

## Análisis cualitativo del flujo fásico de un sistema Manev en un sistema de referencia rotante.

E. S. Jiménez, M. C. Balsas and J. A. Vives

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (UPCT)a

Avenida Dr. Fleming s/n

Antiguo Edificio del Hospital de Marina. 30202-Cartagena (Murcia)

E-mail: [elena.jimenez@upct.es](mailto:elena.jimenez@upct.es), [mcarmen.balsas@upct.es](mailto:mcarmen.balsas@upct.es), [juanantonio.vives@upct.es](mailto:juanantonio.vives@upct.es).

**Resumen.** *En este trabajo se describe el espacio de fases global de un sistema Manev en un sistema de referencia rotante. Describimos la dinámica hamiltoniana en las fibras donde el vector del momento angular total es constante, en ciertas variedades de movimiento que son invariantes. Finalmente, usando el teorema de Liouville-Arnold y un estudio particular de la aplicación momento en sus puntos críticos, obtenemos una completa clasificación de los diferentes conjuntos invariantes del espacio fásico. Los resultados de este trabajo pueden aplicarse en el estudio de la precesión de Mercurio, de manera que se usa mecánica clásica en lugar de utilizar mecánica relativista.*

### 1 Introducción

Sabemos por las leyes de Kepler que, todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, algunas de las cuales son prácticamente circulares. En el caso de Mercurio debido a la gran excentricidad de su órbita, lo que ocurre es que ésta clipse es muy pronunciada. La perturbación originada por el resto de los planetas del Sistema Solar hace que el perihelio, punto de la órbita del planeta que se encuentra más cercano al Sol, se mueva unos 43 segundos de arco por siglo. Entre 1924 y 1930, G. Manev [4] estudió la corrección al potencial atractivo newtoniano del tipo  $v = \gamma/r - \varepsilon/(r^2)$ , donde  $\gamma = G(m_1, m_2)$ , ( $G$  es la constante gravitatoria,  $m_1$  y  $m_2$  las masas de dos cuerpos que se atraen mutuamente y  $r$  la distancia que hay entre ellos). Lo que se pretende en este trabajo es dar un modo alternativo de estudiar la precesión de Mercurio usando mecánica clásica en lugar de mecánica relativista.

Consideremos ahora el objeto de nuestro estudio. En algunas variedades invariantes del movimiento, tenemos el siguiente hamiltoniano  $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \alpha p_\theta - \frac{1}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

donde  $-1/r + \beta/r^2$ , es el potencial de Manev y el término  $\alpha p_\theta$  añade a la dinámica del problema de Kepler el efecto asociado a la rotación del sistema de referencia. Los parámetros  $\alpha > 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  son dos constantes estructurales del sistema y  $E = \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ , es el espacio fásico.

Con idea de hacer un estudio cualitativo de la dinámica asociada al sistema hamiltoniano, de un modo parecido al que se hace en [2] y [3], consideramos los siguientes conjuntos:

$$E_h = H^{-1}(h) = \left\{ (r, \theta, p_r, p_\theta) \in E : g(r, p_r, p_\theta) = h \right\},$$

$$J_k = \left\{ z = (r, \theta, p_r, p_\theta) \in E : p_\theta = k \right\}, I_{hk} = E_h \cap J_k$$

donde  $E_h \approx g^{-1}(h)$  y  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $g(r, p_r, p_\theta) = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$  con  $g^{-1}(h)$  una superficie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , denominada superficie de energía. Estos conjuntos son invariantes para el flujo asociado al hamiltoniano, siendo  $H$  y  $p_\theta$  dos integrales primeras del movimiento, independientes y en involución.

Los principales resultados que se obtienen en este trabajo son: la descripción de la foliación del espacio fásico  $E$  por medio de los conjuntos de energía constante  $E_h$ ; la de los conjuntos  $E_h$  por medio de los conjuntos invariantes  $I_{hk}$  y por último la foliación de  $I_{hk}$  por medio del flujo del sistema hamiltoniano.

Estas foliaciones nos darán una buena descripción del espacio de fases cuando  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  para los diferentes valores de  $\alpha > 0$  y  $\beta$ .

La herramienta principal de este estudio es el teorema de Liouville-Arnold (véase [1] para más detalles). Éste nos permite estudiar la aplicación momento  $(H, p_\theta): E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  en los valores regulares de ella. Cuando no estemos en condiciones de usar el teorema de Liouville-Arnold se hará un estudio particular de los conjuntos  $I_{hk}$  para cada uno de los

valores críticos  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  de la aplicación momento. Estos valores corresponderán, bien a los puntos de equilibrio de  $H$ , bien a los valores donde  $p_\theta = k$  es un máximo o un mínimo de la superficie de energía.

