

ANÁLISIS MODAL DE GUÍAS DE ONDA DE
SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA.

Trabajo Fin de Grado

Martín Prieto Aguilera

Índice general

1. Fundamentos teóricos	4
1.1. Espacios lineales	4
1.2. Integración Numérica	9
1.2.1. La Cuadratura de Gauss-Legendre	10
1.3. Funciones de Green	12
1.4. Método de los momentos	15
1.4.1. Método de los Momentos en Problemas Deterministas	16
1.4.2. Método de los Momentos en Problemas de Autovalores	21
1.5. Electrodinámica y guías de onda	23
1.5.1. Guías de onda	27
2. Introducción a los métodos diferenciales	35
2.1. Mallado del espacio y aproximación del operador	36
2.2. Resolución de la ecuación de onda en 1D	38
2.2.1. Primer caso: la función objetivo se anula en ambos extremos	38
2.2.2. La derivada de la función objetivo se anula en ambos extremos	40
2.2.3. Tercer caso: la función objetivo se anula en un extremo y su derivada en el opuesto	41
2.3. Resolución de la ecuación de onda en 2D	41
2.3.1. Cálculo de los modos TM	43
2.3.2. Cálculo de los modos TE	44
2.3.3. Combinación de condiciones de contorno	45
2.3.4. Ejemplos	46
3. El método BI-RME	51
3.1. Formulación teórica general	52
3.2. Teoría de los Modos TE	56

3.3. Teoría de los Modos TM	59
3.4. Teoría de los Modos TEM	61
3.5. Definiendo los contornos perturbantes	64
3.6. Obtención de las funciones base	66
3.7. Generalizar operaciones: el cambio de variable	75
3.8. Cálculo de los modos TM	75
3.9. Cálculo de los modos TE	92
3.10. Cálculo de los modos TEM	109
3.11. Algoritmo de descarte modal	113
4. Conclusiones y líneas futuras	117
A. Expresiones normalizadas de las funciones modales	119
B. Gradiente de la función de Green escalar	122
C. Directrices generales de programación	123

Resumen y agradecimientos

Como parece obvio dado el título, el presente documento tiene por objeto de estudio las guías de onda de sección transversal arbitraria y la resolución modal de las mismas. Entendemos por resolución modal el cálculo de las frecuencias de corte de los modos compatibles y los campos asociados a cada modo. Tradicionalmente se han abordado dos enfoques distintos para dar solución al problema que se presenta: métodos diferenciales y métodos basados en ecuación integral. En este documento se han dedicado unas cuantas páginas a exponer algunos conceptos muy útiles en torno a los métodos diferenciales para la resolución de problemas de autovalores en estructuras bidimensionales. La principal ventaja de los mismos radica en su sencillez de comprensión y en su versatilidad a la hora de plantear el problema; su principal desventaja es la falta de precisión y el coste computacional que acarrea la resolución de problemas de autovalores de gran tamaño. De los métodos integrales, nos centraremos en el método BI-RME, que hace uso de un núcleo integral —función de Green diádica)— específica para guías de onda rectangulares y circulares, que resulta en una gran ventaja respecto al uso de la función de Green de espacio libre empleada por otros métodos anteriores. Se ha hecho incapié en ilustrar los procedimientos de la forma más clara posible y en proporcionar ejemplos ilustrativos que nos permitan vislumbrar las capacidades de los algoritmos implementados, pero también sus limitaciones —especialmente en términos de coste computacional y precisión de resultados—.

Quiero agradecer a los profesores del Departamento Tecnologías de la Información y las Comunicaciones de la UPCT y directores de este trabajo Dr. Alejandro Álvarez Melcón y Dr. Fernando Daniel Quesada Pereira por darme la oportunidad de realizar un trabajo de estas características —de naturaleza fundamentalmente numérica— ciertamente alejado del estándar de trabajo basado mucho más en simulaciones y prueba-error. También agradecer a la estudiante de doctorado Célia Gómez Molina y, en general, a todo

el personal del Grupo de Electromagnetismo aplicado a las Telecomunicaciones por el gran ambiente de trabajo predispuesto y que ha posibilitado la realización de este estudio en las mejores condiciones posibles. Gracias a todos.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

Como primera sección de este trabajo vamos a exponer algunas ideas básicas sobre ciertos temas que nos sean útiles en posteriores desarrollos. En primer lugar se explicarán los conceptos más básicos que conciernen a la teoría de espacios lineales. Personalmente, me ha sido de bastante ayuda haber revisado los conceptos que aquí se exponen para poder comprender muchas de los procedimientos realizados en este trabajo y creo que es mandatorio incluir una sección que los describa. Luego se introducen las reglas de integración numérica, haciendo especial incidencia en la cuadratura de Gauss-Legendre, siendo este el método que he empleado para resolver la parte no singular de las integrales de BI-RME (ver capítulo 3). El método de los Momentos (MoM) es otro de los temas a discutir en este primer capítulo. Este proporciona las definiciones que dan asiento a los métodos tradicionales de resolución numérica de ecuaciones diferenciales e integrales. También se expondrá el concepto de función de Green, usada como núcleo en ecuaciones integrales. Finalmente, no puede faltar una sección dedicada a los fundamentos de electrodinámica y análisis de guías de onda, puesto que es este, a fin de cuentas, el objeto principal de el presente documento.

1.1. Espacios lineales

Los conceptos fundamentales de espacios lineales son de extrema importancia para poner en un contexto matemático apropiado los problemas que se irán planteando en este documento. Estas ideas permiten dar cierto formalismo a los problemas lineales y ayudan tanto en su planteamiento como en su posterior interpretación.

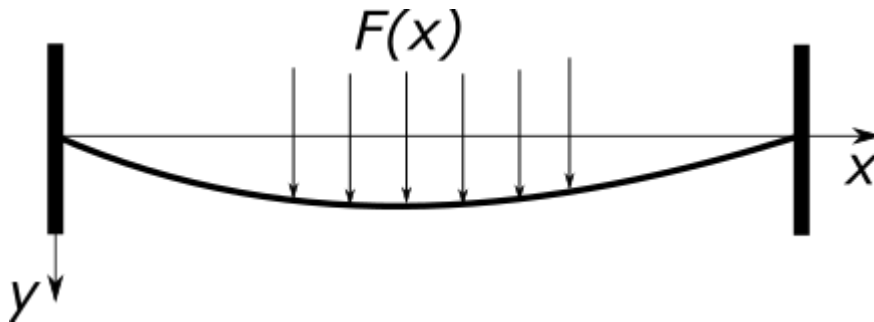


Figura 1.1: Cuerda flexible fijada en $x = 0$ y $x = l$

En la literatura existen ejemplos magníficos que permiten introducir estos conceptos. Uno muy ilustrativo es el problema de la cuerda flexible fijada por sus extremos.

Cualquier problema lineal se puede plantear en forma de ecuación diferencial con una serie de condiciones de contorno asociadas; por ejemplo, en el problema de la cuerda disponemos de la conocida relación

$$T \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = F(x) \quad (1.1)$$

Sujeta a la condición de contorno

$$y(x = 0) = y(x = l) = 0$$

Dónde T representa la tensión de la cuerda —en Newtons—, $F(x)$ la densidad de la fuerza —en N/m— a lo largo de su longitud e $y(x)$ (en metros) el desplazamiento vertical asociado a cada punto x .

Otro ejemplo muy ilustrativo es el de la línea de transmisión; en ella la tensión y la corriente cumplen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \beta^2 V(z) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \beta^2 I(z) = 0 \quad (1.3)$$

Las condiciones de contorno dependen de la terminación del circuito. En una línea acabada en abierto, la tensión alcanzaría un máximo en el extremo y la corriente se haría cero

$$\frac{dV}{dz}(z = 0) = 0$$

$$I(z = 0) = 0$$

Si, por el contrario, esa misma línea acabase en corto, tendríamos tensión nula y corriente máxima en el extremo terminante

$$V(z = 0) = 0$$

$$\frac{dI}{dz}(z = 0) = 0$$

A partir de estos ejemplos vemos claramente que, sea cual sea el problema, las funciones incógnita que aparecen poseen ciertas propiedades que dependen de la naturaleza física del mismo y de las condiciones en las que se plantea. Por ejemplo, en el primer caso —el de la cuerda—, el desplazamiento $y(x)$ en respuesta a la fuerza aplicada ha de ser una función real y continua de x (suponiendo, por supuesto, que no se va a romper). Además, ese mismo desplazamiento ha de ser cero en los dos extremos sobre los que se fija la cuerda (restricción física que imponemos).

En el caso de la línea de transmisión, tanto la tensión como la corriente serán, en general —siempre que se esté trabajando con fasores en el dominio de la frecuencia—, números complejos —poseen módulo y fase—, serán funciones continuas de la posición z (no pueden existir saltos abruptos de tensión o corriente) y sus derivadas, así mismo, continuas (la variación de estas variables ha de ser suave a lo largo de la línea). Por supuesto, ambas magnitudes tienen que cumplir la condición de contorno fijada por el tipo de terminación.

Vamos a restringir la explicación a lo fundamental de lo fundamental (sólo necesitamos lo más esencial para ser capaces de poner en contexto la metodología empleada más adelante y dar interpretación a los resultados obtenidos). Todo el material presentado se puede encontrar con gran nivel de detalle en múltiples publicaciones [1, 2]. En lo que a mí respecta, me centraré en dar una explicación clara sin zambullirme en demasiados formalismos matemáticos.

Empecemos por la definición de espacio lineal.

Un espacio lineal S es un conjunto de elementos —llamados vectores— sobre los que se definen dos operaciones básicas: suma y producto por escalar —real o complejo— de forma que:

1. Ambas operaciones son conmutativas, asociativas y dan lugar a un elemento de S .
2. Existe un único vector nulo 0 tal que $f + 0 = f$ y $f \times 0 = 0$
3. El producto del vector f por el escalar 1 produce f .
4. Cada vector f tiene asociado un único vector $-f$ tal que $f + (-f) = 0$

Dentro de un espacio lineal S , podemos seleccionar elementos y combinarlos linealmente para obtener otros elementos de S . Dado un conjunto de elementos f_1, f_2, \dots, f_N , diremos que son linealmente independientes si la ecuación

$$\sum_{n=1}^N a_n f_n = 0 \tag{1.4}$$

sólo se satisface si $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$. Dicho de otra manera: si no soy capaz de expresar alguno de los vectores del conjunto como combinación lineal del resto, entonces son linealmente independientes.

Un conjunto de elementos linealmente independientes constituye una base. Esta última genera un espacio lineal cuya dimensión es igual al número de elementos que la definen.

Los espacios lineales con los que trabajaremos en adelante tienen dos características adicionales: son **espacios normados** y definen convenientemente un **producto escalar**. Un espacio normado es aquél en el que a cada elemento f se le asocia un valor positivo $\|f\|$ —al que nos referiremos como norma de f — tal que:

1. $\|f\| \geq 0$, siendo $\|f\| = 0$ válido sólo para $f = 0$
2. $\|kf\| = |k|\|f\|$, donde k es un número complejo.
3. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$

Las propiedades sobre las que se asienta el concepto de *norma* permiten interpretarla como una distancia. De esta forma, la norma de un elemento f se puede interpretar como la longitud del mismo (o como su distancia respecto al origen de coordenadas). Gracias a la primera propiedad, la norma de la diferencia entre dos elementos se puede interpretar como una medida de la distancia entre ellos, puesto que $\|f_2 - f_1\| = 0$ implica $f = 0$.

Los espacios que definen un producto escalar permiten obtener medidas entre elementos; por ejemplo, proyecciones de un elemento f_1 sobre otro

f_2 . El espacio lineal normado y con producto escalar más explorado en la literatura es el de Hilbert. Este define las siguientes propiedades para el producto escalar:

1. $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle^*$
2. $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, f_3 \rangle = a_1 \langle f_1, f_3 \rangle + a_2 \langle f_2, f_3 \rangle$
3. $\langle f_3, a_1 f_1 + a_2 f_2 \rangle = a_1^* \langle f_3, f_1 \rangle + a_2^* \langle f_3, f_2 \rangle$
4. $\langle f, f \rangle \geq 0$, siendo $\langle f, f \rangle = 0$ válido sólo para $f = 0$.

Nótese como la propiedad (4) del producto escalar nos permite definir la norma de f como

$$\|f\| = \langle f, f \rangle \quad (1.5)$$

La propiedad (3) se puede desarrollar a partir de la (1) y la (2).

Llegados a este punto sólo queda por introducir alguna que otra noción sobre operadores y transformaciones lineales. Los ejemplos de la cuerda y la línea de transmisión son casos concretos de una formulación más general

$$\mathcal{L}f = g \quad (1.6)$$

donde \mathcal{L} representa un operador lineal (usualmente será un operador diferencial o integral). Al conjunto de elementos f sobre los que se opera se le llama *dominio* del operador. Al conjunto de elementos g que se obtienen como resultado de la transformación constituye el *rango* del operador.

El dominio queda definido por las restricciones físicas del problema y por sus condiciones de contorno (si \mathcal{L} es un operador diferencial). Por ejemplo, en el caso de la cuerda, el dominio viene dado por el conjunto de funciones continuas y derivables a trozos en el intervalo $(0, l)$ que se anulan en $x = 0$ y $x = l$. Para que una transformación sea lineal ha de cumplir que

$$\mathcal{L}(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_N f_N) = a_1 \mathcal{L}f_1 + a_2 \mathcal{L}f_2 + \dots + a_N \mathcal{L}f_N \quad (1.7)$$

Un problema definido por la ecuación (1.6) tiene dos versiones. Una en la que \mathcal{L} y g son conocidas y la incógnita es f (problema de *análisis*) y otra en la que f y g son conocidas y hay que desarrollar \mathcal{L} para que se satisfaga la ecuación (problema de *síntesis*). En este documento sólo estamos interesados en el problema de análisis, en cuya resolución nos encomendamos al Método de los Momentos explicado más adelante.

1.2. Integración Numérica

Durante nuestro periodo de estudiante, se nos acostumbra a trabajar con integrales de fácil solución analítica; muchas veces inmediatas, a veces un poco más difíciles, pero, al fin y al cabo, resolubles a fuerza de papel y lápiz —o mediante el uso de software de cálculo simbólico, como MATLAB, Máxima o Mathematica—. Las aplicaciones prácticas van por otro camino; frecuentemente nos encontramos con funciones imposibles de integrar analíticamente —no tienen primitiva sobre la que aplicar la Regla de Barrow, como las integrales de Fresnel—. Otras veces las funciones a integrar serán tan complejas que, a pesar de tener solución analítica, será impráctico invertir el tiempo y el esfuerzo en llegar hasta ella. En otro escenario directamente no tendremos una expresión analítica que integrar sino una serie de valores tabulados, correspondientes a la evaluación de determinada magnitud y obtenidos tras una campaña de medidas. En todos estos casos existe una solución práctica que nos permite evaluar una integral sin necesidad de resolverla analíticamente: la integración numérica. Los algoritmos que llevan a cabo esta tarea son denominados comúnmente cuadraturas o reglas de integración. Las cuadraturas se basan en realizar una aproximación a trozos de la función a integrar mediante polinomios —cuyas integrales en cualquier tramo son sencillamente evaluables de forma analítica—. Según el grado de los polinomios empleados en la aproximación del integrando se definen las siguientes reglas clásicas de integración:

- Regla del Rectángulo. Se usan constantes a trozos (rectángulos) para aproximar la función del integrando.
- Regla del Trapecio. Se emplean polinomios de grado uno (rectas) para realizar una aproximación lineal por partes.
- Regla de Simpson. Se emplean polinomios de grado dos (parábolas) para realizar una aproximación cuadrática por partes.

Un concepto importante es el de Grado de Precisión (DP) [3] de una regla de integración. Este se define como el grado máximo que podría tener un polinomio arbitrario para que su integración por cuadratura diese el valor exacto de la integral. La regla del rectángulo tiene un DP igual a 0 —sólo puede integrar de forma exacta constantes—. La del trapecio tiene un DP de 1 —puede integrar de forma exacta rectas de cualquier pendiente, así como funciones a trozos compuestas por rectas—. La Regla de Simpson tiene un DP de 3 (ya, se lo que estás pensando, que esto último es una errata, pero

no; esta regla tiene un DP de 3 a pesar de que emplee parábolas para realizar la aproximación del integrando, por sorprendente que parezca). Todas estas reglas tienen su lugar en la práctica y un momento para usarlas; pero si dispones de la expresión analítica de la función a integrar (no una serie de valores tabulados) y lo que quieres es precisión con mayúsculas, la regla a emplear no es otra que la Cuadratura de Gauss.

1.2.1. La Cuadratura de Gauss-Legendre

Esta regla de integración, ideada por el genial matemático alemán Carl Friedrich Gauss, proporciona el mejor Grado de Precisión posible de entre todos los métodos de integración y será la cuadratura a emplear cada vez que haya que evaluar una integral en el capítulo sobre el método BI-RME. El DP de esta regla de cuadratura es:

$$DP_{Gauss} = 2n - 1$$

Donde n es el número de puntos en los que se evalúa la función del integrando. Para que te hagas una idea; con $n = 2$ puntos de evaluación podríamos integrar de forma exacta un polinomio de grado 3. Con la Regla de Simpson se necesitaría evaluar el mismo integrando en al menos 5 puntos para alcanzar la misma solución (y sería imposible alcanzar una solución exacta si en el integrando tenemos un polinomio de cuarto grado o más).

La Cuadratura de Gauss para una función de una variable se calcula empleando la fórmula siguiente:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{k=1}^n w_k f(t_k) \quad (1.8)$$

Los valores de los puntos de evaluación t_k y sus pesos asociados w_k se pueden encontrar en tablas. Un detalle a tener en cuenta es que estos vienen tabulados únicamente para el intervalo $[-1, 1]$ de la variable de integración —de ahí que en la expresión anterior el intervalo de integración aparezca explícitamente fijado a ese rango—. Si queremos integrar en un intervalo genérico $[a, b]$ tendremos que hacer un cambio de variable tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 g(t)dt \quad (1.9)$$

Con

$$g(t) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \quad (1.10)$$

De forma que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n w_k g(t_k) \quad (1.11)$$

En funciones de dos (o más) variables sigue imperando:

$$\int_a^b \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} f(x, y)dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i \hat{w}_j g(t_i, \hat{t}_j) \quad (1.12)$$

Con

$$g(t, \hat{t}) = \frac{b-a}{2} \frac{\hat{b}-\hat{a}}{2} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \frac{\hat{b}+\hat{a}}{2} + \frac{\hat{b}-\hat{a}}{2}\hat{t}\right) \quad (1.13)$$

Ejemplo

Queremos evaluar numéricamente, mediante Cuadratura de Gauss la integral

$$\int_0^1 \sin(\pi x)dx \quad (1.14)$$

La función del integrando es

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad (1.15)$$

Haciendo el cambio de variable para llevarnos el intervalo de integración al estándar $[-1, 1]$, obtendríamos la función de la nueva variable t

$$g(t) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) \quad (1.16)$$

Evaluamos $g(t)$ en los puntos apropiados, definidos en la tabla 1.1. También se muestran los pesos asociados a cada punto. Finalmente, multiplicamos cada peso w_k por su correspondiente $g(t_k)$ y sumamos

$$\int_0^1 \sin(\pi x)dx \approx 0,1713 \times 0,0529 + 0,3608 \times 0,2537 + \dots = 0,6366 \quad (1.17)$$

t_k	-0.9325	-0.6612	-0.2386	0.2386	0.6612	0.9325
w_k	0.1713	0.3608	0.4679	0.4679	0.3608	0.1713
$g(t_k)$	0.0529	0.2537	0.4653	0.4653	0.2537	0.0529

Tabla 1.1: Valores para el cálculo de la cuadratura

	Rectángulo	Trapezio	Simpson	Gauss
Valor	0.64072886	0.62841743	0.63662505	0.63661977
Error abs.	0.00410908	-0.00820233	0.00000528	≈ 0
Error rel.	0.64545428	-1.28841990	0.00082955	≈ 0

Tabla 1.2: Comparativa de reglas de integración

Comparativa de Reglas de Integración

Vamos a concluir este apartado poniendo en competencia a las reglas de integración mencionadas —Rectangular, Trapecio, Simpson y Gauss— a ver cuál se alzaría con la victoria en un enfrentamiento de precisión en igualdad de condiciones (número de puntos de evaluación de la función objetivo).

El objetivo será evaluar la integral del ejemplo anterior, cuya solución analítica es conocida:

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} \approx 0,63661977 \quad (1.18)$$

Para que la competición se desarrolle en igualdad de condiciones, todas las reglas usarán el mismo número de puntos (o intervalos) $n = 8$.

Vemos que la cuadratura de Gauss gana de calle al resto de técnicas. Hay que señalar que, aunque para la precisión medida (8 decimales), el valor de la cuadratura de Gauss coincide con el valor teórico de la integral, en verdad tiene un error absoluto del orden de 10^{-15} .

Vemos que en este caso concreto la Regla del Rectángulo arroja un valor más cercano al real que la del Trapecio, pero esto no es lo usual.

En el anexo se presenta una tabulación de los puntos de evaluación t_k y sus correspondientes pesos w_k para computar integrales por Cuadratura de Gauss.

1.3. Funciones de Green

En ingeniería estamos habituados al concepto de sistema lineal. Este sistema da una respuesta por defecto ante la ausencia de entrada —repuesta

natural de sistema—, y da otra respuesta ante una estimulación dada —a la que se suele denominar driver o señal conductora del sistema—.

Un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) se puede modelar mediante una ecuación diferencial lineal. Esta ecuación modela el comportamiento del sistema y nos permite determinar su comportamiento (salida) en respuesta a una señal de entrada (driver).

Para ilustrar los conceptos básicos de Funciones de Green recurrimos al ejemplo de la cuerda del primer apartado (Espacios Lineales).

La cuerda se puede ver como un sistema lineal que responde (doblándose) ante una fuerza externa aplicada verticalmente en dirección descendente. La fuerza aplicada es la entrada del sistema, y el desplazamiento de la cuerda en cada punto x la respuesta a dicha entrada. La ecuación que modela este problema es

$$T \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = F(x) \quad (1.19)$$

Sujeta a la condición de contorno

$$y(x=0) = y(x=l) = 0$$

En esta ecuación la entrada al sistema (fuente, excitación o *driver*) es $F(x)$, función que puede tomar cualquier forma finita. He aquí el problema; ¿me verá forzado a resolver una nueva ecuación cada vez que se cambie la fuerza sobre la cuerda? Gracias al concepto de Función de Green la respuesta a esa pregunta es NO.

La función de Green es una herramienta de vital importancia en ingeniería. Permite resolver problemas como el planteado una vez y para siempre. ¿Cómo?, muy sencillo: En lugar de resolver el problema original, se resuelve un problema en el que la entrada al sistema —es decir, la driver— sea un impulso unitario (delta de Dirac).

