

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



**Proyecto Fin de Carrera**

# **Caracterización y Sincronización de Láseres de Semiconductor Llevados a Comportamiento Caótico**



AUTOR: Javier Sáez Amorós  
DIRECTORES: Cristian Antonelli  
José Víctor Rodríguez Rodríguez  
Antonio Mecozzi

07 / 2011



<b>Autor</b>	Javier Sáez Amorós
<b>E-mail del Autor</b>	<a href="mailto:groo_ct@hotmail.com">groo_ct@hotmail.com</a>
<b>Directores</b>	Cristian Antonelli, José Víctor Rodríguez Rodríguez, Antonio Mecozzi.
<b>E-mail del Director</b>	jvictor.rodriguez@upct.es
<b>Título del PFC</b>	Caracterización y sincronización de láseres de semiconductor llevados a comportamiento caótico.
<b>Descriptores</b>	Caos sincronizado, Realimentación óptica.
<p><b>Resumen</b></p> <p>En este proyecto se presenta la caracterización de un sistema de láseres en configuración maestro-esclavo, llevados a comportamiento caótico mediante realimentación óptica y se estudiarán sus diagramas de sincronización. Se analizarán los efectos de los parámetros más importantes, tales como la realimentación, el <i>detuning</i> o la posición del espejo y su influencia en la correcta sincronización. Además se hará una rápida referencia a otros estudios y la posibilidad de una encriptación de datos en una portadora caótica.</p>	
<b>Titulación</b>	Ingeniería de Telecomunicación.
<b>Intensificación</b>	Sistemas y Redes de Telecomunicaciones.
<b>Departamento</b>	Teoría de la Señal y las Comunicaciones
<b>Fecha de Presentación</b>	Julio de 2011

## Índice

1.	Introducción .....	3
2.	Historia .....	7
3.	El láser de semiconductor .....	10
3.1	Cómo emite luz un láser. ....	11
3.2	Material semiconductor. ....	11
3.3	Inversión de población. ....	13
4.	Justificación del método de resolución. ....	14
5.	Caos en el emisor. ....	21
5.1	Efectos de la realimentación óptica. ....	24
6.	Sincronización caótica. ....	28
6.1	Modelo del sistema. ....	29
6.2	Ejemplos numéricos. ....	31
6.2.1	En función del acoplo. ....	36
6.2.2	En función del detuning. ....	40
6.2.3	En función de la realimentación. ....	44
7.	Futuras aplicaciones. Encriptación y decriptación. ....	47
8.	Conclusiones. ....	49
9.	Agradecimientos. ....	50
10.	Bibliografía. ....	51

## 1. Introducción

Actualmente, el mundo es testigo de una demanda continuamente creciente de los servicios de comunicación. Esto se acentúa aún más por el rápido incremento en las capacidades de transmisión y conmutación de todo tipo de redes. Dos de los aspectos más relevantes de dichas redes son la privacidad y la seguridad. Aunque la codificación por software ha probado su utilidad en la codificación de datos, el continuo incremento en la velocidad de cómputo amenaza la seguridad de dicho procedimiento. Una contribución para resolver este problema es añadiendo una codificación a nivel físico utilizando portadoras caóticas generadas por componentes operando en régimen no lineal.

Los láseres de semiconductor son candidatos ideales para la realización de estos sistemas transmisores y receptores no lineales ya que son dispositivos inherentemente no lineales que bajo ciertas condiciones de operación exhiben comportamientos dinámicos no lineales asociados con, p. ej., pulsaciones rápidas e irregulares de potencia óptica o saltos en la longitud de onda. En los esquemas operacionales de comunicación existentes hoy en día, estos tipos de comportamiento no son deseables y muchas veces se requieren esfuerzos tremendos para evitarlos. Nuestro objetivo en particular consiste en beneficiarnos específicamente de dichos comportamientos, normalmente llamados caos óptico.

La esencia de la comunicación por caos óptico reside en el hecho de que dos láseres caóticos separados espacialmente, en nuestro caso diodos láser de semiconductor, pueden sincronizarse entre sí. Esta sincronización significa que la evolución irregular con el tiempo del láser emisor, ya sea en potencia óptica  $P$  o en longitud de onda, puede reproducirse perfectamente en el láser receptor.

Una vez ambos láseres se han sincronizado mediante un método apropiado, podemos usar la salida caótica del láser transmisor como portadora en la cual se codifica el mensaje. El otro láser, en recepción, permite extraer dicho mensaje. La decodificación se basa en el fenómeno no lineal de sincronización caótica entre emisor y receptor. La clave reside en el hecho de que el receptor se sincroniza con las oscilaciones caóticas del emisor (la portadora) eliminando el mensaje codificado. De este modo, comparando la entrada (portadora + mensaje) y la salida (portadora sola) en el receptor se puede extraer el mensaje.

La clave para una sincronización efectiva (y a la postre, la decodificación) reside en el uso de componentes muy similares en ambos sistemas caóticos, con parámetros y condiciones de operación casi idénticos. La decodificación sin el receptor apropiado es algo muy difícil de conseguir, debido a las altas frecuencias implicadas y el gran número de grados dinámicos de libertad de la portadora caótica. Merece la pena destacar que las

portadoras caóticas proporcionan en láseres de semiconductor un amplio espectro (del orden de GHz) donde se oculta el mensaje. Las propiedades de estas señales portadoras, y el modo en el que se codifica el mensaje, son tales que es imposible recuperarlo mediante procesos de filtrado lineal. Los correladores y los análisis en el dominio de la frecuencia también fallarían.

La idea de una comunicación usando transmisores y receptores que operan en el régimen dinámico no-lineal ha atraído recientemente la atención de numerosos investigadores. Se han propuesto diferentes esquemas de sincronización caótica con sus respectivas aplicaciones en comunicación codificada. Esto se estudió por primera vez utilizando circuitos electrónicos [1] y más recientemente propuesta en estado sólido [2], láseres de fibra en anillo [3], láseres de semiconductor [4,5] y de microchip [6].

Las señales caóticas poseen características similares a las usadas en las comunicaciones de ancho espectro y sus campos relacionados, donde se oculta la información con códigos complejos o señales ruidosas. Hasta hoy, los métodos para generar señales caóticas normalmente han usado circuitos eléctricos simples. Sin embargo, este acercamiento ha mostrado dos problemas principales. Primero, la mayoría de los circuitos se habían diseñado en el rango de audio con anchos de banda para los mensajes limitados sobre los 10 kHz. Aunque sería posible contemplar circuitos de RF, es complicado conseguir las frecuencias del orden de GHz requeridas en muchos canales de comunicación. Además, la mayoría de redes de comunicación de alta velocidad ya instaladas están basadas en fibra óptica. Por tanto, es altamente deseable un esquema de comunicación directamente basado en una portadora óptica. El segundo problema fundamental de una portadora caótica generada electrónicamente reside en su baja dimensionalidad, que resulta en un bajo nivel de confidencialidad cuando se aplica a transmisiones de comunicación seguras. Ambos aspectos se superan mediante el uso propuesto de un caos altamente dimensional generado por láseres sujetos a realimentación, ya sea enteramente óptica o electro-óptica.

Estudios recientes han mostrado la viabilidad de la sincronización del llamado hipercaos, esto es, atractores con un número enorme de grados de libertad, en sistemas ópticos. Sistemas de dos láseres de semiconductor sujetos a realimentación óptica y unidos mediante fibra óptica ya han sido estudiados numéricamente en las referencias [4,5]. Ambos láseres se acoplaron como en la Fig 15 (a), el esquema que se seguirá durante el resto del estudio. El láser maestro (ML) opera en régimen de colapso de coherencia debido a la realimentación óptica, con lo que la potencia de salida oscila caóticamente. El mensaje a encriptar se puede sumar a la salida del ML (enmascaramiento caótico) o incluido en la corriente inyectada (conmutación caótica). El láser esclavo (SL) es similar al ML y está sujeto a la misma realimentación. Cuando el ML y el SL no están conectados, sus potencias de salida no están correladas y el diagrama de sincronización (una gráfica de la salida del ML contra la del SL) exhibe una nube de puntos, como se mostrará más

adelante. Sin embargo, cuando una pequeña cantidad de luz proveniente del ML se inyecta en el SL, los dos subsistemas son capaces de sincronizarse y se obtiene una línea prácticamente de  $45^\circ$  en el diagrama de sincronización. Como ya se ha mencionado, el SL se sincroniza con la portadora del ML filtrando el mensaje. Bajo estas condiciones, el mensaje se puede recuperar procesando la entrada y la salida del SL.

Otra manera común de producir una salida caótica en un láser de semiconductor es mediante inyección óptica. La inyección óptica permite distintas formas de caos y otros tipos de inestabilidades. La sincronización de láseres de semiconductor con una señal inyectada y operando en régimen caótico ha sido estudiada recientemente por Chen y Liu, aunque la idea original la propuso V. Annovazzi y colaboradores, encriptar información. En su sistema, el transmisor se va alternando entre dos órbitas caóticas diferentes modulando la corriente de inyección del láser con el flujo de bits a transmitir. La decodificación en el receptor se consigue con dos réplicas del emisor: la primera está sesgada con una corriente ( $J_0$ ) correspondiente al bit "0" y la segunda con otra ( $J_1$ ) correspondiente al bit "1". La señal recibida se envía a ambos decodificadores, aunque sólo es capaz de sincronizarse la que posee la corriente de bombeo correspondiente al bit transmitido.

La encriptación de información dentro de una portadora caótica ha sido demostrada experimentalmente por van Winggren y Roy utilizando dos láseres de fibra dopada con erbio en anillo (EDFRL) muy similares. Un acoplador inyecta el mensaje a encriptar en el primer EDFRL. La salida se extrae mediante otro acoplador y se dirige al segundo EDFRL (el receptor). Ambos EDFRL en el emisor y en el receptor se fabricaron para ser tan idénticos como fuera posible. Mediante un proceso de decodificación apropiado, fueron capaces de codificar/decodificar un mensaje digital a tasas de más de 250 Mbit/s. Además se mostró la posibilidad de transmitir el mensaje en más de 35 km de fibra óptica.

Casi al mismo tiempo, J. P. Goedgebuer y colaboradores propusieron y demostraron experimentalmente una aproximación diferente a la codificación de información. Propusieron un método para encriptar una señal dentro de las fluctuaciones altamente dimensionales de la longitud de onda de la realimentación retardada proveniente de un láser sintonizable. La novedad de su idea fue no solamente usar por primera vez el caos en la longitud de onda, sino también se incluyó una realimentación electro-óptica no lineal para generar ese caos. Esta realimentación electro-óptica no lineal garantiza una elevada dimensión en el caos generado (entre 100 y 1000), también llamado hipercaos, muy importante para la seguridad del mensaje encriptado. También lograron la codificación/decodificación de una senoide, aunque a tasas bastante bajas (kHz).

Un año después, Sivaprakasam y Shore demostraron experimentalmente la sincronización entre dos diodos láser de semiconductor de cavidad externa. Encontraron un acoplamiento óptico entre el ML y el SL con la que fueron capaces de obtener una buena

sincronización. En un artículo posterior mostraron la posibilidad de codificar/decodificar una señal cuadrada, aunque a tasas bastante bajas (kHz).

La primera demostración de codificación/decodificación de señales de orden de GHz en una portadora caótica fue realizada por I. Fischer y colaboradores. Utilizaron un esquema muy similar al de la Fig. 3 solo que se eliminó la realimentación del láser esclavo, por lo que operaba bajo una onda continua. Aunque se podría pensar que este sistema no tiene mucha utilidad para codificar y decodificar información, lograron demostrar que el receptor se sincronizaba con la salida caótica del transmisor, eliminando el mensaje codificado. Operando con la entrada y la salida del receptor, fueron capaces de reconstruir la señal codificada.

Para este estudio consideramos un modelo de sincronización caótica y comunicaciones digitales utilizando como portadora la salida caótica de un láser de semiconductor monomodo sujeto a realimentación óptica externa (láser maestro, ML). Codificaremos un mensaje digital en la salida caótica del láser maestro ya sea mediante una atenuación de la portadora dependiente con el tiempo (enmascaramiento caótico), ya sea modulando ligeramente la corriente inyectada (conmutación caótica). Después de la codificación, la portadora que contiene el mensaje se introduce en el receptor. Por simplicidad, consideraremos una conexión en espacio libre, aunque las transmisiones por fibra óptica con salto de dispersión se ha demostrado que también son viables. El receptor, el láser esclavo (SL), también es un láser de semiconductor monomodo con realimentación externa, con parámetros similares a los del ML y que opera bajo condiciones similares. Ambos láseres muestran un comportamiento caótico con diferentes evoluciones con el tiempo si operan independientemente, esto es, sin acoplamiento entre sí. Incluso sujetos a condiciones iniciales idénticas, la presencia de ruido de emisión espontánea hace que ambas evoluciones con el tiempo se separen. Sin embargo, si una pequeña cantidad de la potencia del ML se inyecta en el SL, son capaces de sincronizarse. Esta sincronización nos permitirá encriptar mensajes en la salida caótica del emisor.

El cuerpo del proyecto está organizado de la siguiente manera. Primero describimos el modelo que utilizamos para el transmisor y la realimentación óptica que conllevará el caos. Después presentamos resultados numéricos tanto para los efectos en realimentación del emisor como para la sincronización de emisor y receptor. Por último, ofrecemos un resumen las conclusiones del proyecto y sus aplicaciones.

## 2. Historia

En 1963 Lorenz investigaba los comportamientos de fluidos convectivos como un modelo para los flujos atmosféricos y demostró que los sistemas no lineales descritos por tres variables podían presentar dinámicas caóticas. Por supuesto, muchos investigadores conocían la existencia de las dinámicas complejas en sistemas bien definidos desde el principio de los años 1900. Henri Poincaré (1913), un destacado matemático francés, fue el primero en describir una “sensibilidad a las condiciones iniciales”. En su libro, escribió que “puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan otras mucho mayores en los fenómenos finales. Un pequeño error en aquéllas producirá un error enorme en los últimos. La predicción se hace imposible, y aparece por tanto el fenómeno fortuito.”

No obstante, la investigación moderna sobre el caos comenzó con el estudio de las dinámicas complejas e irregulares en sistemas no lineales elaborado por Lorenz. El caos no es sólo la descripción de un punto de vista distinto de los fenómenos no lineales sino que es en sí mismo una nueva física. El caos es un fenómeno de variaciones irregulares en las salidas de sistemas derivadas de modelos que están descritos por un grupo de ecuaciones deterministas. Debemos distinguir entre “caos” y observaciones de sucesos “aleatorio”, tales como el lanzamiento de una moneda, ya que el caos se genera de acuerdo a un orden determinista, concretamente, las dinámicas caóticas se refieren a un desarrollo determinista con un resultado caótico. El sistema evoluciona de una forma determinista y el estado actual del sistema depende del estado anterior de una forma estrictamente determinista, pero aún así la salida del sistema muestra variaciones aleatorias. Esto se diferencia de un sistema aleatorio donde la observación actual no tiene ningún tipo de conexión con la anterior. A diferencia de los modelos deterministas, no podemos prever una salida futura, ya que el caos es muy sensible a las condiciones iniciales, como apuntó Poincaré, y un sistema se comporta de una forma completamente diferente otro aunque la diferencia de sus estados iniciales sea muy pequeña.

Los sistemas con comportamiento caótico se caracterizan por la sensibilidad a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales. Dicho de otra manera, una pequeña variación en las condiciones iniciales del proceso conduce a diferencias abismales al final de dicho proceso. Para entenderlo acudamos a un símil. La trayectoria de una piedra de un determinado tamaño precipitándose hacia el suelo en caída libre, no es muy diferente de la trayectoria de otra piedra idéntica que también se precipitara hacia el suelo desde una posición inicial prácticamente idéntica a la anterior. Incluso si variáramos ligeramente el tamaño de la piedra o la lanzáramos de más altura, al final del proceso no habría muchas diferencias entre una piedra y otra. En cambio si en lugar de piedras repitiéramos el proceso con dos hojas de un mismo árbol, aunque tuvieran la misma forma, superficie y



masa, a buen seguro que las trayectorias que seguirían ambas serían muy diferentes y muy difíciles de predecir.

No encontraríamos dos hojas que repitieran exactamente la misma trayectoria hasta llegar al suelo. Y ello es, por la multitud de elementos aleatorios que confluyen en este caso (remolinos de viento, turbulencias, etc.). De hecho, la separación entre dos trayectorias que empezaran en puntos cercanos aumentaría exponencialmente con el tiempo.

El caos, por tanto, resulta útil para camuflar un mensaje, puesto que prácticamente nadie será capaz de reproducir el mismo caos. En el caso de una onda caótica de láser semiconductor, un posible detector espía debería poder reproducir fielmente esa onda caótica y, después, detectar sobre ella las irregularidades que desvelarían la presencia de un mensaje oculto. Al no poder conocer las condiciones iniciales exactas del caos generado, la tarea se hace prácticamente imposible. ¿Cómo rescatar el mensaje del interior del caos? El caos resulta útil para camuflar el mensaje pero, como es lógico, antes se necesitaba encontrar la fórmula para que un receptor autorizado pudiera rescatar el mensaje oculto. La única manera de recibir el mensaje es contar con un láser idéntico al que lo ha emitido y sincronizarse con él.

El caos siempre viene de la mano de la no linealidad. La no linealidad en un sistema significa que los valores medidos de las propiedades del sistema dependen de una manera complicada de las condiciones del estado anterior. La propiedad de no linealidad en un sistema no siempre garantiza la aparición de caos, pero se requiere un cierto grado de no linealidad para la realización de dinámicas caóticas.

