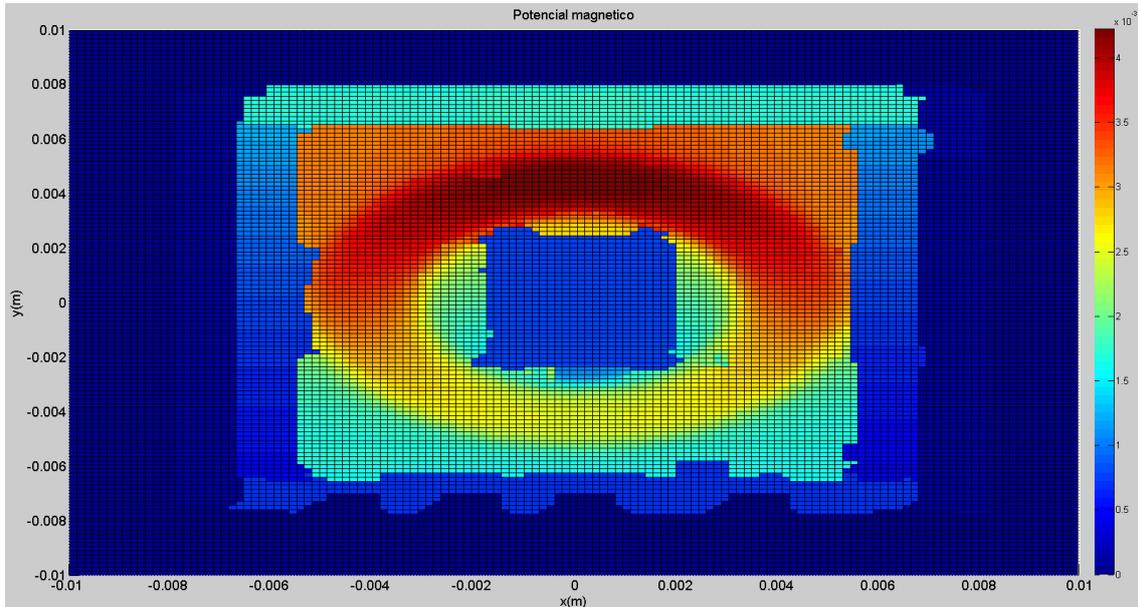


Figura 4.19: Módulo del potencial para 10° de apertura, corte transversal

En la Figura 4.20 se muestran los valores del módulo de \vec{B} . Sus valores más altos se dan en las zonas de material no magnético, disminuyendo en el núcleo y en el exterior del relé, y presentando unos valores algo superiores en el resto de zonas.

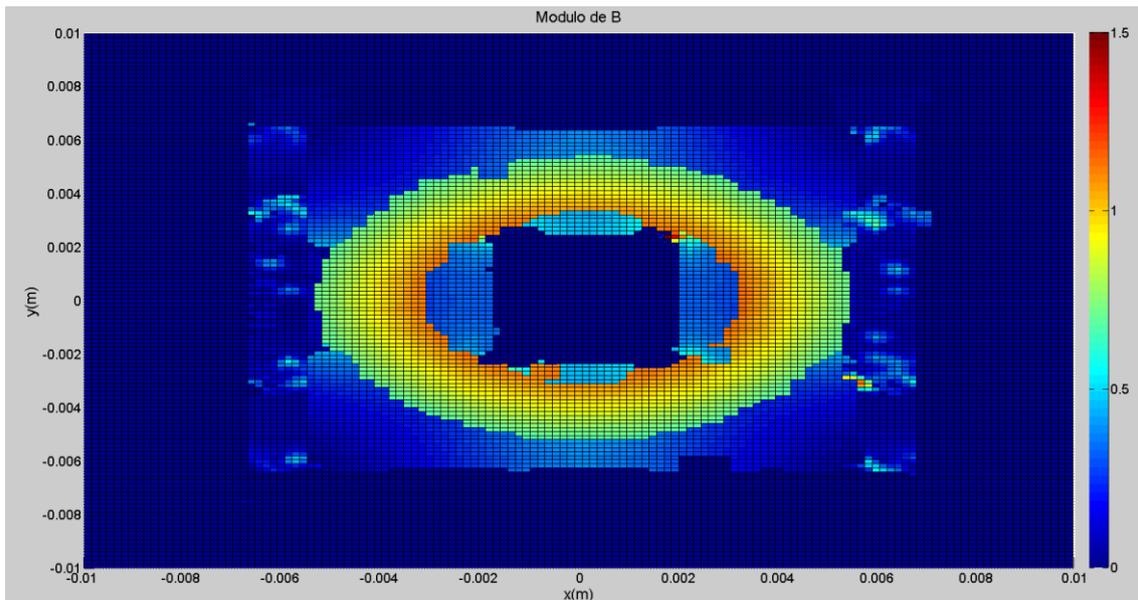


Figura 4.20: Módulo de B con ángulo de apertura 0° , corte transversal

En la Figura 4.21 se muestra un corte longitudinal del relé en el que se ha representado la permeabilidad magnética relativa para una apertura de 0° . Se observa como vale 1 en todo el material no magnético, mientras que en el material magnético su valor depende del valor del módulo de \vec{B} .

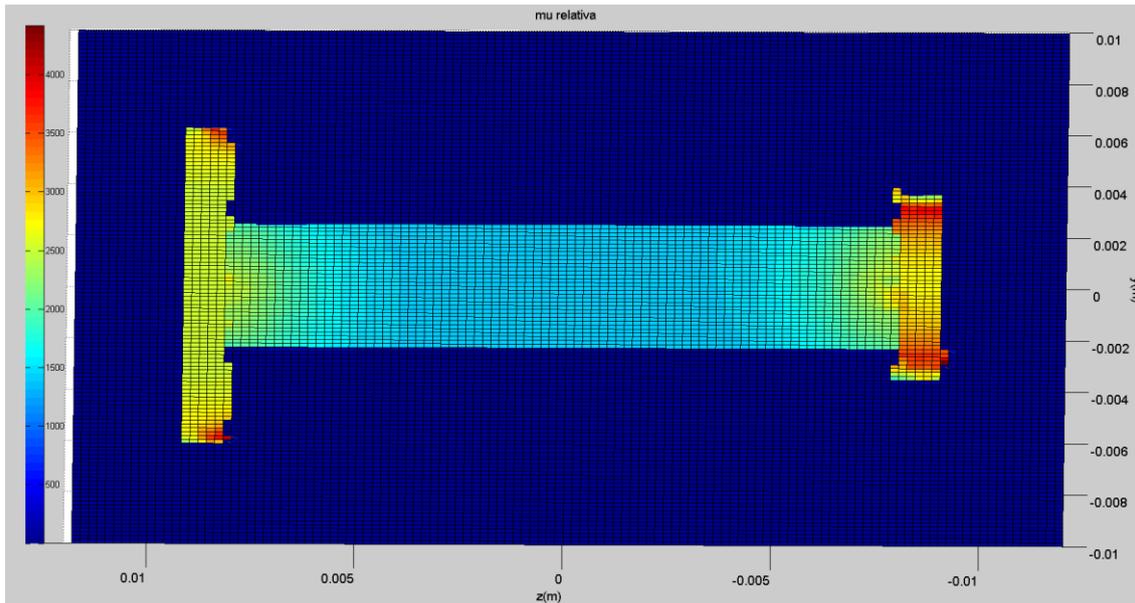


Figura 4.21: Permeabilidad magnética relativa para apertura de 0° , corte longitudinal

En la Figura 4.22 vemos cómo sus valores cambian al abrirse la parte móvil debido al distinto valor y recorrido del campo magnético.

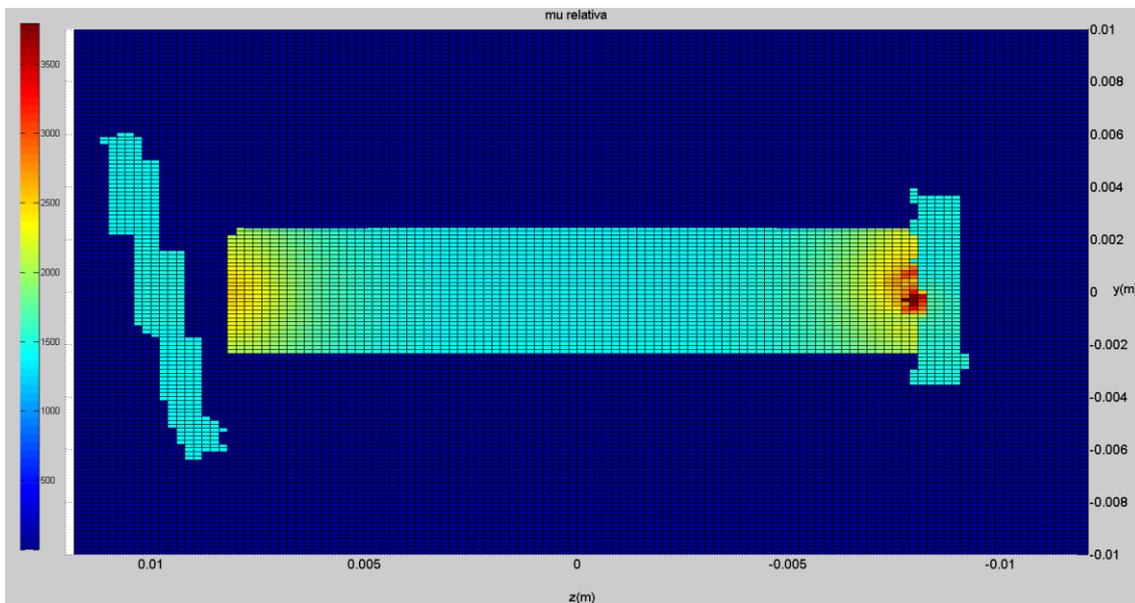


Figura 4.22: Permeabilidad magnética relativa para 10° de apertura, corte longitudinal

Por último, la energía en el sistema, que se muestra en la Tabla 4.6 se concentrará en el cobre, ya que presenta los valores más altos de campo magnético y además, al ser baja su permeabilidad magnética, también presenta altos valores de \vec{H} .

	W_{aire}	W_{cobre}	W_{hierro}	W_{total}
$W_m = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dx \, dy \, dz$	0.295 J	0.0556 J	0.0014 J	0.3524 J
$W_{\Omega} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{A} \, dx \, dy \, dz$				0.3491 J

Tabla 4.6: Distribución de energía en el relé con 7.500 Av

4.5 Código del programa

En el Anexo III se incluye el código de *FreeFem++* para la resolución de este problema.

Bibliografía

Durante el desarrollo de este proyecto se han consultado los siguientes libros, manuales, artículos y páginas web.

- Libros:
 - García-Ochoa, Francisco. *Problemas de campos electromagnéticos*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2002.
 - Notas del curso de formación específica: "El método de los elementos finitos y sus aplicaciones en ingeniería". SAIT, Octubre 2005.
- Manuales:
 - Chacón Vera, Eliseo. *Notas sobre FreeFem++ 2D y 3D*. 2010.
 - Hecht, Frédéric. *FreeFem++ manual, Third Edition*. 2013.
(<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>)
 - Si, Hang. *TetGen User's Manual*. 2006.
- Artículos:
 - Bhatia, S. y otros. *Some aspects of torque calculations in electrical machines*. 1997.
 - Gómez Lázaro, E. y otros. *An optimal shape design of a Micro-Relay using 2D/3D FEM*. 2003.
 - Font, R. y Periago, F. *The Finite Element Method with FreeFem++ for beginners*. The electronic Journal of Mathematics and Technology, Vol.7, N°4, 1933-2823, 2013.
- Páginas web y documentos de internet:
 - Hetch, F. *FreeFem++ a software to solve PDE*
(<http://www.ann.jussieu.fr/hecht/ftp/CIMPA/CIMPA-Guadeloupe-FF.pdf>)
 - Web del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Sevilla:
(http://laplace.us.es/wiki/index.php/P%C3%A1gina_Principal)
 - Wikipedia: (<http://www.wikipedia.org/>)