- Un impulso —o delta— de amplitud (área) A se puede concebir como una función pulso rectangular de anchura infinitesimal dx y altura infinita A/dx .
- Los puntos de la recta real se pueden entender como un conjunto discreto, dentro del cual cada punto está separado de su contiguo por una distancia infinitesimal dx .
- Entonces, una función de variable continua $F(x)$ se puede entender como un tren infinito de impulsos infinitesimales —esto es, de área infinitesimal— donde, a su vez, cada uno de estos impulsos se pueden

considerar pulsos rectangulares de altura $F(x)$ y anchura dx . Otra forma de ver esto es que el valor de la función en un punto x' se puede expresar como

$$F(x') = F(x')\delta(x - x')dx \quad (1.20)$$

Si calculásemos la respuesta del sistema lineal ante un impulso unidad, la respuesta ante cualquier entrada genérica $F(x)$ podría componerse como superposición de las respuestas del sistema ante el tren infinito de impulsos infinitesimales que componen $F(x)$. Llamando $G(x - x')$ a la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta(x - x')$, la respuesta $y(x)$ ante una entrada genérica $F(x)$ se puede expresar

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x')G(x - x')dx \quad (1.21)$$

A $G(x - x')$ la llamamos función de Green del sistema.

En el problema de la cuerda, nos permitiría calcular el desplazamiento producido por cualquier distribución de fuerza integrando el producto de dicha distribución por la función de Green. Este concepto es extrapolable a cualquier problema de las mismas características (sistemas LTI) independientemente del número de dimensiones que abarque. En problemas en los que tanto la entrada como la salida del sistema sean magnitudes vectoriales, la respuesta al impulso vendrá usualmente dada por una función de Green diádica [4]. Por ejemplo, en electromagnetismo el vector potencial magnético \mathbf{A} se relaciona con la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} a través de la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (1.22)$$

En el sistema asociado a esta ecuación \mathbf{A} representaría la respuesta del sistema y \mathbf{J} la *excitación*. Se necesita una función de Green diádica cuando al menos una componente de la fuente afecte a componentes distintas de la respuesta. Me explico; la función de Green del problema será de tipo diádico si, por ejemplo, la componente x de la entrada influyese en la componente y de la respuesta. Resumiendo: Si existe influencia entre distintas componentes vectoriales de la entrada y de la respuesta, la función de Green del sistema será siempre diádica. En el caso bidimensional la función de Green diádica presenta esta forma genérica para el plano XY:

$$\bar{G}(x, y, x', y') = G_{xx}\hat{x}\hat{x} + G_{xy}\hat{x}\hat{y} + G_{yx}\hat{y}\hat{x} + G_{yy}\hat{y}\hat{y} \quad (1.23)$$

- G_{xx} representa la componente x de la respuesta asociada a una fuente de tipo impulso unitario orientada en la dirección \hat{x} .
- G_{xy} representa la componente x de la respuesta asociada a una fuente de tipo impulso unitario orientada en la dirección \hat{y} .
- G_{yx} representa la componente y de la respuesta asociada a una fuente de tipo impulso unitario orientada en la dirección \hat{x} .
- G_{yy} representa la componente y de la respuesta asociada a una fuente de tipo impulso unitario orientada en la dirección \hat{y} .

Trabajaremos con funciones de Green tanto escalares como diádicas en el capítulo de BI-RME.

1.4. Método de los momentos

Una gran parte de los problemas a los que se enfrenta uno en ingeniería son difíciles — cuando no imposibles— de abordar por métodos analíticos. Por una parte, encontramos ecuaciones diferenciales para las que hallar una solución analítica sea una odisea. En otras ocasiones nos enfrentaremos a ecuaciones integrales (esto es, la función incógnita se encuentra en el integrando) que directamente no se pueden resolver por métodos exactos. Cuando los problemas están definidos por operadores lineales podemos emplear una formulación para reducir el problema de una ecuación diferencial —o integral— a una ecuación matricial: el Método de los Momentos [6].

El Método de los Momentos es un método general para abordar problemas como los descritos. Emplea las ideas sobre espacios lineales introducidas en el primer capítulo para reducir a forma matricial tanto **problemas deterministas** como **problemas de autovalores**. En un problema determinista la solución es única. Recordemos una vez más el problema de la cuerda fijada sobre sus extremos; aplicar una densidad de fuerza $F(x)$ a lo largo de su longitud implica obtener un desplazamiento $y(x)$ que está unívocamente asociado a $F(x)$. La expresión general para el problema determinista es de la forma

$$\mathcal{L}f = g \tag{1.24}$$

donde g es la fuente o excitación, f la respuesta del sistema al que modela y \mathcal{L} un operador lineal. La expresión anterior requerirá de una serie de condiciones de contorno para definir completamente el problema en caso de que se trate de una ecuación diferencial.

Por otra parte, tenemos los problemas de autovalores. Estos poseen soluciones —denominadas *autofunciones*— sólo para cierto conjunto de valores —llamados autovalores— de un parámetro. La expresión general asociada a un problema de este tipo es

$$\mathcal{L}f = \lambda\mathcal{M}(f) \quad (1.25)$$

donde f representa la función incógnita —o autofunción—, λ su autovalor asociado y tanto \mathcal{L} como \mathcal{M} operadores lineales. Los autovalores suelen representar parámetros característicos del problema (por ejemplo, en electromagnetismo suelen estar ligados a frecuencias de corte). Un ejemplo de problema de autovalores (el cual abordaremos con más detalle en el capítulo siguiente) consiste en hallar los modos compatibles con cierta estructura resonante (línea de transmisión o guía de onda) habiendo establecido previamente el tipo de frontera que la delimita.

1.4.1. Método de los Momentos en Problemas Deterministas

Empecemos por el caso más sencillo. Tomando como punto de partida la ecuación (1.24) el objetivo es transformar el problema lineal en un problema algebraico que seamos capaces de resolver por métodos matriciales tradicionales. Recuperando las ideas del capítulo sobre espacios lineales, vamos a definir un conjunto de funciones base $\{f_n\}$ tal que cierta combinación lineal nos permita sintetizar —de forma aproximada— la función incógnita f

$$f \approx \sum_n b_n f_n \quad (1.26)$$

Introduciendo (1.26) en (1.24) y haciendo uso de la linealidad de \mathcal{L} obtenemos

$$\sum_n b_n \mathcal{L}(f_n) = g \quad (1.27)$$

A continuación definimos un conjunto de funciones de *testing* $\{w_m\}$ linealmente independientes que estén en el rango del operador \mathcal{L} . Realizamos el producto escalar a ambos lados de (1.27) con cada w_m

$$\sum_n b_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (1.28)$$

Es fácil expresar la última ecuación matricialmente como

$$\mathbf{L}\mathbf{b} = \mathbf{g} \quad (1.29)$$

Donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_1, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \langle w_2, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_2, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle w_M, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_M, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_M, \mathcal{L}f_N \rangle \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_M, g \rangle \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Recalcamos que la incógnita de la ecuación matricial es el vector de coeficientes \mathbf{b} . Una vez calculado, expresamos la solución al problema original mediante (1.26). Es fácil notar que, para obtener un sistema compatible determinado, el número de funciones de expansión N ha de ser igual al número de funciones de *testing* M .

El Método de los Momentos busca lo que comúnmente se denomina una *solución débil* del problema; esto es, en lugar de buscar directamente la solución *fuerte* al problema original buscamos una función cuyas proyecciones sobre los elementos del conjunto $\{w_m\}$ coincidan con la proyecciones de la solución *fuerte* sobre ese mismo conjunto. En el límite cuando M tiende a infinito ambas soluciones convergen (al menos siempre y cuando las funciones $\{w_m\}$ sean linealmente independientes). Las proyecciones de la solución fuerte sobre el conjunto $\{w_m\}$ vienen dadas por $\langle w_m, g \rangle$ y las proyecciones de la solución débil por

$$\sum_n b_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle$$

Ejemplo

Apliquemos la teoría expuesta a un problema bien conocido en ingeniería: el problema de carga de un condensador.

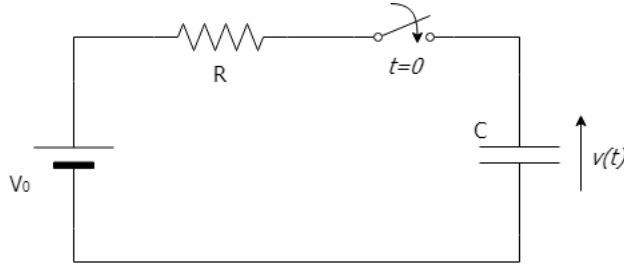


Figura 1.2: Circuito de carga de un condensador

El proceso de carga es descrito por la ecuación

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v(t) = \frac{V_0}{\tau} \quad (1.33)$$

Sujeta a la condición de contorno

$$v(t = 0) = 0 \quad (1.34)$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito RC y $v(t)$ es la tensión a bornes del condensador —que es lo que deseamos hallar—. Asumimos que dicha tensión es cero inicialmente y que en $t = 0$ se conmuta el interruptor, iniciándose el proceso de carga. La solución analítica a (1.33), (1.34) es fácilmente calculable:

$$v(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (1.35)$$

Para aplicar el Método de los Momentos lo primero es determinar el operador y su dominio —que nos permitirá seleccionar apropiadamente las funciones base—.

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right\} \quad (1.36)$$

Es fácil comprobar la linealidad de dicho operador. Pongamos nuestra atención ahora sobre ciertos detalles relativos a las restricciones físicas de este problema en particular: El condensador empieza estando totalmente descargado, por lo que la tensión a sus bornes tendrá que ser 0 en $t = 0$; por otra parte, conforme vaya transcurriendo el tiempo el proceso de carga hará que la tensión se aproxime más y más a la tensión de la fuente (V_0). Como la tensión de la fuente es constante, la derivada de la tensión en bornes del condensador con respecto al tiempo tenderá a cero (es decir, $v(t)$ tenderá a

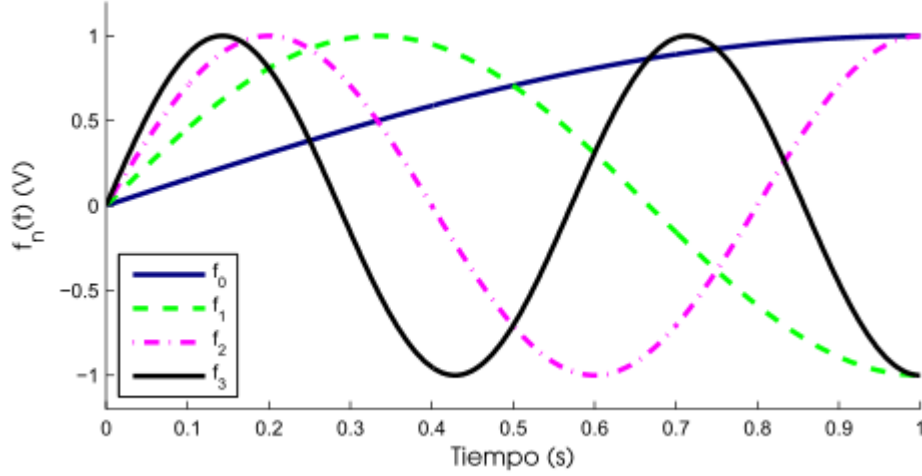


Figura 1.3: Conjunto f_n

estabilizarse en V_0). Dicho esto, será razonable emplear como funciones base a un conjunto tal que sus elementos cumplan las siguientes premisas:

$$\begin{aligned} f_n(t=0) &= 0 \\ \frac{df_n}{dt}(t=l) &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde l es la longitud del intervalo temporal dentro de la cual se resolverá el problema. Dadas las premisas establecidas para las funciones base, la solución será más precisa cuanto mayor sea l en relación a la constante de tiempo τ . Un conjunto f_n apropiado viene dado por

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} t \right] \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Por simplicidad emplearemos los valores $V_0 = 1$, $l = 1$ y $\tau = 1/l = 1/10$ en este ejemplo. Como conjunto de funciones de test vamos a usar el mismo conjunto que el base. Esta versión del Método de los Momentos se conoce como método de Galerkin.

$$w_m(t) = \sin \left[\frac{(2m+1)\pi}{2l} t \right] \quad (1.39)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Para obtener los elementos de las matrices \mathbf{L} y \mathbf{g} tenemos que definir un producto interno apropiado. Para este caso podemos usar

$$\langle u, v \rangle = \int_0^l u(t)v(t)dt \quad (1.40)$$

Aplicamos el operador lineal (1.36) a las funciones del conjunto f_n

$$\mathcal{L}f_n(t) = a_n \cos(a_n t) + \frac{1}{\tau} \sin(a_n t) \quad (1.41)$$

$$a_n = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right]$$

Aplicamos (1.40)

$$\begin{aligned} \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle &= \int_0^l \sin(a_m t) \left[a_n \cos(a_n t) + \frac{1}{\tau} \sin(a_n t) \right] dt \\ &= -\frac{1}{4(m-n)(1+m+n)\pi\tau} \\ &\times \{ (1+2n) \cos(m\pi) [\pi\tau(1+2n) \cos(n\pi) + 2l \sin(n\pi)] \\ &+ (1+2m) [\pi\tau(1+2n)(\sin(m\pi) \sin(n\pi) - 1) - 2l \sin(m\pi) \cos(n\pi)] \} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\langle w_m, g \rangle = \int_0^l \sin(a_m t) \frac{V_0}{\tau} dt = \frac{2lV_0(1 + \sin(m\pi))}{\pi\tau(1+2m)} \quad (1.43)$$

Para un conjunto de cuatro funciones de base/test ($N = 4$) el problema quedaría reducido a la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 5,50 & -1,50 & 0,83 & -1,17 \\ 0,50 & 5,50 & -2,50 & 0,70 \\ 0,17 & 1,50 & 5,50 & -3,50 \\ 0,17 & 0,30 & 2,50 & 5,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,37 \\ 2,12 \\ 1,27 \\ 0,91 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Cuya solución es:

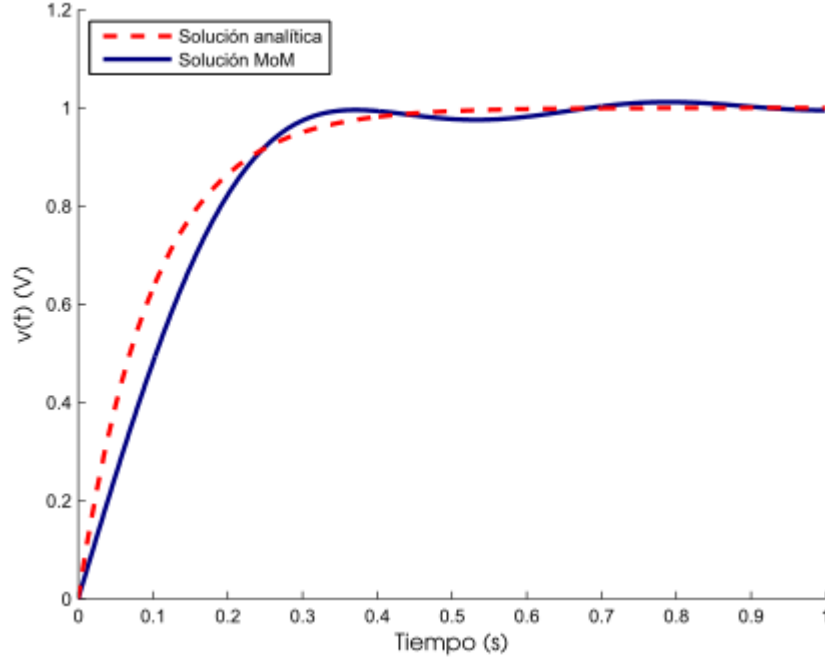


Figura 1.4: Curva de carga del condensador

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,24 \\ 0,33 \\ 0,14 \\ 0,05 \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Finalmente, construimos la solución empleando (1.26). En la figura 1.4 se pueden contemplar superpuestas la solución analítica y la solución recientemente obtenida por el Método de Galerkin.

1.4.2. Método de los Momentos en Problemas de Autovalores

La ecuación (1.25) representa el caso más general de problema de autovalores. Con el Método de los Momentos se puede resolver siguiendo la misma filosofía aplicada a problemas deterministas. Empezamos definiendo un conjunto de funciones base $\{f_n\}$ y otro de test $\{w_m\}$.

Sustituimos la función incógnita en 1.25 por su expansión y tenemos en cuenta la linealidad de \mathcal{L} y \mathcal{M}

$$\sum_n b_n \mathcal{L}(f_n) = \lambda \sum_n b_n \mathcal{M}(f_n) \quad (1.46)$$

Realizamos el producto escalar de w_m con ambos miembros de (1.46)

$$\sum_n b_n \langle w_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle = \lambda \sum_n b_n \langle w_m, \mathcal{M}(f_n) \rangle \quad (1.47)$$

El problema original queda reducido a forma matricial

$$\mathbf{L}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{M} \quad (1.48)$$

Donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_1, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \langle w_2, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_2, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, \mathcal{L}f_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle w_M, \mathcal{L}f_1 \rangle & \langle w_M, \mathcal{L}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_M, \mathcal{L}f_N \rangle \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{M}f_1 \rangle & \langle w_1, \mathcal{M}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, \mathcal{M}f_N \rangle \\ \langle w_2, \mathcal{M}f_1 \rangle & \langle w_2, \mathcal{M}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, \mathcal{M}f_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle w_M, \mathcal{M}f_1 \rangle & \langle w_M, \mathcal{M}f_2 \rangle & \cdots & \langle w_M, \mathcal{M}f_N \rangle \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Lo más frecuente es que el operador \mathcal{M} sea el producto por la unidad, con lo que 1.25 se quedaría reducido a la forma

$$\mathcal{L}f = \lambda f \quad (1.52)$$

Según esta última expresión, la solución —autofunción— es un elemento f perteneciente a cierto espacio lineal tal que $\mathcal{L}f$ conserva la dirección de f . La matriz \mathbf{M} en este caso sería

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \langle w_1, f_1 \rangle & \langle w_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle w_1, f_N \rangle \\ \langle w_2, f_1 \rangle & \langle w_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle w_2, f_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle w_M, f_1 \rangle & \langle w_M, f_2 \rangle & \cdots & \langle w_M, f_N \rangle \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Veremos múltiples ejemplos de problemas de autovalores en el capítulo siguiente cuando intentemos resolver la ecuación de onda en problemas unidimensionales y bidimensionales.

1.5. Electrodinámica y guías de onda

Imaginémonos que cogiese una cuerda y la atase por uno de sus extremos a un soporte fijo. Ahora sujeto el otro extremo y me muevo de forma que esta se tense. Una vez hecho esto, agito el extremo que sujeto y observo como el movimiento inducido se propaga de un lado hacia el otro. En este caso, la propagación de la perturbación que yo mismo he introducido sobre la cuerda se debe al .efecto dominó” que las fibras más próximas al extremo inicial van transmitiendo progresivamente hacia las fibras del extremo final. En términos abstractos, podemos definir la propagación de dicha perturbación como la propagación de *cierta propiedad* física a lo largo del espacio con el paso del tiempo. A la propagación de dicha propiedad la llamamos *onda*. La onda mecánica generada por la agitación del extremo de la cuerda la podemos contemplar como la propagación de una *elongación* a lo largo de su longitud. La propagación del sonido la podemos concebir como la propagación de la propiedad *presión acústica* en un fluido.

Esta abstracción de onda como la propagación de cierta propiedad física del medio sobre el que se propaga es útil para definir el concepto de onda electromagnética.

Definimos un par de propiedades asociadas a cada punto del espacio: el campo eléctrico y el campo magnético. En estos términos, una onda electromagnética no es más que la propagación conjunta de dichas propiedades a través del espacio. Al igual que la agitación de un extremo de la cuerda es la causa que inicia la propagación de la onda a través de esta, las fuentes eléctricas y magnéticas son las responsables de iniciar la onda. Si la electrostática estudia los campos creados por cargas estáticas e invariables, la electrodinámica estudia los campos inducidos por cargas en movimiento. La carga eléctrica es, en última instancia, la fuente de toda radiación electromagnética.

Las relaciones entre las fuentes y sus campos asociados vienen dadas por las ecuaciones de Maxwell [4, 5], las cuales compactan y completan los principios básicos destilados a lo largo de los años por múltiples personalidades científicas, entre las que se destacan *Gauss, Faraday, Lenz y Ampère*. Estas ecuaciones permiten describir cualquier fenómeno electromagnético, y son, en su forma más completa:

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_{ev} \quad (1.54)$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_d + \mathcal{J}_c + \mathcal{J}_i \quad (1.55)$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mathcal{M}_d - \mathcal{M}_c - \mathcal{M}_i \quad (1.56)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = \rho_{mv} \quad (1.57)$$

Donde

- \mathcal{D} es la densidad de flujo eléctrico (en C/m^2).
- \mathcal{B} es la densidad de flujo magnético (en Wb/m^2)
- \mathcal{E} es la intensidad de campo eléctrico (en V/m)
- \mathcal{H} es la intensidad de campo magnético (en A/m)
- \mathcal{J}_d es la densidad de corriente eléctrica de desplazamiento (en A/m^2)
- \mathcal{J}_c es la densidad de corriente eléctrica de conducción (en A/m^2)
- \mathcal{J}_i es la densidad de corriente eléctrica impresa (en A/m^2)
- \mathcal{M}_d es la densidad de corriente magnética de desplazamiento (en V/m^2)
- \mathcal{M}_c es la densidad de corriente magnética de conducción (en V/m^2)
- \mathcal{M}_i es la densidad de corriente magnética impresa (en V/m^2)
- ρ_{ev} es la densidad de carga eléctrica (en C/m^3)
- ρ_{mv} es la densidad de carga magnética (en C/m^3)

Como se ha dicho, esta es la versión más completa de las ecuaciones de Maxwell. En la práctica no existen ni cargas ni corrientes magnéticas (más allá de la de desplazamiento \mathcal{M} que es la variación del flujo magnético en en tiempo). Las fuentes magnéticas se emplean siempre en tándem con algunos teoremas —como el de equivalencia en superficie— para generar un problema equivalente al que se desea resolver (que sólo tiene fuentes eléctricas), pero más sencillo de abordar. La corriente eléctrica de desplazamiento (\mathcal{J}_d) se corresponde con

$$\mathcal{J}_d = \frac{d\mathcal{D}}{dt} \quad (1.58)$$

Dualmente, la corriente magnética de desplazamiento se define como

$$\mathcal{M}_d = \frac{d\mathcal{B}}{dt} \quad (1.59)$$

La corriente eléctrica de conducción \mathcal{J}_c está asociada al arrastre de las cargas eléctricas móviles —en banda de conducción— en presencia de un campo eléctrico.

$$\mathcal{J}_c = \sigma\mathcal{E} \quad (1.60)$$

Finalmente, las corrientes impresas ($\mathcal{J}_i, \mathcal{M}_i$) son simplemente corrientes estacionarias y modelan fuentes fijas de campo electromagnético.