En óptica también es posible encontrar sistemas no lineales. Muchos materiales y dispositivos ópticos muestran una respuesta no lineal al campo óptico y, por tanto, son candidatos a ser elementos no lineales en un sistema caótico. Uno de estos dispositivos es el láser. Como los láseres son en sí mismos sistemas no lineales típicamente caracterizados por tres variables: campo, polarización de la materia, e inversión de población, también son candidatos para los sistemas caóticos. De hecho, a mediados de los 70, Haken (1975) demostró que los láseres son sistemas no lineales similares a los del modelo de Lorenz y mostró dinámicas caóticas en su potencia de salida. Asumió un modelo en anillo y consideró átomos de dos niveles para el medio del láser. Aunque no siempre se describen con ese modelo, las aproximaciones son razonables para la mayoría de los láseres. A partir de entonces, las ecuaciones del láser que se describen mediante ecuaciones no lineales con tres variables, se llaman ecuaciones de Lorenz-Haken por sus contribuidores. No obstante, los láseres ordinarios no exhibían un comportamiento caótico y sólo unos pocos láseres con malas condiciones de cavidad mostraban dinámicas

caóticas. Mientras tanto, se demostraron teóricamente comportamientos caóticos en sistemas de láseres en anillo (Ikeda 1979). Los primeros en observar caos Lorenz-Haken en láseres  $\text{NH}_3$  de infrarrojos fueron Weiss y Brocke (1986).

Contrario a la predicción de Haken, los láseres ordinarios son sistemas estables y sólo unos cuantos sistemas de láseres de infrarrojos muestran comportamientos caóticos en su potencia de salida. Arrecchi (1984) investigó sistemas de láseres desde el punto de vista de los tiempos de relajación característicos de sus tres variables y catalogó los láseres en tres clases. Según su clasificación, uno o dos de los tiempos de relajación son en general muy rápidos en comparación con las otras escalas de tiempo, así que la mayoría de láseres se describen mediante ecuaciones con una o dos variables. Así, son sistemas estables que se catalogan en láseres de clase A y B. Sólo los láseres de clase C poseen una descripción completa de sus ecuaciones con tres variables y pueden mostrar dinámicas caóticas. Sin embargo, los láseres de clase A y B pueden exhibir dinámicas caóticas cuando se introducen uno o más grados de libertad a los sistemas del láser.

Los láseres de clase B se caracterizan por unas ecuaciones para el campo y la inversión de población, y se pueden desestabilizar fácilmente con un grado adicional de libertad como perturbación externa. Por ejemplo, los láseres de estado sólido, los láseres de fibra y los láseres de  $\text{CO}_2$  están catalogados como de clase B, mostrando oscilaciones inestables por inyección óptica externa o modulación de algunos parámetros accesibles. Los **láseres de semiconductor**, que también están clasificados como de clase B y son los utilizados en este proyecto, también son muy sensibles a la realimentación óptica auto-inducida, inyección óptica de otros láseres, realimentación optoelectrónica, y modulación mediante corriente inyectada.

A continuación veremos una introducción a los láseres de semiconductor, su definición y su funcionamiento.

### 3. El Láser de Semiconductor

Los láseres han redefinido el mundo científico, el comercio y la vida diaria a lo largo del último siglo. Hoy en día se pueden encontrar láseres en cualquier lugar, desde laboratorios científicos hasta supermercados; así pues es muy interesante su exploración e investigación como progreso en la sociedad tecnológica. Los láseres de estado sólido, de semiconductor y de gas son sólo unos pocos de la enorme variedad existente hoy día en el mercado. Cada uno de ellos es importante para distintas aplicaciones en función de los resultados deseados y el coste. En este proyecto de investigación se examinarán las propiedades de los láseres de semiconductor por su versatilidad y su bajo coste.

Primero, es importante entender qué es un láser y por qué es una fuente deseable de luz. Láser es el acrónimo de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (o Amplificación de Luz por Emisión Estimulada de Radiación). Como tal, un láser amplifica la luz para crear la emisión deseada. La luz es amplificada gracias a las propiedades de las uniones p-n (Fig. 1), los pares de electrón-hueco, la ganancia óptica, y la inversión de población. A partir de aquí, se explorarán las características caóticas del láser. Ser capaz de entender la naturaleza caótica de un láser nos llevará a estimas precisas de sus emisiones de luz, que son necesarias a la hora de estudiar sistemas más complejos con realimentación y acoplamiento.

### 3.1 Cómo Emite Luz un Láser

Un láser de semiconductor está hecho con muchos componentes distintos que dan lugar a la producción de una ganancia óptica, lo que lleva a la emisión estimulada. Los componentes básicos de un láser consisten en una fuente de corriente, un material semiconductor, y una cavidad óptica. Cada uno de estos componentes controla la emisión estimulada del láser y debe ser comprendido para poder recrear correctamente el comportamiento de un láser para su análisis computacional.

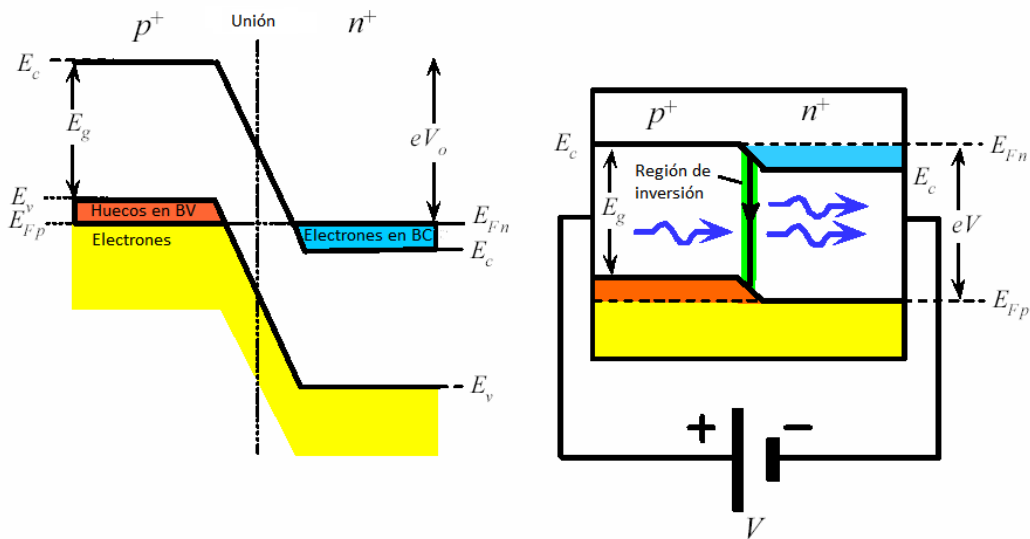


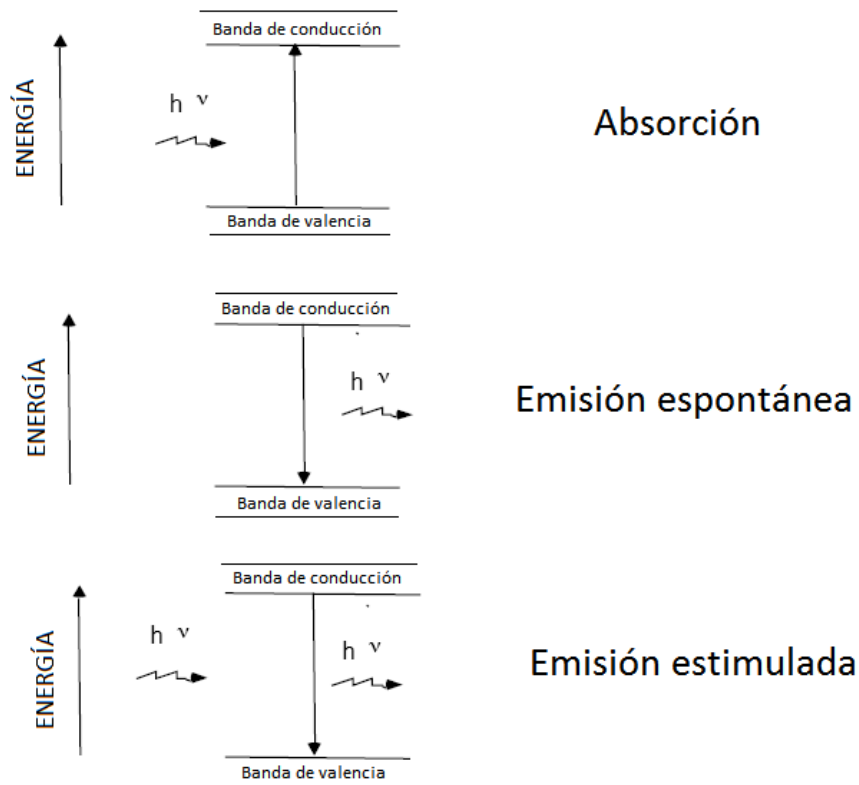
Figura 1. Estructura de una unión p-n y polarización

### 3.2 Material Semiconductor

Un material se considera semiconductor cuando posee una conductancia menor que la de un metal. El material semiconductor utilizado en los láseres de semiconductor se compone por pares de electrón-hueco que definen las uniones de tipo n y de tipo p del material. Para que un material sea de tipo n o de tipo p se deben introducir impurezas en la red cristalina. Este proceso se conoce como “dopado”. Si se introduce un gran número de electrones en la red del material, se convierte a tipo-n. En cambio, si el dopado introduce una mayor cantidad de huecos, entonces la red se considera tipo-p. Estas propiedades permiten que tenga lugar la emisión estimulada a través del uso de una fuente de corriente para crear un bombeo.

Existen tres tipos de transiciones ópticas (Fig. 2) que pueden ocurrir en la estructura a la hora de la generación de fotones. La absorción se produce cuando llega un fotón y

excita un átomo en la banda de valencia, aumentando su energía y causando que salte a la banda de conducción. El fotón original se pierde, por lo que este proceso no es deseable. La emisión espontánea se da cuando un electrón en la banda de conducción salta a la banda de valencia (con menos energía) emitiendo un fotón con el intercambio. La emisión estimulada se produce cuando, al llegar un fotón y excitar un electrón de la banda de conducción, éste baja a un nivel inferior, emitiendo un fotón de la misma fase, frecuencia, polarización y dirección que el original. Éste es el proceso deseado para la emisión de luz en un láser.



**Figura 2.** Transiciones ópticas

### 3.3 Inversión de Población

Para que un láser sea capaz de emitir luz, debe haber una inversión de población en el sistema. La inversión de población se da cuando la densidad de portadores inicial es menor que la densidad de portadores final, y cuando la energía inicial es menor que la final. Este proceso ocurre como consecuencia del bombeo en la cavidad óptica.

Como hemos dicho, se necesita una cavidad óptica para producir emisión estimulada a través del bombeo. Esta cavidad es una región compuesta de dos espejos aproximadamente paralelos separados una distancia predefinida. El material semiconductor utilizado en los láseres es el que forma esta cavidad en el caso de los láseres de semiconductor.

Además, los bordes paralelos del material se comportan como espejos y están separados a lo largo de todo el material para formar la cavidad óptica, que produce una realimentación positiva.

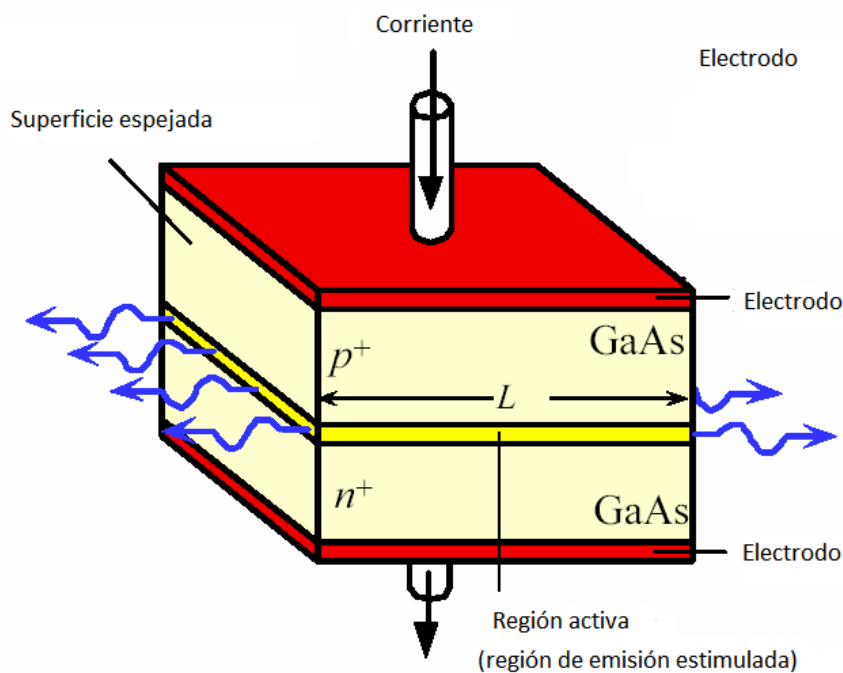


Figura 3. Esquema de un láser de semiconductor

La ganancia es una medida determinada por la longitud de la cavidad óptica y el número de reflexiones a través del material semiconductor. Por cada viaje a través de la cavidad óptica tienen lugar pérdidas debidas a los espejos que son proporcionales a la ganancia. Cuando se aplica un bombeo al material semiconductor, la ganancia va incrementándose por cada viaje a través de la cavidad. La inversión de población ocurre cuando dicha ganancia alcanza un valor mayor que las pérdidas ocasionadas por las reflexiones.

## 4. Justificación del método de resolución

Uno de los primeros problemas que surgió a la hora de comenzar con la programación de las ecuaciones de los láseres fue la elección del método para resolverlas. Desde el principio se pensó en alguna variación del método de Taylor o del de Runge-Kutta, haciéndose pruebas finalmente con los métodos de Heun (Runge-Kutta de orden 2) y RK4 (Runge-Kutta de orden 4). Básicamente se trata de un problema de resolución de EDO del tipo:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

El RK4 (Ec. 3 y 4) es un método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias ampliamente conocido, siendo el más potente de los que usan algoritmos de predicción-corrección. Aquí aparece un resumen de dicho método:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4)$$

Con:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (6)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (7)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (8)$$

La fórmula de la iteración de  $y$  (Ec. 4) es una media ponderada de cuatro valores ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ ), (Ec. 5 a 8) en la que cada valor de  $k_i$  nos da una estimación del incremento en  $y$  que experimenta la solución actual sobre el total del intervalo. El primer valor utiliza el método de Euler, las dos siguientes, una estimación de la pendiente en el punto medio, mientras que el cuarto hace uso de la estima del punto final. Cada  $k_i$  utiliza la anterior  $k_i$  como base para la predicción del incremento en  $y$ .

Así pues, la estimación del siguiente valor de  $y$  no es más que el valor actual más una media ponderada de cuatro diferentes estimas del incremento en  $y$  para ese intervalo, con las estimas en el punto medio ponderadas el doble que las de los extremos.

Este método, pese a ser más potente que el de Heun, también es más costoso computacionalmente, como veremos más adelante, por lo que a la hora de caracterizar los láseres este proyecto se decanta por el método de Heun.

El método de Heun es una mejora del de Euler, el cual se basa en utilizar la tangente a la curva de la solución actual como una estima de la propia curva, bajo la base de que si dicha tangente no se proyecta demasiado en cada paso, no nos alejaremos mucho de la solución. Pero esto es suponer demasiado, ya que aunque se utilicen pasos lo suficientemente pequeños, con un número lo suficientemente grande de ellos, el error se acumula y ambas soluciones divergen.

Aquí vemos lo que ocurre con las estimas del método de Euler:



Figura 4. Estimación de Euler.

Como vemos en la Figura 4, la predicción subestima la solución correcta. Por supuesto, en el caso de que la curva fuera cóncava, el problema sería el inverso, pues la predicción sobreestimaría la solución.



Para evitar esto, el método de Heun tiene en cuenta la tangente a la curva en ambos extremos del intervalo bajo estudio. Ya hemos observado que la curva en el punto inicial no es lo suficientemente inclinada como para dar una estimación correcta, por lo que entra en juego la tangente a la curva en el punto final **pero** aplicada al punto inicial, tal y como se aprecia en el siguiente esquema:



Figura 5. Estima por tangente derecha.

Obviamente, en la Figura 5, la tangente en ese punto es demasiado inclinada para darnos una buena predicción, pues siempre sobreestimaría el punto. Esto siempre va a ocurrir para cualquier tipo de curva convexa. Así pues, si observamos las predicciones de ambos extremos del intervalo (una subestimando la solución y la otra sobreestimándola) nos daremos cuenta de que el punto ideal aparece aproximadamente a medio camino entre ambas estimas:

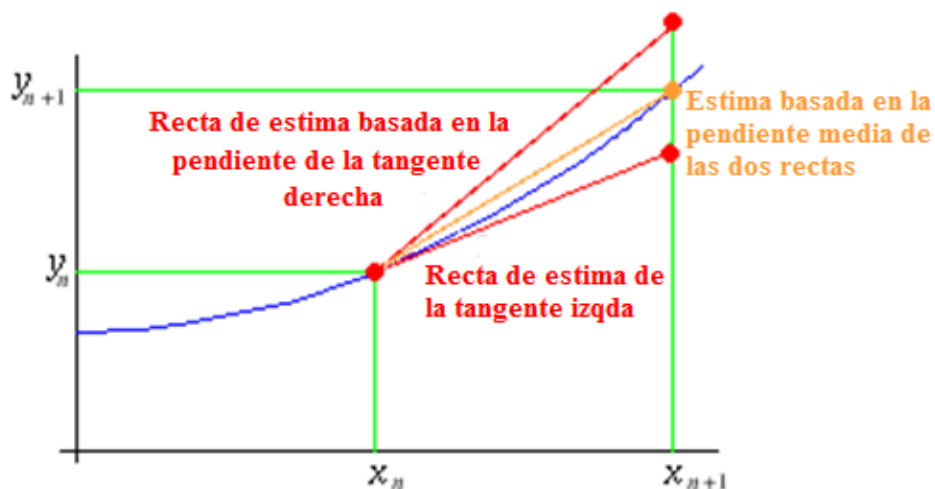


Figura 6. Estima de Heun.