Anexos

Anexo I: Código de *FreeFem++* para el problema "Conductores coaxiales de sección rectangular"

```

////////////////////////////////CONDUCTORES COAXIALES DE SECCION RECTANGULAR////////////////////////////////
////////////////////////////////DEFINICION DE MALLA////////////////////////////////
//Se realiza una malla cuadrada de 400x400 mm y 50 elementos por lado
real x0=-0.20, y0=-0.20;//coordenadas de la esquina inferior izquierda
real x1= 0.20, y1= 0.20;//coordenadas de la esquina superior derecha
int n=50;//numero de elementos por lado en la malla

mesh Th=square(n,n,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]); //Definicion de la malla
plot(Th,wait=true); //Representacion de la malla

////////////////////////////////FIN DEFINICION MALLA////////////////////////////////

////////////////////////////////DEFINICION ESPACIO ELEMENTOS FINITOS////////////////////////////////
//Elementos P2 para Az y P1 para B

fespace vh(Th,P2);
vh u,v; //u es el potencial Az y v la funcion test

fespace Ph(Th,P1);
Ph Bx; //Componente x de B
Ph By; //Componente y de B

////////////////////////////////FIN DEFINICION ESPACIO ELEMENTOS FINITOS////////////////////////////////

////////////////////////////////DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE////////////////////////////////
// función  $j=(7500/0.05^2)$  en  $\omega_1$ ,  $(-7500/(0.05^2-0.15^2))$  en  $\omega_3$  y cero
en el resto

real lomega1=0.05; //lado del conductor interior omega1
real lomega2=0.15; //lado de la zona de aire omega2
real lomega3=0.158; //lado del conductor exterior omega3

real intensidad=7500; //intensidad de corriente en los conductores

func j=(intensidad/lomega1^2)*(x>-lomega1/2)*(x<lomega1/2)*(y>-
lomega1/2)*(y<lomega1/2)
+(-intensidad/(lomega3^2-lomega2^2))*((x>-lomega3/2)*(x<lomega3/2)*(y>-
lomega3/2)*(y<lomega3/2)
-(x>-lomega2/2)*(x<lomega2/2)*(y>-lomega2/2)*(y<lomega2/2));

//Para representar j hay que asignarla a una variable de tipo fespace
vh jh=j;
plot(jh,value=true,fill=true,ColorScheme=4,wait=true);

////////////////////////////////FIN DEFINICION DENSIDAD DE CORRIENTE////////////////////////////////

////////////////////////////////RESOLUCION DEL PROBLEMA////////////////////////////////
// Se expresa el problema en forma variacional

real mu=4e-7*pi; //Valor de la permeabilidad en el vacio

```

```

problem electro(u,v)=int2d(Th)((1/mu)*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
                    -int2d(Th)(j*v)
                    +on(1,2,3,4,u=0); //Condiciones de contorno

// Resolvemos el problema y dibujamos la solución
electro;
plot(u, value=true,wait=true);

//////////CALCULO DE B//////////

Bx = dy(u);
By = -dx(u);

plot([Bx,By], value=true,ColorScheme=2,wait=true);

//////////CALCULO DE LA ENERGIA//////////

real womega=0.5*int2d(Th)(j*u); //Energia total calculada con el potencial
cout<<"Energia total calculada mediante potencial \nw = "<<womega<<endl;

//Energias en cada omega calculadas con el campo magnetico
real w1= (0.5/mu)*int2d(Th)((Bx^2+By^2)*(x>-lomega1/2)*(x<lomega1/2)*(y>-
lomega1/2)*(y<lomega1/2));

real w2= (0.5/mu)*int2d(Th)((Bx^2+By^2)*((x>-lomega2/2)*(x<lomega2/2)*(y>-
lomega2/2)*(y<lomega2/2)
                    -(x>-lomega1/2)*(x<lomega1/2)*(y>-
lomega1/2)*(y<lomega1/2)));

real w3= (0.5/mu)*int2d(Th)((Bx^2+By^2)*((x>-lomega3/2)*(x<lomega3/2)*(y>-
lomega3/2)*(y<lomega3/2)
                    -(x>-lomega2/2)*(x<lomega2/2)*(y>-
lomega2/2)*(y<lomega2/2)));

real w4= (0.5/mu)*int2d(Th)((Bx^2+By^2)*((x>x0)*(x<x1)*(y>y0)*(y<y1)
                    -(x>-lomega3/2)*(x<lomega3/2)*(y>-
lomega3/2)*(y<lomega3/2)));

//Energia total
real w=w1+w2+w3+w4;

cout << "Energia calculada mediante B\nw1 = " << w1 << "\nw2 = " << w2 <<
" \nw3 = " << w3 << "\nw4 = " << w4 << " \nw = " << w << endl;

//////////FIN RESOLUCION DEL PROBLEMA//////////

```

Anexo II: Código de *FreeFem++* para el problema "Máquina estática con entrehierro largo"

```

//////////MAQUINA ESTATICA CON ENTREHIERRO LARGO//////////

//////////PARAMETROS GENERALES//////////
int maxIter      = 20; //Numero maximo de iteraciones para calcular B y mu
real tolerancia  = 1e-4; //Error maximo permitido para finalizar el calculo
real avance      = 0.3; //Parametro de cambio de mu entre iteraciones

//////////DEFINICION DE LA MALLA//////////

//PARAMETROS PARA EL MALLADO
int nbobina      = 20; // Número de divisiones de los contornos de las
bobinas
int naire        = 40; // Número de divisiones de los contornos del hueco
interior
int ncontorno    = 100; // Número de divisiones de los contornos exteriores

//MEDIDAS DE LAS BOBINAS
// l -> límite, izq->izquierda, der->derecha, sup->superior, inf->inferior
// bsd -> bobina superior derecha, bsi -> bobina superior izquierda
// bid -> bobina inferior derecha, bii -> bobina inferior izquierda

real lizqbsd = 0.35;
real lderbsd = 0.65;
real lsupbsd = 0.45;
real linfbsd = 0.15;

//DEFINICION DEL CONTORNO DE LAS 4 BOBINAS

// Contorno de la bobina superior derecha
border CDerBSD (t = linfbsd, lsupbsd) {x = lderbsd; y = t;};
border CSupBSD (t = lderbsd, lizqbsd) {x = t;      y = lsupbsd;};
border CIzqBSD (t = lsupbsd, linfbsd) {x = lizqbsd; y = t;};
border CInfBSD (t = lizqbsd, lderbsd) {x = t;      y = linfbsd;};

// Contorno de la bobina superior izquierda
border CDerBSI (t = linfbsd, lsupbsd) {x = -lizqbsd; y = t;};
border CSupBSI (t = -lizqbsd, -lderbsd) {x = t;      y = lsupbsd;};
border CIzqBSI (t = lsupbsd, linfbsd) {x = -lderbsd; y = t;};
border CInfBSI (t = -lderbsd, -lizqbsd) {x = t;      y = linfbsd;};

// Contorno de la bobina inferior derecha
border CDerBID (t = -lsupbsd, -linfbsd) {x = lderbsd; y = t;};
border CSupBID (t = lderbsd, lizqbsd) {x = t;      y = -linfbsd;};
border CIzqBID (t = -linfbsd, -lsupbsd) {x = lizqbsd; y = t;};
border CInfBID (t = lizqbsd, lderbsd) {x = t;      y = -lsupbsd;};

// Contorno de la bobina inferior izquierda
border CDerBII (t = -lsupbsd, -linfbsd) {x = -lizqbsd; y = t;};
border CSupBII (t = -lizqbsd, -lderbsd) {x = t;      y = -linfbsd;};
border CIzqBII (t = -linfbsd, -lsupbsd) {x = -lderbsd; y = t;};
border CInfBII (t = -lderbsd, -lizqbsd) {x = t;      y = -lsupbsd;};

// MEDIDAS DEL ENTREHIERRO
// Esta compuesto por tres rectángulos -> el izquierdo (RI), el centro (RC) y
el derecho (RD)

// Rectangulo de la izquierda
real lizquri = -0.7;
real lderri  = -0.3;
real lsupri  = 0.5;
real linfri  = -lsupri;

```

```

// Rectangulo del centro
real lizqrc = lderri;
real lderrc = -lderri;
real lsuprc = 0.1;
real linfrc = -lsuprc;

// Rectangulo de la derecha
real lizqrd = -lderri;
real lderrd = -lizquri;
real lsuprd = lsupri;
real linfrd = -lsupri;

//DEFINICION DEL CONTORNO DEL ENTREHIERRO
border CDerRD (t = linfrd, lsuprd) {x = lderrd; y = t;};
border CSupRD (t = lderrd, lizqrd) {x = t; y = lsuprd;};
border CIZqRD (t = lsuprd, lsuprc) {x = lizqrd; y = t;};
border CSupRC (t = lderrc, lizqrc) {x = t; y = lsuprc;};
border CDerRI (t = lsuprc, lsupri) {x = lderri; y = t;};
border CSupRI (t = lderri, lizquri) {x = t; y = lsupri;};
border CIZqRI (t = lsupri, linfri) {x = lizquri; y = t;};
border CInfRI (t = lizquri, lderri) {x = t; y = linfri;};
border CDerRI2 (t = linfri, linfrc) {x = lderri; y = t;};
border CInfRC (t = lizqrc, lderrc) {x = t; y = linfrc;};
border CIZqRD2 (t = linfrc, linfrd) {x = lizqrd; y = t;};
border CInfRD (t = lizqrd, lderrd) {x = t; y = linfrd;};

// MEDIDAS DEL LIMITE DEL DOMINIO (DP)
real lizqDP = -1;
real lderDP = -lizqDP;
real lsupDP = -lizqDP;
real linfDP = lizqDP;

//DEFINICION DEL LIMITE DEL DOMINIO
border CDerDP(t = linfDP, lsupDP) {x = lderDP; y = t;};
border CSupDP(t = lderDP, lizqDP) {x = t; y = lsupDP;};
border CIZqDP(t = lsupDP, linfDP) {x = lizqDP; y = t;};
border CInfDP(t = lizqDP, lderDP) {x = t; y = linfDP;};

//MALLADO DEL DOMINIO
mesh Th = buildmesh(CDerDP(nc contorno) + CSupDP(nc contorno) + CIZqDP(nc contorno)
+ CInfDP(nc contorno)
+ CDerRD(naire) + CSupRD(naire) + CIZqRD(naire)
+ CSupRC(naire)
+ CDerRI(naire) + CSupRI(naire) + CIZqRI(naire) +
CInfRI(naire) + CDerRI2(naire)
+ CInfRC(naire)
+ CIZqRD2(naire) + CInfRD(naire)
+ CDerBSD(nbobina) + CSupBSD(nbobina) + CIZqBSD(nbobina) +
CInfBSD(nbobina)
+ CDerBSI(nbobina) + CSupBSI(nbobina) + CIZqBSI(nbobina) +
CInfBSI(nbobina)
+ CDerBID(nbobina) + CSupBID(nbobina) + CIZqBID(nbobina) +
CInfBID(nbobina)
+ CDerBII(nbobina) + CSupBII(nbobina) + CIZqBII(nbobina) +
CInfBII(nbobina));

plot (Th, wait = true);

//////////FIN DEFINICION DE LA MALLA//////////

//////////DEFINICION DEL ESPACIO DE ELEMENTOS FINITOS//////////
fespace Vh(Th,P2); // Espacio para calcular el potencial vectorial magnético A
fespace Bh(Th,P1); // Espacio para calcular B

```

```

fespace Ch(Th,P0); // Espacio para definir constantes

// funciones de Vh para cálculo del potencial vectorial A
Vh u, v, uOld;

// funciones de Bh para el cálculo de B
Bh Bx, By, mur, mu, muOld;

//////////FIN DEFINICION ESPACIO ELEMENTOS FINITOS//////////

//////////DEFINICION REGIONES//////////
Ch reg = region;//Recojo el valor de region

//Asignacion en variables de los numeros de region
int BSD = reg(lizqbsd+1e-3, linfbsd+1e-3);
int BSI = reg(-lderbsd+1e-3, linfbsd+1e-3);
int BID = reg(lizqbsd+1e-3, -lsupbsd+1e-3);
int BII = reg(-lderbsd+1e-3, -lsupbsd+1e-3);
int aire = reg(0, 0);
int hierro = reg(-0.8,-0.8);

// Defino la región de Cobre y Aire que tienen la misma permeabilidad
func regionCobreAire = (+1*(reg == BSD)
                      +1*(reg == BSI)
                      +1*(reg == BID)
                      +1*(reg == BII)
                      +1*(reg == aire));

// Defino la región de hierro
func regionHierro = (reg == hierro);

//////////FIN DEFINICION REGIONES//////////

//////////DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE//////////
real dCorriente = 1e6; //Densidad de corriente de 1 A/mm^2

//Doy valor y represento j
func j = (+dCorriente*(reg == BSD)
        -dCorriente*(reg == BSI)
        +dCorriente*(reg == BID)
        -dCorriente*(reg == BII));

Ch jh = j;
plot(jh, wait=true,fill=true,value=true,ColorScheme=4);

//////////FIN DEFINICION DENSIDAD DE CORRIENTE//////////

//////////DEFINICION DE LA PERMEABILIDAD MAGNETICA
INICIAL//////////
real mu0 = 4*pi*1e-7;// Permeabilidad del vacio
real murhierro = 6000;// Permeabilidad inicial del hierro

// Permeabilidad inicial de todo el dominio
func muIni = (mu0*regionCobreAire
             +murhierro*mu0*regionHierro);

//////////FIN DEFINICION PERMEABILIDAD MAGNETICA
INICIAL//////////

//////////RESOLUCION DEL PROBLEMA//////////

//Calculo inicial del problema