En el planteamiento y resolución de problemas en electromagnetismo se suelen plantear las ecuaciones de Maxwell en su forma fasorial. Como todas las operaciones desarrolladas en dichas ecuaciones son lineales, si asumimos una variación armónica del tipo $e^{j\omega t}$ en todas las variables, la parte real de los campos estará unívocamente asociada a la parte real de las fuentes; lo mismo será cierto para las partes imaginarias. En este documento no trabajaremos con equivalentes y, por tanto, no tiene sentido trabajar con fuentes magnéticas. Como las estructuras que vamos a contemplar se asumen sin pérdidas, tampoco habrá corrientes de conducción. Bajo estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell quedarían

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ev} \quad (1.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (1.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.64)$$

En el capítulo sobre el método BI-RME emplearemos la corriente impresa \mathbf{J}_i en el planteamiento del problema. En una última simplificación de la que haremos uso no existirán fuentes de ningún tipo en las estructuras a analizar; este es el caso que se da en el interior de guías de onda no perturbadas (esto es, que no alberguen contornos conductores en su interior). Cuando no existen fuentes, las únicas corrientes presentes son las de desplazamiento.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.66)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.68)$$

Podemos desacoplar las ecuaciones (1.66) y (1.67) a costa de subir el orden a dos; para ello, aplicamos el operador rotacional a ambos lados de la igualdad.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.69)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.70)$$

Aplicando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.71)$$

y teniendo en cuenta (1.65) y 1.68 quedaría

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.72)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} \quad (1.73)$$

Aplicando (1.66), (1.67) tendríamos

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} \quad (1.74)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} \quad (1.75)$$

o bien

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.76)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.77)$$

Donde $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es el número de onda o constante de fase del medio de propagación. A (1.76) se la conoce como ecuación de onda para el campo magnético, y a (1.77) como ecuación de onda para el campo eléctrico. Dada una estructura, caracterizada por sus condiciones de contorno (en nuestro caso, de pared eléctrica o magnética) la resolución de la ecuación de onda particularizada a esta estructura nos daría el campo que se propaga por el interior de la misma. La solución general de (1.76) y (1.77) se obtiene analíticamente por el *método de separación de variables*.

1.5.1. Guías de onda

Una guía de onda es una estructura cilíndrica empleada en la transmisión de ondas electromagnéticas. Normalmente son estructuras metálicas huecas, aunque las hay también hechas —o rellenas— de material dieléctrico o con conductor interno (caso del cable coaxial). En los análisis que se llevan a cabo en este documento solo contemplaremos guías cuya sección transversal se mantenga constante con la longitud.

Puesto que dedicaremos el resto del tiempo a analizar guías de onda por métodos computacionales, resulta ilustrativo exponer brevemente el procedimiento teórico de análisis, a partir del cual podremos entender ciertos conceptos que nos serán de utilidad más adelante. Analizar una de estas estructuras consiste fundamentalmente en determinar:

1. Las frecuencias de corte de los modos compatibles.
2. La distribución de la energía dentro de la estructura para cada modo (campos modales).

Existen infinidad de publicaciones [4, 5] en las que ver con detalle la resolución teórica del problema para guías canónicas rectangulares y circulares limitadas por paredes eléctricas (conductores eléctricos perfectos). Nosotros nos vamos a desviar un poco de este camino y analizaremos una guía rectangular aplicando condiciones de contorno mixtas —algunos muros serán conductores eléctricos perfectos (PEC), y otros serán conductores magnéticos perfectos (PMC)—.

En una estructura de este tipo (asumiendo que tiene longitud infinita) la dirección de propagación efectiva viene dada por la coordenada axial (en nuestro caso z) y el campo eléctrico —asociado a la onda progresiva— en cualquier punto de su interior se puede formular de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{e}_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_y(x, y)\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}_z(x, y)\hat{\mathbf{z}}] e^{-j\beta_z z} \quad (1.78)$$

Donde queda constatado que la dependencia con la componente axial z la establece el término $e^{-j\beta_z z}$, que incrementa el desfase de la onda a medida que avanzamos por la guía. Las funciones \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y y \mathbf{e}_z son las características transversales de las componentes x , y , y z del campo eléctrico, respectivamente.

Si introducimos (1.78) en las Ecuaciones de Maxwell nos damos cuenta de que es posible despejar las componentes transversales del campo eléctrico (E_x, E_y) y magnético (H_x, H_y) en función de las componentes axiales

(E_z, H_z) [5]. Procediendo al despeje y tras una posterior simplificación quedarían las siguientes expresiones:

$$E_x = \frac{-j}{\beta_c^2} \left(\beta_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1.79)$$

$$E_y = \frac{j}{\beta_c^2} \left(-\beta_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1.80)$$

$$H_x = \frac{j}{\beta_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (1.81)$$

$$H_y = \frac{-j}{\beta_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (1.82)$$

Con

$$\beta_z^2 = \beta^2 - \beta_c^2 \quad (1.83)$$

Donde

- $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ es la constante de fase asociada al medio.
- β_c es el número de onda de corte del modo considerado.
- β_z es la constante de fase en la dirección de propagación efectiva z .

De esta forma, el problema del cálculo modal en guías de onda queda solventado si conseguimos hallar E_z y H_z . Si además consideramos soluciones en forma de modos TE o TM, para los que E_z o H_z valdrán cero, tan sólo se requerirá del cálculo de una de estas componentes (E_z para los modos TM y H_z para los modos TE). Consecuentemente, comenzamos resolviendo (1.76) o (1.77). Si estamos analizando los modos TM resolveremos 1.77, para computar los modos TE emplearemos (1.76). En este ejemplo despejaremos E_z , siendo el cálculo de H_z idéntico.

$$\nabla^2 E_z + \beta^2 E_z = 0 \quad (1.84)$$

El método de separación de variables empieza asumiendo que la solución se puede expresar como el producto de tres funciones de variables diferentes:

$$E_z = f(x)g(y)h(z) \quad (1.85)$$

Sustituyendo (1.85) en (1.84) se obtiene

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fh \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \beta^2 fgh = 0 \quad (1.86)$$

Dividiendo ambos lados de (1.86) por $f(x)g(y)h(z)$ queda

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{h(z)} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} + \beta^2 = 0 \quad (1.87)$$

En la expresión anterior se refleja que la suma de tres funciones de variables distintas ha de dar una constante. Obviamente, esto solo será posible cuando dichas funciones sean, ellas mismas, constantes, es decir:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\beta_x^2 \quad (1.88)$$

$$\frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = -\beta_y^2 \quad (1.89)$$

$$\frac{1}{h(z)} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} = -\beta_z^2 \quad (1.90)$$

Con

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (1.91)$$

Esta última relaciona el desfase que sufre la onda en su dirección de propagación con las componentes de desfase asociadas a cada eje y se la conoce en la literatura como **ecuación de dispersión**. Por otra parte, las ecuaciones (1.88)-(1.90) son fácilmente resolubles analíticamente y sus soluciones poseen las formas

$$f_1(x) = A_1 e^{-j\beta_x x} + B_1 e^{j\beta_x x} \quad (1.92)$$

$$f_2(x) = C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x) \quad (1.93)$$

De la misma forma

$$g_1(y) = A_2 e^{-j\beta_y y} + B_2 e^{j\beta_y y} \quad (1.94)$$

$$g_2(y) = C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y) \quad (1.95)$$

y

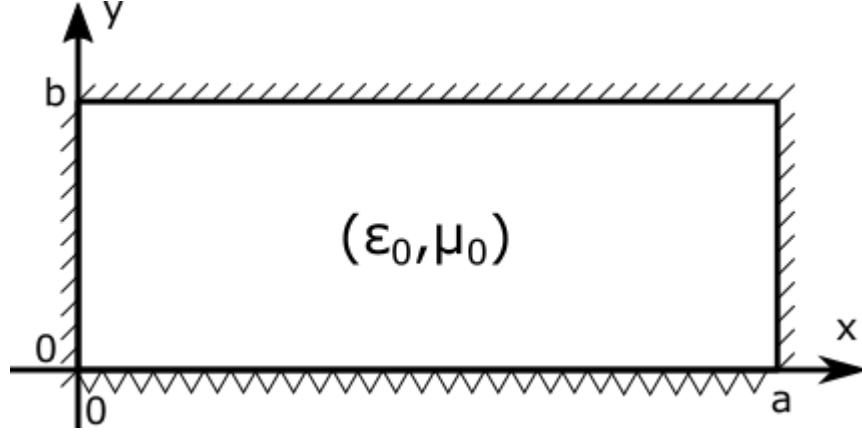


Figura 1.5: Guía rectangular con condiciones de contorno mixtas: Todas las paredes son eléctricas menos la de abajo ($y = 0$), que es magnética.

$$h_1(z) = A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{j\beta_z z} \quad (1.96)$$

$$h_2(z) = C_3 \cos(\beta_z z) + D_3 \sin(\beta_z z) \quad (1.97)$$

Las soluciones f_1 , g_1 y h_1 son términos asociados a la propagación de la onda en las direcciones x , y , z , respectivamente, como revela la presencia de exponenciales complejas. Por otra parte, las soluciones f_2 , g_2 y h_2 corresponden a patrones de onda estacionaria. A la hora de construir una solución apropiada a (1.84) hay que tener en cuenta las características de la estructura en la que se produce la propagación. Típicamente, a la hora de analizar guías de onda, se consideran estructuras con una sección transversal dispuesta sobre el plano XY y longitudinalmente infinitas a lo largo del eje z ; por tanto, la propagación efectiva se produce en el eje z , quedando en el plano XY un patrón de onda estacionaria. Consecuentemente, según este estándar, la forma apropiada de cimentar la solución para Ez sería

$$\begin{aligned} Ez &= f_2(x)g_2(x)h_1(z) \\ &= [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] \\ &\quad \times [A_3 e^{-j\beta_z z} + B_3 e^{j\beta_z z}] \end{aligned} \quad (1.98)$$

A partir de este resultado entrarían en juego las condiciones de contorno y restricciones físicas a partir de las cuales quedarían definidas las constantes

C_1, D_1, C_2, D_2, A_3 y B_3 . Para empezar, si consideramos ondas que se propagan exclusivamente en la dirección positiva de z impondríamos $B_3 = 0$, debido a que el término $B_3 e^{j\beta_z z}$ va asociado a ondas regresivas (el desfase positivo lo produce al disminuir z , luego introduce un retardo sobre las ondas regresivas a medida que avanzamos hacia z más pequeñas). El resto de las constantes se obtienen imponiendo condiciones de contorno apropiadas que dependen fundamentalmente de las propiedades eléctricas de las paredes de la guía. En el ejemplo que se contempla, fijaremos condición de pared eléctrica en todas las paredes de la guía menos en $y = 0, 0 < x < a$, donde se fijará la condición de muro magnético. Este escenario aparece ilustrado en la figura 1.5.

- La condición de contorno de **pared eléctrica** impone que la componente del campo eléctrico tangencial al borde de la guía ha de anularse en ella. Matemáticamente, se puede demostrar que esto es equivalente a imponer sobre las componentes axiales:

$$E_z(\text{pared eléctrica}) = 0 \quad (1.99)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial \mathbf{n}}(\text{pared eléctrica}) = 0 \quad (1.100)$$

- La condición de contorno de **pared magnética** impone que la componente del campo magnético tangencial al borde de la guía ha de anularse en ella. Matemáticamente, se puede demostrar que esto es equivalente a imponer sobre las componente axiales:

$$H_z(\text{pared magnética}) = 0 \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \mathbf{n}}(\text{pared magnética}) = 0 \quad (1.102)$$

Donde \mathbf{n} es un vector normal a la pared de la guía, apuntando hacia afuera. En otras palabras: la componente axial del campo eléctrico (E_z) ha de anularse en las paredes eléctricas y alcanzar un valor extremo (no necesariamente absoluto) en las magnéticas. De la misma forma, la componente axial del campo magnético (H_z) ha de alcanzar un extremo en las paredes eléctricas y anularse en las magnéticas. Esto es análogo a lo que sucede con las ondas de tensión (campo eléctrico) y de corriente (campo magnético) al final de una línea de transmisión acabada en corto (pared eléctrica) o en abierto (pared magnética); la tensión se anula en los cortos y se maximiza en los abiertos y la corriente se anula en los abiertos y alcanza su máximo en los cortos.

Vamos con la obtención de los modos TM de la guía del ejemplo. Como acabamos de ver, tan sólo necesitamos la componente axial del campo eléctrico (E_z) para obtener el resto de componentes de los campos eléctrico y magnético. Imponemos las condiciones de contorno sobre la característica transversal de (1.98):

$$e_z(x, y) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] \quad (1.103)$$

Aplicamos la condición de pared eléctrica sobre los muros superior, izquierdo y derecho

$$e_z(x = 0, y) = e_z(x = a, y) = e_z(x, y = b) = 0 \quad (1.104)$$

y la condición de muro magnético sobre la pared inferior

$$\frac{\partial e_z}{\partial(-y)}(x, y = 0) = -\frac{\partial e_z}{\partial y}(x, y = 0) \quad (1.105)$$

$$C_1 [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$D_1 \sin(\beta_x a) [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] = 0 \Rightarrow \beta_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$-D_1 D_2 \beta_y \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos(\beta_y y) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$D_1 C_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos(\beta_y b) = 0 \Rightarrow \beta_y = \frac{\pi}{b} \left(n + \frac{1}{2}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, se obtiene esta expresión para E_z

$$E_z = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.106)$$

Y aplicando (1.79)-(1.82) se obtiene el resto de componentes de \mathbf{E} y \mathbf{H}

$$E_x = \frac{-jm\pi\beta_z}{a\beta_c^2} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.107)$$

$$E_y = \frac{j\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta_z}{b\beta_c^2} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.108)$$

$$H_x = \frac{j\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{b\beta_c^2} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.109)$$

$$H_y = \frac{-jm\pi}{a\beta_c^2} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.110)$$

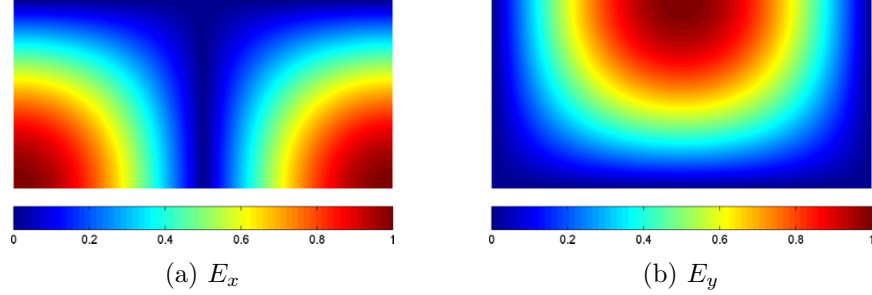


Figura 1.6: Componentes transversales del campo eléctrico en la guía de la figura 1.5. Vemos como E_x se anula en la pared superior (muro eléctrico) y alcanza su máximo en la pared inferior (muro magnético). Por otra parte, E_y se anula en las paredes izquierda y derecha (muro eléctrico).

El número de onda de corte para cada modo se obtiene a partir de la ecuación (1.91) y representa el número de onda a partir del cual el modo en cuestión empieza a propagarse; es decir, cuando la constante de fase (β_z) toma un valor mayor que cero —adquiere sentido físico—.

$$\beta_{c(TM)}^{mn} = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \quad (1.111)$$

Para los modos TE, todas las componentes transversales de los campos dependerán únicamente de H_z , puesto que, por definición, en los modos TE se cumple que $E_z = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento de análisis, partimos de la expresión general de la característica transversal de H_z .

$$h_z(x, y) = [C_1 \cos(\beta_x x) + D_1 \sin(\beta_x x)] [C_2 \cos(\beta_y y) + D_2 \sin(\beta_y y)] \quad (1.112)$$

La condiciones de contorno de pared eléctrica sobre los muros superior, izquierdo y derecho implica

$$\frac{\partial h_z}{\partial(-x)}(x = 0, y) = \frac{\partial h_z}{\partial x}(x = a, y) = \frac{\partial h_z}{\partial y}(x, y = b) = 0 \quad (1.113)$$

y la condición de muro magnético sobre el muro inferior

$$h_z(x, y = 0) = 0 \quad (1.114)$$

Aplicando dichas condiciones sobre (1.113) se obtiene:

$$C_2 = 0; \quad D_1 = 0; \quad \beta_x = \frac{m\pi}{a}; \quad \beta_y = \frac{\pi}{b} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Por lo que la expresión para E_z quedaría

$$H_z(x, y, z) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) e^{-j\beta_z z} \quad (1.115)$$

El número de onda de corte quedaría igual que aquel ya calculado para los modos TM.

$$\beta_{c(TE)}^{mn} = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \quad (1.116)$$

Con esto, cumplimos todos los requisitos necesarios para entender los capítulos venideros. Empezaremos introduciendo muy brevemente métodos diferenciales para la resolución de problemas de autovalores en estructuras bidimensionales. Luego explicaremos el método BI-RME basado en ecuación integral, que es el centro del presente trabajo.

Capítulo 2

Introducción a los métodos diferenciales

La resolución del problema del cálculo de las frecuencias de corte y los campos en el interior de un resonador bidimensional de forma arbitraria se puede abordar fundamentalmente de dos maneras: (1) plantearlo como un problema de autovalores inmediato, en el que se realiza una discretización previa del plano —mallado—, se define una estructura con unas condiciones de contorno sobre dicho mallado y se intenta resolver la ecuación de onda —o una aproximación de la misma— sobre este. O bien (2) plantear una ecuación integral sobre las fuentes del campo —normalmente corriente eléctrica o densidad de carga— basada en cierto núcleo (función de Green) aplicando como contorno de integración aquél que define en el plano el resonador sujeto a estudio. La primera forma (métodos diferenciales) requieren de la resolución de problemas de autovalores de gran tamaño y suelen proporcionar soluciones menos precisas; a cambio, son muy sencillos de plantear y comprender. Los métodos integrales como BI-RME (ver capítulo siguiente) son mucho más complejos en su formulación; sin embargo, desembocan en resultados muy precisos y están asociados a problemas de autovalores de menor envergadura.

Este capítulo pretende servir como una breve introducción a los métodos diferenciales con el propósito de contrastar los resultados producidos por estos frente a los obtenidos por el método integral más puntero del momento, objeto de estudio del siguiente capítulo. Las guías de onda consideradas en todo el documento se considerarán rellenas de un medio homogéneo (propiedades electromagnéticas ϵ , μ , σ constantes en todo el interior de la estructura), isotrópico (las propiedades electromagnéticas son escalares) y

perfectamente dieléctrico ($\sigma = 0$ y $\tan(\delta) = 0$).

2.1. Mallado del espacio y aproximación del operador

La discretización o mallado del espacio consiste, en el caso bidimensional, en seleccionar puntos del plano —normalmente equiespaciados— para plantear el problema sobre la magnitud de interés en torno a ese conjunto discreto de puntos seleccionado. En la sección sobre guías de onda del capítulo introductorio se dijo que tan solo es necesario resolver la ecuación de onda sobre la componente axial de los campos para la resolución completa del problema. Esto se debía a que en una guía de onda, los campos transversales quedan definidos de forma unívoca a partir de las componentes axiales. Por este motivo, las magnitudes de interés en la resolución del problema modal serán la componente axial del campo eléctrico (E_z , modos TM) y la componente axial del campo magnético (H_z , modos TE).

La ecuación de onda en una región sin pérdidas caracterizada por la ausencia de fuentes se puede escribir como

$$\nabla^2\psi(x, y) + \beta^2\psi(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Donde $\psi(x, y)$ representa la **característica transversal** de la componente axial del campo eléctrico $e_z(x, y)$ o magnético $h_z(x, y)$. Recapitulemos que la relación entre las **características transversales** están relacionadas a las componentes de los campos a través de las relaciones

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= e_z(x, y)e^{-j\beta_z z} \\ H_z(x, y, z) &= h_z(x, y)e^{-j\beta_z z} \end{aligned}$$

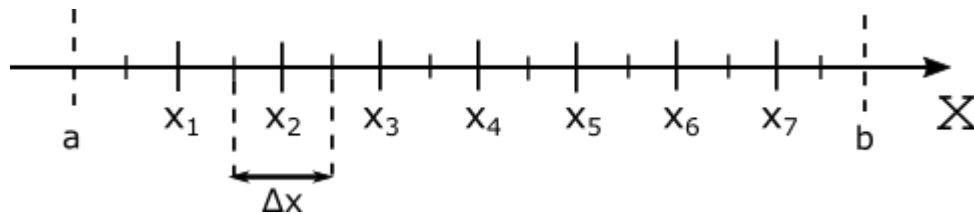


Figura 2.1: Discretización del intervalo de interés.

Para introducir la filosofía de trabajo, conviene comenzar por la versión en una dimensión del problema a plantear y a partir de ahí, extenderlo a dos dimensiones. La versión unidimensional de (2.1) viene dada por

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \beta^2 f(x) = 0 \quad (2.2)$$

Por supuesto, el problema no está del todo definido hasta que no se declaren unas condiciones de contorno apropiadas. En el caso más sencillo, asociado a (2.2), estas condiciones fijarán dos propiedades de la función objetivo $f(x)$ —por ejemplo, el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo considerado en el planteamiento del problema—. La ecuación (2.1) requerirá de una condición de contorno que fije alguna característica de $\psi(x, y)$ a lo largo de la línea que delimita la sección de interés.

Trabajar con el espacio discretizado requiere de un operador apto para este tipo escenario —el operador d^2/dx^2 sólo nos vale para variable continua—. Por ello, vamos a aproximar la operación $d^2 f/dx^2$ de la siguiente manera

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)] \quad (2.3)$$

Siendo Δx el intervalo de discretización en el eje x —la separación entre dos puntos consecutivos del mallado—. Llamando x_i al i -ésimo punto considerado, reescribimos (2.3) como

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] \quad (2.4)$$

En el caso bidimensional tendríamos que aproximar la operación $\nabla^2 \psi(x, y)$. Tenemos que

$$\nabla^2 \psi(x, y) = \frac{d^2 \psi(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 \psi(x, y)}{dy^2} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) &\approx \frac{1}{\Delta x^2} [\psi(x - \Delta x, y) - 2\psi(x, y) + \psi(x + \Delta x, y)] \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2} [\psi(x, y - \Delta y) - 2\psi(x, y) + \psi(x, y + \Delta y)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por simplicidad, haremos iguales los intervalos de discretización asociados a ambos ejes ($\Delta x = \Delta y = h$). Aplicando esta consideración a (2.6) obtendríamos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) = \frac{1}{h^2} [\psi(x-h, y) + \psi(x, y-h) + \psi(x+h, y) + \\ + \psi(x, y+h)] - \frac{4}{h^2} \psi(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Refiriendonos como (x_i, y_j) a los puntos del mallado, podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} [\psi(x_{i-1}, y_j) + \psi(x_i, y_{j-1}) + \psi(x_{i+1}, y_j) + \\ + \psi(x_i, y_{j+1})] - \frac{4}{h^2} \psi(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2. Resolución de la ecuación de onda en 1D

Una vez disponemos del mallado apropiado —en el caso unidimensional una colección de puntos equidistantes sobre el intervalo de interés— falta imponer las condiciones de contorno para terminar de dar forma al problema. Vamos a estudiar tres casos de especial interés en guías de onda: en el primero impondremos que la función objetivo se anule en ambos extremos del intervalo de interés, en el segundo impondremos que se anule su derivada y en el tercero combinaremos ambas condiciones de contorno, aplicando una de ellas en un extremo y la otra en el opuesto. Antes de seguir, decir que se empleará la letra N para designar el número de puntos en los que se discretiza el tramo de interés del eje x . Este conjunto de puntos se suele representar en forma de vector

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N]^T \quad (2.9)$$

Es interesante notar que, al aplicar (2.4) sobre los puntos x_1 y x_N —primer y último punto de nuestro conjunto, respectivamente— en la mencionada ecuación se intentaría operar con $f(x_0)$ y $f(x_{N+1})$, puntos que no pertenecen al conjunto definido por (2.9). Por este motivo, se emplearán x_1 y x_N para imponer las condiciones de contorno (es decir, se va a prefiar su valor antes de formular el sistema de ecuaciones que dota de solución al problema).