El método de Heun toma como pendiente de estimación la media de las pendientes en los puntos inicial y final del intervalo (Fig 6), como demuestran sus ecuaciones:

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (9)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (10)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1) \quad (11)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (12)$$

Para hacer la prueba de velocidad de cómputo, se han probado ambos algoritmos para la resolución de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{1}{100}(70 - y) \cdot (50 - y) \quad (13)$$

A continuación se presentan las aproximaciones de los algoritmos comparadas con la solución exacta:

$$y(t) = 350 \frac{1 - e^{-0.2t}}{7 - 5e^{-0.2t}} \quad (14)$$

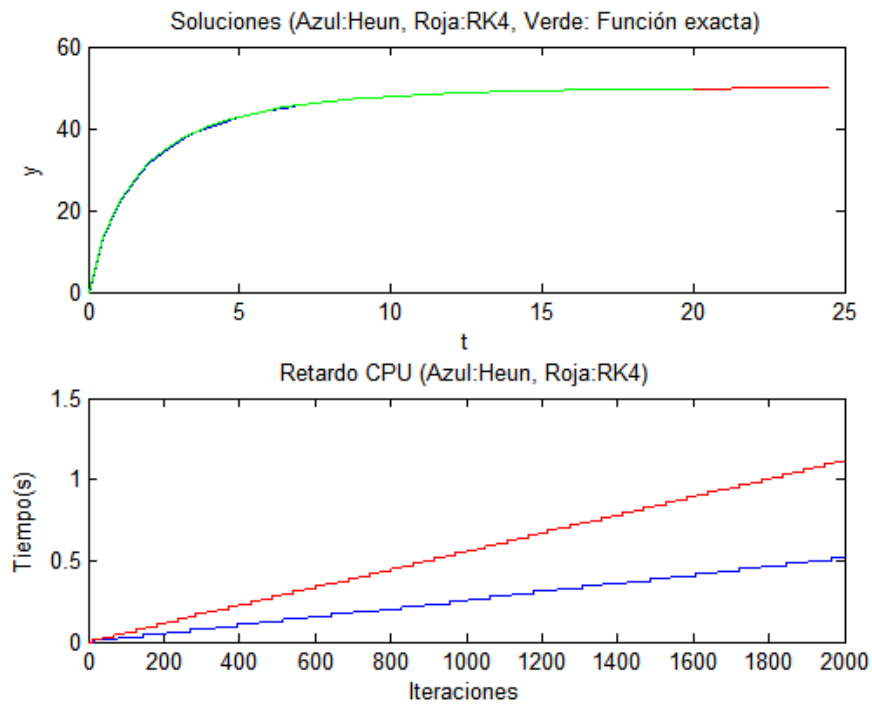


Figura 7. Comparativa de los métodos Heun y RK4.

Como se puede observar, el método RK4 es más costoso computacionalmente, lo que no es de extrañar, pues necesita aproximadamente el doble de sumas y productos por cada iteración.

Esto también se ha comprobado experimentalmente reescribiendo las ecuaciones de los láseres para ambos métodos, observándose que la caracterización con el RK4 requiere aproximadamente el doble de tiempo de computación que con el de Heun.

A continuación se reflejan los códigos utilizados para resolver las ecuaciones del láser emisor mediante los métodos de Heun y de RK4.

Parámetros y representación (comunes a ambos métodos):

```
clear all; clc; close all;

%%%% Parametros %%%%%%%%%%
g = 1.5e4;
beta=1.1e3;      %tasa de emisión espontánea (no se ha tenido en cuenta)
N0 = 1.5e8;      %Número de portadores en transparencia
Tr = 0.3e-9;     % retardo de ida y vuelta
tauc = 2e-9;     % vida media de los portadores
taup = 2e-12;   % vida media de los fotones
qe = 1.602e-19; % carga electrónica
w = 1.2161e+015; % frecuencia angular
al = 5;         % factor de mejora de ancho de línea
s = 5e-7;
gamma = 30e9;   %coeficiente de realimentación
I = 44e-3;     %Corriente de inyección (umbral ~15mA)
E0=randn*1e-3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Constantes de normalización %%
theta = 1/(g*N0); % Tiempo
e0 = sqrt(N0);    % Intensidad
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
yplot=[];
ycurr=[E0;E0;1]; %Valores iniciales de E y N
dt=0.5e-12;
dtt=dt/theta;
ndel= Tr/dt;
Tmax=100e-9;
yND=zeros(3,Tmax/dt);
N=Tmax/dt;
t=zeros(1,N);
time=clock;

%%%%RUTINA (Aquí va la rutina de cada método)%%%%%%%%%

tiempo=etime(clock,time);
Ereal=(yND(1,:));
Eimag=(yND(2,:));
Ecomplex=Ereal+j*Eimag;
E=Ereal.^2+Eimag.^2;
save var E;
```

```

subplot(2,1,1)
plot(1e9*t,E)%para normalizar a ns
xlabel('Time(ns)')
ylabel('Module E')
P=length(Ecomplex);
F = [-P/2:P/2-1]/P;
F=F/dt;
spectre=log10(fftshift(abs(fft(Ecomplex))));
subplot(2,1,2)
plot(1e-9*F,spectre)%para normalizar a Ghz
xlabel('f(GHz)')
ylabel('Output Specter (logaritmico)')
tiempo

```

### Función derivada (común a ambos métodos):

```

function out = dydtLS(y,ydel,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,e,w,al,gamma)

G1 = (y(3)-1) / ( 1 + s*N0*(y(1)^2 + y(2)^2) );
out = [(G1 - theta/taup) / 2 * (y(1) - al*y(2))+ gamma * theta * (
ydel(1)*cos(w*Tr)-... ydel(2)*sin(w*Tr) );
(G1 - theta/taup) / 2 * (y(2) + al*y(1))+ gamma * theta * (
ydel(1)*sin(w*Tr) +... ydel(2)*cos(w*Tr) );
theta*I/e/N0 - theta / tauc * y(3) - G1 * (y(1)^2+ y(2)^2)];

```

### Rutina del método RK4:

```

for n=1:ndel
    k1 = dtt*
dydtLS(ycurr,[E0;E0;1],theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y1 = ycurr + k1/2;
    k2 = dtt*
dydtLS(y1,[E0;E0;1],theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y2 = ycurr + k2/2;
    k3 = dtt*
dydtLS(y2,[E0;E0;1],theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y3 = ycurr + k3;
    k4 = dtt*
dydtLS(y3,[E0;E0;1],theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    ycurr = ycurr + 1/6* ( k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4 );
    yND(:,n)=ycurr;
    t(n)=n*dt;
end

for n=1+ndel:N %delayed E
    k1 = dtt* dydtLS(ycurr,yND(:,n-
ndel),theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y1 = ycurr + k1/2;
    k2 = dtt* dydtLS(y1,yND(:,n-
ndel),theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y2 = ycurr + k2/2;
    k3 = dtt* dydtLS(y2,yND(:,n-
ndel),theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y3 = ycurr + k3;
    k4 = dtt* dydtLS(y3,yND(:,n-
ndel),theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);

```

```

    ycurr = ycurr + 1/6* ( k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4 );
    yND(:,n)=ycurr;
    t(n)=n*dt;
end

```

### Rutina del método Heun:

```

for n=1:ndel
    f1 = dydtLS(ycurr, [E0;E0;1], theta, N0, s, tauc, taup, Tr, I, qe, w, al, gamma);
    y1 = ycurr + dtt * f1; %% Estima
    f2 = dydtLS(y1, [E0;E0;1], theta, N0, s, tauc, taup, Tr, I, qe, w, al, gamma);
    ycurr = ycurr + 1/2*dtt * ( f1 + f2 );
    yND(:,n)=ycurr;
    t(n)=n*dt;
end

for n=1+ndel:N %delayed E
    f1 = dydtLS(ycurr, yND(:,n-
ndel), theta, N0, s, tauc, taup, Tr, I, qe, w, al, gamma);
    y1 = ycurr + dtt * f1; %% Estima
    f2 = dydtLS(y1, yND(:,n-
ndel), theta, N0, s, tauc, taup, Tr, I, qe, w, al, gamma);
    ycurr = ycurr + 1/2*dtt * ( f1 + f2 );
    yND(:,n)=ycurr;
    t(n)=n*dt;
end

```

## 5. Caos en el emisor mediante realimentación óptica

Las características estáticas de los láseres de semiconductor sujetos a realimentación óptica se pueden investigar teóricamente con las relaciones entre las reflectividades de la cavidad interna y el reflector externo, la ganancia en ese medio y otros parámetros estáticos de los láseres. Sin embargo, las características dinámicas se deben describir mediante las ecuaciones dependientes del tiempo de los sistemas. Las ecuaciones para láseres de semiconductor en presencia de realimentación óptica se obtienen fácilmente a partir de las ecuaciones de tasa para láseres individuales. En la Fig. 8 se muestra el modelo esquematizado de un láser de semiconductor con realimentación óptica. Durante todo este proyecto, consideraremos que el reflector externo no es más que un espejo reflectante convencional. En otros trabajos se estudian las características de otros reflectores como amplificadores o espejos de fase conjugada. La luz del láser se refleja en el espejo externo y realimenta de nuevo la cavidad láser con un retardo. Se asume que el espejo se ha posicionado dentro de la longitud de coherencia del láser. También se asume que el láser opera como monomodo, aunque esto no siempre ocurra. El láser a veces oscila como multimodo bajo ciertas condiciones en los parámetros de realimentación óptica incluso cuando el láser fue diseñado como monomodo. La realimentación externa se añade a la ecuación del campo complejo y la ecuación del campo se escribe de la siguiente forma (Lang y Kobayashi 1980):

$$\frac{dE(t)}{dt} = (1 + j\alpha)(G(t) - \frac{1}{\tau_p})\frac{E(t)}{2} + \gamma E(t - \tau)e^{j\omega\tau} \quad (15)$$

Donde tenemos que  $\gamma$  es el coeficiente de realimentación,  $\tau = \frac{2L}{c}$  es el tiempo de ida y vuelta de la luz dentro de la cavidad externa, y  $\omega$  es la frecuencia de oscilación angular del láser. El término extra tiene un tiempo de retardo  $\tau$  y el campo complejo se describe como una ecuación diferencial retardada y es el origen de las inestabilidades y de las dinámicas caóticas en los láseres de semiconductor. Esta ecuación se conoce como ecuación de Lang-Kobayashi (15).

El coeficiente de realimentación  $k$  se puede calcular teniendo en consideración los efectos de multireflexión de la luz en la cavidad externa. En la figura 8 consideramos que los campos y el término extra añadido al campo del láser de la realimentación óptica se propagan hacia delante y hacia atrás en la cavidad en la cara del resonador.

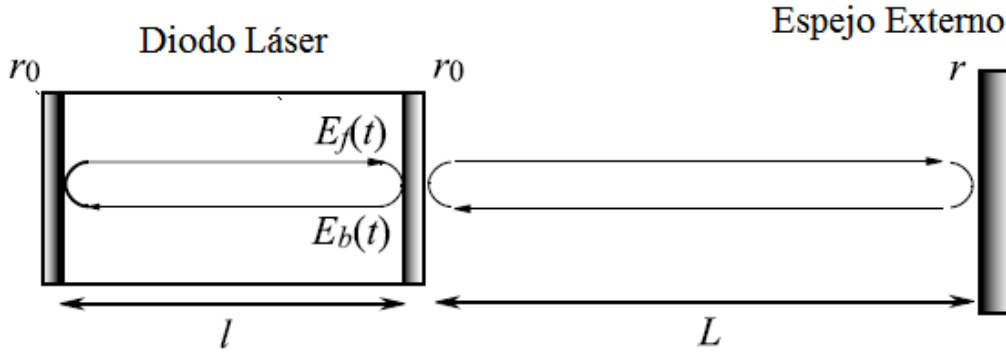


Figura 8. Esquema del emisor realimentado ópticamente.

Partimos de las ecuaciones de los láseres de Lang-Kobayashi:

$$\frac{dE}{dt} = (1 + j\alpha) \left[ G(t) - \frac{1}{\tau_p} \right] \frac{E(t)}{2} + \gamma E(t - \Delta t) e^{j\omega_0 \Delta t} \quad (16)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{e} - \frac{N(t)}{\tau_c} - G(t) |E(t)|^2 \quad (17)$$

$$G = g \frac{N(t) - N_0}{1 + s |E(t)|^2} \quad (18)$$

La ecuación (16) es la del campo eléctrico en el emisor, y tiene en cuenta el campo retardado. La ecuación (17) es la del número de portadores en la cavidad, y la (18) refleja la ganancia del láser.

Para hacer la integración de estas ecuaciones numéricamente más sencilla a lo largo de todo el trabajo, se ha decidido introducir una constante de normalización:  $\theta = \frac{1}{gN_0}$  y normalizar el campo eléctrico a  $\sqrt{N_0}$  y el número de portadores a  $N_0$ , así pues reescalamos las cantidades como sigue:

$$\varepsilon(T) = \frac{E(t)}{\sqrt{N_0}} = \frac{E(\theta T)}{\sqrt{N_0}} \quad (19)$$

$$\mathfrak{N}(T) = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N(\theta T)}{N_0} \quad (20)$$

$$G(T) = \theta G(t) = \theta G(\theta T) \quad (21)$$

De modo que si operamos:

$$G = \frac{1}{gN_{\Phi}} \frac{g(N(T)N_{\Phi} - N_{\Phi})}{1 + sN_0|\varepsilon(T)|^2} = \frac{N(T) - 1}{1 + sN_0|\varepsilon(T)|^2} \quad (22)$$

$$\frac{dN}{dT} = \frac{I\theta}{eN_0} - \frac{N(T)N_{\Phi}\theta}{\tau_c N_{\Phi}} - \frac{G(T)}{\theta} \frac{N_{\Phi}|\varepsilon(T)|^2\theta}{N_{\Phi}} = \frac{I\theta}{eN_0} - \frac{N(T)\theta}{\tau_c} - G(T)|\varepsilon(T)|^2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dT} &= (1 + j\alpha) \frac{\theta}{\sqrt{N_{\Phi}}} \left( \frac{G(T)}{\theta} - \frac{1}{\tau_c} \right) \frac{\varepsilon(T)\sqrt{N_{\Phi}}}{2} + \gamma \frac{\theta}{\sqrt{N_{\Phi}}} \sqrt{N_{\Phi}} \varepsilon(T - \Delta T) e^{j\Delta\varphi} \\ &= (1 + j\alpha) \left[ G(T) - \frac{\theta}{\tau_c} \right] \frac{\varepsilon(T)}{2} + \gamma \theta \varepsilon(T - \Delta T) e^{j\Delta\varphi} \end{aligned} \quad (24)$$

Donde  $\Delta\varphi = \omega_0\Delta t$  es la fase debida a la propagación en la cavidad externa.

En ausencia de reinyección, el sistema alcanza una solución de estado estacionario tal que:

$$G = \frac{\theta}{\tau_p} \quad (25)$$

Así pues, hemos trabajado sobre las ecuaciones originales (16)-(18) y las hemos normalizado a las nuevas (22)-(24) que son las que utilizaremos para programar las ecuaciones en Matlab.



## 5.1 Efectos de la realimentación óptica

Las siguientes figuras dan ejemplos de resultados experimentales obtenidos en este proyecto de oscilaciones caóticas en un láser de semiconductor expuesto a realimentación óptica. La figura 9 muestra la salida del láser con una realimentación óptica despreciable. La principal oscilación de relajación decae suavemente en cuanto el láser activa y únicamente vemos una componente continua (veríamos también el ruido estadístico inducido por las emisiones espontáneas, pero en este proyecto no se ha tenido en cuenta).