```

```

problem electroini(u,v) = int2d(Th)((1/muIni)*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
                        -int2d(Th)(j*v)
                        +on(CDerDP, CSupDP, CIZqDP, CInfDP, u=0);
electroini;

//Resolucion inicial de B
Bx=dy(u);
By=-dx(u);

func Bmodulo = sqrt(Bx^2+By^2); //Modulo de B para calcular la nueva
permeabilidad
muOld=muIni; //Guardo el valor inicial de mu para el calculo del nuevo mu

//////////PROCESO ITERATIVO PARA EL CALCULO DE B Y MU//////////
for (int i=1; i<=maxIter; i++)
{
    //CALCULO DE MU
    uOld = u; //Guardo el valor de u para calcular el error

    //Funcion de aproximacion de la curva B-mu del hierro
    func muaprox = mu0*regionCobreAire +
    ((Bmodulo/(0.82706*(exp(4.59635*Bmodulo)+80.20517))))*regionHierro;
    mu = avance*(muaprox) + (1-avance)*muOld; //Calculo de la nueva mu
    muOld=mu; //Guardo el valor de mu para la siguiente iteracion

    //RESOLUCION DEL PROBLEMA CON LA NUEVA MU
    problem electro(u,v)=int2d(Th)((1/mu)*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
                        -int2d(Th)(j*v)
                        +on(CDerDP, CSupDP, CIZqDP, CInfDP, u=0);

    electro;

    //CALCULO DE B Y SU MODULO
    Bx = dy(u);
    By = -dx(u);
    func Bmodulo = sqrt(Bx^2+By^2);

    // CALCULO EL ERROR
    real error = int2d(Th)(abs(uOld-u));
    cout << "Iteracion " << i << "\nError = " << error << endl;

    //Si el error es suficientemente pequeño salgo del bucle
    if (error <= tolerancia) {
        cout << "Hemos convergido!!!" << endl;
        break;
    };
    if(i == maxIter){
        cout << "Maxima iteracion alcanzada" << endl; //Aviso de que no he
convergido
    };
}

// Representación gráfica final
plot(u,value=true,wait=true,ColorScheme=2); // Potencial vector
plot([Bx,By], wait=true,value=true,ColorScheme=2); // Vector B
mur = mu/mu0; // Calculo mu relativa
plot(mur,wait=true,value=true,ColorScheme=1); // Permeabilidad relativa

//////////CALCULO DE LA ENERGIA//////////

// Calculo y representación de la intensidad de campo magnetico
Bh Hx = Bx/mu;
Bh Hy = By/mu;

Bh ModuloH=sqrt(Hx^2+Hy^2);
plot(ModuloH,value=true,wait=true);

```

```
//Calculo de la energia en todo el dominio usando el potencial
real Energiaomega=1.5*int2d(Th)(j*u);

cout<<"Energia en todo el espacio calculada con el potencial \nEomega = "<<
Energiaomega <<endl;

// calculo de la energia en cada zona usando el campo magnetico
real energiaAire = 1.5*int2d(Th, aire) (Bx*Hx+By*Hy); //En el aire
real energiaHierro = 1.5*int2d(Th, hierro) (Bx*Hx+By*Hy); //En el hierro
real energiaCobre = 1.5*int2d(Th, BSD,BSI,BID,BII) (Bx*Hx+By*Hy); //En el
cobre
real energiaTotal = energiaAire+energiaHierro+energiaCobre; //Total

cout << "Energias calculadas con B y H \nEAire = " << energiaAire <<
"\nEHierro = " << energiaHierro <<
"\nECobre = " << energiaCobre << "\nEtotal = " << energiaTotal << endl;

////////////////////FIN RESOLUCION DEL PROBLEMA////////////////////
```

Anexo III: Código del FreeFem++ para la simulación del micro-relé

```

////////////////SIMULACION MICRO RELE: "An optimal shape design of a micro-relay
using 2D/3D FEM"////////////////

load "medit";
load "msh3";
load "tetgen";

////////////////////////////////////////DATOS GLOBALES////////////////////////////////////////

//DATOS GEOMÉTRICOS
real Angulo=0;//Angulo de apertura de la parte móvil

real factorEscala=2.125; //factor para reducir o aumentar el tamaño del rele.
Es un divisor.

//Multiplicador para el tamaño de la region de aire mallado. Multiplica las
coordenadas maximas del aire con las del relé, es decir, MinYAire=n*MinYRele,
y asi en todas direcciones
real tamAire=2;

//Grosor de la capa de aire alrededor del relé con mallado mas fino
real FinoAire=1e-3;

//Espacios entre el cobre y hierro
real EspExtCuFe=2e-4; //Espacio entre el hierro y el cobre en el exterior del
cobre

real EspIntCuFe=2e-4; //Espacio entre el hierro y el cobre en el interior del
cobre

//DATOS PARA LAS REGIONES
int nRegFe=0; //Hierro
int nRegAire=4; //Aire
int nRegCu=8; //Cobre

//DATOS PARA ITERACIÓN
real Avance=0.3; //Factor para calcular mu: mu=Avance*muCalculada+(1-
Avance)*Antiguamu

int maxIter=3; //Número máximo de resoluciones del problema

real tolerancia=1e-12; //Error permitido para dar por terminado el problema

////////////////////////////////////////FIN DATOS GLOBALES////////////////////////////////////////

////////////////////////////////////////DEFINICION DE LA MALLA////////////////////////////////////////

//Multiplicadores para el número de elementos en x e y
real nFe=3; //Para el mallado del hierro
real nCu=2; //Para el mallado del cobre
real nAireParteMovil=2.5; //Para el mallado del aire alrededor de la parte
móvil
real nAireExt=1; //Para el mallado del aire más lejano al relé
real nAireInt=2.5; //Para el mallado del aire dentro del relé
real nFinoAireExt=2; // Para el mallado de la capa exterior de aire cercana al
relé
real nAire=2; //Para el mallado del aire cercano al relé

//Multiplicadores para el numero de elementos en z
real nCapasFe=3; //Para el mallado del hierro
real nCapasCu=2; //Para el mallado del cobre

```

```

real nCapasAireParteMovil=2.5; //Para el mallado del aire alrededor de la
parte móvil
real nCapasAireExt=1; //Para el mallado del aire más lejano al relé
real nCapasAireInt=2.5; //Para el mallado del aire dentro del relé
real nCapasFinoAireExt=2; // Para el mallado de la capa exterior de aire
cercana al relé
real nCapasAire=2; //Para el mallado del aire cercano al relé

//Factor para aumentar o reducir todo el mallado, ES UN DIVISOR
real factorMalla=1.2;

////////////////////MEDIDAS////////////////////////////////////

//Identificar ejes segun dibujo
//Izquierda(I)-> Menor X; Derecha(D)-> Mayor X; Inferior(Inf)->Menor Y;
//Superior(Sup)-> Mayor Y; Fondo(Fo)->Menor Z; Frente(Fr)-> Mayor Z;

////////////////////MEDIDAS DEL HIERRO////////////////////////////////////

//Medidas de la parte central de hierro en el que esta enrollada la bobina
(CFe)
real MaxYCFe=5e-3/factorEscala;
real MinYCFe=-MaxYCFe;
real MaxXCFe=3.75e-3/factorEscala;
real MinXCFe=-MaxXCFe;
real MaxZCFe=17e-3/factorEscala;
real MinZCFe=-MaxZCFe;
real lonCFe= rint((MaxZCFe-MinZCFe)/factorMalla*1e3); //longitud para mallado
en z

//Medidas del lado izquierdo del hierro al fondo (IFoFe)
real MaxYIFoFe=7.5e-3/factorEscala;
real MinYIFoFe=-MaxYIFoFe;
real MaxXIFoFe=-11.75e-3/factorEscala;
real MinXIFoFe=-14.25e-3/factorEscala;
real MaxZIFoFe=-4e-3/factorEscala;
real MinZIFoFe=MinZCFe;

//Medidas del lado izquierdo del hierro al frente (IFrFe)
real MaxYIFrFe=13.5e-3/factorEscala;
real MinYIFrFe=-MaxYIFrFe;
real MaxXIFrFe=MaxXIFoFe;
real MinXIFrFe=MinXIFoFe;
real MaxZIFrFe=MaxZCFe;
real MinZIFrFe=MaxZIFoFe;

//Medidas del lado derecho del hierro al fondo (DFoFe)
real MaxYDFoFe=MaxYIFoFe;
real MinYDFoFe=MinYIFoFe;
real MaxXDFoFe=-MinXIFoFe;
real MinXDFoFe=-MaxXIFoFe;
real MaxZDFoFe=MaxZIFoFe;
real MinZDFoFe=MinZIFoFe;
real lonlateralFrFe=rint((MaxZIFrFe-MinZIFrFe)/factorMalla*1e3); //longitud
para mallado en z

//Medidas del lado derecho del hierro al frente (DFrFe)
real MaxYDFrFe=MaxYIFrFe;
real MinYDFrFe=MinYIFrFe;
real MaxXDFrFe=-MinXIFoFe;
real MinXDFrFe=-MaxXIFoFe;
real MaxZDFrFe=MaxZIFrFe;
real MinZDFrFe=MinZIFrFe;