2.2.1. Primer caso: la función objetivo se anula en ambos extremos

Queremos una solución en el intervalo $a \leq x \leq b$. Siendo $x_1 = x(a)$ y $x_N = x(b)$, imponemos la condición de contorno que provoca la anulación

de la función en los extremos de este intervalo, es decir:

$$f(a) = f(b) = 0 \implies f(x_1) = f(x_N) = 0 \quad (2.10)$$

De esta forma, usando (2.4) sobre todos los puntos del intervalo menos aquellos usados para imponer las condiciones de contorno en (2.10) se obtendría un sistema de $N - 2$ ecuaciones con $N - 2$ incógnitas.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Delta x^2}[-2f(x_2) + f(x_3)] & = \beta f(x_2) \\ \vdots & \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] & = \beta f(x_i) \\ \vdots & \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[-2f(x_{N-2}) - 2f(x_{N-1})] & = \beta f(x_{N-1}) \end{cases} \quad (2.11)$$

La solución al problema de autovalores (2.11), para cada autovalor β es autovector de componentes $f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{N-1})$, por tanto podemos definir un autovector solución

$$\mathbf{f}_0 = [f(x_2) \quad f(x_3) \quad \dots \quad f(x_{N-1})]^T \quad (2.12)$$

Matricialmente se puede definir el problema como

$$\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{f}_0 = \beta \mathbf{f}_0 \quad (2.13)$$

Donde

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La solución al problema original la componemos con la solución recién obtenida del problema de autovalores \mathbf{f}_0 concatenada con el valor de la función impuesto sobre ambos extremos del intervalo de interés (en este caso cero). Definimos el vector solución para el k -ésimo modo compatible con la estructura unidimensional como

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \mathbf{f}_0 \\ f(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.2.2. La derivada de la función objetivo se anula en ambos extremos

En este caso imponemos como condición de contorno que la derivada respecto x de la función objetivo se anule en los puntos extremos del intervalo de interés. Esto implica que

$$\frac{df}{d(-x)}(a) = \frac{df}{dx}(b) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2), f(x_N) = f(x_{N-1}) \quad (2.16)$$

Bajo esta condición, el sistema de ecuaciones del problema de autovalores quedaría de la siguiente manera

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Delta x^2}[-f(x_2) + f(x_3)] & = \beta f(x_2) \\ \vdots & \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] & = \beta f(x_i) \\ \vdots & \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[f(x_{N-2}) - f(x_{N-1})] & = \beta f(x_{N-1}) \end{cases} \quad (2.17)$$

Expresado de forma matricial, tendríamos el mismo sistema que en (2.13), donde la matriz característica sería

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Para el k -ésimo modo, el autovector solución será

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \mathbf{f}_0 \\ f(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^{(1)} \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_0^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Donde

- $\mathbf{f}_0^{(1)}$ representa la primera componente del vector \mathbf{f}_0
- $\mathbf{f}_0^{(N-1)}$ representa la última componente del vector \mathbf{f}_0

2.2.3. Tercer caso: la función objetivo se anula en un extremo y su derivada en el opuesto

Este último caso es simplemente una combinación de los dos anteriores. Las condiciones de contorno a imponer serán

$$f(a) = 0, \frac{df}{dx}(b) = 0 \implies f(x_1) = 0, f(x_N) = f(x_{N-1}) \quad (2.20)$$

Bajo la condición (2.20), el sistema de ecuaciones del problema de autovalores quedaría de la siguiente manera

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Delta x^2}[-2f(x_2) + f(x_3)] & = \beta f(x_2) \\ & \vdots \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] & = \beta f(x_i) \\ & \vdots \\ -\frac{1}{\Delta x^2}[f(x_{N-2}) - f(x_{N-1})] & = \beta f(x_{N-1}) \end{cases} \quad (2.21)$$

Expresado de forma matricial, tendríamos el mismo sistema que en (2.13), donde la matriz característica sería

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Por tanto, el k -ésimo modo tendría por autovector

$$\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \mathbf{f}_0 \\ f(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_0^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.3. Resolución de la ecuación de onda en 2D

En el apartado anterior se han asentado las bases del cálculo modal basado en discretización del espacio y técnicas diferenciales básicas —resolución de la ecuación de onda en una dimensión—. Ahora damos un paso más y nos disponemos a plantear el problema en estructuras bidimensionales, en

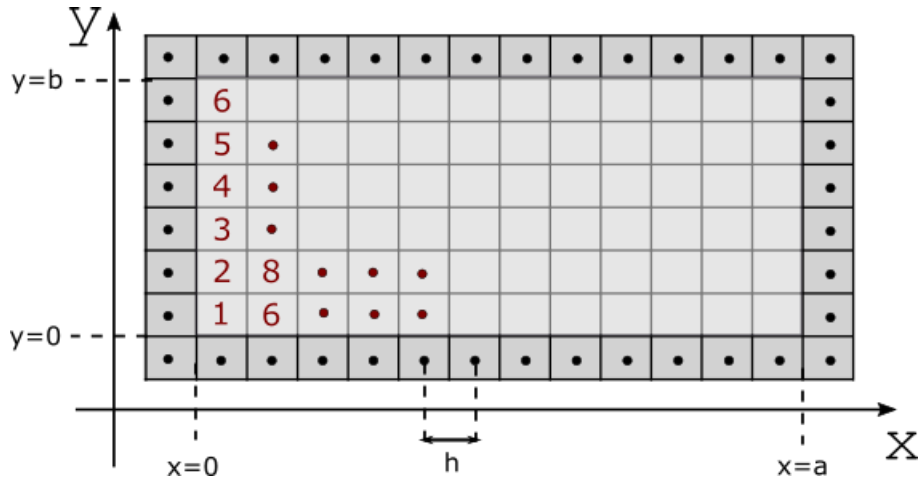


Figura 2.2: Discretización de la sección de interés y numeración de puntos.

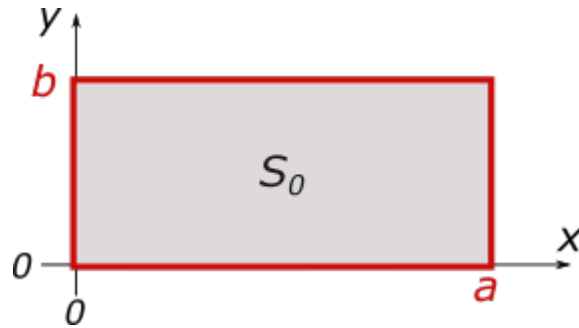


Figura 2.3: Disposición de la guía rectangular base en el plano XY

las que las condiciones de contorno pasarán de estar fijadas sobre dos puntos a definirse sobre todo un conjunto de puntos que delimitan la región de interés —interior del resonador—.

El objetivo es definir un problema de autovalores que permita obtener el valor de la función objetivo para cada uno de los puntos del mallado. Como se dijo en la sección inicial del presente capítulo, la función objetivo representa la característica transversal de la componente axial del campo eléctrico o magnético (según estemos hablando de modos TM o TE, respectivamente).

Para ilustrar de forma clara el procedimiento se va a proceder a plantear el problema sobre una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ cuyas paredes son conductores eléctricos perfectos. La estructura se considera dispuesta sobre el plano XY , tal y como refleja la figura 2.3. Empezaremos

por el cálculo de los modos TM, por ser el más sencillo. Luego abordaremos el cálculo de los modos TE y, para rematar, intentaremos combinar en una misma estructura paredes eléctricas y magnéticas.

2.3.1. Cálculo de los modos TM

En este primer escenario la función objetivo representará la característica transversal de la componente axial del campo eléctrico $e_z(x, y)$. La condición de contorno de pared eléctrica exige que

$$\psi(0, y) = \psi(a, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0 \quad (2.24)$$

En el problema de autovalores, cada uno de los puntos del mallado llevará asociada una ecuación del tipo (2.8), y teniendo en cuenta las condiciones de contorno dadas por (2.24) se observa que

- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro izquierdo $\Rightarrow \psi(x_{i-1}, y_j) = 0$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro derecho $\Rightarrow \psi(x_{i+1}, y_j) = 0$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro inferior $\Rightarrow \psi(x_i, y_{j-1}) = 0$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro superior $\Rightarrow \psi(x_i, y_{j+1}) = 0$

Al igual que ocurriera en el caso unidimensional, los puntos frontera no llevan ecuación asociada, y el valor del campo ψ en estos viene predeterminado por las condiciones de contorno. El sistema de ecuaciones que tendríamos en este caso es el siguiente:

$$\begin{aligned} A_{11}\psi_1 + A_{12}\psi_2 + \cdots + A_{1N}\psi_N &= \beta^2\psi_1 \\ A_{21}\psi_1 + A_{22}\psi_2 + \cdots + A_{2N}\psi_N &= \beta^2\psi_2 \\ &\vdots \\ A_{N1}\psi_1 + A_{N2}\psi_2 + \cdots + A_{NN}\psi_N &= \beta^2\psi_N \end{aligned} \quad (2.25)$$

O bien expresado matricialmente:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \beta^2\boldsymbol{\psi} \quad (2.26)$$

En (2.25) se aprecia que la indexación de los valores del campo ψ ha pasado de dos índices —indicando las coordenadas del punto asociado en el

mallado— a un solo índice —indicando la columna de la incógnita que representa el valor del campo en ese punto—. Por este motivo se hace necesario realizar una plantilla en la cual se realice una correspondencia $(i, j) \rightarrow m$ de forma que $\psi_{i,j} = \psi_m$. En este caso, N representa el número de puntos sobre los que se va a resolver el problema de autovalores.

Inspeccionando (2.8) y (2.24) nos damos cuenta de que los coeficientes A_{mn} presentes en (2.25) pueden tomar tres valores diferentes:

$$A_{mn} = \left\{ 0, -\frac{1}{h^2}, \frac{4}{h^2} \right\} \quad (2.27)$$

O más específicamente:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{4}{h^2} & \text{si } m = n \\ -\frac{1}{h^2} & \text{si } (i_n, j_n) \text{ es interior y adyacente a } (i_m, j_m) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.28)$$

Se entienden por puntos *interiores* aquellos puntos del mallado que no forman parte de la frontera (sobre la que se establecen las condiciones de contorno) y que por tanto, tienen una ecuación asociada en el problema de autovalores (2.25).

2.3.2. Cálculo de los modos TE

En este segundo escenario la función objetivo representará la característica transversal de la componente axial del campo magnético $h_z(x, y)$. La condición de contorno de pared eléctrica exige que la derivada respecto al vector normal saliente sobre cada punto de la frontera sea cero (esto ya se explicó en la sección sobre guías de onda del primer capítulo). Por tanto:

- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro izquierdo $\Rightarrow \psi(x_i, y_j) = \psi(x_{i-1}, y_j)$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro derecho $\Rightarrow \psi(x_i, y_j) = \psi(x_{i+1}, y_j)$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro inferior $\Rightarrow \psi(x_i, y_j) = \psi(x_i, y_{j-1})$
- Si (x_i, y_j) es adyacente al muro superior $\Rightarrow \psi(x_i, y_j) = \psi(x_i, y_{j+1})$

Evidentemente, un punto interno a la estructura puede ser adyacente a más de un punto frontera, como ocurre en las esquinas de la estructura rectangular considerada. Una vez más, estaríamos ante un problema de

autovalores como (2.25). En virtud de los cuatro puntos que acabamos de subrayar y a la versión discretizada de la ecuación diferencial que venimos tratando (2.8) los coeficientes A_{mn} vendrán definidos por:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{4-N_{abp}}{h^2} & \text{si } m = n \text{ y } (i_m, j_m) \text{ adyacente a frontera} \\ -\frac{1}{h^2} & \text{si } m \neq n \text{ y } (i_n, j_n) \text{ es adyacente a } (i_m, j_m) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.29)$$

Siendo N_{abp} el número de puntos del mallado que pertenecen a la frontera y son adyacentes al punto considerado. Para aumentar la precisión de la solución es conveniente que la frontera se sitúe a medio camino entre puntos del mallado; es decir, que no pertenezca explícitamente ni al muro ni al medio del interior de la guía.

2.3.3. Combinación de condiciones de contorno

El cálculo de los modos TM en una guía de paredes eléctricas es idéntico al cálculo de los modos TE en una guía geoméricamente idéntica de paredes magnéticas. Las ecuaciones y procedimientos que han sido descritos para el ejemplo de la guía rectangular limitada por un conductor eléctrico perfecto son igualmente aplicables a cualquier tipo de geometría, siempre y cuando la discretización y el mallado vengan dados en formato rectangular —coordenadas rectangulares—.

El procedimiento a seguir para implementar un algoritmo que haga uso de la teoría explicada sería, de forma aproximada, el siguiente:

- En primer lugar, habría que definir la estructura a analizar en forma de *plantilla*. Una plantilla no es más que una matriz en la que se especifica qué puntos del mallado pertenecen al interior de la guía y qué puntos pertenecen a la frontera (y el tipo de frontera, eléctrica o magnética del que se trata punto a punto).
- En segundo lugar, una plantilla que provea una indexación unidimensional a cada punto del espacio interno a la guía, para hacer corresponder cada componente del autovector a una posición del mallado interno. Dicha componente será el valor de ψ en el punto considerado.
- Tendríamos que recorrer las matrices que contienen ambas plantillas, e ir calculando los coeficientes de la matriz característica del problema de autovalores. La expresión (2.29) es perfectamente válida para una

Orden	β_c (m^{-1}) (COMP)	β_c (m^{-1}) (TEORÍA)	Error rel. (%)
1	164.9062	164.9130	-0.0041
2	329.7717	329.8260	-0.0164
3	329.7717	329.8260	-0.0164
4	368.7051	368.7567	-0.0140

Tabla 2.1: Números de onda de corte de los 4 primeros modos TE de la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm y $b = 9,525$ mm. Todas las paredes son PEC.

estructura en la que se combinan muros eléctricos con magnéticos. En modos TM, N_{abp} pasaría a ser el número de puntos de frontera magnética que son adyacentes a (i_m, j_m) . Para modos TE, N_{abp} sería el número de puntos de frontera eléctrica que son adyacentes a (i_m, j_m) .

- Finalmente, se resolvería el problema de autovalores. Para mostrar los campos nos ayudamos de las plantillas previamente creadas (concretamente, pasa saber el punto del mallado en el que va cada componente del autovector).

2.3.4. Ejemplos

Para acabar, veamos algunos ejemplos de simulaciones que emplean los conceptos recientemente explicados. Se ha simulado una guía rectangular de dimensiones $a \times b$ con $a = 19,05$ mm y $b = 9,525$ mm limitada por paredes eléctricas. En otra simulación, se ha simulado una estructura similar, pero sustituyendo la pared inferior por un muro magnético (mismo ejemplo que el del capítulo uno). También se ha ejecutado el algoritmo programado sobre una guía circular de radio $a = 9,525$, sobre la cual se ha impuesto inicialmente condición de pared eléctrica. Más adelante, se ha reemplazado la parte $\pi < \phi < 2\pi$ por una pared magnética, dejando aquella de $0 \leq \phi \leq \pi$ de tipo eléctrico.

Se muestran las comparaciones de los números de onda de corte obtenidos por simulación frente a aquellos obtenidos teóricamente.

En los escenarios de análisis de la guía rectangular se ha mallado el interior de la guía con $N = 5000$ puntos, con lo que la matriz del problema de autovalores tiene dimensión 5000×5000 , requiriendo un tiempo de computación de 23.76 s. En el escenario de análisis de la guía circular se ha mallado el interior de esta con $N = 7120$ puntos, siendo el tiempo de computación en este caso de 68.88 s.

Orden	β_c (m^{-1}) (COMP)	β_c (m^{-1}) (TEORÍA)	Error rel.(%)
1	250.6832	252.4751	-0.7098
2	399.3738	402.2788	-0.7221
3	535.1398	539.1729	-0.7480
4	575.2235	579.5358	-0.7441

Tabla 2.2: Números de onda de corte de los 4 primeros modos TM de la guía circular de radio $a = 9,525$ mm. Todas las paredes son PEC.

Orden	β_c (m^{-1}) (COMP)	β_c (m^{-1}) (TEORÍA)	Error rel.(%)
1	230.9038	233.2222	-0.9941
2	365.0556	368.7567	-1.0037
3	516.1667	521.5007	-1.0228
4	516.1667	521.5007	-1.0228

Tabla 2.3: Números de onda de corte de los 4 primeros modos TE de la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm y $b = 9,525$ mm. Todas las paredes son PEC menos el muro inferior, que es un PMC.

Orden	β_c (m^{-1})
1	268.1224
2	307.2864
3	399.5571
4	440.0679

Tabla 2.4: Números de onda de corte de los 4 primeros modos TM de la guía circular de radio $a = 9,525$ mm. La pared $0 \leq \phi \leq \pi$ es eléctrica y la restante es magnética.

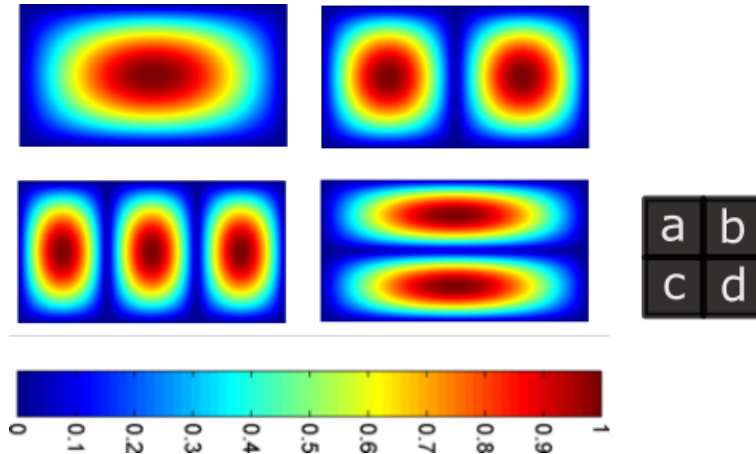


Figura 2.4: Componente axial del campo eléctrico (normalizado respecto al máximo) para la guía rectangular de paredes eléctricas. Se muestran los cuatro primeros modos TM.

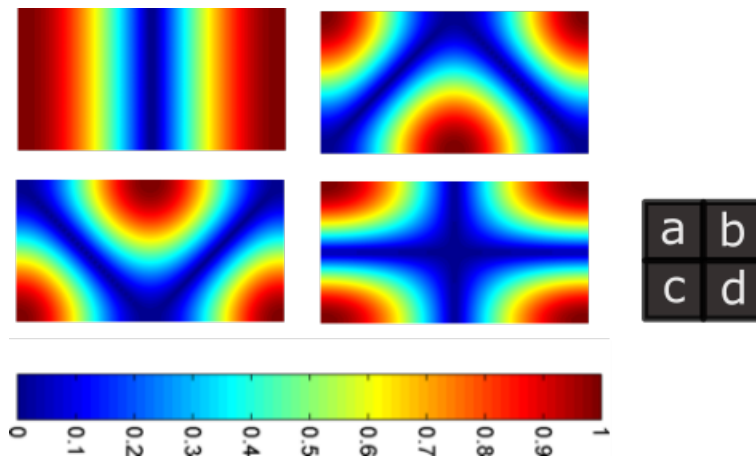


Figura 2.5: Componente axial del campo magnético (normalizado respecto al máximo) para la guía rectangular de paredes eléctricas. Se muestran los cuatro primeros modos TE.

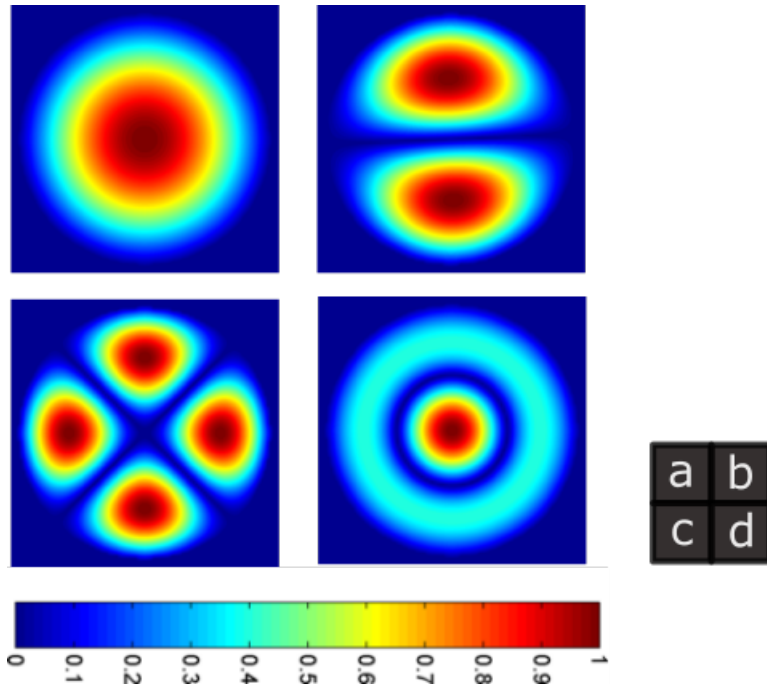


Figura 2.6: Componente axial del campo eléctrico (normalizado respecto al máximo) para la guía circular de paredes eléctricas. Se muestran los cuatro primeros modos TM.