## 2 Función potencial. Regiones de Hill.

Las regiones de Hill están completamente caracterizadas por medio del potencial ampliado. El hamiltoniano en coordenadas polares-simplécticas puede escribirse como:

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} (p_\theta + \alpha r^2)^2 \right) + v,$$

donde  $v = -\alpha r^2 / 2 - 1/r + \beta / r^2$  es el potencial ampliado.

Las regiones de Hill son aquellas regiones del espacio fásico donde existe movimiento real y están determinadas por medio de los puntos críticos de  $v$ , que corresponden con las raíces reales positivas de la ecuación polinómica  $\alpha^2 r^4 + r - 2\beta = 0$ .

Usando el algoritmo de Sturm obtenemos la siguiente clasificación para la existencia de valores críticos (c.v.), estos dependen de los diferentes valores de  $f = 2048\alpha^2\beta^3 - 27$  y  $\beta$ : Si  $\beta > 0$  y  $f > 0$ , tenemos 0 c.v.; si  $\beta > 0$  y  $f = 0$ , tenemos 1 c.v.; si  $\beta > 0$  y  $f < 0$ , 2 c.v.; y si  $\beta \leq 0$ , 1 c.v.

Debido a la falta de espacio nos centraremos en el caso más relevante, esto es, cuando  $\beta \leq 0$ .

Para cada  $h \in \mathbb{R}$ , definimos las regiones de Hill  $R(h)$  de  $I_h$  por  $R(h) = \pi(I_h)$ , donde  $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1$  es la proyección natural. Así pues, tenemos que  $R(h) = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : v \leq h\}$ . Se puede observar que:

$$R(h) \approx \{r \in \mathbb{R}^+ : -\alpha^2 r^2 / 2 - 1/r + \beta / r^2 \leq h\} \times S^1$$

donde  $\approx$  denota el difeomorfismo entre dos variedades diferenciables.

## 3 Topología de las regiones de Hill

De ahora en adelante los valores del potencial ampliado, en cada uno de sus puntos críticos  $r_i$ , serán denotados por  $h_i = v(r_i), (i = 1, 2, 3)$ . Los valores  $A_j, (j = 1, \dots, 7)$ , corresponderán a los puntos de intersección de la gráfica del potencial y la recta  $v = h$ .

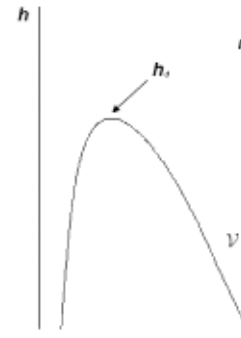


Fig. 1: Gráfica del potencial ampliado para  $\beta \leq 0$ , con  $h_1$  el punto crítico de  $v$ .

Tabla 1: Clasificación topológica de las regiones de Hill,  $R(h)$ , para  $\beta \leq 0$  y  $h_1$  punto crítico de  $v$ .

$\beta \leq 0$ (véase Fig. 1)	
$h_1 \leq h$	$R(h) \approx (0, +\infty) \times S^1$
$h < h_1$	$R(h) \approx [(0, A_1] \cup [A_2, +\infty)] \times S^1$

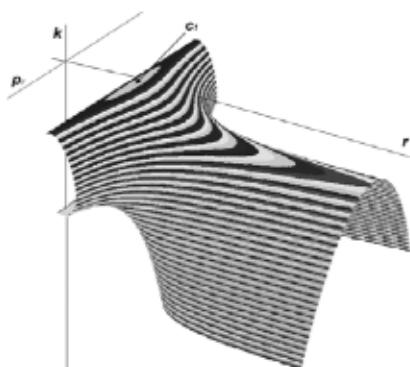
Con idea de hacer más claro el estudio de la topología de las regiones de Hill se presenta la siguiente figura: (véase Fig. 1)

Usando los resultados que se han obtenido previamente, la clasificación topológica de las regiones de Hill es la siguiente: (véase Tabla 1)

## 4 Estudio cualitativo del flujo hamiltoniano.

En esta sección estudiamos la topología de las variedades invariantes  $H^{-1}(h) = E_h$  e  $I_{hk}$ . Para poder dar esta clasificación necesitamos introducir la siguiente notación e incluir algunos nuevos resultados.