```

```
real lonlateralFoFe=rint((MaxZIFoFe-MinZIFoFe)/factorMalla*1e3); //longitud
para mallado en z
```

```
//Medidas del lado fondo del hierro (FoFe)
```

```
real MaxYFoFe=MaxYIFoFe;
real MinYFoFe=MinYIFoFe;
real MaxXFoFe=MaxXDfoFe;
real MinXFoFe=MinXIFoFe;
real MaxZFoFe=-MaxZCFe;
real MinZFoFe=-19.5e-3/factorEscala;
real lonFoFe=rint((MaxZFoFe-MinZFoFe)/factorMalla*1e3); //longitud para
mallado en z
```

```
//Medidas del lado frente del hierro (FrFe)
```

```
real MaxYFrFe=MaxYIFrFe;
real MinYFrFe=MinYIFrFe;
real MaxXFrFe=MaxXFoFe;
real MinXFrFe=MinXFoFe;
real MaxZFrFe=-MinZFoFe;
real MinZFrFe=-MaxZFoFe;
```

```
//////////MEDIDAS DEL COBRE//////////
```

```
//Medidas del cilindro que contiene al cobre (CiCu) comprende un cilindro
exterior (CiExtCu) y uno interior (CiIntCu)
```

```
real RadCiExtCu=MinXDfrFe-EspExtCuFe;
real RadCiIntCu=sqrt(MaxXCFe^2+MaxYCFE^2)+EspIntCuFe;
real MaxZCiCu=MaxZCFe;
real MinZCiCu=MinZCFe;
```

```
//////////MEDIDAS DEL AIRE//////////
```

```
//Medidas de la parte de aire que se adapta a la zona inferior de la parte
movil del rele (InfFeAire)
```

```
real MaxYInfFeAire=MinYFrFe;
real MinYInfFeAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXInfFeAire=MaxXFrFe;
real MinXInfFeAire=MinXFrFe;
real MaxZInfFeAire=MaxZFrFe;
real MinZInfFeAire=MinZFrFe;
int lonMaxInfFeAire=rint((MaxZInfFeAire-MinZInfFeAire)/factorMalla*1e3);
int lonInfFeAire=max(2,lonMaxInfFeAire); //longitud para mallado en z, como
puede ser inferior a 1 mm, pongo 2 como minimo
```

```
//PARTES DE AIRE EXTERIOR CON UN MALLADO MAS FINO
```

```
//Inferior (InfFinoAire)
```

```
real MaxYInfFinoAire=MinYFrFe;
real MinYInfFinoAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXInfFinoAire=MaxXFrFe;
real MinXInfFinoAire=MinXFrFe;
real MaxZInfFinoAire=MinZFrFe;
real MinZInfFinoAire=MinZFoFe;
```

```
//longitudes para mallado
```

```
real lonZInfFinoAire=rint((MaxZInfFinoAire-MinZInfFinoAire)/factorMalla*1e3);
real lonXInfFinoAire=rint((MaxXInfFinoAire-MinXInfFinoAire)/factorMalla*1e3);
real lonYInfFinoAire=rint((MaxYInfFinoAire-MinYInfFinoAire)/factorMalla*1e3);
```

```

//Superior (SupFinoAire)
real MaxYSupFinoAire=MaxYFrFe+FinoAire;
real MinYSupFinoAire=MaxYFrFe;
real MaxXSupFinoAire=MaxXFrFe;
real MinXSupFinoAire=MinXFrFe;

//Izquierda (IFinoAire)
real MaxYIFinoAire=MaxYFrFe+FinoAire;
real MinYIFinoAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXIFinoAire=MinXFrFe;
real MinXIFinoAire=MinXFrFe-FinoAire;
real MaxZIFinoAire=MinZFrFe+tan(Angulo)*(MaxYFrFe-
MinYFrFe+FinoAire)+(MaxZFrFe-MinZFrFe)/cos(Angulo);
real MinZIFinoAire=MinZFrFe;

//longitudes para mallado
real lonZIFinoAire=rint((MaxZIFinoAire-MinZIFinoAire)/factorMalla*1e3);
real lonXIFinoAire=rint((MaxXIFinoAire-MinXIFinoAire)/factorMalla*1e3);
real lonYIFinoAire=rint((MaxYIFinoAire-MinYIFinoAire)/factorMalla*1e3);

//Derecha (DFinoAire)
real MaxYDFinoAire=MaxYFrFe+FinoAire;
real MinYDFinoAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXDFinoAire=MaxXFrFe+FinoAire;
real MinXDFinoAire=MaxXFrFe;

//Fondo (FoFinoAire)
real MaxZFoFinoAire=MinZFrFe;
real MinZFoFinoAire=MinZFrFe-FinoAire;
int lonZFoFinoAire=rint((MaxZFoFinoAire-MinZFoFinoAire)/factorMalla*1e3);
//longitud para mallado en z

//Parte de aire inferior al rele, al frente de la parte móvil (InfFrAire)
real MaxYInfFrAire=MinYFrFe-sin(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe);
real MinYInfFrAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXInfFrAire=MaxXFrFe;
real MinXInfFrAire=MinXFrFe;
real MaxZInfFrAire=MinZFrFe+tan(Angulo)*(MaxYFrFe-
MinYFrFe+FinoAire+sin(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe))+(MaxZFrFe-
MinZFrFe)*cos(Angulo);
real MinZInfFrAire=MinZFrFe+cos(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe);
int lonMaxInfFrAire=rint((MaxZInfFrAire-MinZInfFrAire)/factorMalla*1e3);
//longitud en el eje z para mallado, 2 como mínimo
int lonInfFrAire=max(lonMaxInfFrAire,2);

//Medidas máximas de la zona de aire (Aire)
real MaxYAire=tamAire*MaxYFrFe;
real MinYAire=tamAire*MinYFrFe;
real MaxXAire=tamAire*MaxXDFrFe;
real MinXAire=tamAire*MinXIFrFe;
real MaxZAire=tamAire*MaxZFrFe;
real MinZAire=tamAire*MinZFrFe;
real lonExtAire=rint((MaxZAire-MinZAire)/factorMalla*1e3); //longitud para
mallado en z

//Medidas de la zona de frente (FrAire)
real MaxYFrAire=MaxYFrFe+FinoAire;
real MinYFrAire=MinYFrFe-FinoAire;
real MaxXFrAire=MaxXFrFe+FinoAire;
real MinXFrAire=MinXFrFe-FinoAire;
real MaxZFrAire=MaxZAire;
real MinZFrAire=MinZFrFe+tan(Angulo)*(MaxYFrFe-
MinYFrFe+FinoAire+sin(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe))+(MaxZFrFe-
MinZFrFe)*cos(Angulo);

```

```

int lonFoAire=rint((MinZFoFe-MinZAire)/factorMalla*1e3); //longitud para
mallado en z

//////////DEFINICION DE LOS LIMITES DE CADA UNA DE LAS ZONAS EN X E
Y//////////

//El hierro se divide en cinco partes segun la distinta cota z: la zona del
fondo formada por el lado de fondo (FoFe),
//la zona lateral al fondo, formada por el lado izquierdo al fondo (IFoFe) y
el lado derecho al fondo (DFoFe)
//la zona central, formada por la parte central (CFe),
//la zona lateral, formada por el lado izquierdo al frente (IFrFe) y el lado
derecho al frente (DFrFe)
//y la zona frontal, formada por el lado de frente (FrFe), cuyas cotas z e y
van a depender de Angulo

//////////LIMITES DE LAS ZONAS DE HIERRO//////////

//Cada zona incluye el calculo de la longitud de la arista correspondiente

//Definicion de los limites de la zona central de hierro (CFe)
border BInfCFe (t=MinXCFe,MaxXCFe) {x=t; y=MinYCFe;};
int lonBInfCFe=rint((MaxXCFe-MinXCFe)/factorMalla*1e3);
border BDCFe (t=MinYCFe,MaxYCFe) {x=MaxXCFe; y=t;};
int lonBDCFe=rint((MaxYCFe-MinYCFe)/factorMalla*1e3);
border BSupCFe (t=MaxXCFe,MinXCFe) {x=t; y=MaxYCFe;};
int lonBSupCFe=rint((MaxXCFe-MinXCFe)/factorMalla*1e3);
border BICFe (t=MaxYCFe,MinYCFe) {x=MinXCFe; y=t;};
int lonBICFe=rint((MaxYCFe-MinYCFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona de fondo de hierro (FoFe)
border BInfFoFe (t=MinXFoFe,MaxXFoFe) {x=t; y=MinYFoFe;};
int lonBInfFoFe=rint((MaxXFoFe-MinXFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDFoFe (t=MinYFoFe,MaxYFoFe) {x=MaxXFoFe; y=t;};
int lonBDFoFe=rint((MaxYFoFe-MinYFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupFoFe (t=MaxXFoFe,MinXFoFe) {x=t; y=MaxYFoFe;};
int lonBSupFoFe=rint((MaxXFoFe-MinXFoFe)/factorMalla*1e3);
border BIFoFe (t=MaxYFoFe,MinYFoFe) {x=MinXFoFe; y=t;};
int lonBIFoFe=rint((MaxYFoFe-MinYFoFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona de frente de hierro (FrFe)
border BInfFrFe (t=MinXFrFe,MaxXFrFe) {x=t; y=MinYFrFe;label=92;};//Numeros de
etiqueta para las integrales
int lonBInfFrFe=rint((MaxXFrFe-MinXFrFe)/factorMalla*1e3);
border BDFrFe (t=MinYFrFe,MaxYFrFe) {x=MaxXFrFe; y=t;label=93;};
int lonBDFrFe=rint((MaxYFrFe-MinYFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupFrFe (t=MaxXFrFe,MinXFrFe) {x=t; y=MaxYFrFe;label=94;};
int lonBSupFrFe=rint((MaxXFrFe-MinXFrFe)/factorMalla*1e3);
border BIFrFe (t=MaxYFrFe,MinYFrFe) {x=MinXFrFe; y=t;label=95;};
int lonBIFrFe=rint((MaxYFrFe-MinYFrFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona izquierda de fondo de hierro (IFoFe)
border BInfIFoFe (t=MinXIFoFe,MaxXIFoFe) {x=t; y=MinYIFoFe;};
int lonBInfIFoFe=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDIFoFe (t=MinYIFoFe,MaxYIFoFe) {x=MaxXIFoFe; y=t;};
int lonBDIFoFe=rint((MaxYIFoFe-MinYIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupIFoFe (t=MaxXIFoFe,MinXIFoFe) {x=t; y=MaxYIFoFe;};
int lonBSupIFoFe=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BIIFoFe (t=MaxYIFoFe,MinYIFoFe) {x=MinXIFoFe; y=t;};

```

```

int lonBIIFoFe=rint((MaxYIFoFe-MinYIFoFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona derecha de fondo de hierro (DFoFe)
border BInfDFoFe (t=MinXDFoFe,MaxXDFoFe) {x=t; y=MinYDFoFe;};
int lonBInfDFoFe=rint((MaxXDFoFe-MinXDFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDDFoFe (t=MinYDFoFe,MaxYDFoFe) {x=MaxXDFoFe; y=t;};
int lonBDDFoFe=rint((MaxYDFoFe-MinYDFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupDFoFe (t=MaxXDFoFe,MinXDFoFe) {x=t; y=MaxYDFoFe;};
int lonBSupDFoFe=rint((MaxXDFoFe-MinXDFoFe)/factorMalla*1e3);
border BIDFoFe (t=MaxYDFoFe,MinYDFoFe) {x=MinXDFoFe; y=t;};
int lonBIDFoFe=rint((MaxYDFoFe-MinYDFoFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona izquierda frente de hierro (IFrFe)
border BInfIFrFe (t=MinXIFrFe,MaxXIFrFe) {x=t; y=MinYIFrFe;};
int lonBInfIFrFe=rint((MaxXIFrFe-MinXIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BDIFrFe (t=MinYIFrFe,MaxYIFrFe) {x=MaxXIFrFe; y=t;};
int lonBDIFrFe=rint((MaxYIFrFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupIFrFe (t=MaxXIFrFe,MinXIFrFe) {x=t; y=MaxYIFrFe;};
int lonBSupIFrFe=rint((MaxXIFrFe-MinXIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BIIFrFe (t=MaxYIFrFe,MinYIFrFe) {x=MinXIFrFe; y=t;};
int lonBIIFrFe=rint((MaxYIFrFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);

//Definicion de los limites de la zona derecha frente de hierro (DFrFe)
border BInfDFrFe (t=MinXDFrFe,MaxXDFrFe) {x=t; y=MinYDFrFe;};
int lonBInfDFrFe=rint((MaxXDFrFe-MinXDFrFe)/factorMalla*1e3);
border BDDFrFe (t=MinYDFrFe,MaxYDFrFe) {x=MaxXDFrFe; y=t;};
int lonBDDFrFe=rint((MaxYDFrFe-MinYDFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupDFrFe (t=MaxXDFrFe,MinXDFrFe) {x=t; y=MaxYDFrFe;};
int lonBSupDFrFe=rint((MaxXDFrFe-MinXDFrFe)/factorMalla*1e3);
border BIDFrFe (t=MaxYDFrFe,MinYDFrFe) {x=MinXDFrFe; y=t;};
int lonBIDFrFe=rint((MaxYDFrFe-MinYDFrFe)/factorMalla*1e3);

//////////LIMITES DE LAS ZONAS DE COBRE//////////

//Definicion del cilindro exterior (CiExt) e interior (CInt) de cobre
border BCiExtCu (t=0,2*pi) {x=RadCiExtCu*cos(t); y=RadCiExtCu*sin(t);};
border BCiIntCu (t=0,2*pi) {x=RadCiIntCu*cos(t); y=RadCiIntCu*sin(t);};

//////////LIMITES DE LAS ZONAS DE AIRE//////////

//Definicion de la zona exterior al cobre e interior al hierro (ExtCuAire)
border BInfExtCuAire (t=MaxXIFrFe,MinXDFrFe) {x=t; y=MinYIFrFe;};
int lonBInfExtCuAire=rint((MinXDFrFe-MaxXIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BDExtCuAire (t=MinYIFrFe,MaxYIFrFe) {x=MinXDFrFe;y=t;};
int lonBDExtCuAire=rint((MaxYIFrFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupExtCuAire (t=MinXDFrFe,MaxXIFrFe) {x=t;y=MaxYIFrFe;};
int lonBSupExtCuAire=rint((MinXDFrFe-MaxXIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BIExtCuAire (t=MaxYIFrFe,MinYIFrFe) {x=MaxXIFrFe;y=t;};
int lonBIExtCuAire=rint((MaxYIFrFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);

//Zona de aire inferior a la parte movil del rele (InfFeAire)
border BInfInfFeAire (t=MinXInfFeAire,MaxXInfFeAire) {x=t; y=MinYInfFeAire;};
int lonBInfInfFeAire=rint((MaxXInfFeAire-MinXInfFeAire)/factorMalla*1e3);
border BDInfFeAire (t=MinYInfFeAire,MaxYInfFeAire) {x=MaxXInfFeAire;y=t;};
int lonBDInfFeAire=rint((MaxYInfFeAire-MinYInfFeAire)/factorMalla*1e3);
border BSupInfFeAire (t=MaxXInfFeAire,MinXInfFeAire) {x=t;y=MaxYInfFeAire;};
int lonBSupInfFeAire=rint((MaxXInfFeAire-MinXInfFeAire)/factorMalla*1e3);
border BIInfFeAire (t=MaxYInfFeAire,MinYInfFeAire) {x=MinXInfFeAire;y=t;};
int lonBIInfFeAire=rint((MaxYInfFeAire-MinYInfFeAire)/factorMalla*1e3);