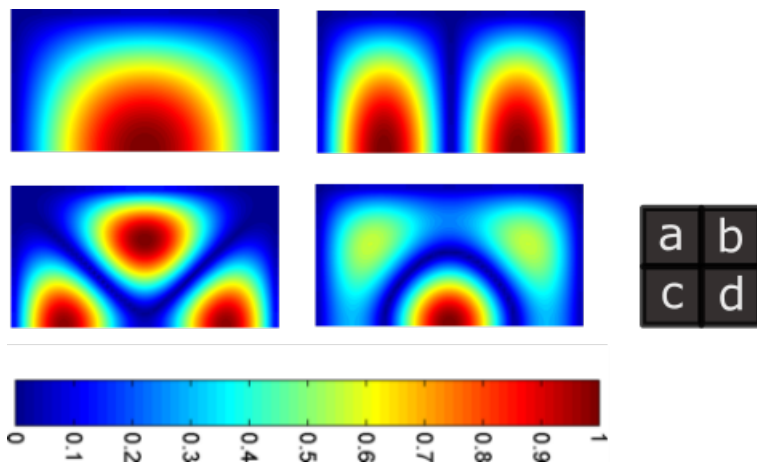


Figura 2.7: Componente axial del campo magnético (normalizado respecto al máximo) para la guía rectangular de paredes combinadas. Se muestran los cuatro primeros modos TM.

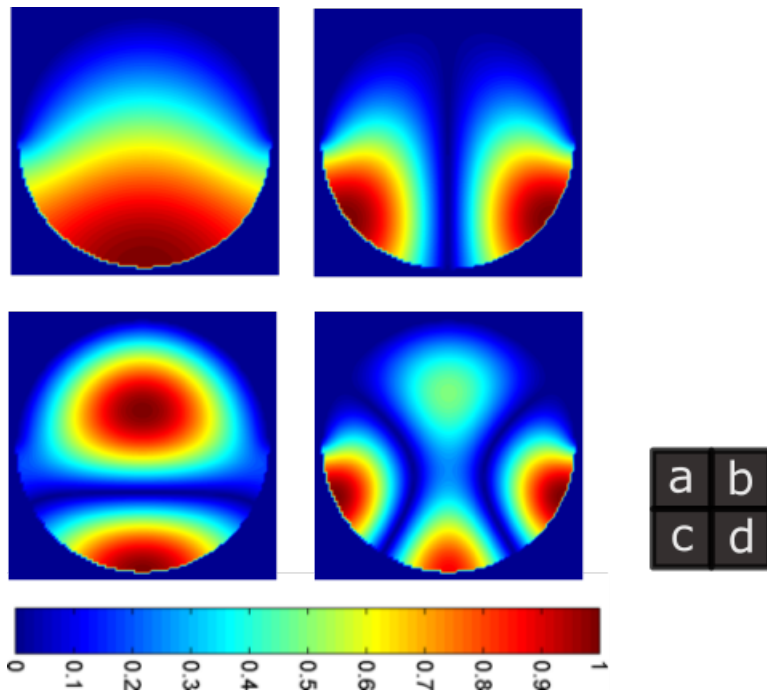


Figura 2.8: Componente axial del campo eléctrico (normalizado respecto al máximo) para la guía circular de paredes combinadas. Se muestran los cuatro primeros modos TM.

Capítulo 3

El método BI-RME

Un problema típico en ingeniería de microondas es el del cálculo de los modos que se propagan en guías de onda de sección transversal arbitraria. Los métodos con mayor presencia en la literatura se centran en la resolución modal de la guía de onda de paredes metálicas. Según el procedimiento seguido para solucionar dicho problema, podemos agrupar los métodos existentes en dos grandes familias: diferencias finitas (*Transmission Line Method* [8]) y basados en ecuación integral. Los primeros dan lugar a problemas de autovalores de gran tamaño. Además, requieren definir los parámetros del mallado y la definición explícita de las condiciones de contorno en la pared de la guía. Una virtud de esta clase viene dada por la simplicidad de implementación y la facilidad con la que se pueden combinar paredes eléctricas y magnéticas. Por otra parte, los métodos basados en ecuación integral tienen la ventaja de que desembocan en problemas de autovalores pequeños cuya resolución no conlleva un gran esfuerzo computacional (ni en términos de procesamiento ni de memoria). Estos métodos se basan en cierto núcleo integral (*kernel*), que va a ser siempre una función de Green para campo eléctrico o magnético (o para los potenciales). El principal inconveniente de los métodos de esta clase es la dificultad que se presenta a la hora de combinar condiciones de contorno en distintas paredes de la guía. Esta dificultad se deriva del uso del núcleo integral, el cual siempre será de naturaleza eléctrica —con lo que será relativamente sencillo imponer la condición de pared eléctrica— o magnética —con lo que será relativamente sencillo imponer la condición de pared magnética—.

Los métodos basados en ecuación integral emplean el Método de los Momentos para generar un problema matricial de autovalores, cuya resolución permite representar la densidad de corriente en las paredes de la guía pa-

ra cada modo solución. La metodología descrita en [7] por Barry Spielman y Roger Harrington es un ejemplo de los métodos de esta clase, pero presentan una desventaja: hacen uso de un núcleo integral genérico —función de Green eléctrica en espacio libre—. Esto alarga el tiempo de ejecución —especialmente para modos de orden superior— y resta precisión a los resultados. Para solucionar este problema los investigadores de la Universidad de Pavia (Italia) Giuseppe Conciauro, Marco Bressan y Cinzia Zuffada presentaron en [9] un método similar —también basado en ecuación integral— pero que hace uso de una función de Green específica para guías de onda canónicas (rectangulares y circulares). Estas funciones de Green se presentan en trabajos previos [10] en su forma exacta (para el resonador circular) o en forma de serie rápidamente convergente (para el resonador rectangular). Con este nuevo algoritmo, al que se bautizó como *Integral de contorno - Expansión en Modos Resonantes* o **BI-RME**, por sus siglas en inglés (*Boundary Integral - Resonant Mode Expansion*) se pueden analizar guías de onda de sección transversal arbitraria añadiendo perturbaciones a guías de onda canónicas. Dichas perturbaciones pueden tomar cualquier forma —abierta o cerrada— por lo que, en principio, no existen limitaciones a la hora de definir el contorno de la guía arbitraria a analizar.

En este capítulo se presentará la formulación teórica del método BI-RME y se explicará, paso a paso, como llevar a cabo su implementación práctica.

3.1. Formulación teórica general

Como se ha mencionado en la introducción del presente capítulo, el método BI-RME se basa en la resolución de una ecuación integral cuyo núcleo es una función de Green que cumple de forma intrínseca las condiciones de contorno sobre la guía canónica base que vamos a perturbar para obtener nuestra sección arbitraria. Siempre que hablemos de guía base nos referiremos a la guía original que deseamos perturbar añadiendo en su interior láminas conductoras de contornos apropiados. A la estructura resultante tras añadir los contornos perturbantes la llamaremos **guía arbitraria** o **guía perturbada**.

Denotaremos como σ al contorno que define la perturbación. Los puntos sobre el plano en los que este está definido se pueden expresar en función de una abscisa l sobre dicho contorno como

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(l) \tag{3.1}$$

La abscisa l asociada a un punto sobre el contorno es la longitud del

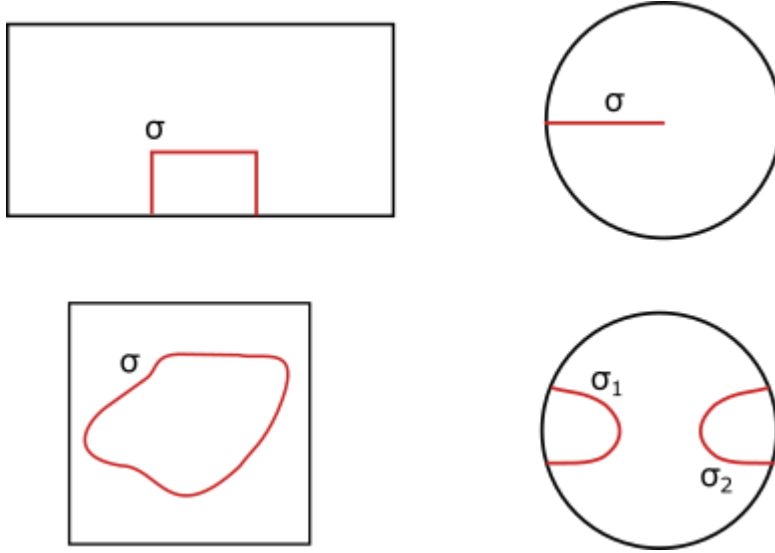


Figura 3.1: Guías canónicas perturbadas con láminas conductoras

tramo existente entre el extremo inicial” de la perturbación y dicho punto. Si la perturbación tiene forma de bucle —esto es, de línea cerrada— podemos fijar el extremo de partida (que será también el final) donde queramos. A la hora de definir un contorno cerrado me gusta hacerlo de forma que al aumentar l nos movamos en sentido antihorario, esto es cuestión de preferencia personal. Denominaremos sentido positivo al sentido de giro observado al incrementar l .

El campo eléctrico observado cualquier punto interno \mathbf{r} de la guía base se puede expresar en función de la densidad de corriente \mathbf{J}_σ sobre la lámina conductora σ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\eta\beta \int_\sigma \tilde{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{s}', \beta) \cdot \mathbf{J}_\sigma(l') dl' \quad (3.2)$$

Las variables primadas \mathbf{s}' y l' denotan puntos de fuente sobre la perturbación σ . El núcleo del operador integral $\tilde{\mathbf{G}}_E$ es la función de Green diádica para el campo eléctrico asociada a la estructura canónica base (es decir, a la guía rectangular o circular que estemos perturbando). En el capítulo 1 ya resaltó el concepto de función de Green y se comentó la necesidad de emplear funciones de Green diádicas en casos como el que se presenta —en el que cada componente de \mathbf{J}_σ es responsable de varias componentes de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ —.

La ecuación integral queda definida al imponer condición de contorno

de pared eléctrica sobre la lámina perturbante, es decir, imponiendo que la componente tangencial del campo eléctrico \mathbf{E} se anule en los puntos pertenecientes a σ .

La función de Green diádica la podemos descomponer en parte tangencial y parte axial

$$\bar{\mathbf{G}}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \beta) = \bar{\mathbf{G}}_{Et}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \beta) + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}G_E^{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \beta) \quad (3.3)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es el vector unitario que apunta en la dirección axial de la guía, sentido positivo (hacia donde *se propagan* las ondas progresivas).

La componente transversal de $\bar{\mathbf{G}}_E$ viene dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{Et}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \beta) = & \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{\beta^2} \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ & + \sum_m \frac{\beta^2 \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \mathbf{e}_m(\mathbf{r}')}{\beta_m^2 (\beta_m^2 - \beta^2)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

y su componente axial por

$$G_E^{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \beta) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sum_m \frac{\beta^2 \psi_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}')}{\beta_m'^2 (\beta_m'^2 - \beta^2)} \quad (3.5)$$

En estas expresiones:

- \mathbf{r} representa un punto de observación genérico dentro de la guía base.
- \mathbf{r}' representa un punto de fuente genérico dentro de la guía base
- g es la función de Green escalar para la ecuación de Poisson bidimensional, satisfaciendo la condición de contorno $g = 0$ en las paredes de la guía base.
- β_m es el el número de onda de corte del m-ésimo modo TE en propagarse por la guía base.
- β_m' es el el número de onda de corte del m-ésimo modo TM en propagarse por la guía base.
- \mathbf{e}_m es el campo eléctrico normalizado asociado al m-ésimo modo TE de la guía base.
- ψ_m es la componente axial normalizada del campo eléctrico asociado al m-ésimo modo TM de la guía base.

- $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ es la diádica solenoidal normal a la frontera de la guía base.

Nótese que tanto $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ como g son independientes de la frecuencia. Cómo ya se dijo en la introducción de este capítulo, disponemos de expresiones para ambas funciones tanto para resonadores rectangulares (en forma de serie rápidamente convergente) como circulares (en forma cerrada exacta). Introduciremos dichas expresiones más adelante.

Para simplificar el problema y plantear la ecuación integral es interesante descomponer la densidad de corriente \mathbf{J}_σ en sus componentes tangencial (con respecto a σ) y axial.

$$\mathbf{J}_\sigma(l') = J_t(l')\hat{\mathbf{t}}(l') + \hat{\mathbf{z}}J_z(l') \quad (3.6)$$

Donde el vector unitario $\hat{\mathbf{t}}(l')$ es tangente al contorno σ en el punto de abscisa l' . La componente transversal de la densidad de corriente viene dada por J_t , y la componente axial por J_z . Estas serán las funciones incógnita de la ecuación integral que estamos a punto de plantear.

El campo eléctrico en el interior de la guía base tiene una componente transversal \mathbf{E}_t a la dirección del eje de la guía y una componente axial E_z en línea con dicho eje. Estas componentes se pueden expresar en función de J_t , $\hat{\mathbf{t}}(l')$ y J_z como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = & \frac{j\eta}{\beta} \int_\sigma \nabla \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' - j\eta\beta \int_\sigma \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \\ & - j\eta\beta^3 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{\beta_m^2(\beta_m^2 - \beta^2)} \int_\sigma \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}) = & -j\eta\beta \int_\sigma g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' \\ & - j\eta\beta^3 \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{\beta_m^2(\beta_m^2 - \beta^2)} \int_\sigma \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \end{aligned} \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta que la función de Green escalar g tiene una expresión tediosa para un resonador rectangular y que la corriente la vamos a descomponer más adelante como la suma de *splines* parabólicos, es conveniente transformar la integral del primer término de (3.7) aplicando la identidad

$$\int_\sigma \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial l'} J_t(l') dl' = - \int_\sigma g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl'$$

que se obtiene integrando por partes el lado izquierdo de la identidad y teniendo en cuenta que g se anula en la frontera de la guía base y que J_t se

hace cero en los extremos sueltos —aquellos que quedan en circuito abierto— de la perturbación.

Imponiendo las condiciones de contorno

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') = 0 \quad (3.9)$$

$$E_z(\mathbf{s}') = 0 \quad (3.10)$$

sobre (3.7) y (3.8) respectivamente, se obtienen las ecuaciones integrales para los modos TE y TM de la guía perturbada. Por tanto, para hallar los modos TE tendríamos que resolver

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial l} \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial J_t(l')}{\partial l'} dl' + \int_{\sigma} \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl' + \\ + \sum_m \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{s}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(l)}{\beta_m^2} a_m \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con

$$a_m = \frac{\beta^2}{\beta_m^2 - \beta^2} \int_{\sigma} \mathbf{e}_m(\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') J_t(l') dl' \quad (3.12)$$

Finalmente, para hallar los modos TM de la guía arbitraria tendríamos que despejar J_z en

$$\int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') J_z(l') dl' + \sum_m \frac{\psi_m(\mathbf{s})}{\beta_m^2} a'_m = 0 \quad (3.13)$$

Con

$$a'_m = \frac{\beta^2}{\beta_m^2 - \beta^2} \int_{\sigma} \psi(\mathbf{s}') J_z(l') dl' \quad (3.14)$$

3.2. Teoría de los Modos TE

Ya hemos introducido toda la formulación teórica general del método BI-RME. Vamos ahora a presentar la formulación específica para obtener los distintos modos de las guías perturbadas, empezando por los TE. Como se dijo en el apartado anterior, el objetivo es hallar la densidad de corriente sobre la perturbación conductora introducida en la guía rectangular o circular, para ello haremos uso del Método de los Momentos, cuyos principios fueron

remarcados en el primer capítulo. En el caso de los modos TE la ecuación integral a resolver es la (3.11), donde la incógnita es la componente transversal (respecto a σ) de la densidad de corriente; es decir, J_t . Haciendo uso del método de los momentos, podemos expresar esa función como la combinación lineal de una serie de funciones *base*, a las que denominaremos u_n . Por supuesto, los elementos de este conjunto base tienen que ser linealmente independientes. Más adelante propondremos un conjunto apropiado con el que se obtienen muy buenos resultados.

$$J_t(l') = \sum_{n=1}^N b_n u_n(l') \quad (3.15)$$

Un detalle importante es que vamos a emplear el Método de Galerkin —por lo que el conjunto de funciones de test va a coincidir con el conjunto *base*—. Sustituyendo (3.15) en (3.11) obtenemos un sistema de ecuaciones que expresamos en forma matricial como

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O}_t \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{bmatrix} - \beta_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{R}_t \\ \mathbf{R} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

Donde

- \mathbf{U} es la matriz identidad de orden M
- \mathbf{O} es una matriz de ceros de tamaño $N \times M$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\beta_1^{-2}, \beta_2^{-2}, \dots, \beta_M^{-2}) \quad (3.17)$$

$$C_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \frac{\partial u_i(l)}{\partial l} \frac{\partial u_j(l')}{\partial l'} dl dl' \quad (3.18)$$

$$L_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) u_j(l') \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl dl' \quad (3.19)$$

$$R_{im} = \frac{1}{\beta_m^2} \int_{\sigma} u_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{s}) dl \quad (3.20)$$

Con

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Las soluciones del problema de autovalores (3.16) vendrá dada por pares $(\beta, [\mathbf{a} \ \mathbf{b}]^T)$ donde

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= [a_1, a_2, \dots, a_M]^T \\ \mathbf{b} &= [b_1, a_2, \dots, b_N]^T\end{aligned}$$

Hay que observar que, el sumatorio en m presente en la expresión (3.11) no está acotado —es decir, converge cuando $m \rightarrow \infty$ — para resolver la ecuación integral lo limitamos a M términos. Cuanto mayor sea M , más precisos serán nuestros resultados y más modos de la guía arbitraria podremos computar. M es el número de modos de la guía canónica base a emplear en la resolución del problema BI-RME.

El problema (3.16) puede ser resuelto por cualquier algoritmo de resolución de problemas matriciales de autovalores. A día de hoy existen múltiples herramientas *software* que integran algoritmos para resolver esta clase de problemas de forma muy eficiente [13], algunos de los más populares son *Matlab*, *Wolfram Mathematica*, *Máxima* y *GNU Octave*.

Una vez resuelto dicho problema dispondremos de los números de onda de corte β para cada modo encontrado. Puede ser interesante obtener la distribución del campo eléctrico en el interior de la guía canónica para cada modo. La componente transversal del campo eléctrico \mathbf{E}_t en cualquier punto del interior de la guía base se puede computar haciendo uso de (3.7). Esta expresión se puede simplificar introduciendo la corriente en su formato expandido (3.15) y agrupando términos, quedando:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) &= -j\eta \left\{ \sum_{n=1}^N b_n \left[\frac{1}{\beta_c} \nabla \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial u_n(l')}{\partial l'} dl' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta \int_{\sigma} \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') u_n(l') dl' \right] + \beta_c \sum_{m=1}^M \frac{a_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r})}{\beta_m^2} \right\}\end{aligned}\quad (3.21)$$

La expresión anterior permite computar el campo en cualquier punto interior a la guía base. Como la función de Green (tanto escalar como diádica) solo es válida dentro de las fronteras de dicha guía, evaluar el campo en un punto externo a esta daría resultados erróneos. Una de las utilidades que tiene evaluar el campo eléctrico es cuando dividimos la sección S_0 de la guía canónica en varias regiones S_1, S_2, \dots para determinar en qué region —o regiones— se propaga el modo contemplado. En un apartado posterior aplicaremos esta idea a través del *algoritmo de descarte modal*, que nos permitirá realizar una discriminación sobre los modos que se propagan fuera de nuestra región de interés. Como veremos, este algoritmo es una pieza clave en el análisis de guías de onda de sección transversal arbitraria.

3.3. Teoría de los Modos TM

La resolución del problema BI-RME para los modos TM gira en torno a encontrar la solución a la ecuación integral (3.13), donde la componente axial de la densidad de corriente J_z es la incógnita a hallar. El procedimiento para encontrar los modos TM es mucho más sencillo que el empleado a lo largo del apartado anterior para los modos TE —debido a que (3.13) es más manejable que (3.11)—.

Al igual que en el caso anterior, vamos a aplicar el Método de los Momentos —en su versión de *Galerkin*— para hallar la incógnita J_z , para ello *expandimos* esta función como combinación lineal de los elementos de un conjunto base $\{u_n\}$ cuidadosamente seleccionado.

$$J_z(l') = \sum_{n=1}^N b'_n u_n(l') \quad (3.22)$$

Introduciendo (3.22) en (3.13) y aplicando el procedimiento descrito en el capítulo 1 para la resolución de problemas de autovalores por el Método de los Momentos, empleando como conjunto de *test* $\{u_n\}$ se llega a un sistema cuya forma matricial tiene la forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O}_t \\ \mathbf{O} & \mathbf{O}' \end{bmatrix} - \beta_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D}' & \mathbf{R}'_t \\ \mathbf{R}' & \mathbf{L}' \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

donde

- \mathbf{U} es la matriz identidad de orden M
- \mathbf{O} es una matriz de ceros de tamaño $N \times M$
- \mathbf{O}' es una matriz de ceros de tamaño $N \times N$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\beta_1'^{-2}, \beta_2'^{-2}, \dots, \beta_M'^{-2}) \quad (3.24)$$

$$L'_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) u_j(l') g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') dl dl' \quad (3.25)$$

$$R'_{im} = \frac{1}{\beta_m'^2} \int_{\sigma} u_i(l) \psi_m(\mathbf{s}) dl \quad (3.26)$$

Con

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Con detenimiento se puede observar que el problema (3.23) admite N soluciones linealmente independientes cuyo autovalor asociado es $\beta = 0$ que han de ser descartadas (carecen de sentido físico). Dicho problema puede ser reorganizado al formato estándar que admite M autovalores $\beta \neq 0$

$$(\mathbf{D}' - \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'^{-1} \mathbf{R}) \mathbf{a}' = \beta_c^{-2} \mathbf{a}' \quad (3.27)$$

El vector de coeficientes \mathbf{b}' de la expansión de Jz se puede obtener a partir de \mathbf{a}' con la siguiente expresión

$$\mathbf{b}' = -\mathbf{L}'^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}' \quad (3.28)$$

La componente axial del campo eléctrico se puede computar haciendo uso de (3.8). Introducimos la expresión de la expansión de la corriente (3.22) en (3.8) y reordenamos los términos, obteniendo

$$\mathbf{E}_z(\mathbf{r}) = -j\eta\beta_c \left[\sum_{n=1}^N b'_n \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^M \frac{\psi_m(\mathbf{r}) a'_m}{\beta_m'^2} \right] \quad (3.29)$$

Al igual que ocurriera con los modos TE, esta expresión sólo es válida en puntos internos a la guía base. Ya se comentó que una de las utilidades de estas expresiones es su posterior uso en la aplicación del algoritmo de descarte modal, sin embargo, cómo se verá en la sección correspondiente a este algoritmo, la componente axial del campo no es apropiada en su uso (esto se debe a que E_z tiende a cero cuando se aproxima a una perturbación cerrada tanto desde dentro como desde fuera de la misma, por lo que nos será más difícil emplearla para hacer una discriminación basada en la intensidad de campo fuera y dentro de la región de interés). Por tanto, nos va a ser de utilidad definir la expresión para la componente transversal del campo eléctrico para los modos TM. Dado un modo TM con número de onda de corte β obtenemos la componente transversal del campo eléctrico como

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \frac{-j\beta_z}{\beta_c^2} \nabla_t E_z(\mathbf{r}) \quad (3.30)$$