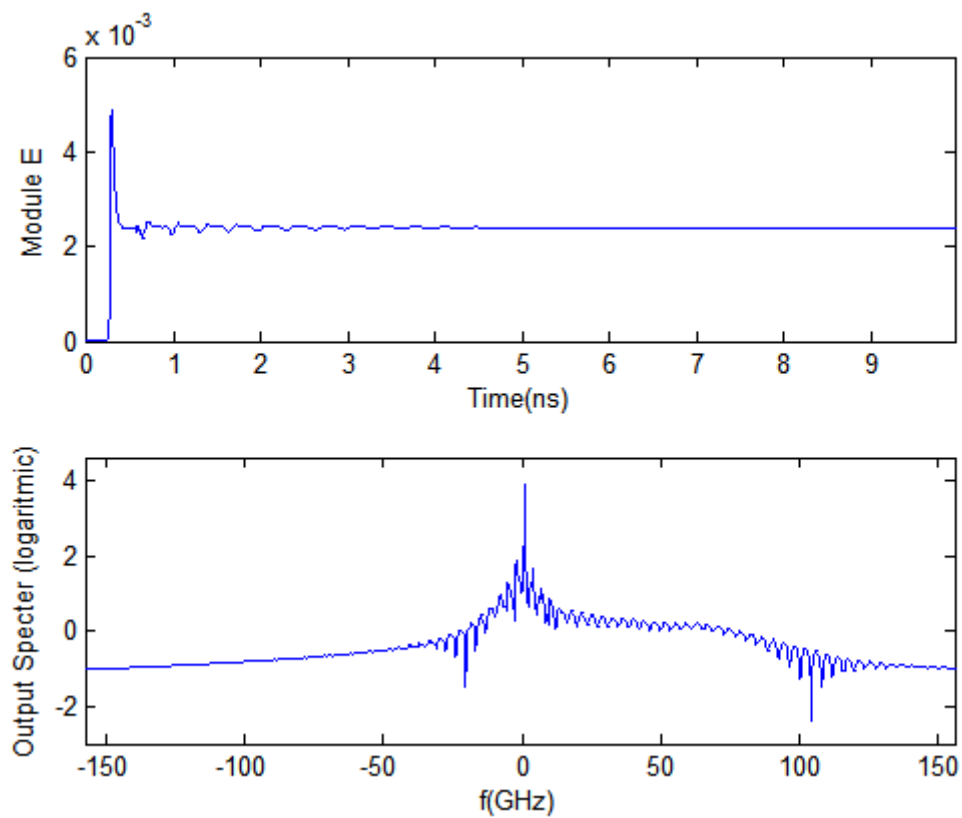
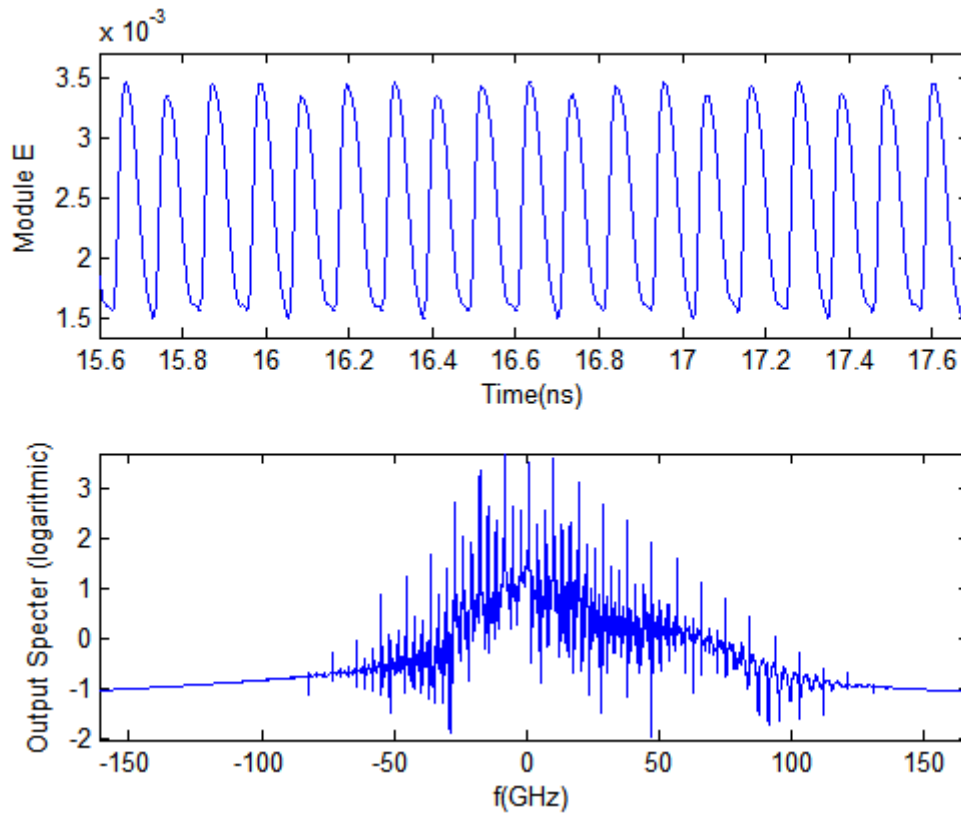


Figura 9. Campo eléctrico y espectro de láser con realimentación despreciable. ( $\gamma=5\text{ns}^{-1}$ )

Al incrementar la realimentación óptica el láser muestra oscilaciones periódicas (figura 10). Sin embargo, seguimos teniendo una proporción mínima de realimentación externa.



**Figura 10.** Campo eléctrico y espectro del láser con  $\gamma=15\text{ns}^{-1}$

Al aumentar un poco más la realimentación, se muestra una oscilación irregular de la potencia de salida del láser en la figura 11. La oscilación corresponde al régimen IV del láser y la coherencia del láser está prácticamente destruida. Aunque todavía aparecen picos a frecuencias fundamentales, el espectro se ha ensanchado, lo que es una característica típica de las oscilaciones quasi-caóticas o ligeramente caóticas. Para realimentaciones superiores a este nivel (figura 12), no se aprecian picos claros en el espectro, y el láser exhibe oscilaciones puramente caóticas.

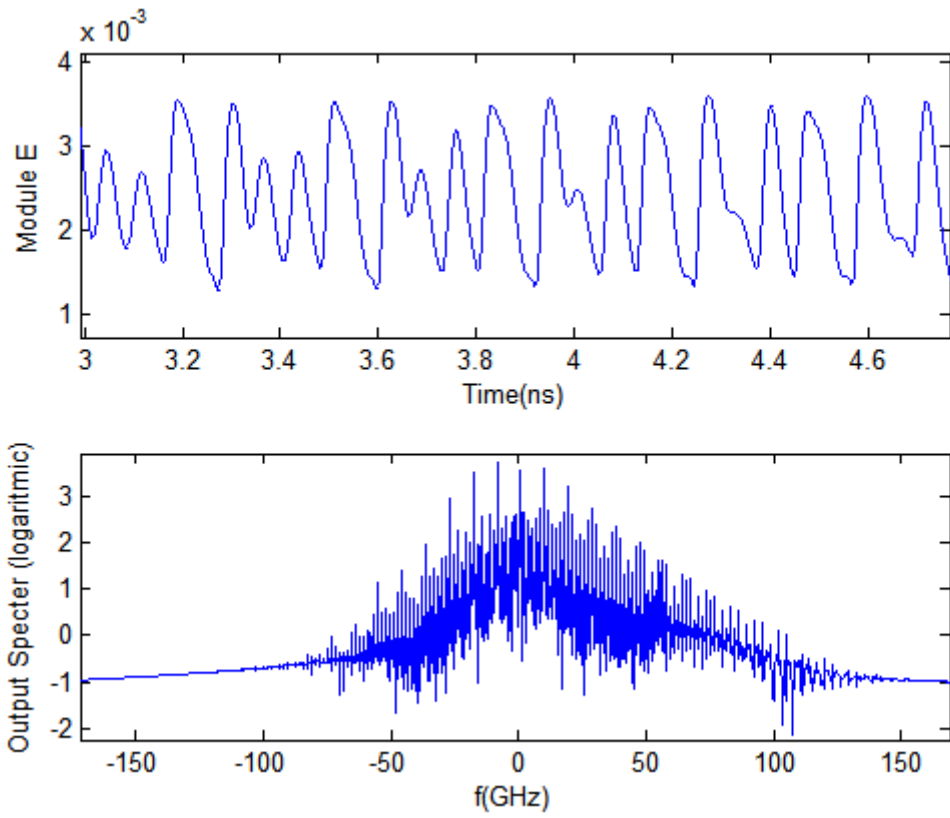


Figura 11. Campo eléctrico y espectro del láser con  $\gamma=18\text{ns}^{-1}$

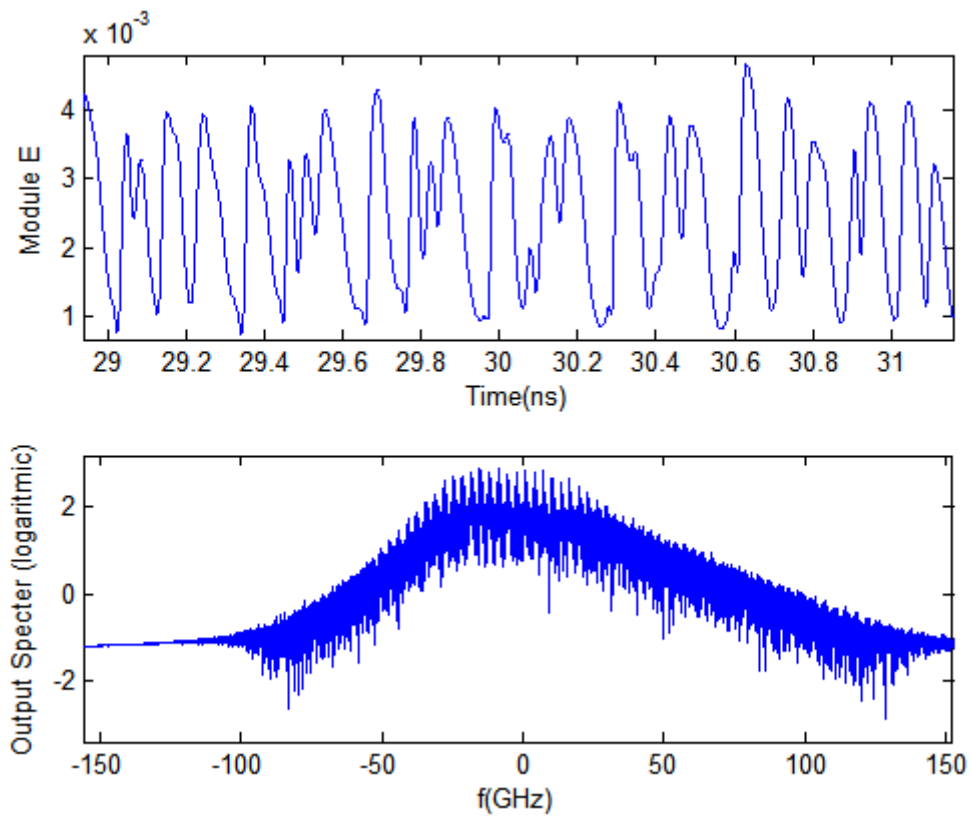
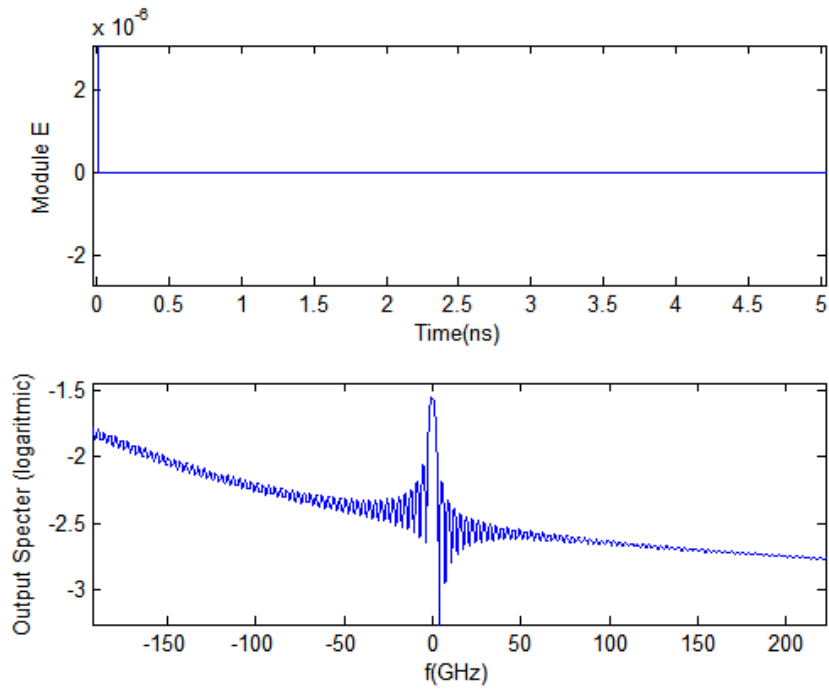


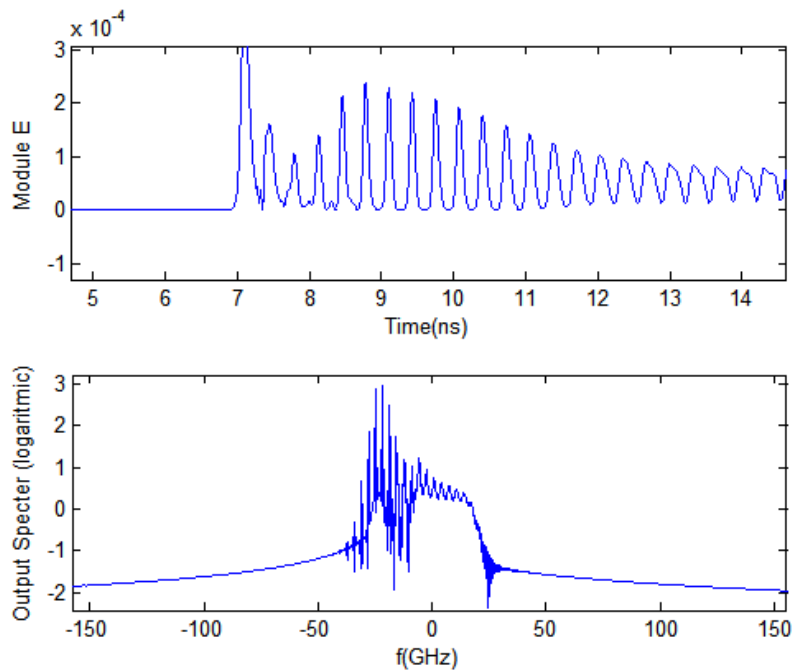
Figura 12. Campo eléctrico y espectro del láser con  $\gamma=30\text{ns}^{-1}$ . Comportamiento caótico

Por otro lado, es muy importante asegurarse de que la corriente suministrada al láser ha superado el umbral (observado experimentalmente en unos 15mA), o de lo contrario el láser no será capaz de oscilar, como se observa en la siguiente gráfica:



**Figura 13.** Campo eléctrico y espectro del láser con corriente de inyección  $I=10\text{mA}$ .

Sin embargo, una vez superado el umbral, el láser comienza a oscilar tras un tiempo y el espectro frecuencial se ensancha:



**Figura 14.** Campo eléctrico y espectro del láser con corriente de inyección  $I=20\text{mA}$ .

## 6. Sincronización caótica

El principal objetivo de este proyecto y una de las principales aplicaciones de los láseres de semiconductor caóticos son las comunicaciones caóticas seguras. La clave de estas comunicaciones caóticas está en la sincronización caótica entre dos sistemas no lineales. Si dos sistemas caóticos no lineales operan independientemente, nunca obtendrán la misma salida debido a la sensibilidad del caos a las condiciones iniciales. Sin embargo, si una pequeña porción de la salida caótica de uno de los sistemas se envía al otro, ambos serán capaces de sincronizarse y mostrarán la misma salida bajo ciertas condiciones de los parámetros del sistema. Esta composición se conoce como sincronización caótica. Es muy sorprendente que dos sistemas caóticos compartan la misma forma de onda, ya que el caos es muy sensible a las condiciones iniciales y su futuro es impredecible.

Dos sistemas caóticos con los mismos parámetros muestran la misma salida mientras la diferencia entre sus condiciones iniciales permanece lo suficientemente pequeña. Pero con el tiempo, aparece una pequeña diferencia entre las dos señales y entonces la diferencia se incrementa rápidamente con el tiempo. Al final, ambos sistemas se comportan de manera completamente distinta en cuanto la diferencia entre sus condiciones iniciales no es cero. Sin embargo, existe la posibilidad de que dos sistemas no lineales muestren la misma salida si ambos poseen un subsistema común con los mismos valores de sus parámetros, y es si una pequeña porción de señal de una se transmite a la otra. Bajo estas condiciones, ambos sistemas emiten la misma salida. Esta composición se conoce como sincronización caótica.

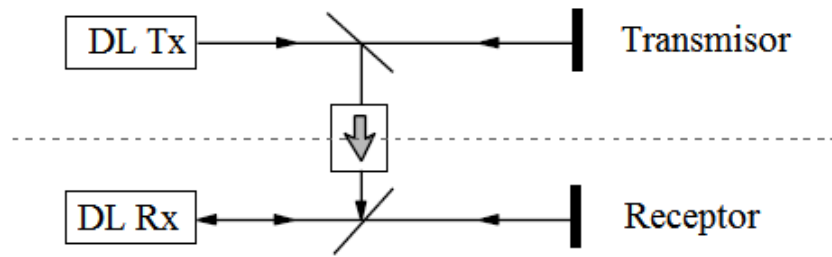
La idea de la sincronización caótica entre dos sistemas no lineales fue propuesta por Pecora y Carroll en 1990. Utilizaron un sistema de Lorenz de tres variables para su demostración. En su sistema, la salida de una de las variables en un subsistema se enviaba a un receptor. Después, mostraban una sincronización caótica entre los sistemas transmisor y receptor. Tras su propuesta, se ha estudiado el fenómeno de la sincronización en distintos sistemas caóticos. La sincronización caótica entre dos sistemas no lineales no es evidente y es una verdadera sorpresa, ya que no podemos esperar la misma salida ni siquiera entre dos sistemas caóticos iguales mientras permanezcan aislados entre sí. El origen de la sincronización caótica aún no se ha comprendido enteramente y su trasfondo teórico tampoco se ha establecido. Sin embargo, la sincronización caótica se ha observado en simulaciones numéricas y en experimentos en varios sistemas no lineales. En sistemas de láseres, la sincronización del caos se ha demostrado experimentalmente en láseres de  $\text{CO}_2$  (Sugawara 1994) y en láseres de estado sólido (Roy y Thornburg 1994). Tras eso, se han publicado muchas investigaciones teóricas y experimentales de sincronización caótica en varios sistemas de láseres, incluidos láseres de semiconductor.