```

```
//Zona de aire inferior al rele, al frente de la parte móvil (InfFrAire)
border BInfInfFrAire (t=MinXInfFrAire,MaxXInfFrAire) {x=t; y=MinYInfFrAire;};
int lonBInfInfFrAire=rint((MaxXInfFrAire-MinXInfFrAire)/factorMalla*1e3);
border BDIInfFrAire (t=MinYInfFrAire,MaxYInfFrAire) {x=MaxXInfFrAire;y=t;};
int lonBDIInfFrAire=rint((MaxYInfFrAire-MinYInfFrAire)/factorMalla*1e3);
border BSupInfFrAire (t=MaxXInfFrAire,MinXInfFrAire) {x=t;y=MaxYInfFrAire;};
int lonBSupInfFrAire=rint((MaxXInfFrAire-MinXInfFrAire)/factorMalla*1e3);
border BIInfFrAire (t=MaxYInfFrAire,MinYInfFrAire) {x=MinXInfFrAire;y=t;};
int lonBIInfFrAire=rint((MaxYInfFrAire-MinYInfFrAire)/factorMalla*1e3);
```

//ZONAS DE AIRE ALREDEDOR DEL FONDO DEL HIERRO

```
//Definición de la zona inferior izquierda (InfIFoAire)
border BInfInfIFoAire (t=MinXIFoFe,MaxXIFoFe) {x=t; y=MinYIFrFe;};
int lonBInfInfIFoAire=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDIInfIFoAire (t=MinYIFrFe,MinYIFoFe) {x=MaxXIFoFe; y=t;};
int lonBDIInfIFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupInfIFoAire (t=MaxXIFoFe,MinXIFoFe) {x=t; y=MinYIFoFe;};
int lonBSupInfIFoAire=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BIInfIFoAire (t=MinYIFoFe,MinYIFrFe) {x=MinXIFoFe;y=t;};
int lonBIInfIFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
```

```
//Definición de la zona superior izquierda (SupIFoAire)
border BInfSupIFoAire (t=MinXIFoFe,MaxXIFoFe) {x=t; y=MaxYIFoFe;};
int lonBInfSupIFoAire=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDSupIFoAire (t=MaxYIFoFe,MaxYIFrFe) {x=MaxXIFoFe; y=t;};
int lonBDSupIFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupSupIFoAire (t=MaxXIFoFe,MinXIFoFe) {x=t; y=MaxYIFrFe;};
int lonBSupSupIFoAire=rint((MaxXIFoFe-MinXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BISupIFoAire (t=MaxYIFrFe,MaxYIFoFe) {x=MinXIFoFe;y=t;};
int lonBISupIFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);
```

```
//Definición de la zona inferior derecha (InfDFoAire)
border BInfInfDFoAire (t=MinXDfoFe,MaxXDfoFe) {x=t; y=MinYIFrFe;};
int lonBInfInfDFoAire=rint((MaxXDfoFe-MinXDfoFe)/factorMalla*1e3);
border BDIInfDFoAire (t=MinYIFrFe,MinYIFoFe) {x=MaxXDfoFe; y=t;};
int lonBDIInfDFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupInfDFoAire (t=MaxXDfoFe,MinXDfoFe) {x=t; y=MinYIFoFe;};
int lonBSupInfDFoAire=rint((MaxXDfoFe-MinXDfoFe)/factorMalla*1e3);
border BIInfDFoAire (t=MinYIFoFe,MinYIFrFe) {x=MinXDfoFe;y=t;};
int lonBIInfDFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
```

```
//Definición de la zona superior derecha (SupDFoAire)
border BInfSupDFoAire (t=MinXDfoFe,MaxXDfoFe) {x=t; y=MaxYIFoFe;};
int lonBInfSupDFoAire=rint((MaxXDfoFe-MinXDfoFe)/factorMalla*1e3);
border BDSupDFoAire (t=MaxYIFoFe,MaxYIFrFe) {x=MaxXDfoFe; y=t;};
int lonBDSupDFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupSupDFoAire (t=MaxXDfoFe,MinXDfoFe) {x=t; y=MaxYIFrFe;};
int lonBSupSupDFoAire=rint((MaxXDfoFe-MinXDfoFe)/factorMalla*1e3);
border BISupDFoAire (t=MaxYIFrFe,MaxYIFoFe) {x=MinXDfoFe;y=t;};
int lonBISupDFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);
```

```
//Definición de la zona inferior al fondo (InfFoAire)
border BInfInfFoAire (t=MaxXIFoFe,MinXDfoFe) {x=t; y=MinYIFrFe;};
int lonBInfInfFoAire=rint((MinXDfoFe-MaxXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDIInfFoAire (t=MinYIFrFe,MinYIFoFe) {x=MinXDfoFe;y=t;};
int lonBDIInfFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
border BSupInfFoAire (t=MinXDfoFe,MaxXIFoFe) {x=t;y=MinYIFoFe;};
int lonBSupInfFoAire=rint((MinXDfoFe-MaxXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BIInfFoAire (t=MinYIFoFe,MinYIFrFe) {x=MaxXIFoFe;y=t;};
int lonBIInfFoAire=rint((MinYIFoFe-MinYIFrFe)/factorMalla*1e3);
```

```
//Definicion de la zona superior al fondo (SupFoAire)
border BInfSupFoAire (t=MaxXIFoFe,MinXDfoFe) {x=t; y=MaxYIFoFe;};
int lonBInfSupFoAire=rint((MinXDfoFe-MaxXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BDSupFoAire (t=MaxYIFoFe,MaxYIFrFe) {x=MinXDfoFe;y=t;};
int lonBDSupFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BSupSupFoAire (t=MinXDfoFe,MaxXIFoFe) {x=t; y=MaxYIFrFe;};
int lonBSupSupFoAire=rint((MinXDfoFe-MaxXIFoFe)/factorMalla*1e3);
border BISupFoAire (t=MaxYIFrFe,MaxYIFoFe) {x=MaxXIFoFe;y=t;};
int lonBISupFoAire=rint((MaxYIFrFe-MaxYIFoFe)/factorMalla*1e3);

//ZONAS DE AIRE MAS FINO ALREDEDOR DEL RELE

//Inferior (InfFinoAire)
border BInfInfFinoAire (t=MinXInfFinoAire,MaxXInfFinoAire)
{x=t;y=MinYInfFinoAire;};
border BDIInfFinoAire (t=MinYInfFinoAire,MaxYInfFinoAire)
{x=MaxXInfFinoAire;y=t;};
border BSupInfFinoAire (t=MaxXInfFinoAire,MinXInfFinoAire)
{x=t;y=MaxYInfFinoAire;};
border BIInfFinoAire (t=MaxYInfFinoAire,MinYInfFinoAire)
{x=MinXInfFinoAire;y=t;};

//Superior (SupFinoAire)
border BInfSupFinoAire (t=MinXSupFinoAire,MaxXSupFinoAire)
{x=t;y=MinYSupFinoAire;};
border BDSupFinoAire (t=MinYSupFinoAire,MaxYSupFinoAire)
{x=MaxXSupFinoAire;y=t;};
border BSupSupFinoAire (t=MaxXSupFinoAire,MinXSupFinoAire)
{x=t;y=MaxYSupFinoAire;};
border BISupFinoAire (t=MaxYSupFinoAire,MinYSupFinoAire)
{x=MinXSupFinoAire;y=t;};

//Izquierda (IFinoAire)
border BInfIFinoAire (t=MinXIFinoAire,MaxXIFinoAire) {x=t;y=MinYIFinoAire;};
border BDIFinoAire (t=MinYIFinoAire,MaxYIFinoAire) {x=MaxXIFinoAire;y=t;};
border BSupIFinoAire (t=MaxXIFinoAire,MinXIFinoAire) {x=t;y=MaxYIFinoAire;};
border BIIFinoAire (t=MaxYIFinoAire,MinYIFinoAire) {x=MinXIFinoAire;y=t;};

//Derecha (DFinoAire)
border BInfDFinoAire (t=MinXDfFinoAire,MaxXDfFinoAire) {x=t;y=MinYDFinoAire;};
border BDDFinoAire (t=MinYDFinoAire,MaxYDFinoAire) {x=MaxXDfFinoAire;y=t;};
border BSupDFinoAire (t=MaxXDfFinoAire,MinXDfFinoAire) {x=t;y=MaxYDFinoAire;};
border BIDFinoAire (t=MaxYDFinoAire,MinYDFinoAire) {x=MinXDfFinoAire;y=t;};

//ZONAS DE AIRE QUE SE ENCUENTRAN EN EL EXTERIOR DEL DOMINIO

//Zona de frente (FrAire)
border BInfFrAire (t=MinXFrAire,MaxXFrAire) {x=t; y=MinYFrAire;};
int lonBInfFrAire=rint((MaxXFrAire-MinXFrAire)/factorMalla*1e3);
border BDFrAire (t=MinYFrAire,MaxYFrAire) {x=MaxXFrAire; y=t;};
int lonBDFrAire=rint((MaxYFrAire-MinYFrAire)/factorMalla*1e3);
border BSupFrAire (t=MaxXFrAire,MinXFrAire) {x=t; y=MaxYFrAire;};
int lonBSupFrAire=rint((MaxXFrAire-MinXFrAire)/factorMalla*1e3);
border BIFrAire (t=MaxYFrAire,MinYFrAire) {x=MinXFrAire; y=t;};
int lonBIFrAire=rint((MaxYFrAire-MinYFrAire)/factorMalla*1e3);

//Zona exterior (ExtAire) con números de etiqueta para las condiciones de
contorno
border BInfExtAire (t=MinXAire,MaxXAire) {x=t;y=MinYAire;label=40;};
int lonBInfExtAire=rint((MaxXAire-MinXAire)/factorMalla*1e3);
border BDEExtAire (t=MinYAire,MaxYAire) {x=MaxXAire;y=t;label=40;};
int lonBDEExtAire=rint((MaxYAire-MinYAire)/factorMalla*1e3);
border BSupExtAire (t=MaxXAire,MinXAire) {x=t;y=MaxYAire;label=40;};
```

```

int lonBSupExtAire=rint((MaxxAire-MinxAire)/factorMalla*1e3);
border BIExtAire (t=MaxYAire,MinYAire) {x=MinxAire;y=t;label=40;};
int lonBIExtAire=rint((MaxYAire-MinYAire)/factorMalla*1e3);

////////////////////////////////CONSTRUCCION DE LA MALLA 2D////////////////////////////////

//Se construyen las mallas en 2D necesarias para la posterior creación de
elementos 3D

////////////////////////////////MALLAS 2D DEL HIERRO////////////////////////////////

//Núcleo
mesh CHierro=buildmesh (
BInfCFe(lonBInfCFe*nFe)+BDCFe(lonBDCFe*nFe)+BSupCFe(lonBSupCFe*nFe)+BICFe(lonB
ICFe*nFe)
);

//Fondo
mesh FoHierro=buildmesh (
BInfFoFe(lonBInfFoFe*nFe)+BDFoFe(lonBDFoFe*nFe)+BSupFoFe(lonBSupFoFe*nFe)+BIFo
Fe(lonBIFoFe*nFe)
);

//Frente
mesh FrHierro=buildmesh (
BInfFrFe(lonBInfFrFe*nFe)+BDFrFe(lonBDFrFe*nFe)+BSupFrFe(lonBSupFrFe*nFe)+BIFr
Fe(lonBIFrFe*nFe)
);

//Laterales al fondo
mesh lateralFoHierro=buildmesh (
BInfIFoFe(lonBInfIFoFe*nFe)+BDIFoFe(lonBDIFoFe*nFe)+BSupIFoFe(lonBSupIFoFe*nFe
)+BIIFoFe(lonBIIFoFe*nFe)
+BInfDFoFe(lonBInfDFoFe*nFe)+BDDFoFe(lonBDDFoFe*nFe)+BSupDFoFe(lonBSupDFoFe*nF
e)+BIDFoFe(lonBIDFoFe*nFe)
);

//Laterales al frente
mesh lateralFrHierro=buildmesh(
BInfIFrFe(lonBInfIFrFe*nFe)+BDIFrFe(lonBDIFrFe*nFe)+BSupIFrFe(lonBSupIFrFe*nFe
)+BIIFrFe(lonBIIFrFe*nFe)
+BInfDFrFe(lonBInfDFrFe*nFe)+BDDFrFe(lonBDDFrFe*nFe)+BSupDFrFe(lonBSupDFrFe*nF
e)+BIDFrFe(lonBIDFrFe*nFe)
);

////////////////////////////////MALLA 2D DEL COBRE////////////////////////////////

mesh Cobre=buildmesh (
BCiExtCu(2*pi*RadCiExtCu*1000*nCu)+BCiIntCu(-2*pi*RadCiIntCu*1000*nCu)
);

////////////////////////////////MALLAS 2D DE AIRE////////////////////////////////

//Aire entre el núcleo y el cobre
mesh IntCuAire=buildmesh (
BCiIntCu(2*pi*RadCiIntCu*1000*nCu)
+BInfCFe(-lonBInfCFe*nAireInt)+BDCFe(-lonBDCFe*nAireInt)+BSupCFe(-
lonBSupCFe*nAireInt)+BICFe(-lonBICFe*nAireInt)
);

//Aire entre el cobre y las paredes del relé
mesh ExtCuAire=buildmesh(