Lo cual resulta en

$$\mathbf{E}_z(\mathbf{r}) = -\frac{\eta\beta_z}{\beta_c} \left[\sum_{n=1}^N b'_n \int_{\sigma} \nabla_T g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' + \sum_{m=1}^M \frac{\psi_m(\mathbf{r}) a'_m}{\beta_m'^2} \right] \quad (3.31)$$

Donde

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2}$$

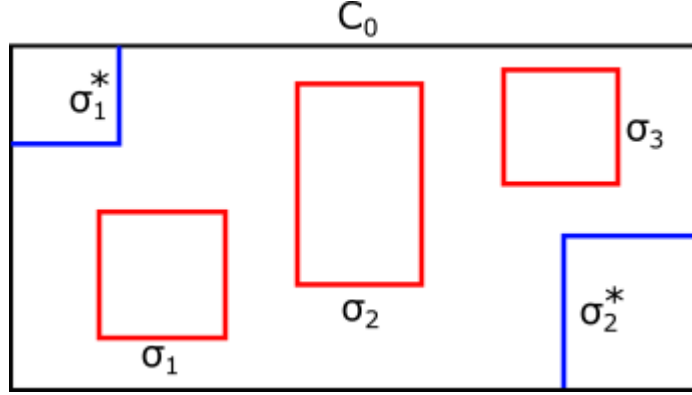


Figura 3.2: Estructura compatible con modos TEM

3.4. Teoría de los Modos TEM

Para completar, desglosaremos la teoría que concierne al cálculo de los modos TEM con BI-RME. Este proceso es independiente de los descriptos para los modos TE y TM. Obviamente, en este apartado sólo nos interesan los campos modales, puesto que el número de onda de corte de un modo TEM es siempre cero. En esencia, el cálculo de los modos TEM en cualquier estructura de ondas guiadas se puede efectuar resolviendo la conocida ecuación de *Poisson*, sujeta a un conjunto de condiciones de contorno que fijan el potencial en cada uno de los conductores presentes. Como sabemos, los modos TEM sólo pueden existir en nuestra estructura si coexisten al menos dos conductores separados —esto es, no cortocircuitados—. En general, la estructura a analizar tendrá una forma similar a la de la figura 3.2

El problema primigenio viene, pues, descrito por

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (3.32)$$

Sujeta a las condiciones de contorno

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{r} \in C_0 \\ 0, & \text{si } \mathbf{r} \in \sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_{Q^*}^* \\ \Phi_1, & \text{si } \mathbf{r} \in \sigma_1 \\ \Phi_2, & \text{si } \mathbf{r} \in \sigma_2 \\ \vdots & \\ \Phi_Q, & \text{si } \mathbf{r} \in \sigma_Q \end{cases}$$

Resolviendo ese problema seríamos capaces de obtener el potencial electrostático en el interior de la guía, sin embargo, como disponemos de la función de Green escalar $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para (3.32) (la cual ya satisface la condición de contorno sobre la pared de la guía base) podemos plantear una ecuación integral sobre la densidad de carga en la perturbación σ y resolverla por el Método de los Momentos, siguiendo el procedimiento ya efectuado para los modos TE y TM.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \rho_{\sigma}(l') dl' \quad (3.33)$$

La función incógnita en (3.33) es la densidad de carga sobre el contorno σ , pudiendo este ser un conjunto de perturbaciones separadas $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q\}$. Los contornos que hacen contacto eléctrico con la guía base $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_Q^*\}$ poseen el mismo potencial que esta, quedando fijado en la práctica a cero —potencial de referencia—. Una estrategia para resolver este problema consiste en asignar potencial 1 a uno de los conductores internos σ_i y cero al resto, con lo que obtendríamos la densidad de carga sobre σ_i . Repitiendo el mismo procedimiento para todas los conductores internos obtendríamos todas las combinaciones TEM. Evidentemente, existen tantas combinaciones TEM como conductores internos Q existan. El potencial electrostático asociado al modo TEM resultante de la estructura sería la superposición de los potenciales asociados a cada curva individual.

Después de esta explicación, pasemos a ilustrar el procedimiento matemático. Tal como ya se hizo para el cómputo de los modos TE y TM expresamos la función incógnita como cierta expansión de un conjunto de funciones base $\{u_n\}$

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma}(l') = & \sum_{n=1}^{N_1^*} b_n'' u_n(l') + \sum_{n=N_1^*+1}^{N_1^*+N_2^*} b_n'' u_n(l') + \dots + \sum_{n=N^*-N_Q^*+1}^{N_1^*+N_2^*} b_n'' u_n(l') + \\ & + \sum_{n=N^*+1}^{N^*+N_1} b_n'' u_n(l') + \dots + \sum_{n=N-N_Q+1}^N b_n'' u_n(l') \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donde cada sumatorio representa la densidad de carga sobre cada uno de los conductores; específicamente, los sumatorios de la primera línea representan la densidad de carga sobre los conductores que hacen contacto eléctrico con la pared de la guía base, mientras que los de la segunda línea representan la densidad de carga sobre los conductores internos. Con $N_1^*, N_2^*, \dots, N_Q^*$

denotamos el número de funciones base asociadas a cada uno de los Q^* conductores $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_{Q^*}^*$. Por otra parte N_1, N_2, \dots, N_Q son el número de funciones base asignadas a los conductores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q$; N es el número total de funciones base.

Aplicando el procedimiento de Galerkin llegaríamos al sistema matricial definido por

$$\mathbf{L}'' \mathbf{b}'' = \mathbf{f} \quad (3.35)$$

Donde \mathbf{L}'' es una matriz $N \times N$ con elementos

$$L''_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) u_j(l') g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') dl dl' \quad (3.36)$$

\mathbf{f} es el vector columna dado por los elementos

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq N^* \\ \Phi_q, & \text{si } N^* < n \leq N \end{cases}$$

O expresado con palabras: f_n es cero en todos los índices asociados a una función base que pertenezca a una curva sobre la que el potencial es cero (conductores que contactan con el borde de la guía base) y Φ_q en los índices asociados a una función base que pertenezca a un conductor interno, siendo Φ_q el potencial asignado a dicho conductor.

Una vez solucionada (3.35) podemos obtener el potencial electrostático el cualquier punto en el interior de la guía base como

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N b''_n \int_{\sigma} g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' \quad (3.37)$$

Finalmente, podemos computar el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (3.38)$$

Y, debido a que el gradiente sólo opera sobre los puntos de observación (y no sobre los puntos fuente), es sencillo introducir el operador en la integral de (3.37) obteniendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\sum_{n=1}^N b''_n \int_{\sigma} \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_n(l') dl' \quad (3.39)$$

Todos estos conceptos se clarificarán en la sección de implementación del algoritmo.

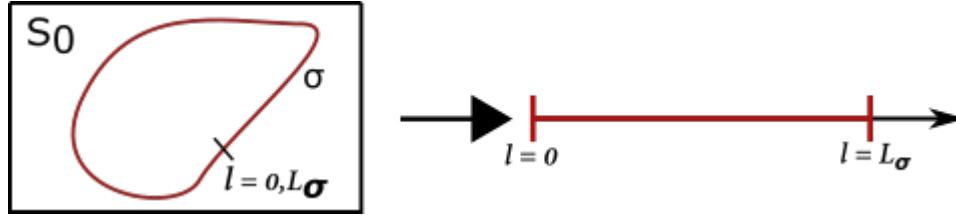


Figura 3.3: Desarrollo de σ sobre el eje l

3.5. Definiendo los contornos perturbantes

En estas últimas secciones hemos abordado todos los aspectos teóricos que hay que conocer para implementar el algoritmo BI-RME. Ahora empezamos a ilustrar los procedimientos para recabar los “ingredientes” necesarios a la hora de montar un programa que nos permita el cálculo de los modos. En primer lugar, es importante darse cuenta que vamos a emplear métodos numéricos en el cómputo de los modos. El uso de métodos numéricos implica antes o después la discretización de ciertas variables. En el caso de BI-RME, lo que se discretiza es el contorno a perturbar; concretamente, se aproxima dicho contorno mediante segmentos rectos, circulares o elípticos. En este documento vamos a emplear siempre segmentos rectos, debido a su simplicidad y versatilidad a la hora de discretizar cualquier contorno. Llamaremos N al número de segmentos empleados en la aproximación del contorno perturbante. Cada uno de estos segmentos no es más que un conjunto infinito de puntos sobre el plano, los cuales se pueden definir en términos de cierto parámetro $t \in [-0,5, 0,5]$ como

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x(t + 0,5) \\ y &= y_0 + \Delta y(t + 0,5) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Definir cada segmento en términos de este parámetro t que siempre está definido en $[-0,5, 0,5]$ nos permitirá generalizar la implementación; es decir, las operaciones —integrales presentadas en el desglose teórico de BI-RME— siempre quedarán definidas sobre t y los argumentos pasados a los bloques encargados de realizar dichas operaciones serán los parámetros constitutivos de los segmentos —punto inicial (x_0, y_0) e incremento en cada eje $(\Delta x, \Delta y)$ —

Además de definir la perturbación σ en el plano, habrá que *desarrollar* la misma sobre un eje de abscisas l , de forma que podamos definir funciones

como las $J_z(l)$, $J_t(l)$ ó $\rho_\sigma(l)$ vistas en apartados anteriores. Habiendo aproximado la perturbación por segmentos rectos, desarrollar esta última sobre el eje l resulta trivial: consistirá en hallar los valores l_0 (punto inicial) y Δl (longitud) para cada segmento. Las siguientes ecuaciones permiten obtener los valores característicos del desarrollo.

$$\Delta l_n = \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2} \quad (3.41)$$

$$l_{n0} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta l_i \quad (3.42)$$

En términos del parámetro genérico t podremos acceder a cada punto del n -ésimo segmento desarrollado sobre el eje l mediante

$$l = l_{n0} + \Delta l_n(t + 0,5) \quad (3.43)$$

En las integrales vistas en los desarrollos de la teoría general de BI-RME aparecen los diferenciales dl y dl' . A partir de (3.41) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dl &= \Delta l_n dt \\ dl' &= \Delta l_m dt' \end{aligned} \quad (3.44)$$

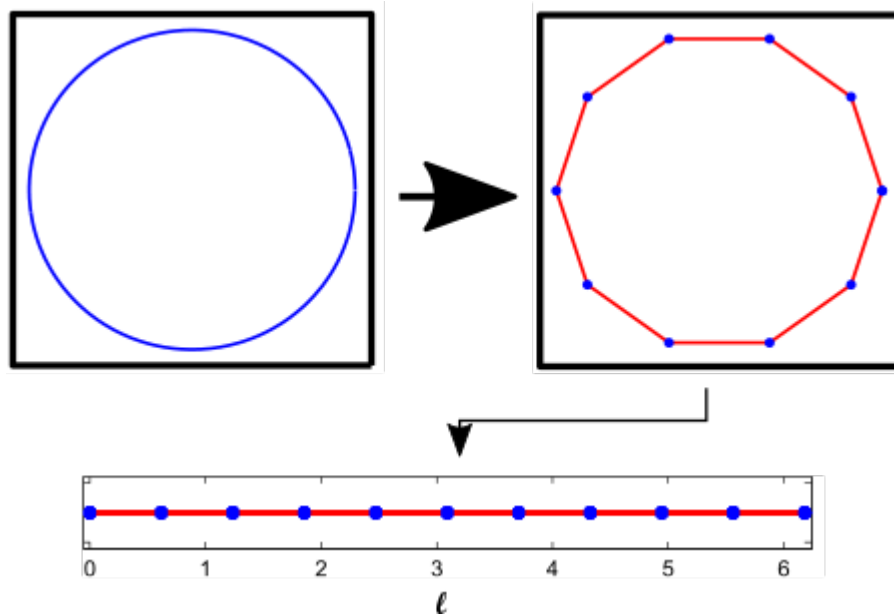


Figura 3.4: Segmentación de σ y desarrollo sobre el eje l

3.6. Obtención de las funciones base

En la parte del desarrollo teórico del método BI-RME se comentó la necesidad de expandir la corriente mediante funciones base para poder aplicar el Método de los Momentos y despejar así las incógnitas que habilitan el cálculo modal. La elección de las funciones base es muy importante para asegurar soluciones que sean a la vez precisas y computacionalmente eficientes. Los creadores de BI-RME proponen dos tipos de funciones base: parabólicas a trozos (*splines* parabólicos) y lineales a trozos. Ambas son denominadas de soporte parcial o *sub-seccionales*, es decir, están definidas sobre un tramo concreto en el eje l , siendo cero fuera del mismo.

En este documento trabajaremos siempre con funciones base de tipo parabólico, aunque también se proporcionarán las expresiones para bases de tipo lineal. El procedimiento empleado para su construcción es muy genérico, con lo que aplicarlo a otro tipo de formas debería ser casi inmediato.

Este tipo de funciones son muy apropiadas para el cálculo de todos los modos (TE, TM y TEM). Recapitulamos que en el caso de los modos TE, estas funciones compondrán la corriente transversal a la perturbación σ , para los modos TM formarán la corriente axial y en el caso de los TEM constituirán la densidad de carga. En general, las funciones centradas en

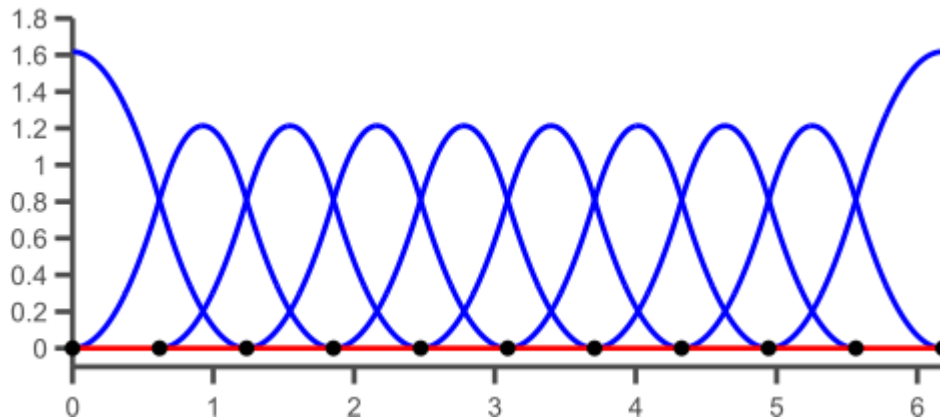


Figura 3.5: Representación de las funciones base parabólicas

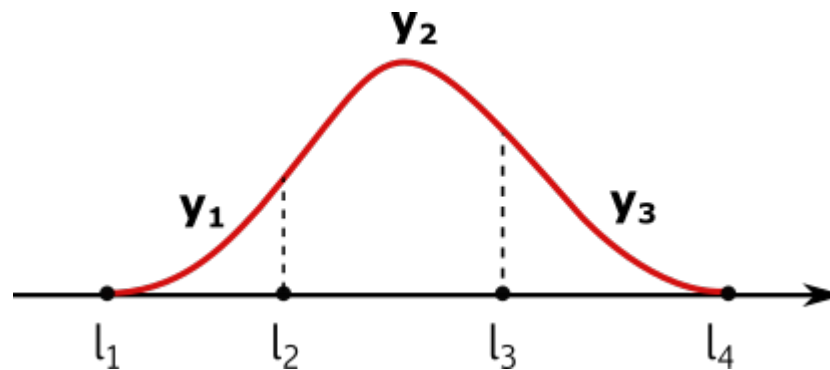


Figura 3.6: Función base de tipo 1, usada en segmentos intermedios

segmentos no extremos (es decir, segmentos distintos del inicial o final) estarán definidas sobre 3 segmentos consecutivos, entrelazándose como en la figura mencionada. A partir de ahora, nos referiremos a estas funciones como de *tipo 1*.

En los segmentos extremos de la perturbación emplearemos funciones definidas sobre dos segmentos consecutivos. En los modos TM y TEM siempre haremos uso de las de tipo 2, mostradas en la figura 3.7. Estas tienen la característica de que la derivada se anula en los extremos de la perturbación y se van a usar tanto en perturbaciones que terminan en circuito abierto como en cortocircuito —ya sea con las paredes de la guía base o en forma de bucle cerrado—. Para los modos TE vamos a usar las de tipo 3 en los extremos que acaben en circuito abierto —puesto que la corriente transver-

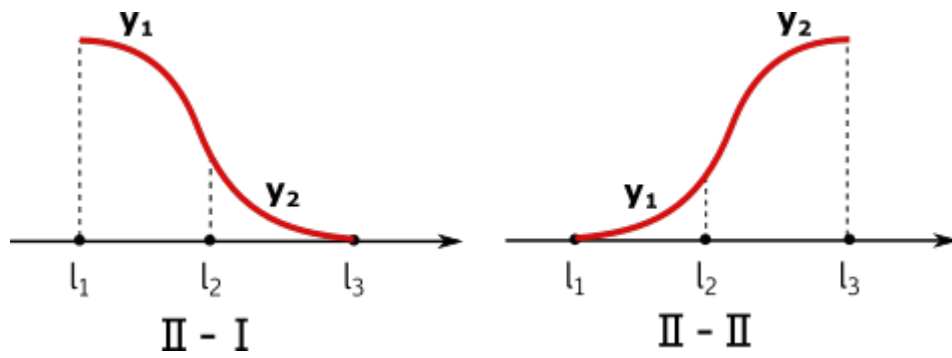


Figura 3.7: Función base de tipo 2, usada en segmentos extremos

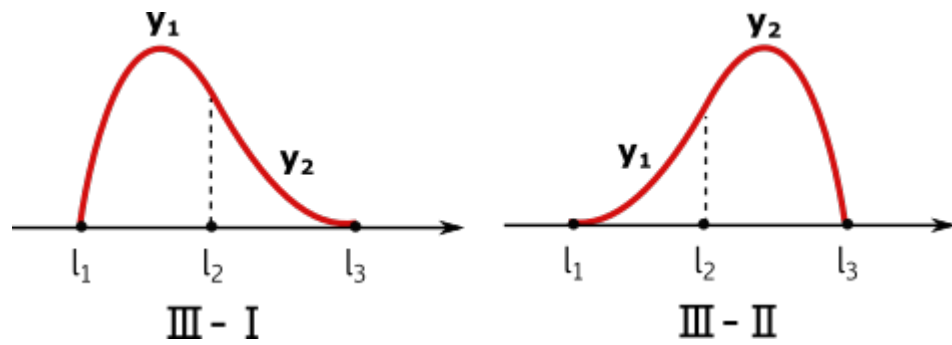


Figura 3.8: Función base de tipo 3, usada en segmentos extremos

sal ha de anularse— y las de tipo 2 para cualquier otro tipo de extremo. Nótese que en las figuras se distinguen dos subtipos para los tipos 2 y 3: las de subtipo 1 sirven para terminaciones por la izquierda del eje l y las de subtipo 2 para terminaciones por la derecha del eje l . Veamos ahora los criterios empleados en la construcción de todas estas funciones.

Funciones Base de tipo I

Esta función está compuesta por tres *splines* parabólicos, cada uno definido sobre uno de los 3 segmentos que soportan la misma. Refiriéndonos a la figura 3.6, denominaremos a los splines constituyentes $y_1(l)$, $y_2(l)$ e $y_3(l)$. $y_1(l)$ estará definido entre l_1 y l_2 , $y_2(l)$ entre l_2 y l_3 e $y_3(l)$ entre l_3 y l_4 . Al tratarse de *splines* parabólicos, la expresión que los caracteriza es

$$y_k(l) = a_k l^2 + b_k l + c_k \quad (3.45)$$

Deseamos que los *splines* asociados a dos segmentos consecutivos solapen de forma *suave*, lo que se traduce matemáticamente a

$$y_1(l_2) = y_2(l_2) \quad y_2(l_3) = y_3(l_3) \quad (3.46)$$

$$y_1'(l_2) = y_2'(l_2) \quad y_2'(l_3) = y_3'(l_3) \quad (3.47)$$

Por otra parte, deseamos que los *splines* del primer y último segmento se hagan 0 en los puntos extremos externos al soporte de la función base, pero cayendo de forma *suave*:

$$y_1(l_1) = 0 \quad y_3(l_4) = 0 \quad (3.48)$$

$$y_1'(l_1) = 0 \quad y_3'(l_4) = 0 \quad (3.49)$$

Finalmente, con el fin de garantizar resultados numéricamente estables en el cómputo de los modos, normalizaremos las funciones base tal que encierren el área unidad

$$\int_{l_1}^{l_2} y_1(l) dl + \int_{l_2}^{l_3} y_2(l) dl + \int_{l_3}^{l_4} y_3(l) dl = 1 \quad (3.50)$$

Las expresiones (3.46)-(3.50) definen un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas —los coeficientes de los splines y_1 , y_2 e y_3 —. Podemos expresarlo matricialmente como

$$\mathbf{A} \mathbf{l} = \mathbf{b} \quad (3.51)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_2^2 & -l_2^2 & 0 & l_2 & -l_2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & l_3^2 & -l_3^2 & 0 & l_3 & -l_3 & 0 & 1 & -1 \\ 2l_2 & -2l_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l_3 & -2l_3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1^2 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_4^2 & 0 & 0 & l_4 & 0 & 0 & 1 \\ 2l_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

Con

$$a_m^{(n)} = \frac{l_m^n - l_{m-1}^n}{n}$$

$$\mathbf{l} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

La solución al sistema planteado es:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)(l_4 - l_1)} \\ b_1 &= \frac{-6l_1}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)(l_4 - l_1)} \\ c_1 &= \frac{3l_1^2}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)(l_4 - l_1)} \\ a_2 &= \frac{3(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)}{(l_1 - l_3)(l_1 - l_4)(l_2 - l_3)(l_2 - l_4)} \\ b_2 &= \frac{6(l_3l_4 - l_1l_2)}{(l_1 - l_3)(l_1 - l_4)(l_2 - l_3)(l_2 - l_4)} \\ c_2 &= \frac{3l_1[l_2(l_3 + l_4) - l_3l_4] - 3l_2l_3l_4}{(l_1 - l_3)(l_1 - l_4)(l_2 - l_3)(l_2 - l_4)} \\ a_3 &= \frac{3}{(l_4 - l_1)(l_4 - l_2)(l_4 - l_3)} \\ b_3 &= \frac{-6l_4}{(l_4 - l_1)(l_4 - l_2)(l_4 - l_3)} \\ c_3 &= \frac{-3l_4^2}{(l_4 - l_1)(l_4 - l_2)(l_4 - l_3)} \end{aligned}$$

Funciones Base de tipo II

Tal como ilustramos en la figura 3.7, estas se colocan en los segmentos terminantes de la perturbación y serán las que emplearemos siempre en modos TM y TEM sobre segmentos terminantes. Por otra parte, en modos TE se definirán cuando la perturbación adopte la forma de bucle cerrado o bien cuando el extremo sobre el que se centra haga contacto eléctrico con las paredes de la guía base.

A diferencia del caso anterior, estas funciones son soportadas tan solo por tres segmentos, con lo que el cómputo de los coeficientes de los splines queda simplificado. Veamos ahora los requisitos que vamos a imponer a este tipo de base.