## 6.1 Modelo de Sistema de Sincronización

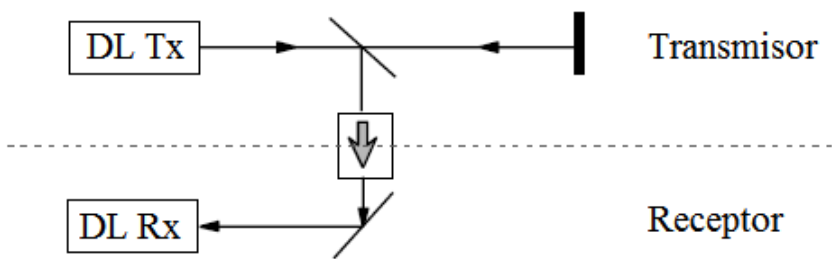
En los sistemas de láseres, una pequeña porción de la salida de una de las variables (normalmente la potencia de salida del láser o el campo complejo) se envía al láser receptor en lugar de compartir una serie de variables comunes. La sincronización caótica es muy sensible a la desviación de parámetros entre los sistemas transmisor y receptor. Por ejemplo, ni siquiera de láseres de semiconductor fabricados de la misma oblea podemos esperar exactamente las mismas frecuencias de oscilación para los láseres del transmisor y el receptor para la misma corriente de inyección. Ésta es una de las razones por las que la sincronización caótica es complicada de obtener en los sistemas de láseres. Sin embargo, la frecuencia del láser se puede sintonizar fácilmente cambiando la corriente de inyección y la frecuencia del láser esclavo se puede igualar a la del láser maestro mediante inyección óptica dentro de un cierto rango de frecuencias de sintonización. De esta manera, se puede lograr una sincronización robusta utilizando el efecto *frequency-pulling* eligiendo con cuidado las condiciones paramétricas.

Aquí discutimos sistemas para la sincronización caótica en láseres de semiconductor sujetos a realimentación óptica (Ohtsubo 2002). El esquema de la figura 15 muestra el sistema de acoplamiento unidireccional en el que el receptor está aislado del transmisor mediante un aislador óptico. El transmisor y el receptor tienen sus propios bucles de realimentación óptica y la configuración se conoce como sistema de bucle cerrado. También existen otras configuraciones como la de bucle abierto (que no es más que particularizar la de bucle cerrado con la reflectividad del reflector externo del esclavo igualada a cero), o la de acoplamiento mutuo (en donde lo que se hace es eliminar el aislador para que emisor y receptor se realimenten entre sí). En este proyecto nos centramos en la configuración en bucle cerrado, pero se podría particularizar a las otras dos configuraciones de forma análoga.

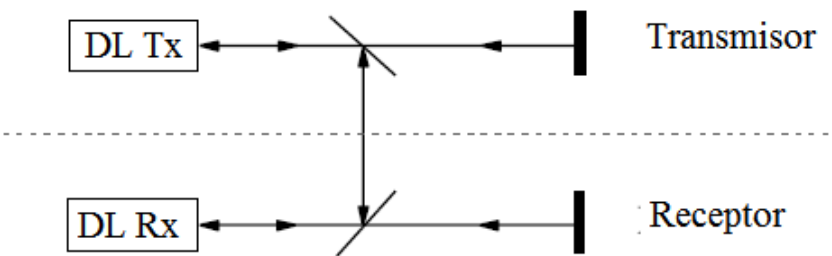
(a) Sistema de bucle cerrado



(b) Sistema de bucle abierto



(c) Sistema de acoplamiento mutuo



**Figura 15.** Posibles esquemas de sistemas en configuración maestro-esclavo. Sistema de bucle cerrado (a), sistema de bucle abierto (b), sistema de acoplamiento mutuo (c).

## 6.2 Sincronización Caótica. Ejemplos Numéricos.

Modelamos el transmisor (ML) y el receptor (SL) utilizando las ecuaciones de cálculo para las variaciones lentas de amplitud de campo eléctrico complejo  $E_{t,r}$  (26) y número de portadores dentro de la cavidad  $N_{t,r}$  (27) (con t,r indicando transmisor y receptor respectivamente). Las ecuaciones son iguales a las vistas anteriormente, con la salvedad de que aparece un nuevo término en el campo eléctrico, que es el responsable de la inyección óptica del láser maestro en el esclavo:

$$\frac{dE_{t,r}(t)}{dt} = (1 + j\alpha_{t,r}) \left( G_{t,r}(t) - \frac{1}{\tau_{t,r}} \right) \frac{E_{t,r}(t)}{2} + \gamma E_{t,r}(t - \tau) e^{j\omega_{t,r}\tau} + k_r E_{ext}(t) e^{-j\Delta\omega t} \quad (26)$$

$$\frac{dN_{t,r}(t)}{dt} = \frac{I}{e} - \frac{1}{\tau_{n_{t,r}}} N_{t,r}(t) - G_{t,r}(t) |E_{t,r}(t)|^2 \quad (27)$$

$$G_{t,r}(t) = \frac{g(N_{t,r} - N_{o_{t,r}})}{(1 + s|E_{t,r}(t)|^2)} \quad (28)$$

Las ecuaciones (26)-(28) son las mismas que las que presentamos en el capítulo del emisor (Ecs. (16)-(18)), pero en éstas se ha tenido en cuenta el término adicional presente en el láser receptor.

Consideraremos el transmisor (t) y el receptor (r) como láseres muy similares, así que tomaremos, en principio, los mismos parámetros para ambos:  $g=1.5 \times 10^{-8} \text{ ps}^{-1}$  es el parámetro de ganancia,  $s = 5 \times 10^{-7}$  es el coeficiente de saturación de ganancia,  $\alpha = 5$  es el factor de mejora de ancho de línea,  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  es la carga electrónica,  $\tau_n = 2 \text{ ns}$  es el tiempo de vida de la portadora,  $\tau_{t,r} = 2 \text{ ps}$  es el tiempo de vida fotónico,  $N_o = 1.5 \times 10^8$  es el número de portadores en transparencia,  $\gamma = 30 \text{ ns}^{-1}$  es el coeficiente de realimentación,  $\tau$  es el retardo en la cavidad externa y  $\Delta\omega$  es el *detuning* entre las frecuencias ópticas del ML y el SL.  $I = 44 \text{ mA}$  es la corriente de inyección (la corriente umbral es  $I_{th} \approx 14.7 \text{ mA}$ ) y  $\omega_{t,r} \approx 1.2 \times 10^3 \text{ ps}^{-1}$  es la frecuencia angular de ML y SL operando bajo una onda continua. El término  $k_r E_{ext}$  de (26), que tiene en cuenta la señal generada por el ML, sólo existe en el láser receptor. El campo eléctrico  $E_{ext}$  es la señal de entrada en el receptor y  $k_r$  es el parámetro de acoplamiento del campo inyectado en el SL. Las ecuaciones (26)-(28) están escritas en el marco de referencia en el que la frecuencia de emisión es cero sin tener en cuenta la emisión espontánea y el láser está sintonizado en el umbral.



A la hora de programar las ecuaciones, se han vuelto a tener en cuenta las normalizaciones que hicimos para el láser emisor, sólo que en este caso se han ampliado para el sistema de láseres. Las ecuaciones normalizadas son las siguientes:

$$\frac{d\varepsilon}{dT} = (1 + j\alpha) \left( G(T) - \frac{\theta}{\tau_c} \right) \frac{\varepsilon(T)}{2} + \gamma\theta\varepsilon(T - \Delta T)e^{j\Delta\varphi} + k_r\theta\varepsilon_{ext}(T)e^{-j\Delta\omega t} \quad (29)$$

$$\frac{d\aleph}{dT} = \frac{I\theta}{eN_0} - \frac{\aleph(T)\theta}{\tau_c} - G(T)|\varepsilon(T)|^2 \quad (30)$$

$$G(T) = \frac{\aleph(T) - 1}{1 + sN_0|\varepsilon(T)|^2} \quad (31)$$

De nuevo, las ecuaciones (29)-(31) son análogas a las del capítulo del emisor (22)-(24).

De este modo, teniendo en cuenta que el campo eléctrico es complejo:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dT} = \beta(1 + j\alpha) & (\varepsilon_{re}(T) + j\varepsilon_{im}(T)) + \gamma\theta (\varepsilon_{del,re}(T) + j\varepsilon_{del,im}(T)) (\cos \Delta\varphi + j \sin \Delta\varphi) \\ & + k_r\theta (\varepsilon_{ext,re}(T) + j\varepsilon_{ext,im}(T)) (\cos \Delta\omega t - j \sin \Delta\omega t) \end{aligned} \quad (32)$$

A la hora de escribir las ecuaciones en Matlab para simular el sistema, se han tenido en cuenta las partes real e imaginaria del campo,

$$\begin{aligned} Real \left\{ \frac{d\varepsilon}{dT} \right\} = \beta & (\varepsilon_{re}(T) - \alpha\varepsilon_{im}(T)) + \gamma\theta (\varepsilon_{del,re} \cos \Delta\varphi - \varepsilon_{del,im} \sin \Delta\varphi) \\ & + k_r\theta (\varepsilon_{ext,re} \cos \Delta\omega t + \varepsilon_{ext,im} \sin \Delta\omega t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} Imag \left\{ \frac{d\varepsilon}{dT} \right\} = \beta & (\varepsilon_{im}(T) + \alpha\varepsilon_{re}(T)) + \gamma\theta (\varepsilon_{del,re} \sin \Delta\varphi + \varepsilon_{del,im} \cos \Delta\varphi) \\ & + k_r\theta (\varepsilon_{ext,im} \cos \Delta\omega t - \varepsilon_{ext,re} \sin \Delta\omega t) \end{aligned} \quad (34)$$

Con  $\beta = \frac{1}{2} \left( G(T) - \frac{\theta}{\tau_c} \right)$ ,  $\varepsilon_{del}$  es el campo retardado y  $\varepsilon_{ext}$  el campo externo procedente del láser maestro introducido en el esclavo (que, como ya hemos comentado, sólo estará presente en el láser receptor).

El código utilizado para los diagramas de sincronización entre emisor y receptor es el siguiente:

```

clear all; clc; close all;

%%%% Parámetros %%%%%%%%%
g = 1.5e4;
beta=1.1e3;      %tasa de emisión espontánea (no se ha tenido en cuenta)
N0 = 1.5e8;      %Número de portadores en transparencia
Tr = 0.3e-9;     % retardo de ida y vuelta
tauc = 2e-9;     % vida media de los portadores
taup = 2e-12;   % vida media de los fotones
qe = 1.602e-19; % carga electrónica
w = 1.2161e+015; % frecuencia angular
al = 5;         % factor de mejora de ancho de línea
s = 5e-7;
gamma = 30e9;   %coeficiente de realimentación
I =44e-3;       %Corriente de inyección (umbral ~15mA)
e0=randn*1e-3;
e01=randn*1e-3;
Aw=0;          %detuning
kr=50e9;       %factor de acoplamiento
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Constantes de normalización %%
theta = 1/(g*N0); % Tiempo
E0 = sqrt(N0);    % Intensidad

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

yplot=[];
ycurr=[e0;e0;1];
ycurrs=[e01;e01;1];
dt=0.5e-12;
dtt=dt/theta;
ndel= Tr/dt;
Tmax=100e-9;
yND=zeros(3,Tmax/dt);
yNDs=zeros(3,Tmax/dt);
N=Tmax/dt;

t=zeros(1,N);

```

```

for n=1:N          %%%rutina
    pumpmst=[e0;e0;1];
    pumpslv=[e01;e01;1];

    if n>ndel
        pumpmst=yND(:,n-ndel);
        pumpslv=yNDs(:,n-ndel);
    end

    f1 = dydtLS(ycurr,pumpmst,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    y1 = ycurr + dtt * f1; %% Estima
    f2 = dydtLS(y1,pumpmst,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma);
    ycurr = ycurr + 1/2*dtt * ( f1 + f2 );
    yND(:,n)=ycurr;
    t(n)=n*dt;
    tcurr=t(n);
    fls =
dydtLSrec(ycurrs,pumpslv,ycurr,tcurr,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,ga
mma,Aw,kr);
    y1s = ycurrs + dtt * fls; %% Estima
    f2s =
dydtLSrec(y1s,pumpslv,ycurr,tcurr,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,qe,w,al,gamma
,Aw,kr);
    ycurrs = ycurrs + 1/2*dtt * ( fls + f2s );
    yNDs(:,n)=ycurrs;
end

Ereal=(yND(1,:));
Eimag=(yND(2,:));
E=Ereal.^2+Eimag.^2;
Ecomplex=Ereal+j*Eimag;

Ereals=(yNDs(1,:));
Eimags=(yNDs(2,:));
Es=Ereals.^2+Eimags.^2;
Escomplex=Ereals+j*Eimags;

subplot(2,1,1)
plot(E(1:100:end),Es(1:100:end),'.','Markersize',4)
xlabel('Pmaster')
ylabel('Pslave')
subplot(2,1,2)
plot(1e9*t(196500:199999),E(196500:199999))
hold on
plot(1e9*t(196500:199999),Es(196500:199999),'r')
xlabel('Time (ns)')
ylabel('Module E')
title('Blue: master, Red: slave');

```

Mientras que las funciones derivadas para el emisor y el receptor son las que siguen (de las ecuaciones normalizadas 33 y 34):

```
function out = dydtLS(y,ydel,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,e,w,al,gamma)

G1 = (y(3)-1) / ( 1 + s*N0*(y(1)^2 + y(2)^2) );
out = [(G1 - theta/taup) / 2 * (y(1) - al*y(2))+ gamma * theta * (
ydel(1)*cos(w*Tr) -... ydel(2)*sin(w*Tr) );
(G1 - theta/taup) / 2 * (y(2) + al*y(1))+ gamma * theta * (
ydel(1)*sin(w*Tr) +... ydel(2)*cos(w*Tr) );
theta*I/e/N0 - theta / tauc * y(3) - G1 * (y(1)^2+ y(2)^2)];
```

```
function out =
dydtLSrec(y,ydel,ycurr,t,theta,N0,s,tauc,taup,Tr,I,e,w,al,gamma,Aw,kr)

G1 = (y(3)-1) / ( 1 + s*N0*(y(1)^2 + y(2)^2) );
out = [(G1 - theta/taup) / 2 * (y(1) - al*y(2))+ gamma * theta * (
ydel(1)*cos(w*Tr) -... ydel(2)*sin(w*Tr) )+ theta *kr*( ycurr(1)*cos(Aw*t)
+ ycurr(2)*sin(Aw*t));
(G1 - theta/taup) / 2 * (y(2) + al*y(1))+ gamma * theta * (
ydel(1)*sin(w*Tr) +... ydel(2)*cos(w*Tr) )+ theta*kr*( ycurr(2)*cos(Aw*t) -
ycurr(1)*sin(Aw*t));
theta*I/e/N0 - theta / tauc * y(3) - G1 * (y(1)^2+ y(2)^2)];
```

En la figura 16 se muestra una gráfica de la correcta sincronización entre los láseres maestro y esclavo (casi un segmento de 45°), ambos sometidos a realimentación óptica:

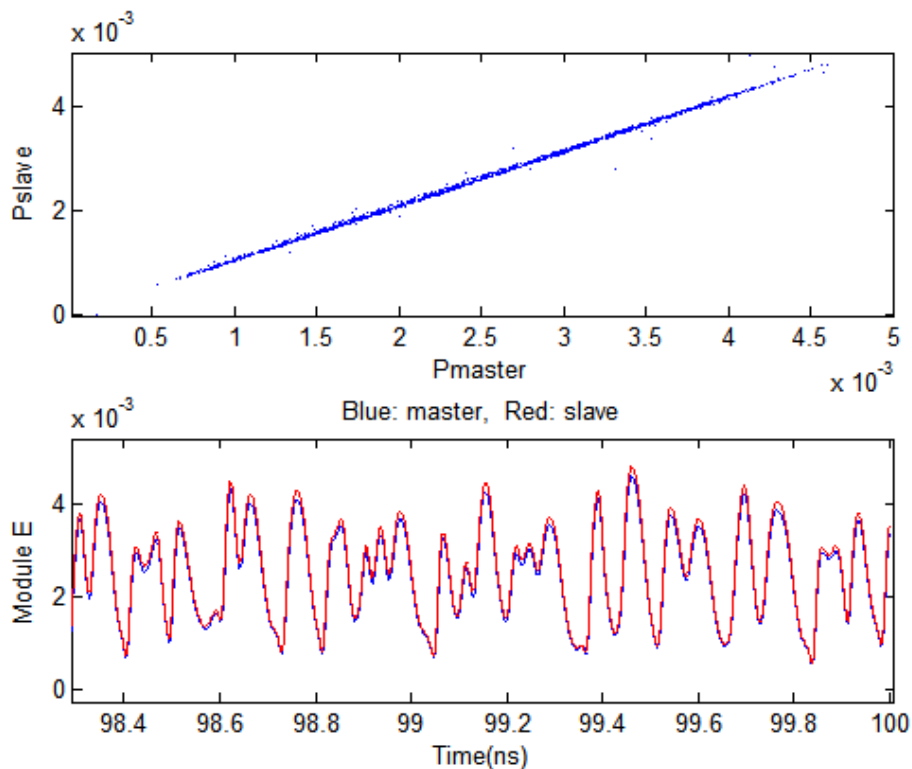


Figura 16. Ejemplo de sincronización exitosa entre transmisor y receptor.