```

```

BInfExtCuAire(lonBInfExtCuAire*nAireInt)+BDExtCuAire(lonBDExtCuAire*nAireInt)+
BSupExtCuAire(lonBSupExtCuAire*nAireInt)+BIExtCuAire(lonBIExtCuAire*nAireInt)
+BCiExtCu(-2*pi*RadCiExtCu*1000*nCu)
);

//Aire en los laterales del hierro al fondo
mesh lateralFoAire=buildmesh(
BIInfFoAire(lonBIInfFoAire*nAire)+BSupInfFoAire(lonBSupInfFoAire*nAire)+BD
InfFoAire(lonBDInfFoAire*nAire)+BInfInfFoAire(lonBInfInfFoAire*nAire)
+BISupFoAire(lonBISupFoAire*nAire)+BSupSupFoAire(lonBSupSupFoAire*nAire)+B
DSupFoAire(lonBDSupFoAire*nAire)+BInfSupFoAire(lonBInfSupFoAire*nAire)
+BIInfDFoAire(lonBIInfDFoAire*nAire)+BSupInfDFoAire(lonBSupInfDFoAire*nAire)+B
DInfDFoAire(lonBDInfDFoAire*nAire)+BInfInfDFoAire(lonBInfInfDFoAire*nAire)
+BISupDFoAire(lonBISupDFoAire*nAire)+BSupSupDFoAire(lonBSupSupDFoAire*nAire)+B
DSupDFoAire(lonBDSupDFoAire*nAire)+BInfSupDFoAire(lonBInfSupDFoAire*nAire)
);

//Aire al fondo del hierro
mesh FoFeAire=buildmesh(
BIInfFoAire(lonBIInfFoAire*nAire)+BInfInfFoAire(lonBInfInfFoAire*nAire)+BDInfF
oAire(lonBDInfFoAire*nAire)+BSupInfFoAire(lonBSupInfFoAire*nAire)
+BISupFoAire(lonBISupFoAire*nAire)+BInfSupFoAire(lonBInfSupFoAire*nAire)+BDSup
FoAire(lonBDSupFoAire*nAire)+BSupSupFoAire(lonBSupSupFoAire*nAire)
);

//Aire alrededor de la parte móvil, interior y exterior
mesh ParteMovilAire=buildmesh (
BIFrFe(lonBIFrFe*nAireParteMovil)+BSupFrFe(lonBSupFrFe*nAireParteMovil)+BDFrFe
(lonBDFrFe*nAireParteMovil)+BInfFrFe(lonBInfFrFe*nAireParteMovil)
);

//Medida en z para adaptar la malal al volumen cambiante
int lonMaxSupFrAire=1000*(MaxZFrFe-MinZFrFe)*(1/cos(Angulo)-1);
real lonSupFrAire=max(lonMaxSupFrAire,2);

//Aire alrededor de la parte móvil, superior e inferior
mesh ParteMovilSupAire=buildmesh (
BIFrFe(lonSupFrAire*nAireInt)+BSupFrFe(lonBSupFrFe*nAireInt)+BDFrFe(lonSupFrA
ire*nAireInt)+BInfFrFe(lonBInfFrFe*nAireInt)
);

//Aire al frente de la parte móvil, debajo de ExtFrAire
mesh InfFrAire=buildmesh(
BIInfFrAire(lonBIInfFrAire*nAireParteMovil)+BSupInfFrAire(lonBSupInfFrAire*nA
ireParteMovil)+BDInfFrAire(lonBDInfFrAire*nAireParteMovil)+BInfInfFrAire(lonBIN
fInfFrAire*nAireParteMovil)
);

//Aire más exterior
mesh ExtAire=buildmesh(
BIExtAire(lonBIExtAire*nAireExt)+BSupExtAire(lonBSupExtAire*nAireExt)+BDExtA
ire(lonBDExtAire*nAireExt)+BInfExtAire(lonBInfExtAire*nAireExt)
+BIFrAire(-lonBIFrAire*nAireExt)+BSupFrAire(-
lonBSupFrAire*nAireExt)+BDFrAire(-lonBDFrAire*nAireExt)+BInfFrAire(-
lonBInfFrAire*nAireExt)
);

//Aire más exterior, al fondo y al frente
mesh FrAire=buildmesh(
BIFrAire(lonBIFrAire*nAireExt)+BSupFrAire(lonBSupFrAire*nAireExt)+BDFrAire(lon
BDFrAire*nAireExt)+BInfFrAire(lonBInfFrAire*nAireExt)
);

//Aire exterior de mallado fino, inferior y superior
mesh InfySupFinoAire=buildmesh(

```

```

BIInffinoAire(lonYInffinoAire*nFinoAireExt)+BSupInffinoAire(lonXInffinoAire*nF
inoAireExt)+BDInffinoAire(lonYInffinoAire*nFinoAireExt)+BInffinoAire(lonXIn
ffinoAire*nFinoAireExt)
+BISupfinoAire(lonYInffinoAire*nFinoAireExt)+BSupSupfinoAire(lonXInffinoAire*n
FinoAireExt)+BDSupfinoAire(lonYInffinoAire*nFinoAireExt)+BInfsupfinoAire(lonXI
nffinoAire*nFinoAireExt)
);

//Aire exterior de mallado fino, lateral
mesh lateralFinoAire=buildmesh(
BIIFinoAire(lonYIFinoAire*nFinoAireExt)+BSupIFinoAire(lonXIFinoAire*nFinoAireE
xt)+BDIFinoAire(lonYIFinoAire*nFinoAireExt)+BInFIInoAire(lonXIFinoAire*nFinoA
ireExt)
+BIDFinoAire(lonYIFinoAire*nFinoAireExt)+BSupDFinoAire(lonXIFinoAire*nFinoAire
Ext)+BDDFinoAire(lonYIFinoAire*nFinoAireExt)+BInfdfinoAire(lonXIFinoAire*nFino
AireExt)
);

//Aire exterior de mallado fino, al fondo
mesh FoFinoAire=buildmesh(
BIFrAire(lonBIFrAire*nFinoAireExt)+BSupFrAire(lonBSupFrAire*nFinoAireExt)+BDFr
Aire(lonBDFrAire*nFinoAireExt)+BInfFrAire(lonBInfFrAire*nFinoAireExt)
);

////////////////////////////////////CONSTRUCCION DE LA MALLA
3D////////////////////////////////////

////////////////////////////////////MALLAS DE HIERRO////////////////////////////////////

//Núcleo
mesh3 CHierro3D=buildlayers(CHierro,lonCFe*nCapasFe,zbound=[MinZCFe,MaxZCFe]);

//Fondo
mesh3
FoHierro3D=buildlayers(FoHierro,lonFoFe*nCapasFe,zbound=[MinZFoFe,MaxZFoFe]);

//Lateral al fondo
mesh3
lateralFoHierro3D=buildlayers(lateralFoHierro,lonlateralFoFe*nCapasFe,zbound=[
MinZIFoFe,MaxZIFoFe]);

//Lateral al frente
mesh3
lateralFrHierro3D=buildlayers(lateralFrHierro,lonlateralFrFe*nCapasFe,zbound=[
MinZIFrFe,MaxZIFrFe]);

//Funciones para realizar la transformación de apertura de la parte móvil
func fxFrHierro=x;
func fyFrHierro=MinYFrFe-(z-MinZFrFe)*sin(Angulo)+(y-MinYFrFe)*cos(Angulo);
func fzFrHierro=MinZFrFe+cos(Angulo)*(z-MinZFrFe)+sin(Angulo)*(y-MinYFrFe);

//Malla de la parte frontal de hierro, en funcion de Angulo
int [int] lFrHierroUp=[0,90], lFrHierroDown=[0,91]; //Le doy etiquetas para las
integrales
mesh3
FrHierro3D=buildlayers(FrHierro,nCapasFe*lonFoFe,zbound=[MinZFrFe,MaxZFrFe],tr
ansfo=[fxFrHierro,fyFrHierro,fzFrHierro],labelup=lFrHierroUp,labeldown=lFrHie
roDown);

//Union de todas las mallas de hierro
mesh3
Hierro3D=CHierro3D+FoHierro3D+FrHierro3D+lateralFoHierro3D+lateralFrHierro3D;

```

```

//Unificación del número de región del hierro
int [int] regHierro=[4,nRegFe];
Hierro3D=change(Hierro3D,region=regHierro);

////////////////////////////////////MALLA DE
COBRE////////////////////////////////////

int [int] regCobre=[0,nRegCu]; //Le asigno su número de región
mesh3
Cobre3D=buildlayers(Cobre,lonCFe*nCapasCu,zbound=[MinZCiCu,MaxZCiCu],region=regCobre);

////////////////////////////////////MALLA DE AIRE////////////////////////////////////

//Interior y exterior al cobre
mesh3
IntCuAire3D=buildlayers(IntCuAire,lonCFe*nCapasAireInt,zbound=[MinZCiCu,MaxZCiCu]);

mesh3
ExtCuAire3D=buildlayers(ExtCuAire,lonCFe*nCapasAireInt,zbound=[MinZCiCu,MaxZCiCu]);

//Alrededor de la zona posterior del relé
mesh3
lateralFoAire3D=buildlayers(lateralFoAire,lonlateralFoFe*nCapasAire,zbound=[MinZFoFe,MinZIFrFe]);

mesh3
FoFeAire3D=buildlayers(FoFeAire,lonFoFe*nCapasAire,zbound=[MinZFoFe,MaxZFoFe]);

//PARTES DE AIRE EXTERIOR DE MALLADO FINO

//Inferior y superior
mesh3
InfySupFinoAire3D=buildlayers(InfySupFinoAire,lonZInfFinoAire*nCapasFinoAireExt,zbound=[MinZInfFinoAire,MaxZInfFinoAire]);

//Lateral
mesh3
lateralFinoAire3D=buildlayers(lateralFinoAire,lonZIFinoAire*nCapasFinoAireExt,zbound=[MinZIFinoAire,MaxZIFinoAire]);

//Al fondo
mesh3
FoFinoAire3D=buildlayers(FoFinoAire,lonZFoFinoAire*nCapasFinoAireExt,zbound=[MinZFoFinoAire,MaxZFoFinoAire]);

//AIRE EXTERIOR

//Lateral
int[int] lExtAireUp=[0,40], lExtAireDown=[0,40]; //Asigno 40 al exterior, para las condiciones de contorno
mesh3
ExtAire3D=buildlayers(ExtAire,lonExtAire*nCapasAireExt,zbound=[MinZAire,MaxZAire],labelup=lExtAireUp,labeldown=lExtAireDown);

//Al fondo del relé