Al igual que el las de tipo I, forzamos a que los splines asociados a dos segmentos consecutivos solapen de forma suave:

$$y_1(l_2) = y_2(l_2) \qquad y_1'(l_2) = y_2'(l_2) \qquad (3.52)$$

Las siguientes ecuaciones son particulares para el subtipo I (es decir, para las que terminan la perturbación por la izquierda). Nos interesa que la derivada de la función en el ambos extremos sea cero, y que la propia función se anule en el borde derecho.

$$y_1'(l_1) = 0 \qquad y_2'(l_3) = 0 \qquad y_2(l_3) = 0 \qquad (3.53)$$

Finalmente, por motivos de estabilidad, normalizaremos este tipo de funciones de forma que encierren el área unidad.

$$\int_{l_1}^{l_2} y_1(l)dl + \int_{l_2}^{l_3} y_2(l)dl = 1 \qquad (3.54)$$

Las ecuaciones (3.52) - (3.54) definen el sistema matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{b} \qquad (3.55)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_2^2 & -l_2^2 & l_2 & -l_2 & 1 & -1 \\ 2l_2 & -2l_2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & l_3^2 & 0 & l_3 & 0 & 1 \\ 0 & 2l_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2l_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

Con

$$a_m^{(n)} = \frac{l_m^n - l_{m-1}^n}{n}$$

$$\mathbf{l} = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2]^T$$

$$\mathbf{b} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

La solución al sistema planteado es:

$$a_1 = \frac{3}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

$$a_2 = \frac{3}{(l_2 - l_3)(l_3 - l_1)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

$$b_1 = \frac{-6l_1}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

$$b_2 = \frac{6l_3}{(l_2 - l_3)(l_1 - l_3)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

$$c_1 = \frac{3[l_1(l_2 + l_3) - l_2l_3]}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

$$c_2 = \frac{3l_3^2}{(l_2 - l_3)(l_3 - l_1)(2l_1 - l_2 - l_3)}$$

Dejamos también las expresiones para el subtipo II:

$$a_1 = \frac{3}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

$$a_2 = \frac{-3}{(l_1 - l_3)(l_2 - l_3)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

$$b_1 = \frac{-6l_1}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

$$b_2 = \frac{6l_3}{(l_2 - l_3)(l_1 - l_3)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

$$c_1 = \frac{3l_1^2}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

$$c_2 = \frac{-3[l_1(l_3 - l_2) + l_2l_3]}{(l_3 - l_2)(l_3 - l_1)(2l_3 - l_1 - l_2)}$$

Funciones Base de tipo III

Este último tipo va a ser empleado únicamente en los segmentos extremos que acaben en circuito abierto en el cómputo de los modos TE, con el fin de permitir a la corriente transversal a σ cumplir la condición de contorno en el borde de la perturbación. Una vez más, incluimos el desarrollo para las funciones de subtipo I (aquellas centradas en el último segmento). Al final se incluirán también los resultados para el segundo subtipo de funciones de esta clase. De nuevo, queremos funciones continuas y diferenciables en todo su soporte, lo cual implica que los dos *splines* solapen de forma suave:

$$y_1(l_2) = y_2(l_2) \quad y_1'(l_2) = y_2'(l_2) \quad (3.56)$$

Ahora necesitamos que nuestra función caiga de forma abrupta en el borde izquierdo. En el borde derecho deseamos que se haga cero, pero que caiga de forma suave.

$$y_1(l_1) = 0 \quad y_2(l_3) = 0 \quad y_2'(l_3) = 0 \quad (3.57)$$

Como siempre, por motivos de estabilidad, imponemos:

$$\int_{l_1}^{l_2} y_1(l)dl + \int_{l_2}^{l_3} y_2(l)dl = 1 \quad (3.58)$$

Volvemos a tener un sistema matricial definido por

$$\mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{b} \quad (3.59)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_2^2 & -l_2^2 & l_2 & -l_2 & 1 & -1 \\ 2l_2 & -2l_2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ l_1^2 & 0 & l_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_3^2 & 0 & l_3 & 0 & 1 \\ 0 & 2l_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

Con

$$a_m^{(n)} = \frac{l_m^n - l_{m-1}^n}{n}$$

$$\mathbf{l} = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_2]^T$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

La solución al sistema planteado es:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{6l_1 - 3(l_2 + l_3)}{(l_1 - l_2)^2(l_1 - l_3)^2} \\ a_2 &= \frac{3}{(l_3 - l_1)^2(l_3 - l_2)} \\ b_1 &= \frac{6(l_1l_3 - l_1^2)}{(l_1 - l_2)^2(l_1 - l_3)^2} \\ b_2 &= \frac{6l_3}{(l_1 - l_3)^2(l_2 - l_3)} \\ c_1 &= \frac{3l_1[l_1(l_2 + l_3) - 2l_2l_3]}{(l_1 - l_2)^2(l_1 - l_3)^2} \\ c_2 &= \frac{3l_3^2}{(l_3 - l_1)^2(l_3 - l_2)} \end{aligned}$$

Las expresiones para el subtipo II serían:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)^2} \\ a_2 &= \frac{3(l_1 + l_2 - 2l_3)}{(l_1 - l_3)^2(l_2 - l_3)^2} \\ b_1 &= \frac{6l_1}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)^2} \\ b_2 &= \frac{6l_3^2 - 6l_1l_2}{(l_1 - l_3)^2(l_2 - l_3)^2} \\ c_1 &= \frac{3l_1^2}{(l_2 - l_1)(l_3 - l_1)^2} \\ c_2 &= \frac{-3l_3[l_2l_3 + l_1(l_3 - 2l_2)]}{(l_1 - l_3)^2(l_2 - l_3)^2} \end{aligned}$$

3.7. Generalizar operaciones: el cambio de variable

Al describir la forma de segmentar la perturbación se ha comentado brevemente la necesidad de definir los segmentos en función de un parámetro $t \in [-0,5, 0,5]$ de forma que nos sea sencillo generalizar las operaciones necesarias para el cálculo modal. Para poder realizar dicha generalización tendremos que realizar cambios de variable, tal que todos los integrandos queden en función de este parámetro t . Como se ha expuesto en la sección anterior, los *splines* que constituyen las funciones base están definidos sobre la variable longitudinal l y queremos definirlos en función de t .

El k -ésimo *spline* de la i -ésima función base obedece a la expresión

$$u_i^k(l) = al^2 + bl + c \quad (3.60)$$

Pues bien, vamos a realizar un cambio de variable de manera que podamos expresar ese mismo *spline* como una función de t tal que

$$u_i^k(t) = a_t t^2 + b_t t + c_t \quad (3.61)$$

Donde a_t , b_t y c_t son los coeficientes asociados a ese mismo *spline* cuando este está definido sobre el eje t . Definido en función de la variable l original, un *spline* viene caracterizado por los límites sobre los que está definido en la variable independiente (l_0, l_1) y por supuesto, por los coeficientes a , b y c . Podemos expresar los coeficientes de $u_i^k(t)$ en función de dichos parámetros en virtud de las siguientes expresiones.

$$a_t = a\Delta l^2 \quad (3.62)$$

$$b_t = a\Delta l^2 + 2al_0\Delta l + b\Delta l \quad (3.63)$$

$$c_t = a \left(\frac{\Delta l^2}{4} + l_0\Delta l + l_0^2 \right) + b \left(\frac{\Delta l}{2} + l_0 \right) + c \quad (3.64)$$

Con

$$\Delta l = l_1 - l_0$$

3.8. Cálculo de los modos TM

Con todo lo dicho hasta ahora, se han dado todos los ingredientes necesarios para implementar un algoritmo que implemente el método BI-RME.

A partir de ahora nos centraremos en detalles relativos a la propia implementación. Por ser el caso más sencillo, empezaremos describiendo el procedimiento usado para el cómputo de los modos TM. Recordamos que la resolución del problema en cuestión giraba en torno a evaluar las integrales definidas en (3.25) y (3.26).

Teniendo en cuenta que las funciones base empleadas son subseccionales, es decir, tienen un soporte finito (valen cero fuera de dicho soporte) podemos reescribir (3.26) como

$$R'_{im} = \frac{1}{\beta_m^2} \sum_{k=1}^{K(i)} R'^{(k)}_{im} \quad (3.65)$$

Con

$$R'^{(k)}_{im} = \int_{\Delta_i^{(k)}} u_i^{(k)}(l) \psi_m(\mathbf{s}) dl \quad (3.66)$$

Donde $\Delta_i^{(k)}$ representa el tramo en el eje l asociado al k -ésimo segmento de la i -ésima función base. Finalmente, aplicando el cambio de variable de l a $t \in [-0,5, 0,5]$ descrito anteriormente, se obtiene

$$R'^{(k)}_{im} = \Delta l_{i(k)} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) \psi_m(t) dt \quad (3.67)$$

Esta última expresión depende únicamente de los coeficientes de los splines expresados sobre el eje t y de los parámetros del segmento sobre el que estamos integrando. Para computar numéricamente esta integral se puede emplear cualquier técnica de integración numérica, siendo la cuadratura de Gauss especialmente sencilla de aplicar (tan sólo requiere de un segundo cambio de variable que deje el tramo de integración en el intervalo $[-1, 1]$). En este caso, el cambio de variable para poder aplicar la cuadratura de Gauss sería

$$t = \frac{1}{2} \hat{t} \quad dt = \frac{1}{2} d\hat{t}$$

Con lo cual

$$R'^{(k)}_{im} = \frac{\Delta l_{i(k)}}{2} \int_{-1}^1 u_i^{(k)}(\hat{t}) \psi_m(\hat{t}) d\hat{t} \quad (3.68)$$

Quiero subrayar que este último paso que implica el cambio de variable $t \rightarrow \hat{t}$ sólo se requiere si se desea aplicar la cuadratura de Gauss; distintas reglas de integración requieren tratamientos distintos.

Antes de seguir es necesario aclarar y poner en cierto contexto la nomenclatura empleada en ecuaciones como la de arriba. A lo largo del procedimiento para la implementación de BI-RME nos referiremos a los segmentos a través de dos atajos: el índice absoluto y el índice relativo.

- El índice absoluto es el orden que un segmento ocupa a lo largo del eje l sobre el que se desarrolla la curva perturbante σ , expresado en forma cardinal. Una vez discretizada σ , el índice absoluto de cada segmento es único e invariable.
- El índice relativo de un segmento viene siempre definido en el contexto de una función base a la que ese segmento proporciona soporte. Es el orden que ocupa dicho segmento dentro del conjunto que soporta la función base dada.

Para entender bien la diferencia entre estas dos formas de identificar a un segmento se proporciona la figura 3.9; la base $u_5(l)$ viene soportada por los segmentos de índices absolutos 4, 5 y 6. Los índices de esos tres segmentos relativos a $u_5(l)$ se muestran entre paréntesis debajo de los índices absolutos asociados. Como se puede intuir, los índices relativos siempre se definen —para una base dada— de forma secuencial según su posición en el eje l .

En las ecuaciones (3.65) y a partir de ahora (a lo largo de este capítulo o hasta que se diga lo contrario) el subíndice k hará referencia a un índice relativo. En el contexto de cierta función base $u_i(l)$ denotaremos como $i(k)$ al índice absoluto asociado al segmento cuyo índice relativo respecto a u_i es k , por tanto, $\Delta l_{i(k)}$ representa la longitud del segmento de índice absoluto $i(k)$. En la misma onda, denotaremos por $K(i)$ al número de segmentos que dan soporte a la i -ésima base. Finalmente $u_i^{(k)}(t)$ representa el k -ésimo spline perteneciente a la i -ésima función base. Habiendo aclarado esto podemos seguir por donde lo dejamos.

Dada la naturaleza de las funciones $u_i(t)$ y $\psi_m(t)$ —que, recordamos, es la componente axial normalizada del campo eléctrico dentro de la guía base— el integrando de (3.65) presenta un comportamiento fácil de manejar numéricamente, puesto que no posee discontinuidades de ningún tipo y es perfectamente diferenciable; por tanto, la evaluación de esa integral se puede realizar de manera inmediata con una Cuadratura de Gauss (o con cualquier otra regla de integración numérica).

La otra integral que había que evaluar es aquella presente en (3.25). Teniendo en cuenta que las funciones base valen cero fuera de un soporte dado sobre el eje l (Δi para $u_i(l)$ y Δj para $u_j(l')$), podemos replantear (3.25) como

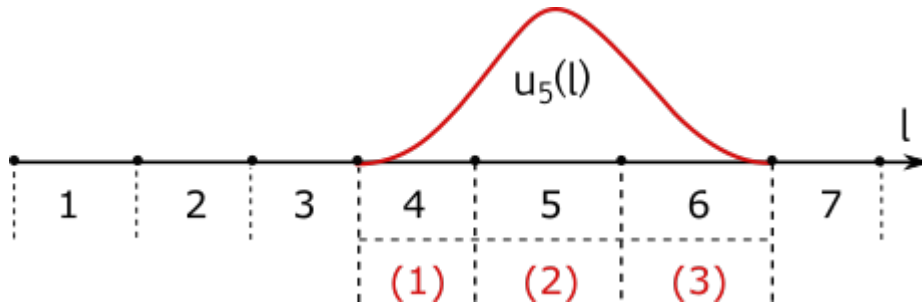


Figura 3.9: Función base de tipo 2, usada en segmentos extremos

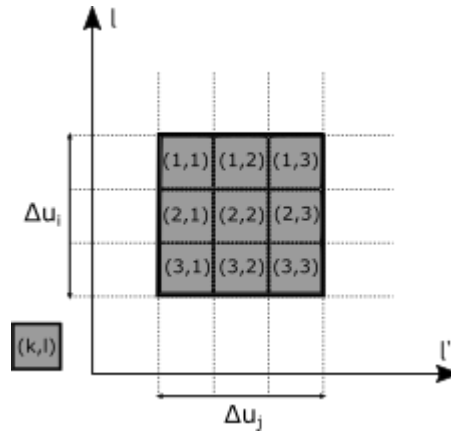


Figura 3.10: Parcela de integración en el plano $l l'$

$$L'_{ij} = \int_{\Delta i} \int_{\Delta j} u_i(l) u_j(l') g(s, s') dl dl' \quad (3.69)$$

En esta última expresión, estamos integrando en una parcela rectangular sobre el plano $l l'$. Esta parcela rectangular se puede subdividir en cuadrantes, estando cada uno de estos definido por la pareja de segmentos asociados a los soportes Δi y Δj .

Realizando el cambio de variable de l y s a t y de l' y s' a t' aplicando la misma nomenclatura de (3.65) podemos escribir

$$L'_{ij} = \sum_{k=1}^{K(i)} \sum_{h=1}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} L'^{(k,h)}_{ij} \quad (3.70)$$

Con

$$L'_{ij}{}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') g(t, t') dt dt' \quad (3.71)$$

Donde

- $\Delta l_{i(k)}$ representa la longitud del segmento con índice absoluto $i(k)$.
- $\Delta l_{j(h)}$ representa la longitud del segmento con índice absoluto $j(h)$.
- $K(i)$ representa el número de segmentos que soportan la i -ésima base.
- $H(j)$ representa el número de segmentos que soportan la j -ésima base.
- $u_i^{(k)}(t)$ es el k -ésimo spline constituyente de la i -ésima base.
- $u_j^{(h)}(t')$ es el h -ésimo spline constituyente de la j -ésima base.

Cada iteración del sumatorio doble presente en (3.70) requiere integrar en cada uno de los cuadrantes que constituyen la parcela total de integración. Si se han empleado como funciones base las presentadas anteriormente — definidas a lo largo de 3 segmentos o 2 para el caso de los extremos de σ — dicha parcela comprenderá a 4, 6 ó 9 sectores.

La función de Green escalar $g(s, s')$ que aparece en (3.25) presenta —en una geometría rectangular— la siguiente expresión:

$$g = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} \right) \quad (3.72)$$

Donde

$$T_m^{pq} = 1 - 2e^{\tau_{mp}} \cos \left[\frac{\pi}{b} (y - (-1)^q y') \right] + e^{2\tau_{mp}} \quad (3.73)$$

$$\tau_{mp} = -\frac{\pi}{b} |x - (-1)^p x' + 2am| \quad (3.74)$$

Estas expresiones asumen que la guía rectangular base está predispuesta en el plano XY con su vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas, siendo a la longitud de la misma sobre el eje x y b la longitud sobre el eje y .

A la hora de programar el algoritmo es de gran utilidad representar la función de Green escalar para comprobar su validez. Esta ha de anularse en las paredes de la guía rectangular base y tender a infinito —debido a la singularidad logarímic— a medida que el punto fuente s' y el de observación

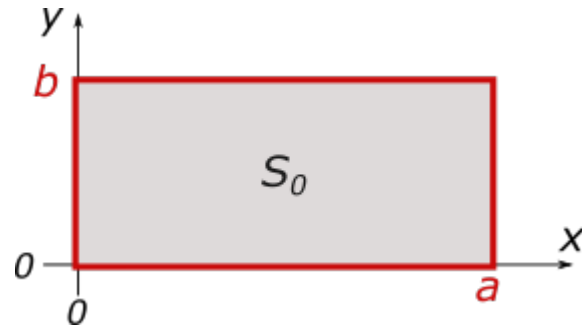


Figura 3.11: Disposición de la guía rectangular base en el plano XY

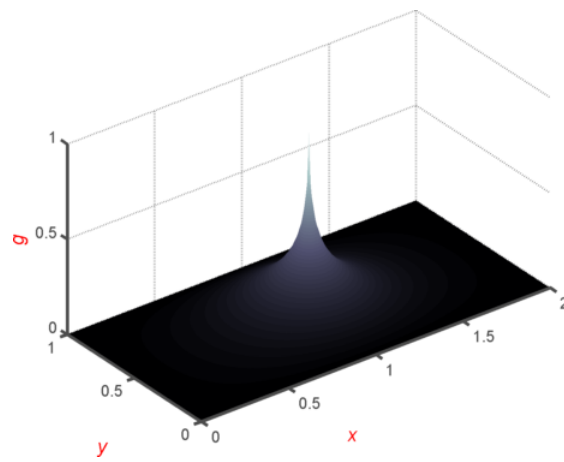


Figura 3.12: Representación de $g(x, y, a/2, b/2)$

s se aproximan mutuamente. En la figura 3.12 se ha representado la función de Green escalar para una geometría rectangular con $a = 2$, $b = 1$ asumiendo una fuente en $(x, y) = (1, 1/2)$.

La singularidad logarítmica presente va a repercutir en la forma de calcular los $L_{ij}^{(k,h)}$. Según el comportamiento de la función de Green, podemos clasificar los sectores en los que se divide nuestra parcela de integración en dos clases: cuadrantes en los que g es regular y cuadrantes en los que g es singular. La primera clase la constituyen aquellos sectores en los que NO existen puntos tales que $s = s'$, es decir, en cuadrantes cuyas aristas horizontal y vertical vienen dadas por segmentos distintos ($i(k) \neq j(h)$). La segunda clase la comprenden los sectores en los que existen puntos tales que $s = s'$ — ocurrirá en cuadrantes definidos por un mismo segmento $i(k) = j(h)$ —. Para simplificar el lenguaje denominaremos a estos últimos *cuadrantes singulares*. El cálculo de los $L_{ij}^{(k,h)}$ asociados a cuadrantes no singulares se podrá llevar a cabo empleando cualquier regla de integración numérica. En el caso de los $L_{ij}^{(k,h)}$ asociados a cuadrantes singulares requerirá de un tratamiento que nos permita extraer la singularidad para integrarla analíticamente; para ello expresaremos g como la suma de una parte regular y otra singular. Observando que la singularidad logarítmica es debida al término T_0^{00} podemos escribir:

$$g = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq 0)}}^{\infty} \ln \left(\frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} \right) + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{T_0^{10} T_0^{01}}{T_0^{11}} \right) - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} - \frac{1}{4\pi} \ln R^2 \quad (3.75)$$

o bien

$$g = g_r + g_{rd} + g_s \quad (3.76)$$

Donde

$$g_r = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq 0)}}^{\infty} \ln \left(\frac{T_m^{10} T_m^{01}}{T_m^{00} T_m^{11}} \right) + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{T_0^{10} T_0^{01}}{T_0^{11}} \right) \quad (3.77)$$

$$g_{rd} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} \quad (3.78)$$

$$g_s = -\frac{1}{4\pi} \ln R^2 \quad (3.79)$$

– g_r representa la parte regular de g , integrable numéricamente.

- g_{rd} es regular, pero presenta una discontinuidad evitable en $s = s'$.
- g_s es la parte singular de g , que tendremos que integrar analíticamente.

Tanto la parte regular continua g_r como la parte regular discontinua g_{rd} son integrables numéricamente. No obstante, si se va a emplear una cuadratura que requiera de la evaluación de g_{rd} en puntos tales que $s = s'$, tendremos primero que *salvar* la discontinuidad. Esto se realiza calculando el límite cuando $s \rightarrow s'$ de la función objetivo. Tenido en cuenta que $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ y sustituyendo el término T_0^{00} por su desarrollo en serie de Taylor en torno al punto (x', y') se obtiene

$$\lim_{s \rightarrow s'} g_{rd} = \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} \frac{T_0^{00}}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (3.80)$$

Entonces, podemos redefinir g_{rd} como

$$g_{rd} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{T_0^{00}}{R^2} & \text{si } s \neq s', \\ \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 & \text{si } s = s' \end{cases} \quad (3.81)$$

Con estos desarrollos podemos particularizar el cálculo de (3.71) a los cuadrantes singulares como

$$L'_{ij}{}^{(k,h)} = L'_{ijr}{}^{(k,h)} + L'_{ijs}{}^{(k,h)} \quad (3.82)$$

Con

$$L'_{ijr}{}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') [g_r(t, t') + g_{rd}(t, t')] dt dt' \quad (3.83)$$

$$L'_{ijs}{}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt dt' \quad (3.84)$$

El cálculo de (3.83) se realizará numéricamente empleando, por ejemplo, la Cuadratura de Gauss y (3.84) se calculará en dos pasos, tal como se ilustra a continuación.

$$\begin{aligned} L'_{ijs}{}^{(k,h)} &= \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) \left[\int_{-0,5}^{0,5} u_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt' \right] dt \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) f_j^{(h)}(t) dt \end{aligned} \quad (3.85)$$

La función $f_j^{(h)}(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} f_j^{(h)}(t) &= \int_{-0,5}^{0,5} u_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-0,5}^{0,5} \left[a_j^{(h)} t'^2 + b_j^{(h)} t' + c_j^{(h)} \right] \ln R^2 dt' \end{aligned} \quad (3.86)$$

Donde $a_j^{(h)}$, $b_j^{(h)}$ y $c_j^{(h)}$ representan los coeficientes del h -ésimo spline constituyente de la j -ésima función base expresados en virtud de la variable t , tal como se explicó en el apartado del cambio de variable. Para ser capaces de resolver esta integral analíticamente necesitamos expresar R^2 como una función de t' . Como estamos en un caso en el que nos movemos sobre los puntos de un mismo segmento, podemos escribir las coordenadas x e y de estos de la siguiente manera:

$$x = x_0 + \Delta x(t + 0,5) \quad y = y_0 + \Delta y(t + 0,5) \quad (3.87)$$

$$x' = x_0 + \Delta x(t' + 0,5) \quad y' = y_0 + \Delta y(t' + 0,5) \quad (3.88)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que R es la distancia entre los puntos $s = (x, y)$ y $s' = (x', y')$ podemos escribir

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 = \Delta x^2(t - t')^2 + \Delta y^2(t - t')^2 \\ &= (\Delta x^2 + \Delta y^2)(t - t')^2 \\ &= \Delta l^2(t - t')^2 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Introduciendo (3.89) en (3.103) y resolviendo la integral se obtiene la expresión analítica para $f_j^{(h)}(t)$. A continuación se proporciona la solución a la integral buscada, que será empleada en más ocasiones.

$$\begin{aligned} &\int_{-0,5}^{0,5} [at'^2 + bt' + c] \ln [\Delta l^2(t - t')^2] dt' = \\ &= \left\{ \frac{1}{12} [8at^3 + 12bt^2 + 24ct + a - 3(b - 4c)] \ln |2t + 1| \right. \\ &\quad - \frac{1}{12} [8at^3 + 12bt^2 + 24ct - a - 3(b + 4c)] \ln |2t - 1| \\ &\quad \left. + \left(\frac{a}{6} + 2c \right) \ln \left| \frac{\Delta l}{2} \right| - \frac{1}{18} (12at^2 + 18bt + a + 36c) \right\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Una vez disponemos de la expresión anterior somos capaces de aplicar una cuadratura unidimensional sobre la integral (3.85).