### 6.2.1 En Función del Acoplo.

Para parámetros de ambos láseres y condiciones de operación idénticos el diagrama de sincronización (la potencia de salida del SL contra la del ML) vemos que muestra una línea recta casi de 45°. Sin embargo, se obtiene una pequeña desviación debida al hecho de que el SL tiene un poco de potencia adicional debido a la luz inyectada desde el ML. Esto se puede compensar tomando tiempos de vida media de los fotones ligeramente diferentes. Como veremos a continuación, la calidad de la sincronización entre los láseres maestro y esclavo depende fuertemente de ciertos parámetros como el coeficiente de acoplamiento, el ruido, la potencia de la realimentación, etc.

Lo que primero estudiamos es la dependencia de la sincronización con respecto al coeficiente de acoplamiento. La expresión de este coeficiente, válida para los láseres de semiconductor Fabry-Perot, es la siguiente:

$$k_r = \frac{\eta_{ext}\sqrt{1-R}}{\tau_L\sqrt{R}} \quad (35)$$

Donde R es la reflectividad de la cara del SL,  $\tau_L$  es el tiempo de ida y vuelta de la luz dentro de la cavidad del laser mientras que  $\eta_{ext}$  tiene en cuenta las pérdidas que no son las introducidas por la cara del laser. Es evidente que se requiere un valor mínimo de acoplamiento entre el ML y el SL para llegar a una buena sincronización. Incluso en el caso de que fueran láseres idénticos y con las mismas condiciones de operación un pequeño acoplo no sería suficiente para la sincronización. A continuación se muestran una serie de diagramas de sincronización como función de la fuerza del acoplamiento ( $k_r$ ). Cuando ambos láseres están desacoplados, sus trayectorias se separan con la evolución del tiempo y el diagrama de sincronización muestra una nube de puntos sin correlación alguna entre las salidas del ML y del SL (figura 17). Sin embargo, esta situación cambia cuando se introduce una pequeña cantidad de luz proveniente del ML en el SL. Incluso para valores pequeños de acoplamiento, el diagrama de sincronización muestra signos claros de sincronización entre el ML y el SL. Se puede apreciar claramente en las figuras como la sincronización mejora al aumentar  $k_r$ . Para nuestros valores paramétricos,  $k_r \gtrsim 40ns^{-1}$  comienza a dar un buen diagrama de sincronización.

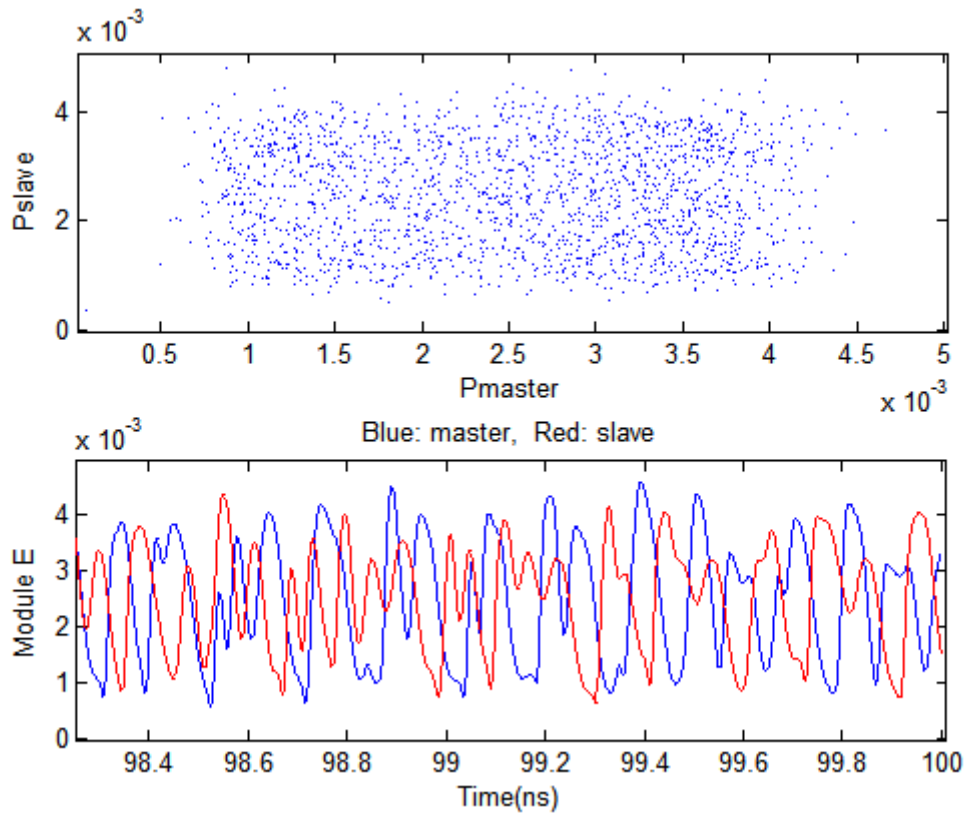


Figura 17. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $k_r=0$ .

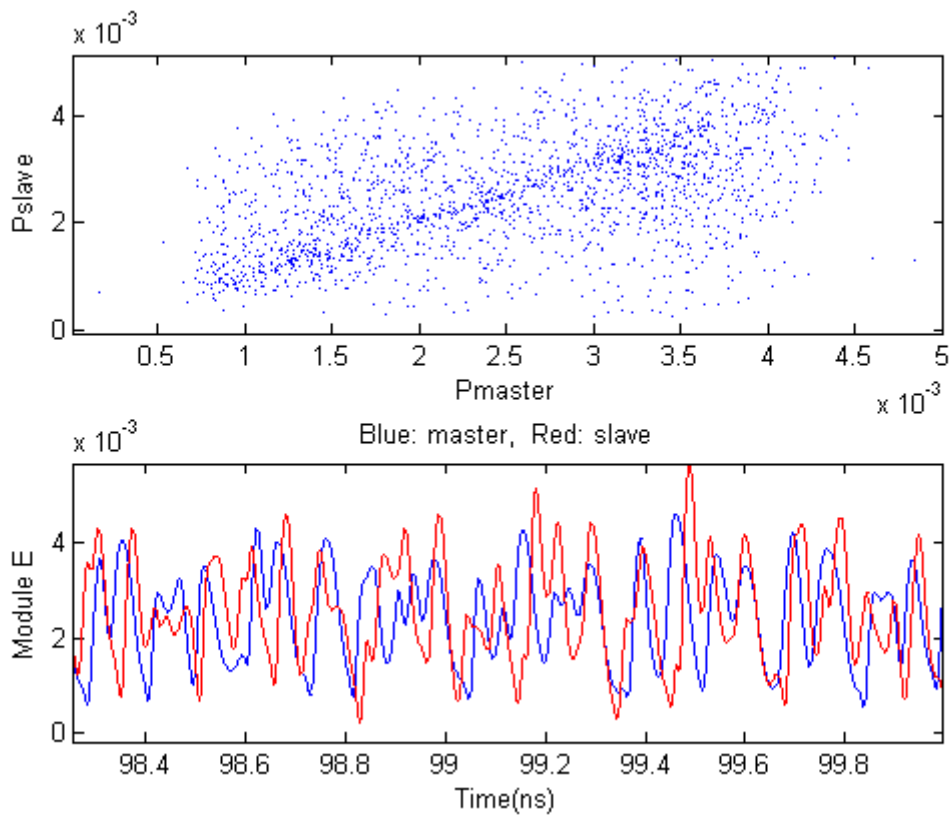


Figura 18. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $k_r=20\text{ns}^{-1}$ .

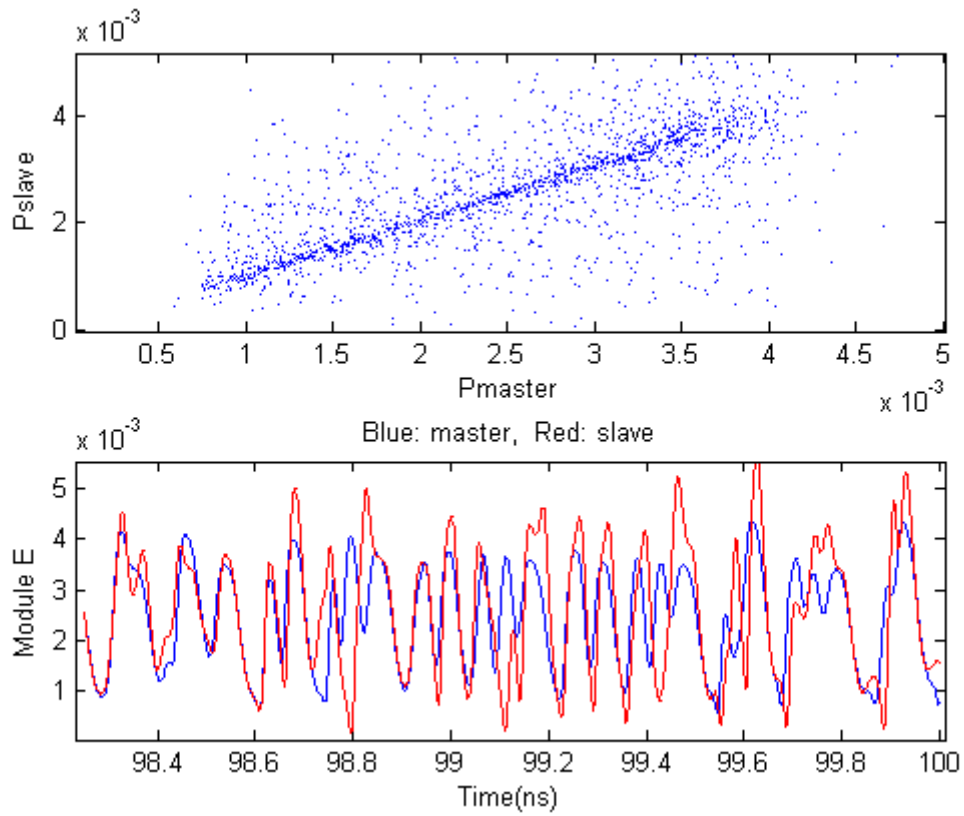


Figura 19. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $k_r=30\text{ns}^{-1}$ .

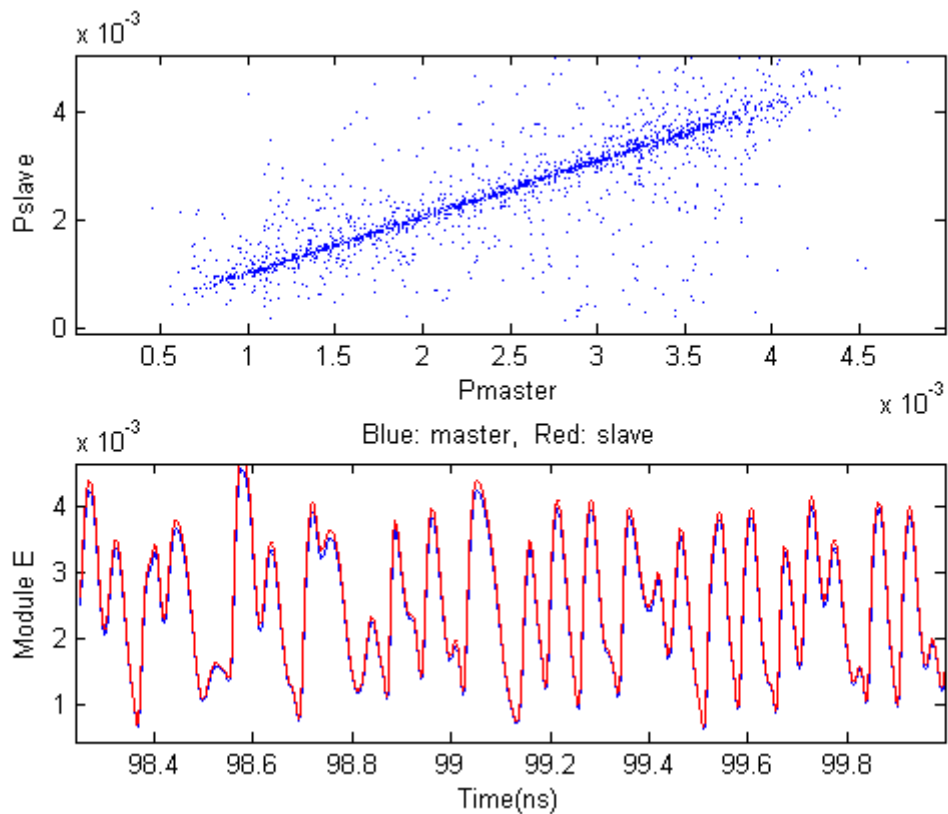


Figura 20. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $k_r=40\text{ns}^{-1}$ .

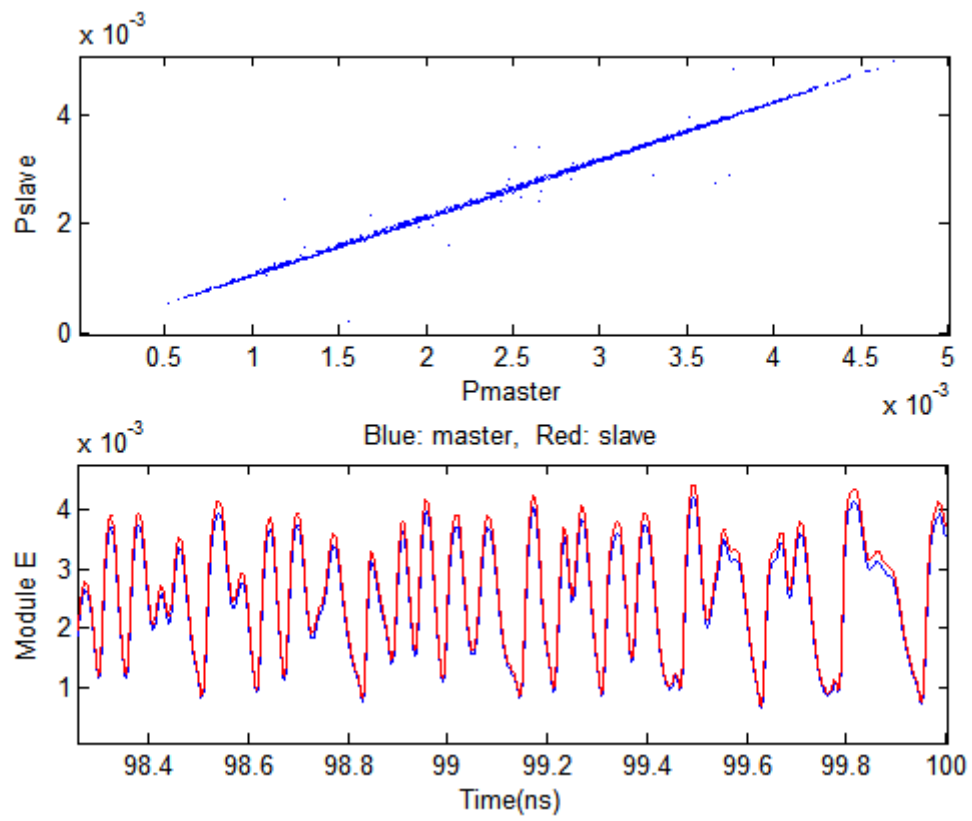
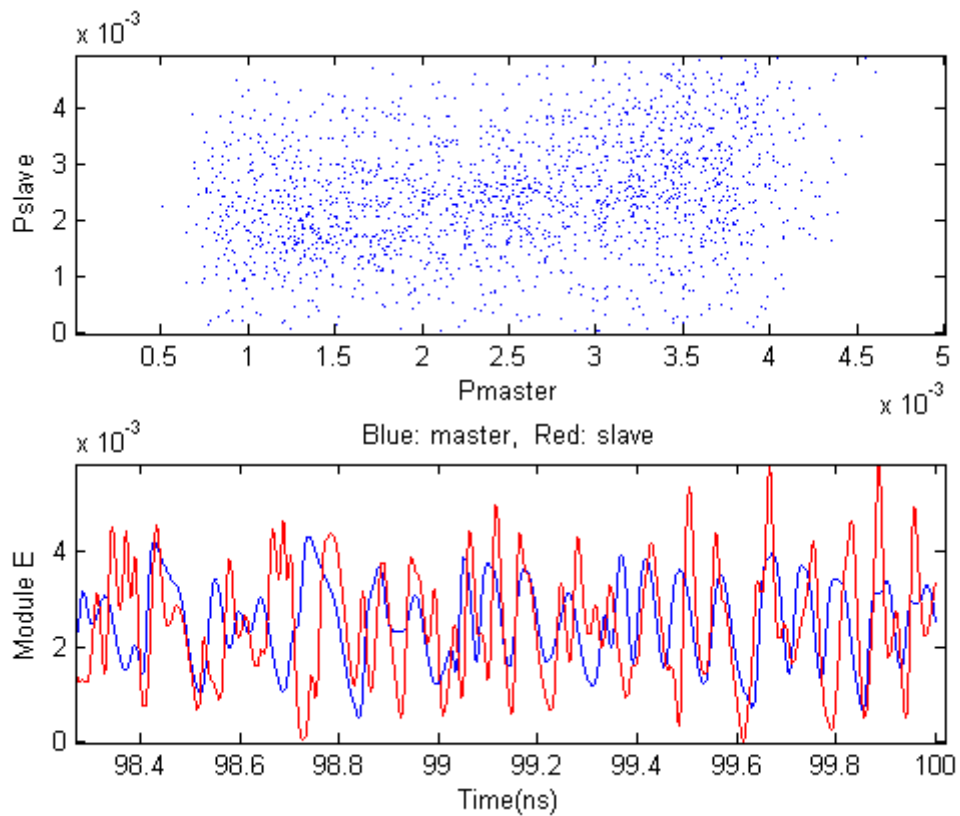


Figura 21. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $k_r=60\text{ns}^{-1}$ .