Nótese que  $z_e = (r_e, \theta_e, p_r, p_\theta) \in E$  es un punto de equilibrio del flujo hamiltoniano si y sólo si  $\tilde{z}_e = (r_e, \theta_e)$  es un punto crítico del potencial ampliado. Más aún,  $\pi(z_e) = \tilde{z}_e$ . Es por esta razón que cuando  $\beta > 0$  y  $f > 0$  el hamiltoniano no tiene equilibrios; si  $\beta > 0$  y  $f = 0$  el hamiltoniano tiene una familia de puntos de equilibrios; si  $\beta > 0$  y  $f < 0$  el hamiltoniano tiene dos. Finalmente, cuando  $\beta \leq 0$  el hamiltoniano tiene una única familia de puntos de equilibrios. Así pues, podemos denotar a los valores del hamiltoniano  $H$  en cada uno de sus puntos de equilibrio de la misma manera que denotábamos el valor del potencial ampliado en cada uno de sus puntos críticos, es decir, por  $h_i$ , esto es  $h_i = H(r_i, \theta_i, 0, p_\theta), (i = 1, 2, 3, 4)$ .



**Fig. 2:** Dibujo de la superficie  $g^{-1}(h) = E_h / S^1$  para  $\beta \leq 0$  con  $h_2 < h$  (punto de equilibrio de  $H$ ),  $k = p_0$  y  $c_1$  el valor de  $k$  correspondiente al extremo  $Q_1$ .

**Tabla 2:** Clasificación topológica para  $E_h$  e  $I_{hk}$  para  $\beta \leq 0$ , donde  $h_2$  es el punto de equilibrio de  $H$ .

$\beta \leq 0$			
$h$	$E_h$	$I_{hk}$	
$h_1 < h$	$S^3 \setminus \{S^1 \cup S^1\}$ (véase Fig. 2)	$\emptyset$	$c_1 < k$
		$S^1$	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$a_1 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$k \leq a_1$
$h = h_2$	$Y$	$\emptyset$	$c_1 < k$
		$S^1$	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$a_1 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$a_2 < k \leq a_1$
		$S^1 \times S^1$	$a_3 < k \leq a_2$
		$S^1 \times \square$	$k \leq a_3$
$h < h_1$	$\{S^3 \setminus S^1\} \cup \{S^3 \setminus S^1\}$	$\emptyset$	$c_1 < k$
		$S^1$	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$a_1 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$a_2 < k \leq a_1$
		$S^1 \times S^1$	$c_2 < k \leq a_2$
		$\emptyset$	$c_3 < k \leq c_2$
		$S^1$	$k = c_3$
		$S^1 \times S^1$	$a_3 < k < c_3$
$S^1 \times \square$	$k \leq a_3$		

Usando el teorema de la función implícita se puede ver que los extremos de la superficie de energía son las raíces reales de la siguiente ecuación  $2\alpha k^3 - 2hk^2 + 4\alpha\beta k - 4\beta h = 0$ . Estas raíces las llama-

mos  $c_j$ , y corresponden a los extremos de la superficie de energía que denotamos por  $Q_j, (j=1,2,3)$ . Las raíces reales respecto de  $k, a_i, (i=1,2,3)$  de las ecuaciones  $h - \alpha k = 0$  y  $2\beta + k^2 = 0$ , se obtienen aplicando el algoritmo de Sturm a la ecuación que nos da los extremos de la superficie de energía y nos delimitan aquellas regiones en las que están o no acotadas las órbitas.

Finalmente,  $S^{n-1}$  con  $n > 1$ , es la esfera de  $\square^n$  e  $Y$  es la unión de dos abiertos sólidos, identificándose punto a punto con dos círculos de cada toro que no pueden ser contraídos a un solo punto dentro del correspondiente toro (véase [3] para más información).

Veamos una de las figuras que corresponde a la superficie de energía: (véase Fig. 2)

Se obtiene la siguiente clasificación topológica para  $E_h$  e  $I_{hk}$  : (véase Tabla 2)

Para el caso en que  $\beta = 0$  tenemos el problema de Kepler en un sistema de referencia rotante.

## 5 Conclusiones

En este trabajo hemos considerado sistemas Manev en un sistema de referencia rotante. Se ha descrito la dinámica hamiltoniana en las variedades invariantes  $E_h, J_k$  e  $I_{hk}$ , por medio del teorema de Liouville-Arnold y algunas técnicas específicas. Finalmente, se ha obtenido una completa clasificación topológica del espacio de fases asociado al sistema.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la UPCT.

## Referencias

- [1] V. I. Arnold et al. "Systems III (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)". Springer Verlag, Berlin. (1978).
- [2] M. C. Balsas, E. S. Jiménez, J. A. Vera. "The Kepler Problem in Rotating Reference Frames: Topological Study of the Phase Flow" Conference Proceedings 963, 1146--1449. (2007).
- [3] J. Llibre et al. "Phase portraits of the two-body problem with Manev potential". J. of Physics A: Mathematical and General 34, 919--1934. (2001)
- [4] G. Manev. "Le gravitation et le principe de l'egalite de l'action et de la reaction". La, Comptes Rendues 178, 2159--2161. (1924).