```

```
int [int] lFoAireDown=[0,40]; //Asigno 40 al exterior para las condiciones de
contorno
mesh3
FoAire3D=buildlayers(FrAire,lonFoAire*nCapasAireExt,zbound=[MinZAire,MinZFOFe-
FinoAire],labeldown=lFoAireDown);
```

```
//Aire inferior a la parte móvil del rele, se adapta según esta se mueve
func fxInfFeAire=x;
func fyInfFeAire=MinYFrFe-FinoAire*((MaxYFrFe-y)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))-((y-
MinYFrFe)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*(z-MinZFrFe)*sin(Angulo);
func fzInfFeAire=MinZFrFe+(z-MinZFrFe)*cos(Angulo);
```

```
mesh3
InfFeAire3D=buildlayers(ParteMóvilSupAire,lonInfFeAire*nCapasAireParteMóvil,zb
ound=[MinZFrFe,MaxZFrFe],transfo=[fxInfFeAire,fyInfFeAire,fzInfFeAire]);
```

```
//Zona de aire superior a la parte móvil, se adapta a su movimiento
func fxSupFrAire=x;
func fySupFrAire=MinYFrFe+(MaxYFrFe-y)*cos(Angulo)-(z-MinZFrFe)*((MaxYFrFe-
y)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*sin(Angulo)+((y-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-
MinYFrFe))*(MaxYFrFe-MinYFrFe+FinoAire);
func fzSupFrAire=MinZFrFe+sin(Angulo)*(MaxYFrFe-y)+cos(Angulo)*(z-
MinZFrFe)*((MaxYFrFe-y)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))+((y-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-
MinYFrFe))*(z-MinZFrFe)*(1/cos(Angulo))+((y-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-
MinYFrFe))*tan(Angulo)*(MaxYFrFe-MinYFrFe+FinoAire);
```

```
mesh3
SupFrAire3D=buildlayers(ParteMóvilSupAire,lonInfFeAire*nCapasAireParteMóvil,zb
ound=[MinZFrFe,MaxZFrFe],transfo=[fxSupFrAire,fySupFrAire,fzSupFrAire]);
```

```
//MALLA AUXILIAR para el cálculo del par cogiendo la zona alrededor
real Esp=1e-5; //Espacio entre la parte móvil y esta malla.
```

```
func fxMallaAux=x+((2*x-MaxXFrFe-MinXFrFe)/(MaxXFrFe-MinXFrFe))*Esp;
func fyMallaAux=MinYFrFe-(z-MinZFrFe)*sin(Angulo)+(y-
MinYFrFe)*cos(Angulo)+((2*y-MaxYFrFe-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-
MinYFrFe))*cos(Angulo)+((-2*z+MaxZFrFe+MinZFrFe)/(MaxZFrFe-
MinZFrFe))*sin(Angulo)*Esp;
func fzMallaAux=MinZFrFe+cos(Angulo)*(z-MinZFrFe)+sin(Angulo)*(y-
MinYFrFe)+((2*y-MaxYFrFe-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*sin(Angulo)+((2*z-
MaxZFrFe-MinZFrFe)/(MaxZFrFe-MinZFrFe))*cos(Angulo)*Esp;
```

```
int [int] lMallaAuxUp=[0,70], lMallaAuxDown=[0,71],
lMallaAuxMid=[92,72,93,73,94,74,95,75]; //Doy etiquetas para las integrales
mesh3
MallaAux3D=buildlayers(FrHierro,nCapasFe*lonFoFe,zbound=[MinZFrFe,MaxZFrFe],tr
ansfo=[fxMallaAux,fyMallaAux,fzMallaAux],labelup=lMallaAuxUp,labelmid=lMallaAu
xMid,labeldown=lMallaAuxDown);
```

```
/////////A PARTIR DE AQUÍ EL PROGRAMA SE DIVIDE EN 2 OPCIONES SEGÚN ESTÉ LA
PARTE MÓVIL/////////
///////// CERRADA O NO YA QUE HAY QUE AÑADIR OTRAS MALLAS PARA CUBRIR LOS
HUECOS/////////
```

```
if (Angulo>0) {
//Zona de aire exterior a la parte móvil
func fxExtFrAire=x;
```

```

func fyExtFrAire=MinYFrFe-sin(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe)*((MaxYFrFe-
y)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))+((y-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*(MaxYFrFe-
MinYFrFe+FinoAire);
func fzExtFrAire=MinZFrFe+(MaxZFrFe-MinZFrFe)*cos(Angulo)+(1-((MaxYFrFe-
y)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*((MaxZFrFe-z)/(MaxZFrFe-
MinZFrFe)))*(tan(Angulo)*(FinoAire+sin(Angulo)*(MaxZFrFe-MinZFrFe)+MaxYFrFe-
MinYFrFe));

mesh3
ExtFrAire3D=buildlayers(ParteMovilAire,lonInfFrAire*nCapasAireParteMovil,zbound
d=[MinZFrFe,MaxZFrFe],transfo=[fxExtFrAire,fyExtFrAire,fzExtFrAire]);

//Aire inferior a ExtFrAire3D
mesh3
InfFrAire3D=buildlayers(InfFrAire,lonInfFrAire*nCapasAireParteMovil,zbound=[Mi
nZInfFrAire,MaxZInfFrAire]);

//Zona de aire interior a la parte movil
func fxIntFrAire=x;
func fyIntFrAire=MinYFrFe+((y-MinYFrFe)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*(MaxYFrFe-
MinYFrFe+FinoAire);
func fzIntFrAire=MinZFrFe+((z-MinZFrFe)/(MaxZFrFe-MinZFrFe))*((y-
MinYFrFe)/(MaxYFrFe-MinYFrFe))*tan(Angulo)*(MaxYFrFe-MinYFrFe+FinoAire);

mesh3
IntFrAire3D=buildlayers(ParteMovilAire,lonInfFrAire*nCapasAireParteMovil,zbound
d=[MinZFrFe,MaxZFrFe],transfo=[fxIntFrAire,fyIntFrAire,fzIntFrAire]);

//Zona de aire exterior al frente
int lonFrAire=rint((MaxZFrAire-MinZFrAire)/factorMalla*1e3); //Longitud para
mallado en eje z
int [int] lFrAireUp=[0,40]; //Etiqueta 40 para las condiciones de contorno
mesh3
FrAire3D=buildlayers(FrAire,lonFrAire*nCapasAireExt,zbound=[MinZFrAire,MaxZFrA
ire],labelup=lFrAireUp);

//UNION DE TODAS LAS MALLAS DE AIRE
mesh3
Aire3D=IntCuAire3D+ExtCuAire3D+lateralFoAire3D+FoFeAire3D+InfFeAire3D+InfFrAire3D+IntFrAire3D+ExtFrAire3D+SupFrAire3D+InfySupFinoAire3D+lateralFinoAire3D+FoFinoAire3D+FoAire3D+FrAire3D+ExtAire3D;

//Unifico el número de región para la malla de aire
int [int] regAire=[0,nRegAire,8,nRegAire,12,nRegAire];
Aire3D=change(Aire3D,region=regAire);

//Union de todas las mallas en una, la malla del problema
mesh3 Th3D=Hierro3D+Aire3D+Cobre3D;

////////////////////FIN DE LA DEFINICION DE LA
MALLA////////////////////

////////////////////DEFINICION DEL ESPACIO DE ELEMENTOS
FINITOS////////////////////

fespace Ch(Th3D,P03d); //Elementos constantes
fespace Bh(Th3D,P13d); //Grado 1
fespace vh(Th3D,P23d); //Grado 2

Vh ux,vx,uy,vy,viejaux,viejauy; //Vh para el potencial
Bh Bx,By,Bz,nuevaMu,viejaMu; //Bh para el campo magnético

```

```

Ch regiones;//Ch para las regiones, que se identifican por un número

////////////////////FIN DEFINICION ESPACIO ELEMENTOS
FINITOS////////////////////////////////////

////////////////////DEFINICION DE LAS REGIONES////////////////////////////////////
regiones=region; //Recupero el valor de las regiones en mi variable

//Creo funciones para las distintas regiones
func regionHierro = (1*(regiones==nRegFe));
func regionCobre= (1*(regiones==nRegCu));
func regionAire= (1*(regiones==nRegAire));

////////////////////FIN DEFINICION REGIONES////////////////////////////////////

////////////////////DEFINICION DE LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA////////////////////////////////////

//Datos de permeabilidad
real mu0=4e-7*pi; //mu del vacio
real muRelFe=4000; //mu relativa inicial para el hierro

func muInicial=mu0*(regionCobre+regionAire)+muRelFe*mu0*regionHierro;

viejaMu=muInicial; //Guardo el valor inicial para uso posterior

////////////////////FIN DE LA DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE////////////////////////////////////

////////////////////DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE////////////////////////////////////

real AmpVuelta=7500; //Valor de amperios-vuelta del relé

real DensidadCorriente=AmpVuelta/((RadCiExtCu-RadCiIntCu)*(MaxZCiCu-
MinZCiCu)); //Módulo de la densidad de corriente
cout<<"Valor de la densidad corriente->"<<DensidadCorriente<<endl;

//Definicion de las dos componentes no nulas de la densidad de corriente,
describiendo una circunferencia
func
Jx=0*(regionHierro+regionAire)+DensidadCorriente*cos(atan2(x,y))*regionCobre;

func Jy=0*(regionHierro+regionAire)+DensidadCorriente*(-
sin(atan2(x,y)))*regionCobre;

////////////////////FIN DE LA DEFICION DE LA DENSIDAD DE
CORRIENTE////////////////////////////////////

////////////////////RESOLUCION DEL PROBLEMA////////////////////////////////////

//Calculo inicial, con mu en el hierro fija
macro Grad3(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM

//Definicion y solucion de los dos problemas para las dos componentes del
potencial
problem PotencialInix(ux,vx,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/muInicial)*(Grad3(vx)' *Grad3(ux)))
- int3d(Th3D)(Jx*vx)
+ on(40,ux=0);

PotencialInix;

problem PotencialIniY(uy,vy,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/muInicial)*(Grad3(vy)' *Grad3(uy)))

```

```

- int3d(Th3D)(Jy*vy)
+ on(40,uy=0);

PotencialIniY;

//////////CÁLCULO DE B//////////
Bx=-dz(uy);
By=dz(ux);
Bz=dx(uy)-dy(ux);

func ModuloB=sqrt(Bx^2+By^2+Bz^2);

//////////RESOLUCION ITERATIVA DEL PROBLEMA//////////
for (int i=1;i<=maxIter;i++) {

viejaux=ux;//Guardo u para calcular el error
viejauy=uy;

func
calcMu=mu0*(regionCobre+regionAire)+regionHierro*(ModuloB/(0.6744*(exp(4.8665*
ModuloB)+81.5690)));//Funcion de aproximacion de mu
nuevaMu=viejaMu*(1-Avance)+calcMu*Avance; //Calculo usando el valor de mu
anterior
viejaMu=nuevaMu; //Guardo el valor de mu para la siguiente iteracion

//////////RESUELVO EL PROBLEMA CON EL NUEVO VALOR DE
MU//////////
problem PotencialX(ux,vx,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/nuevaMu)*(Grad3(vx)' *Grad3(ux)))
- int3d(Th3D)(Jx*vx)
+ on(40,ux=0);

PotencialX;

problem PotencialY(uy,vy,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/nuevaMu)*(Grad3(vy)' *Grad3(uy)))
- int3d(Th3D)(Jy*vy)
+ on(40,uy=0);

PotencialY;

//////////CÁLCULO DE B//////////
Bx=-dz(uy);
By=dz(ux);
Bz=dx(uy)-dy(ux);

func ModuloB=sqrt(Bx^2+By^2+Bz^2);

//CALCULO Y SACO POR PANTALLA EL ERROR
real ErrorX=int3d(Th3D)(abs(ux-viejaux));
real ErrorY=int3d(Th3D)(abs(uy-viejauy));

real Sumaerror=ErrorX+ErrorY;

cout<<"Iteracion "<<i<<endl;
cout<<"La suma de errores vale "<<Sumaerror<<endl;

//Salgo si el error es suficientemente pequeño
if (Sumaerror<tolerancia)
break;

}

//////////CÁLCULO DEL PAR SOBRE LA PARTE
MÓVIL//////////