### 6.2.2 En Función del “detuning”

Otro parámetro importante es el *detuning*. Tiene en cuenta la diferencia entre las frecuencias libres de los láseres ML y SL. Las siguientes figuras muestran los diagramas de sincronización en función del *detuning*. Como ya se ha estudiado en algunas referencias (REF), existe un reducido grupo de *detunings*, que forman una ventana de sincronización, que permiten una buena sincronización. Esta ventana es de algunos GHz y es asimétrica debido al factor de mejora de línea  $\alpha$ . En nuestras simulaciones se ha obtenido el mismo resultado utilizando las ecuaciones del láser, incluida la asimetría, ya que se obtienen resultados espejados a los de las siguientes gráficas si cambiamos el signo de  $\alpha$ .



**Figura 22.** Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=-15\text{GHz}$ .

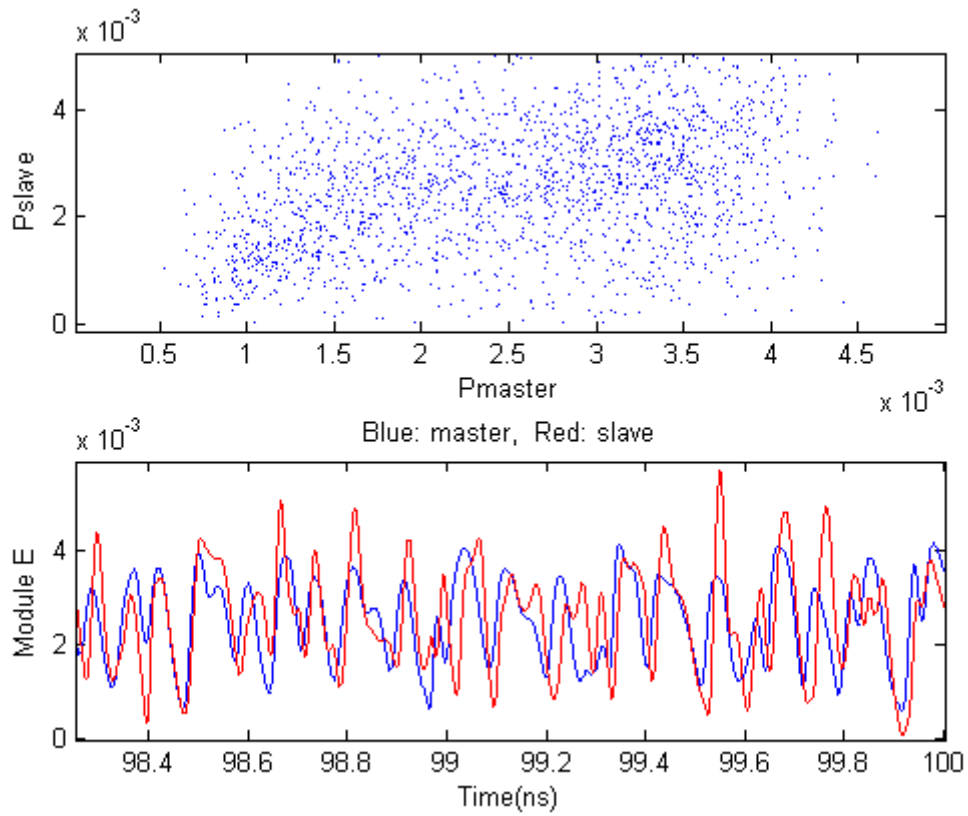


Figura 23. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=-1\text{GHz}$ .

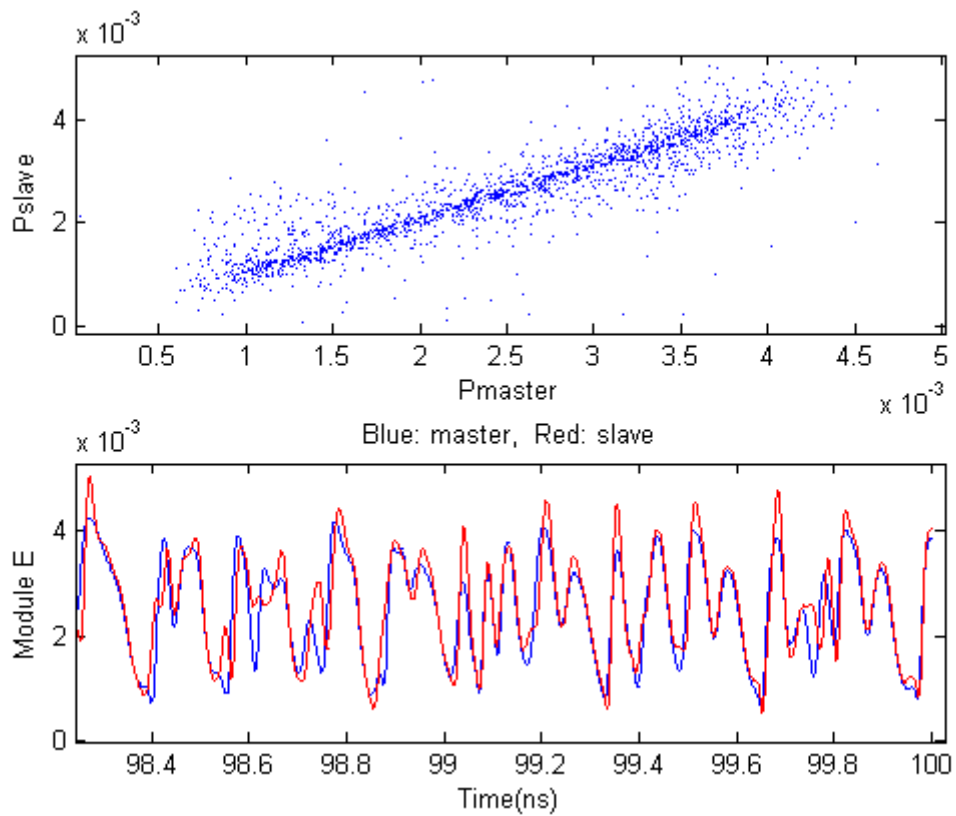


Figura 24. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=-100\text{MHz}$ .

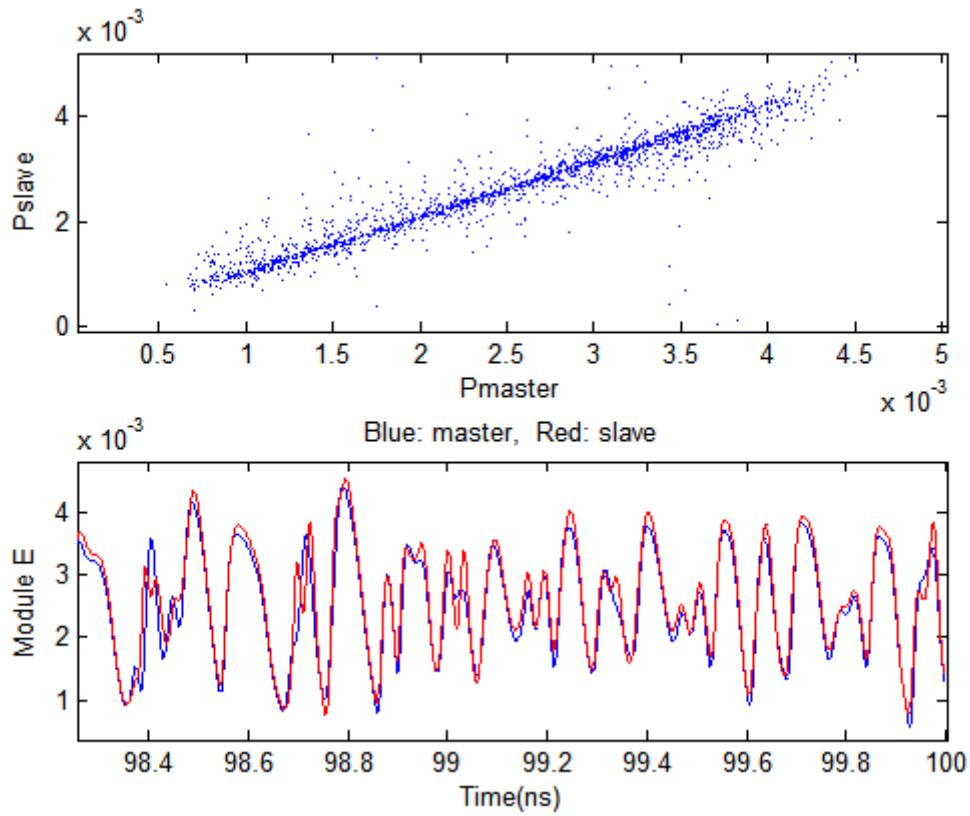


Figura 25. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=-50\text{MHz}$ .

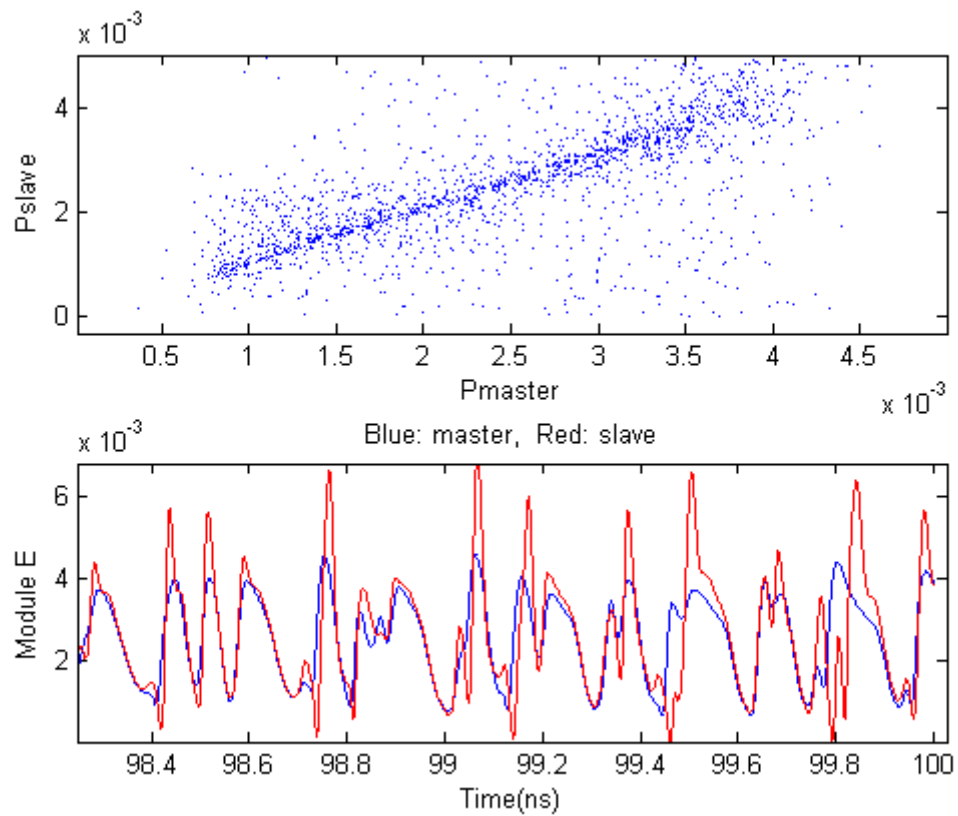
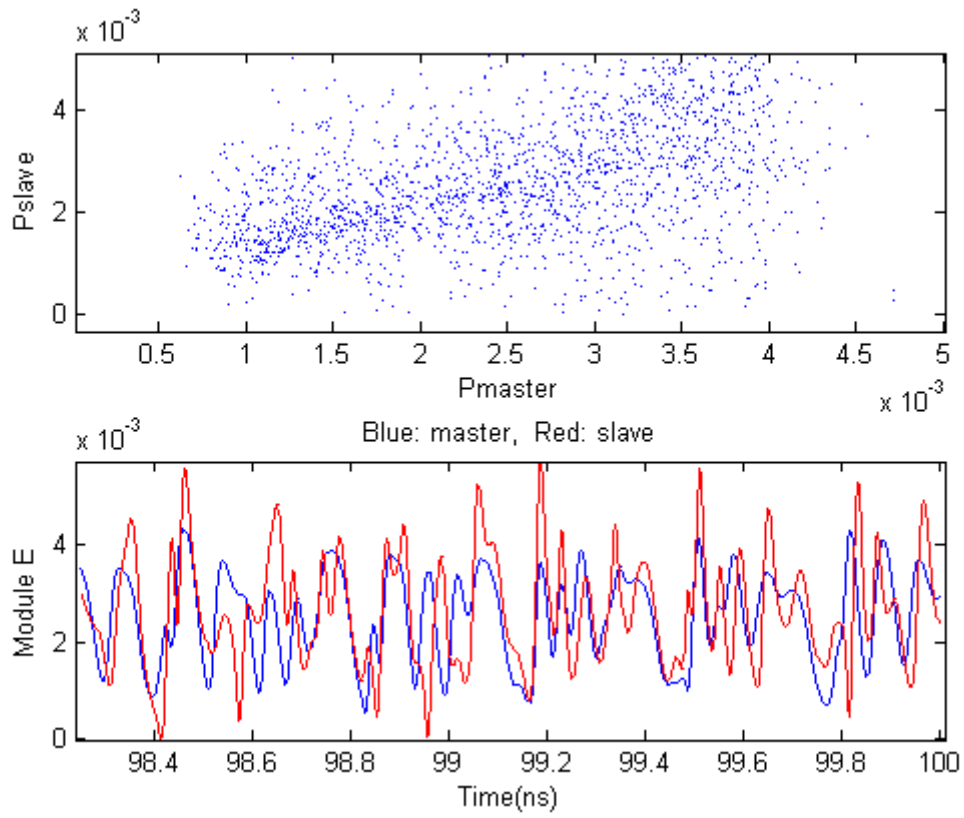


Figura 26. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=100\text{MHz}$ .



**Figura 27.** Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\Delta\nu=1\text{GHz}$ .

### 6.2.3 En Función de la Realimentación

Por último, estudiamos cómo cambia el diagrama de sincronización con el tiempo de realimentación  $\tau$ . Según veremos en las siguientes gráficas, el parámetro  $\tau$  es el responsable de la periodicidad caótica en el campo eléctrico de los láseres. Esta periodicidad se observa con claridad en la figura 30. Mientras que ese periodo se mantiene constante, el tiempo en que la señal se comporta caóticamente va aumentando, con lo que tras un intervalo suficientemente largo, la señal se vuelve completamente caótica y la periodicidad ya no se observa. Cuanto menor sea el valor del tiempo de ida y vuelta hasta el espejo, antes se vuelve totalmente caótica la señal. Este hecho se observa en las siguientes gráficas, donde, para un valor de  $\tau=0.6\text{ns}$  la periodicidad casi no se observa, mientras que para  $\tau=1.8\text{ns}$  el período se mantiene hasta unos  $40\text{ns}$  de simulación. Se ha observado experimentalmente que para intervalos incrementales de  $0.3\text{ns}$  en el tiempo de ida y vuelta, la periodicidad se mantiene aproximadamente unos  $10\text{ns}$ . En la figura 31 se puede observar el paso de la periodicidad en el caos a la señal puramente caótica.

También sabemos que el diagrama de sincronización se degrada al incrementar  $\tau$  gracias a las referencias utilizadas para este proyecto. Esto no se ha comprobado debido a la imposibilidad del ordenador utilizado para simular tiempos lo bastante grandes como para observar ese fenómeno con claridad. Para compensar esa pérdida de sincronización,  $k_r$  debe aumentarse. Aun así, se puede esperar que el acoplo entre ML y SL posea un máximo en los experimentos reales, con lo que no se puede incrementar indefinidamente. Una vez se alcanzara dicho límite, se perdería la sincronización para valores mayores de  $\tau$ .

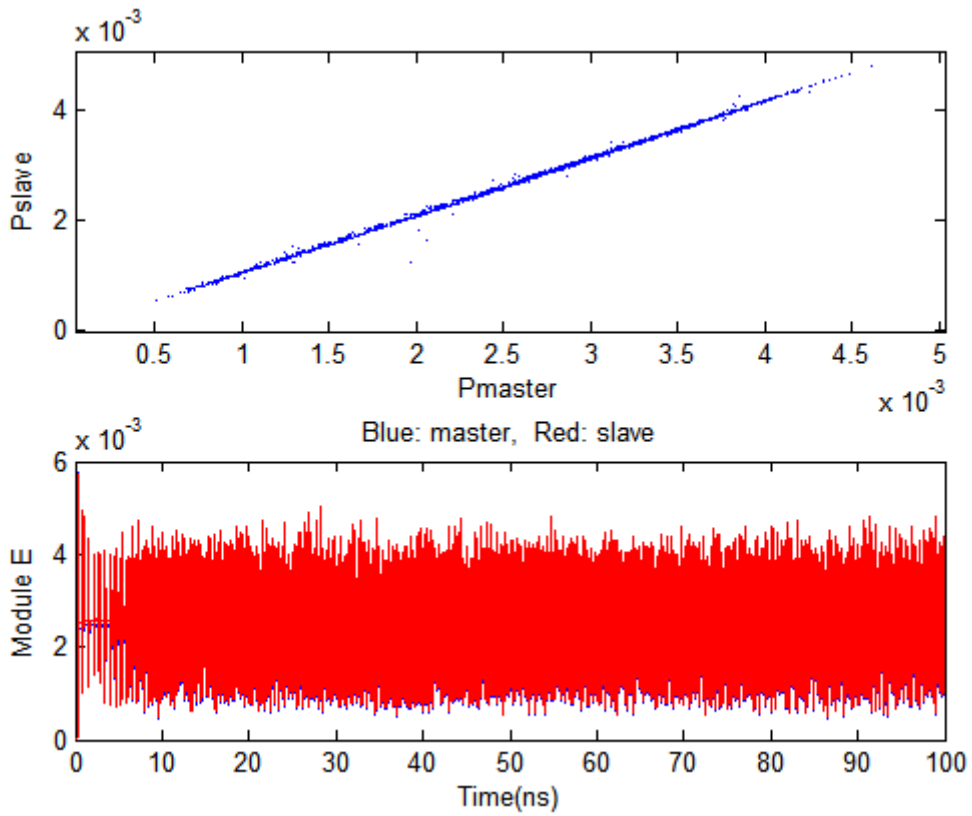


Figura 28. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\tau=0.6\text{ns}$ .