```

```

//Calculo directamente sobre mi malla
real Par=(1/mu0)*(int2d(Th3D,90,91,92,93,94,95)((z-MinZFrFe)*(Bx*By*N.x+(By^2-
ModuloB^2/2)*N.y+By*Bz*N.z)-(y-MinYFrFe)*(Bx*Bz*N.x+By*Bz*N.y+(Bz^2-
ModuloB^2/2)*N.z)));
cout<<"Par sobre la parte movil es "<<Par<<endl;
//Calculo del par en la zona de aire alrededor de la parte movil del rele
fespace BhAire(MallaAux3D,P13d);

BhAire BxAire,ByAire,BzAire;

BxAire=Bx;
ByAire=By;
BzAire=Bz;
func ModuloBAire=sqrt(BxAire^2+ByAire^2+BzAire^2);
real ParAire=(1/mu0)*(int2d(MallaAux3D,70,71,72,73,74,75)((z-
MinZFrFe)*(BxAire*ByAire*N.x+(ByAire^2-
ModuloBAire^2/2)*N.y+ByAire*BzAire*N.z)-(y-
MinYFrFe)*(BxAire*BzAire*N.x+ByAire*BzAire*N.y+(BzAire^2-
ModuloBAire^2/2)*N.z)));
cout<<"Par sobre la parte movil tomando el aire que la rodea es
"<<ParAire<<endl;

//////////CÁLCULO DE LA ENERGÍA//////////
//Cálculo de la energía en todo el dominio usando la integral de J*A
real energiaj=0.5*int3d(Th3D) (Jx*ux+Jy*uy);

cout<<"Energia con j= "<<energiaj;

//Calculo las tres componentes de H
Bh Hx=Bx/nuevaMu;
Bh Hy=By/nuevaMu;
Bh Hz=Bz/nuevaMu;

//Cálculo de energía en cada zona usando la intergral de B*H
real energiaHierro=0.5*int3d(Hierro3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz);//Hierro
real energiaAire=0.5*int3d(Aire3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz);//Aire
real energiaCobre=0.5*int3d(Cobre3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz);//Cobre
real Energiatotal=energiaHierro+energiaCobre+energiaAire; //Total
real energiapartemovil=0.5*int3d(FrHierro3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz);

cout<<"\nEnergia con B aire = "<<energiaAire;
cout<<"\nEnergia con B hierro = "<<energiaHierro;
cout<<"\nEnergia con B cobre = "<<energiaCobre;
cout<<"\nEnergia con B total = "<<Energiatotal;
cout<<"\nEnergia parte movil = "<<energiapartemovil;

//////////FIN DE RESOLUCION DEL
PROBLEMA//////////

}

else {
//////////CASO DE QUE EL ÁNGULO SEA 0//////////

//La malla FrAire3D será diferente en este caso, pues la tapa está cerrada
int lonFrAire=rint((MaxZFrAire-(MaxZFrFe+FinoAire))/factorMalla*1e3);
int [int] lFrAireUp=[0,40,5,40];
mesh3
FrAire3D=buildlayers(FrAire,lonFrAire*nCapasAireExt,zbound=[MaxZFrFe+FinoAire,
MaxZFrAire],labelup=lFrAireUp);

//Esta malla solo se crea en caso de que la apertura sea cero
mesh3
FrFinoAire3D=buildlayers(FoFinoAire,lonZFoFinoAire*nCapasFinoAireExt,zbound=[M
axZFrFe,MaxZFrFe+FinoAire]);

```

```

//Uno todas las mallas de aire para este caso
mesh3
Aire3D=IntCuAire3D+ExtCuAire3D+lateralFoAire3D+FoFeAire3D+InfFeAire3D+SupFrAir
e3D+InfySupFinoAire3D+lateralFinoAire3D+FoFinoAire3D+FrFinoAire3D+FoAire3D+FrA
ire3D+ExtAire3D;

int [int] regAire=[0,nRegAire,8,nRegAire,12,nRegAire]; //Unifico el numero de
region
Aire3D=change(Aire3D,region=regAire);

//Union de todas las mallas en una
mesh3 Th3D=Hierro3D+Aire3D+Cobre3D;

//////////////////////////////////FIN DE LA DEFINICION DE LA MALLA//////////////////////////////////

//////////////////////////////////DEFINICION DEL ESPACIO DE ELEMENTOS
FINITOS//////////////////////////////////

fespace Ch(Th3D,P03d);//Elementos constantes
fespace Bh(Th3D,P13d);//Grado 1
fespace vh(Th3D,P23d);//Grado 2

Vh ux,vx,uy,vy,viejauy, viejauy;//Vh para el potencial
Bh Bx,By,Bz, nuevaMu, viejaMu;//Bh para el campo magnético

Ch regiones;//Ch para las regiones, que se identifican por un número entero

//////////////////////////////////FIN DEFINICION ESPACIO ELEMENTOS
FINITOS//////////////////////////////////

//////////////////////////////////DEFINICION DE LAS REGIONES//////////////////////////////////
regiones=region; //Recupero el valor de las regiones en mi variable

//Creo funciones para las distintas regiones
func regionHierro = (1*(regiones==nRegFe));
func regionCobre= (1*(regiones==nRegCu));
func regionAire= (1*(regiones==nRegAire));

//////////////////////////////////FIN DEFINICION REGIONES//////////////////////////////////

//////////////////////////////////DEFINICION DE LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA//////////////////////////////////

//Datos de permeabilidad
real mu0=4e-7*pi; //mu del vacio
real muRelFe=4000; //mu relativa inicial para el hierro

func muInicial=mu0*(regionCobre+regionAire)+muRelFe*mu0*regionHierro;
viejaMu=muInicial; //Guardo el valor inicial para uso posterior

//////////////////////////////////FIN DE LA DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE//////////////////////////////////

//////////////////////////////////DEFINICION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE//////////////////////////////////

real AmpVuelta=7500; //Valor de amperios-vuelta del relé

real DensidadCorriente=AmpVuelta/((RadCiExtCu-RadCiIntCu)*(MaxZCiCu-
MinZCiCu)); //Módulo de la densidad de corriente
cout<<"Valor de la densidad corriente->"<<DensidadCorriente<<endl;

//Definicion de las dos componentes no nulas de la densidad de corriente,
describiendo una circunferencia

```

```

func
Jx=0*(regionHierro+regionAire)+DensidadCorriente*cos(atan2(x,y))*regionCobre;

func Jy=0*(regionHierro+regionAire)+DensidadCorriente*(-
sin(atan2(x,y)))*regionCobre;

////////////////////FIN DE LA DEFICION DE LA DENSIDAD DE
CORRIENTE////////////////////////////////////

////////////////////RESOLUCION DEL PROBLEMA////////////////////////////////////

//Calculo inicial, con mu en el hierro fija
//Defino el gradiente
macro Grad3(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // EOM

//Defincion y solucion de los dos problemas para las dos componentes del
potencial
problem PotencialIniX(ux,vx,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/muInicial)*(Grad3(vx)' *Grad3(ux)))
- int3d(Th3D)(Jx*vx)
+ on(40,ux=0);

PotencialIniX;

problem PotencialIniY(uy,vy,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/muInicial)*(Grad3(vy)' *Grad3(uy)))
- int3d(Th3D)(Jy*vy)
+ on(40,uy=0);

PotencialIniY;

////////////////////CÁLCULO DE B////////////////////////////////////
Bx=-dz(uy);
By=dz(ux);
Bz=dx(uy)-dy(ux);

func ModuloB=sqrt(Bx^2+By^2+Bz^2);

////////////////////RESOLUCION ITERATIVA DEL PROBLEMA////////////////////////////////////
for (int i=1;i<=maxIter;i++) {

viejaux=ux;//Guardo u para calcular el error
viejauy=uy;

func
calcMu=mu0*(regionCobre+regionAire)+regionHierro*(ModuloB/(0.6744*(exp(4.8665*
ModuloB)+81.5690)));//Funcion de aproximacion de mu
nuevaMu=viejaMu*(1-Avance)+calcMu*Avance; //Calculo usando el valor de mu
anterior
viejaMu=nuevaMu; //Guardo el valor de mu para la siguiente iteracion

////////////////////RESUELVO EL PROBLEMA CON EL NUEVO VALOR DE
MU////////////////////////////////////
problem PotencialX(ux,vx,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/nuevaMu)*(Grad3(vx)' *Grad3(ux)))
- int3d(Th3D)(Jx*vx)
+ on(40,ux=0);

PotencialX;

problem PotencialY(uy,vy,solver=CG) =
int3d(Th3D)((1/nuevaMu)*(Grad3(vy)' *Grad3(uy)))
- int3d(Th3D)(Jy*vy)

```

```

+ on(40,uy=0);

PotencialY;

//////////CÁLCULO DE B//////////
Bx=-dz(uy);
By=dz(ux);
Bz=dx(uy)-dy(ux);

func ModuloB=sqrt(Bx^2+By^2+Bz^2);

//CALCULO Y SACO POR PANTALLA EL ERROR
real ErrorX=int3d(Th3D)(abs(ux-viejauX));
real ErrorY=int3d(Th3D)(abs(uy-viejauY));

real Sumaerror=ErrorX+ErrorY;

cout<<"Iteracion "<<i<<endl;
cout<<"La suma de errores vale "<<Sumaerror<<endl;

//Salgo si el error es suficientemente pequeño
if (Sumaerror<tolerancia)
break;

}

//////////CÁLCULO DEL PAR SOBRE LA PARTE
MÓVIL//////////

//Calculo directamente sobre mi malla
real Par=(1/mu0)*(int2d(Th3D,90,91,92,93,94,95)((z-MinZFrFe)*(Bx*By*N.x+(By^2-
ModuloB^2/2)*N.y+By*Bz*N.z)-(y-MinYFrFe)*(Bx*Bz*N.x+By*Bz*N.y+(Bz^2-
ModuloB^2/2)*N.z)));
cout<<"Par sobre la parte movil es "<<Par<<endl;

//Calculo del par en la zona de aire alrededor de la parte movil del rele
fespace BhAire(MallaAux3D,P13d);

BhAire BxAire,ByAire,BZAire;

BxAire=Bx;
ByAire=By;
BZAire=Bz;
func ModuloBAire=sqrt(BxAire^2+ByAire^2+BZAire^2);
real ParAire=(1/mu0)*(int2d(MallaAux3D,70,71,72,73,74,75)((z-
MinZFrFe)*(BxAire*ByAire*N.x+(ByAire^2-
ModuloBAire^2/2)*N.y+ByAire*BZAire*N.z)-(y-
MinYFrFe)*(BxAire*BZAire*N.x+ByAire*BZAire*N.y+(BZAire^2-
ModuloBAire^2/2)*N.z)));
cout<<"Par sobre la parte movil tomando el aire que la rodea es
"<<ParAire<<endl;

//////////CÁLCULO DE LA ENERGÍA//////////
real energiaj=0.5*int3d(Th3D) (Jx*ux+Jy*uy); //Cálculo de la energía en todo
el dominio

cout<<"Energia con j= "<<energiaj;

Bh Hx=Bx/nuevaMu;
Bh Hy=By/nuevaMu;
Bh Hz=Bz/nuevaMu;

//Cálculo de energía en cada zona
real energiaHierro=0.5*int3d(Hierro3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz); //Hierro
real energiaAire=0.5*int3d(Aire3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz); //Aire
real energiaCobre=0.5*int3d(Cobre3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz); //Cobre
real Energiatotal=energiaHierro+energiaCobre+energiaAire; //Total

```

```
real energiapartemovil=0.5*int3d(FrHierro3D) (Bx*Hx+By*Hy+Bz*Hz);

cout<<"\nEnergia con B aire = "<<energiaAire;
cout<<"\nEnergia con B hierro = "<<energiaHierro;
cout<<"\nEnergia con B cobre = "<<energiaCobre;
cout<<"\nEnergia con B total = "<<EnergiaTotal;
cout<<"\nEnergia parte movil = "<<energiapartemovil;
}
////////////////////////////////////FIN DE RESOLUCION DEL
PROBLEMA////////////////////////////////////
```

Anexo IV: Código de Matlab para el ajuste de la curva $\mu - B$

```

clear; clc; format compact; close all
global B H mu murel mu0

%Valores a ajustar
B=[0 0.75 0.95 1.1 1.2 1.3 1.45 1.6 1.75 1.85];
H=[mu0 80 120 200 300 500 1000 4000 10000 19000];

mu0=4e-7*pi ;%Permeabilidad en el vacío

mu=B./H; %Cálculo de la permeabilidad

murel=mu/mu0; %Paso a mu relativa

fx = 'OF_nl_prog';
C0 = [0.65 4.7 80] %Condiciones de partida
[C, f, EF, out] = fminsearch(fx, C0) %Busco un mínimo

%Representaciones del punto de partida y los datos
murel2_0 = (B./((C0(1)*(exp(C0(2)*B)+C0(3)))))/mu0;
plot(B, murel2_0, 'r-.^', B, murel, ':o')
title ('Datos y punto de partida')
xlabel('B(T)')
ylabel('mu relativa')
legend('Punto de partida', 'Datos')
grid on

%Representación del ajuste y los datos
figure
murel2 = (B./((C(1)*(exp(C(2)*B)+C(3)))))/mu0;
plot(B, murel, '-o', B, murel2, 'r-.^')

title ('Datos y Ajuste')
xlabel('B(T)')
ylabel('mu relativa')
legend('Datos', 'Ajuste')
grid on

function U = OF_nl_prog(C)
global B H murel mu0

murel2 = (B./((C(1)*(exp(C(2)*B)+C(3)))))/mu0;
U = norm((murel - murel2)/murel, 1); %Función a minimizar es el error
relativo

```