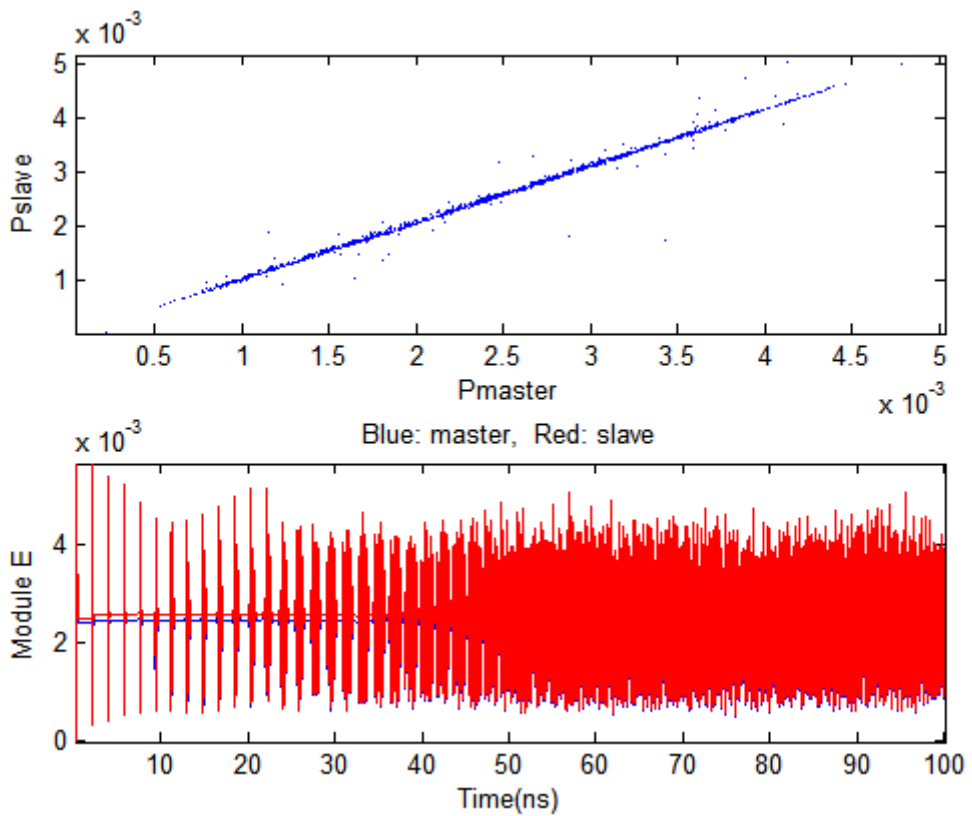


Figura 29. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\tau=1.8\text{ns}$ . Se observa claramente la periodicidad, que se desvanece pasados los 40ns.

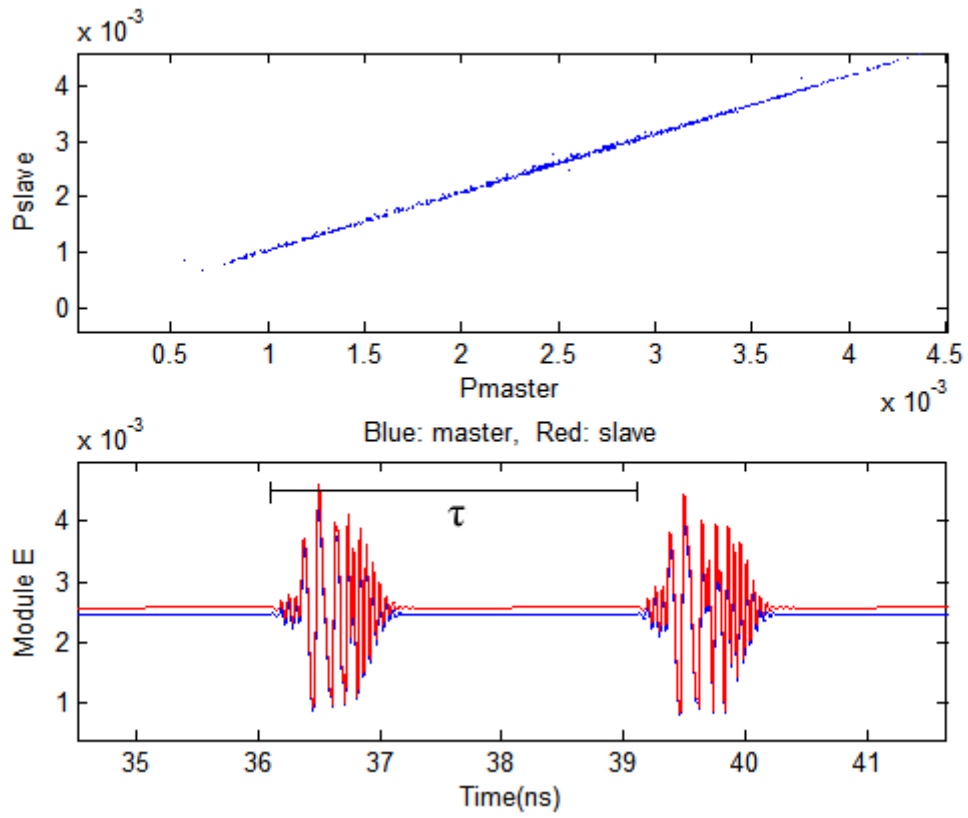


Figura 30. Diagrama de sincronización (arriba) y detalle del período caótico del campo (abajo), para  $\tau=3\text{ns}$ .

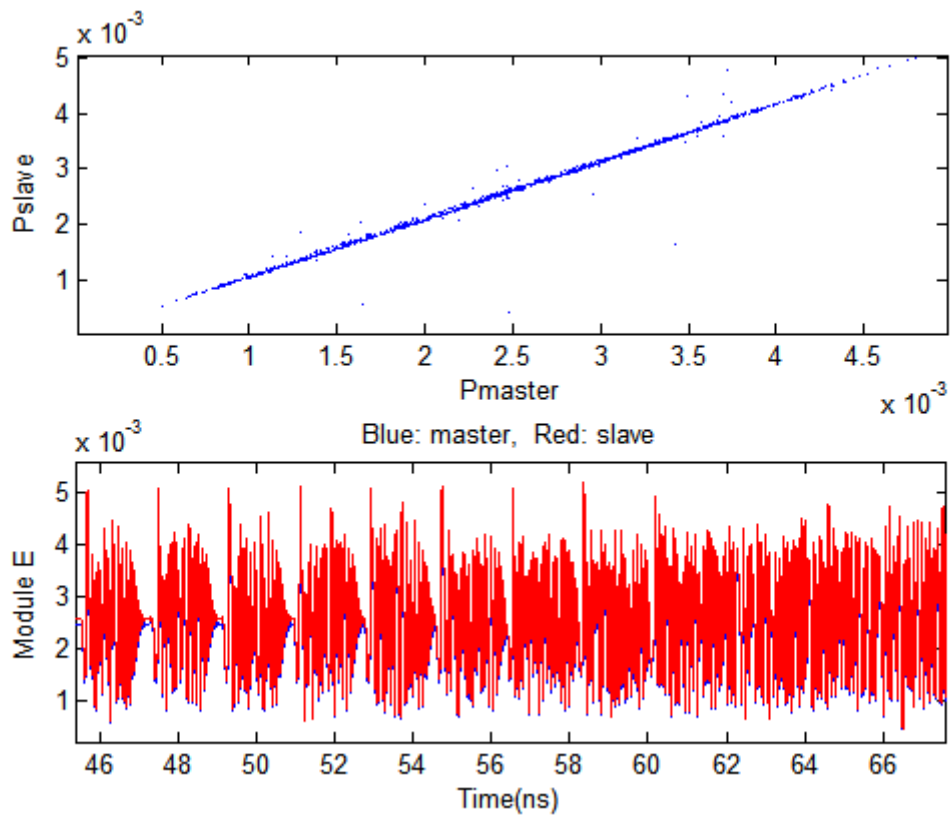
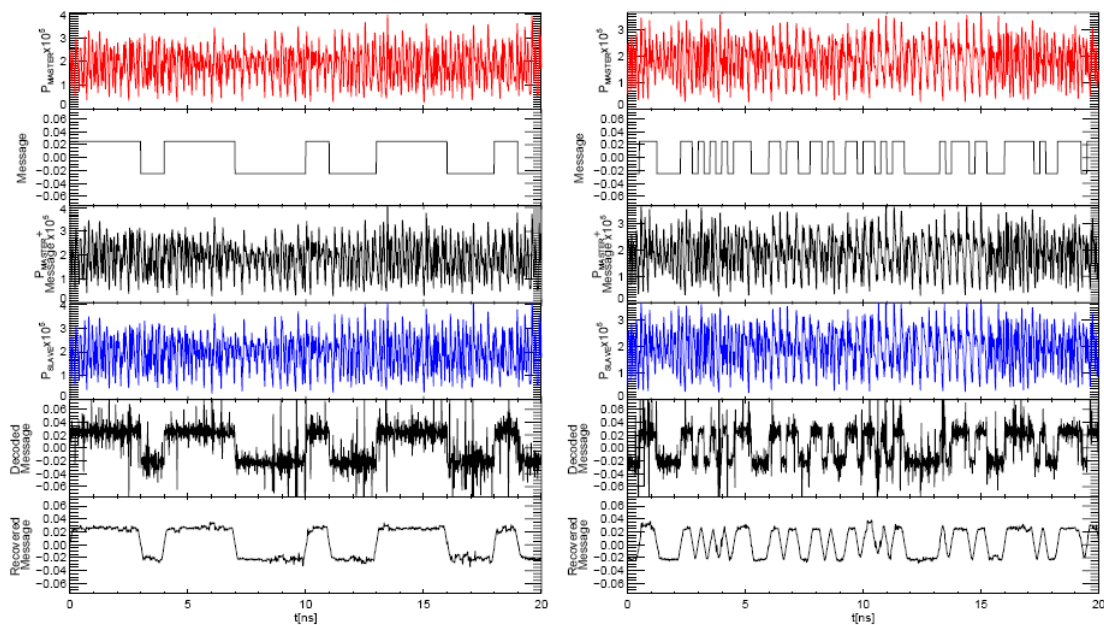


Figura 31. Diagrama de sincronización (arriba) y muestra de evolución temporal del campo (abajo), para  $\tau=1.8\text{ns}$ .

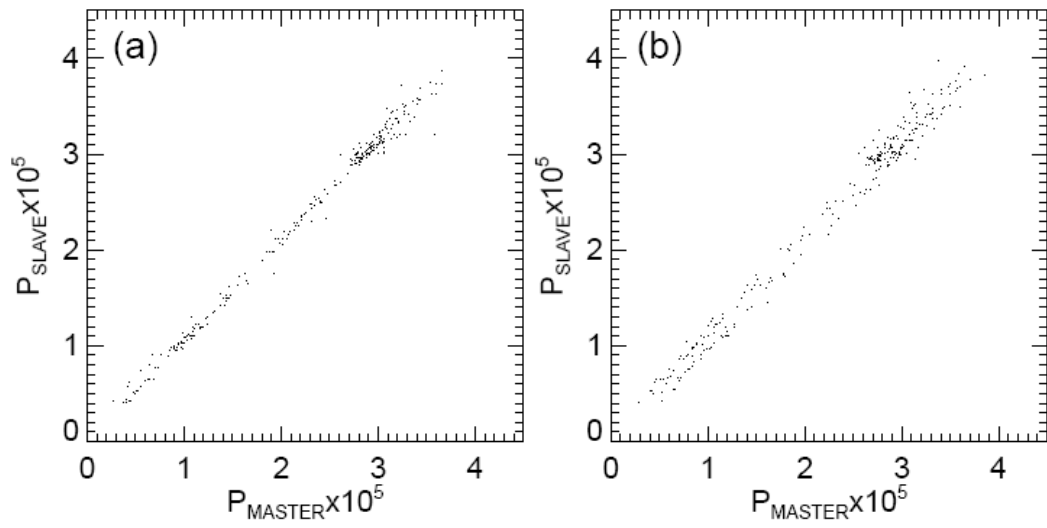
## 7. Futuras aplicaciones. Encriptación y Decriptación.

Las comunicaciones seguras son el principal uso de la sincronización de láseres llevados a caos óptico. Hace poco C. Mirasso y compañeros [7] demostraron que bajo buenas condiciones de sincronización, es posible encriptar y desencriptar un mensaje codificado en una portadora caótica. En las siguientes gráficas, sacadas de una publicación de Mirasso se observa la salida de los láseres maestro y esclavo, y el mensaje codificado y decodificado, cuando se añaden mensajes digitales NRZ de 1Gbit/s y 4Gbit/s, utilizando la técnica del enmascaramiento por caos. Si se comparan las salidas del ML con y sin el mensaje es muy difícil observar las fluctuaciones introducidas por el mensaje codificado. Además el espectro óptico también aparece muy similar a los vistos en los capítulos anteriores del proyecto. El mensaje, una vez decodificado, presenta oscilaciones muy rápidas que son fácilmente suprimidas con un simple filtrado. Además, también se obtiene un diagrama de sincronización bastante bueno.



**Figura 32.** De arriba abajo, la salida del ML, el mensaje a codificar, la salida del ML con el mensaje codificado, la salida del SL, el mensaje decodificado y por fin, el mensaje recuperado tras el filtrado.





**Figura 33.** Diagramas de sincronización cuando el mensaje se suma (enmascaramiento por caos en la salida del ML (a), y cuando el mensaje se añade a través de inyección de corriente (conmutación caótica) (b).

## 8. Conclusiones

Se ha demostrado la capacidad de los láseres de semiconductor de sincronizarse entre sí una vez llevados a comportamiento caótico, y la dependencia de una sincronización óptima en función de distintos parámetros. Se ha comprobado la necesidad de un cierto valor de realimentación, un margen estrecho de *detuning* y los efectos de la posición del espejo en la realimentación.

Por otro lado, se ha presentado un sistema de comunicaciones simple pero robusto, basado en sincronización caótica entre dos sistemas de láseres que permite incluso la codificación-decodificación de mensaje a altas frecuencias. Éste sistema podría complementar la seguridad ya existente hoy en día a través de la codificación software. Es un nivel más de protección casi invulnerable que requiere poseer los mismos componentes y condiciones de operación en los dos extremos de la comunicación.

## 9. Agradecimientos

Éste ha sido un proyecto fascinante en todos los sentidos. Las comunicaciones ópticas siempre han sido uno de mis campos favoritos en las telecomunicaciones, y tener el placer de hacer mi proyecto final de carrera dentro de él ha sido muy estimulante.

Me gustaría agradecer la ayuda prestada y tutelaje a lo largo de todo el proyecto a mis dos directores, Cristian Antonelli, profesor de Ingegneria Elettrica de la Università dell'Aquila, quien me mostró el mundo de los láseres caóticos y me ayudó a mejorar mi programación en Matlab; y a José Víctor Rodríguez, profesor de Ingeniería de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Cartagena, que nunca me ha dejado por imposible pese a lo que ha durado su ayuda (¡casi 4 años!) y se ha quitado vacaciones sólo para que yo pueda leer este proyecto.

Muchas gracias por el apoyo prestado.

## 10. Bibliografía

- (a) Análisis Numérico. Richard Burden.
- (b) Semiconductor Lasers. Stability, Instability and Chaos. Junji Ohtsubo
- (c) Applications of semiconductor lasers to secure communications. Claudio R. Mirasso
- (d) Semiconductor Lasers. Agrawal/Dutta
- (e) Chaos in Semiconductor Lasers with Optical Feedback: Theory and Experiment. Jesper Mark, Bjame Tromborg, Jannik Mark
- (f) External Optical Feedback Effects on Semiconductor Injection Laser Properties. Roy Lang, Kohroh Kobayashi
- (g) Synchronization of Chaotic Injected-Laser Systems and Its Application to Optical Cryptography. Valerio Annovazzi, Silvano Donati, Alessandro Scirh
- (h) Quantum Electronics. Amnon Yariv
- (i) <http://calculuslab.deltacollege.edu/ODE/7-C-3/7-C-3-h.html>

## Referencias

- [1] *Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications.* Cuomo, K.M., Oppenheim, A.V, Strogatz, S.H.
- [2] *Digital communications with synchronized chaotic lasers.* Colet, P., Roy, R.
- [3] *Communications with chaotic lasers.* Van Wiggeren, G.D., Roy, R.
- [4] *Synchronization of chaotic semiconductor lasers: applications to encoded communications.* Mirasso, C.R., Colet, P., García-Fernández, P.
- [5] *Encoded Gbit/s digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers.* Sánchez-Díaz, A., Mirasso, C., Colet, P., García-Fernández, P.
- [6] *Experiments on chaos synchronization in two separate microchip lasers.* Uchida, A., Shinozuka, M., Ogawa, T., Kannari, F.
- [7] *Applications of semiconductor lasers to secure communications.* Mirasso, C.