Ejemplos

Vamos a ver algunos ejemplos comunes de guías de onda analizadas computacionalmente mediante el método BI-RME. Es especialmente ilustrativo analizar guías de onda canónicas cuyos parámetros son conocidos teóricamente para ver la precisión que es capaz de alcanzar nuestro algoritmo.

Analizaremos la guía circular de radio $r = 9,525$ mm (figura 3.13.a), la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm (figura 3.13.d), la guía elíptica de semieje mayor $a_e = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$ (figura 3.13.c). Se mostrarán también, a modo de ejemplo, los campos modales de una guía en forma de cruz (figura 3.13.b).

Para analizar la guía en forma de círculo y la elíptica se han empleado $N = 120$ segmentos y $M = 500$ modos de la guía rectangular base, obteniendo un total de $M = 500$ modos de la estructura perturbada (de los cuales hay que separar los que pertenecen a la región de interés, i.e. aquellos que se propagan por el interior de la perturbación circular o elíptica frente a los que se propagan por fuera de esta). Se han empleado 8 puntos de cuadratura por segmento (64 por cuadrante para las integrales 2D). Ejecutando el programa confeccionado sobre MATLAB el tiempo de cálculo ha sido de 10,81 s, empleando un procesador *Intel I5 7200U* de dos núcleos a 2,50 GHz.

Cuando no existan resultados teóricos con los que comparar los resultados numéricos (como en el caso de la guía con reentrante) se proporcionarán comparativas con los valores mostrados en otras publicaciones. Las magnitudes a comparar serán siempre frecuencias, longitudes de onda y números de onda de corte de los modos que se propagan en el interior de la guía estudiada.

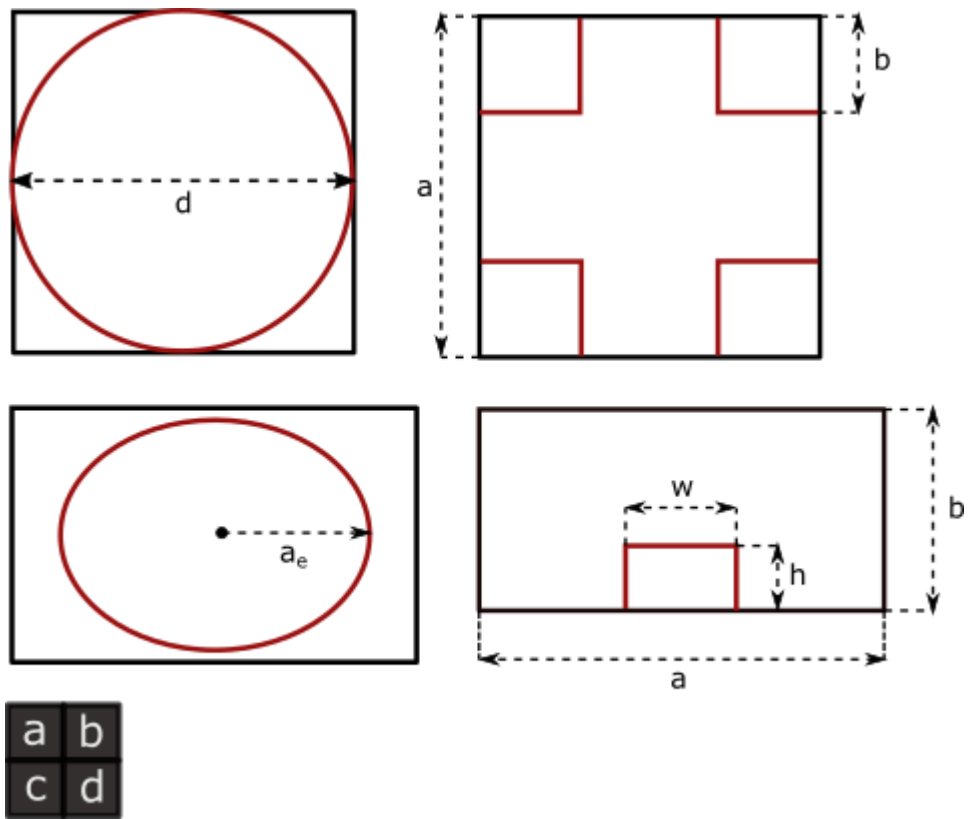


Figura 3.13: Estructuras a analizar con BI-RME.

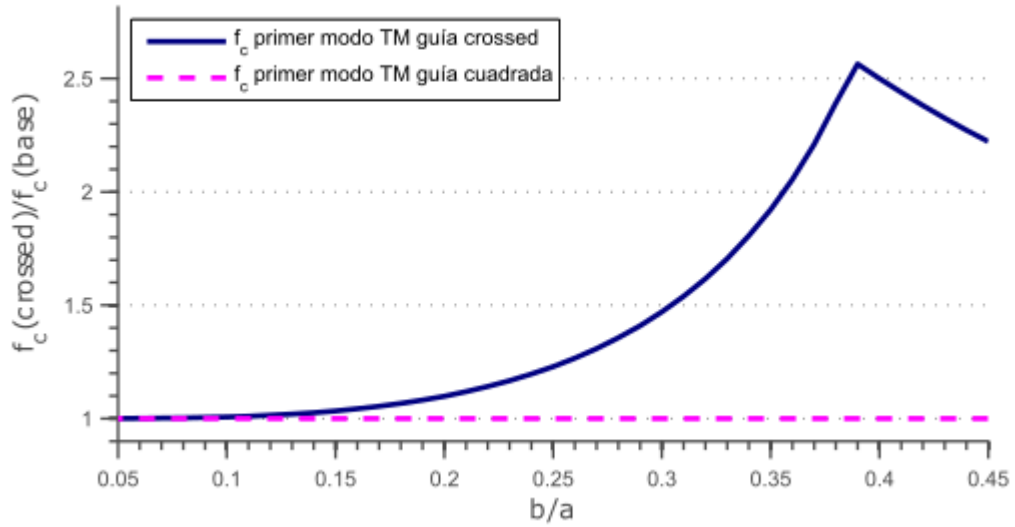


Figura 3.14: Relación entre la frecuencia de corte del primer modo TM de las guías *crossed* y cuadrada base en función del ratio b/a (ver figura 3.13.d) El cambio de tendencia se debe a la aparición de modos que se propagan fuera de la guía *crossed* —es decir, entre la misma y la guía cuadrada que la contiene—.

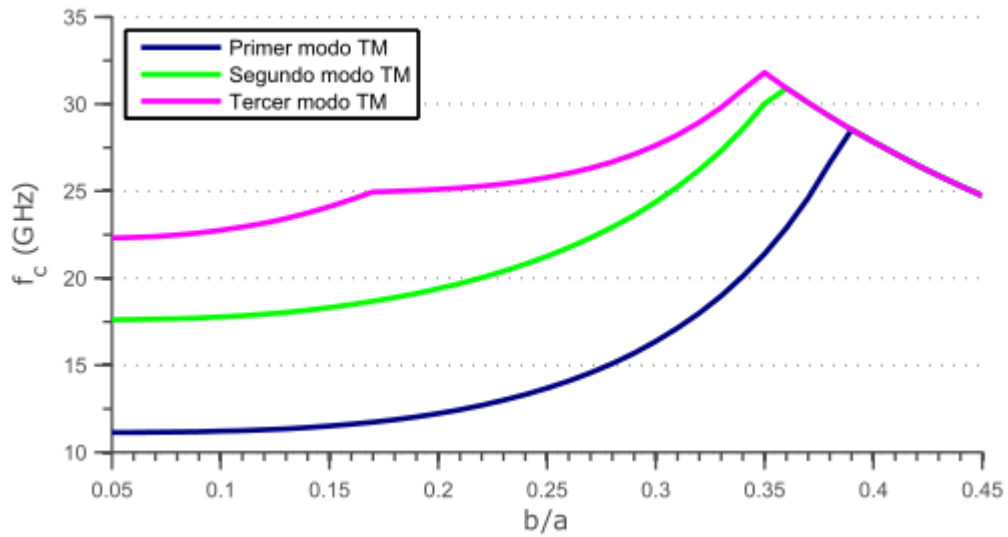


Figura 3.15: Frecuencias de corte de los cuatro primeros TM de la guía *crossed* en función del ratio b/a (ver fig. 3.13.d)

Orden	f_c (GHz) (BI-RME)	f_c (GHz) (TEORÍA)	Error rel.(%)
1	24.0975	24.0929	0.0191
2	38.0396	38.3882	0.0202
3	51.4602	51.4516	0.0168
4	55.3158	55.3033	0.0227
5	63.9352	63.9201	0.0236
6	70.3038	70.2862	0.0251
7	76.0399	76.0244	0.0204
8	84.3479	84.3288	0.0227
9	86.7234	86.6980	0.0293
10	87.9025	87.8777	0.0282

Tabla 3.1: Frecuencias de corte de los 10 primeros modos TM de la guía circular de radio $r = 9,525$ mm, obtenidos por BI-RME (con segmentos rectos) y el error cometido en relación al valor teórico.

Orden	f_c (GHz) (BI-RME)	f_c (GHz) (BI-RME [11])	FEM	TLM
1	21.4560	21.4571	22.135	21.333
2	23.3890	-	-	-
3	29.7266	-	-	-
4	35.2832	-	-	-
5	37.0259	-	-	-
6	38.0803	-	-	-
7	42.5040	-	-	-
8	46.7645	-	-	-

Tabla 3.2: Frecuencias de corte de los 8 primeros modos TM de la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm, obtenidos por BI-RME. Se compara el primer modo con resultados obtenidos mediante otras técnicas.

Orden	λ_c (cm) (BI-RME)	λ_c (cm) (Ref. [11])	Error rel. (%)
30	0.775336	0.775601	-0.0218
50	0.591956	0.592145	-0.0109
90	0.433885	0.434155	-0.0241

Tabla 3.3: Longitudes de onda de corte de tres modos TM de alto orden de la guía elíptica de semieje mayor 10 mm y excentricidad $e = 0,5$, obtenidas por nuestra implementación de BI-RME y por el procedimiento teórico expuesto en [14].

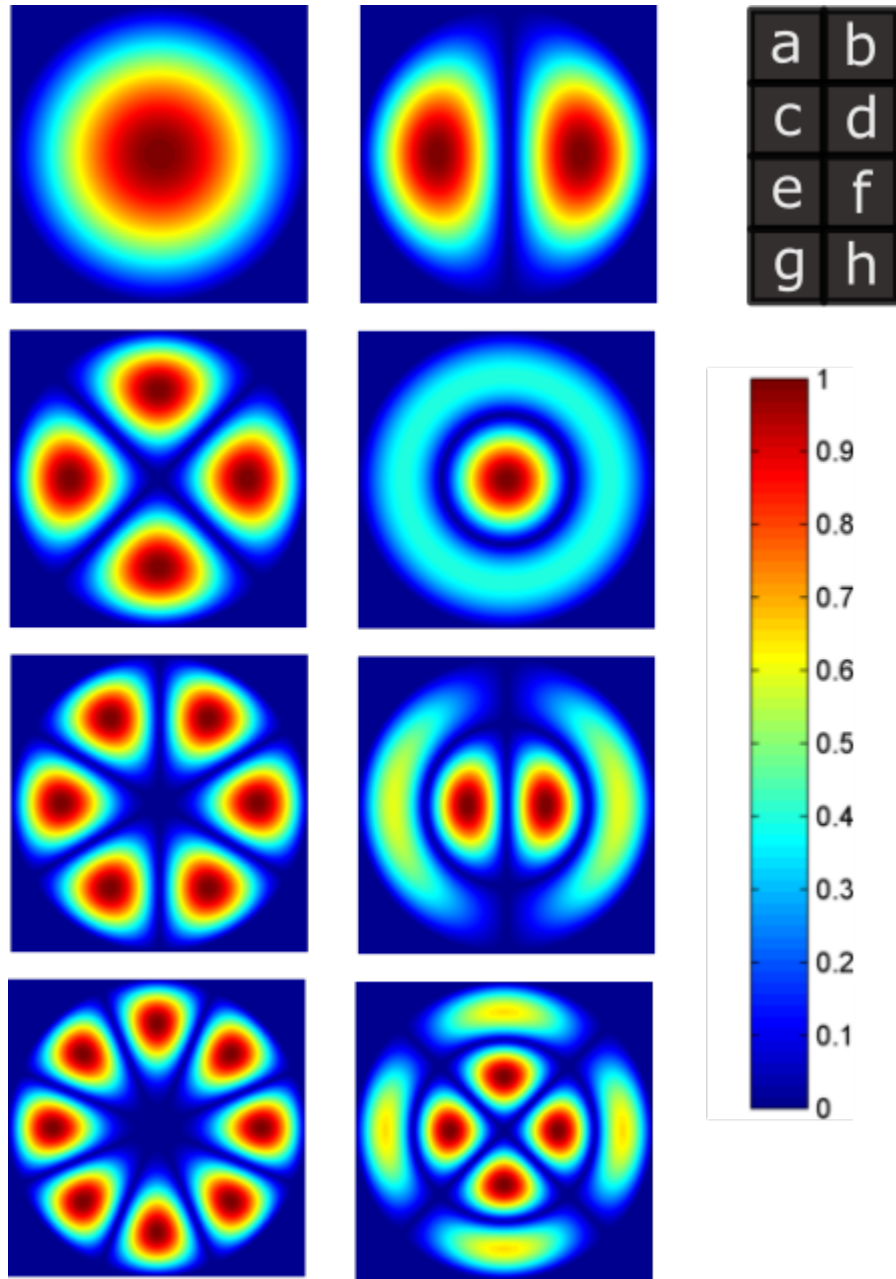


Figura 3.16: Campo eléctrico axial (E_z) (normalizado respecto al máximo) de los primeros 8 modos TM de la guía circular de diámetro $d = 12$ mm, analizada como una guía cuadrada perturbada por una hoja conductora en forma de círculo.

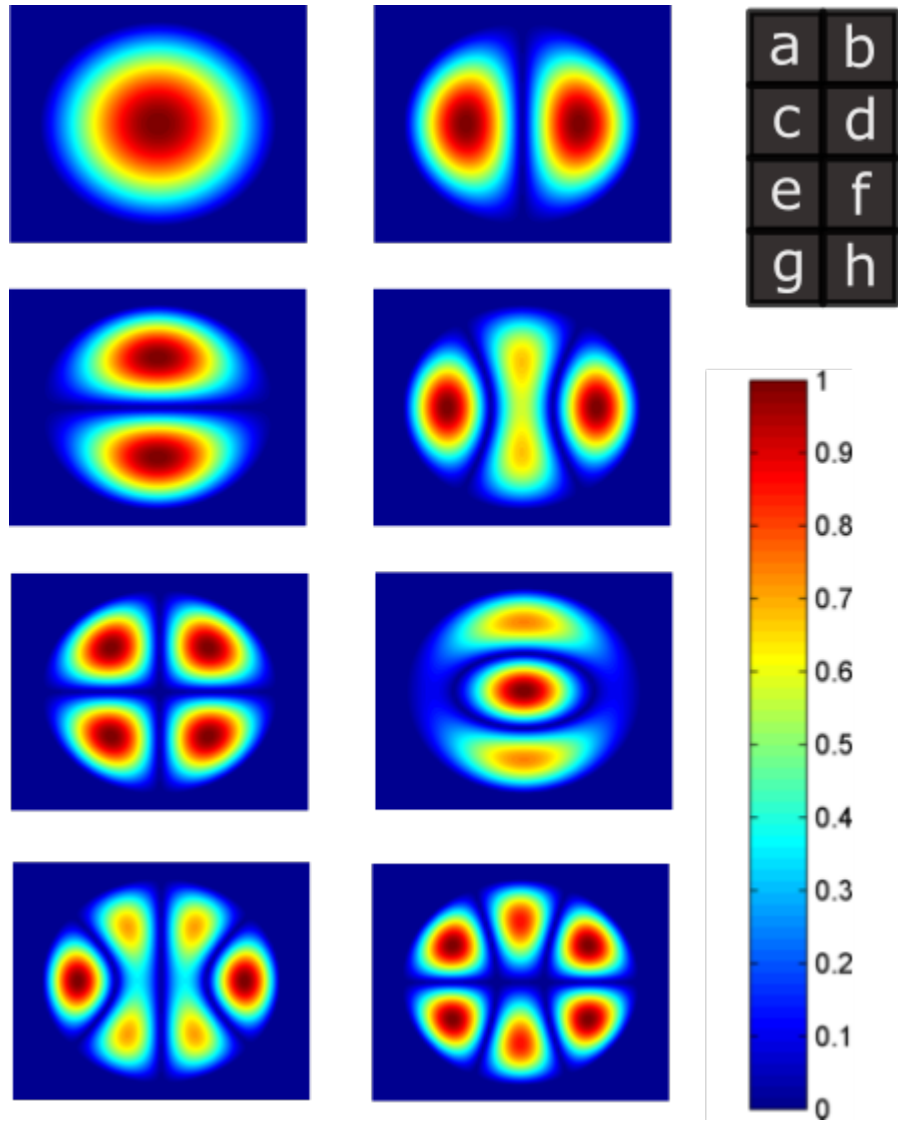


Figura 3.17: Primeros 8 modos TM de la guía elíptica de semieje mayor $a = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$, analizada como una guía rectangular perturbada por una hoja conductora en forma de elipse. Se representa la componente axial del campo eléctrico normalizada respecto al máximo.

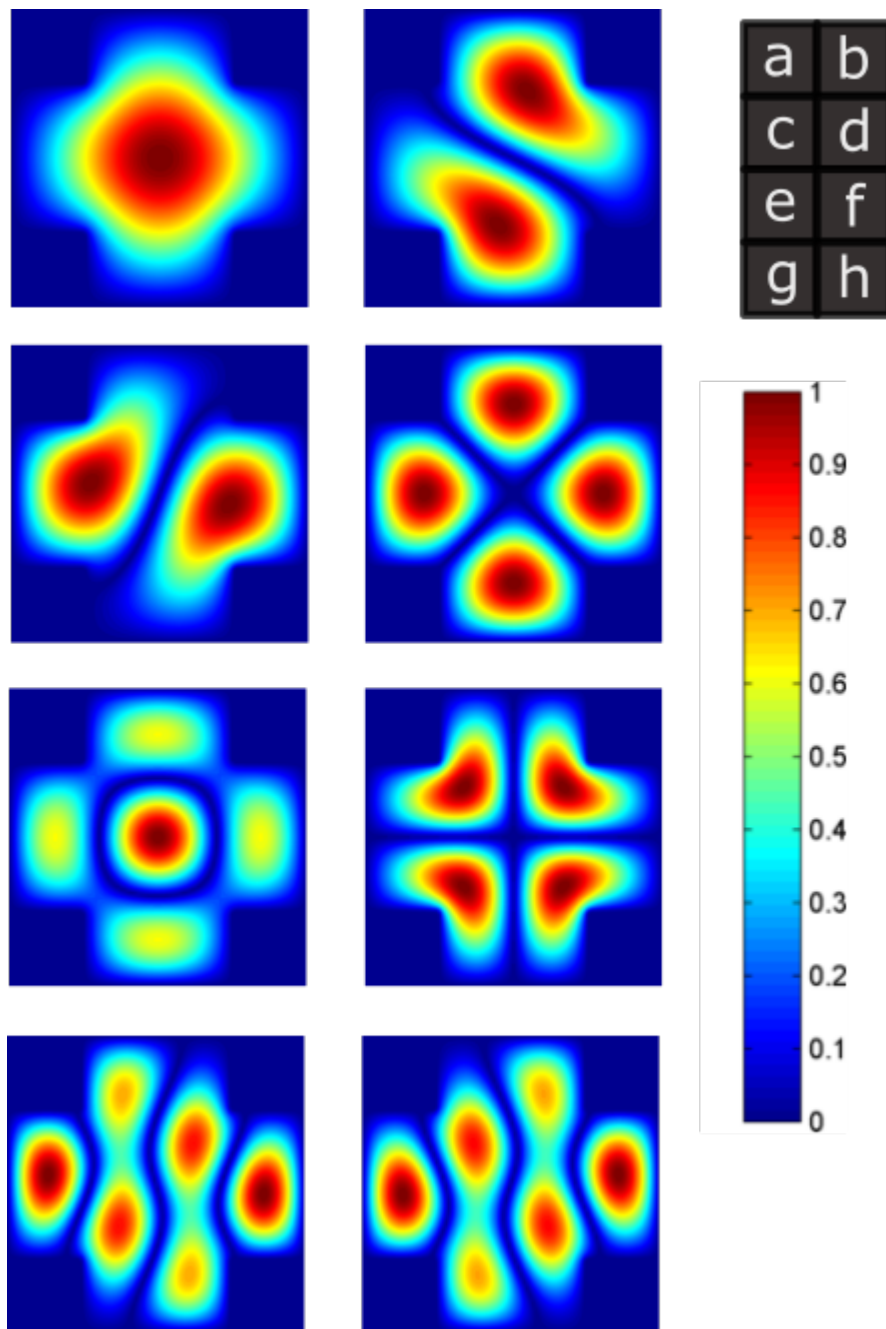


Figura 3.18: Primeros 8 modos TM de la guía en forma de cruz de relación $b/a = 0,25$, analizada como una guía cuadrada perturbada por cuatro es-cuadras conductoras colocadas en las esquinas. Se representa la componente axial del campo eléctrico normalizada respecto al máximo.

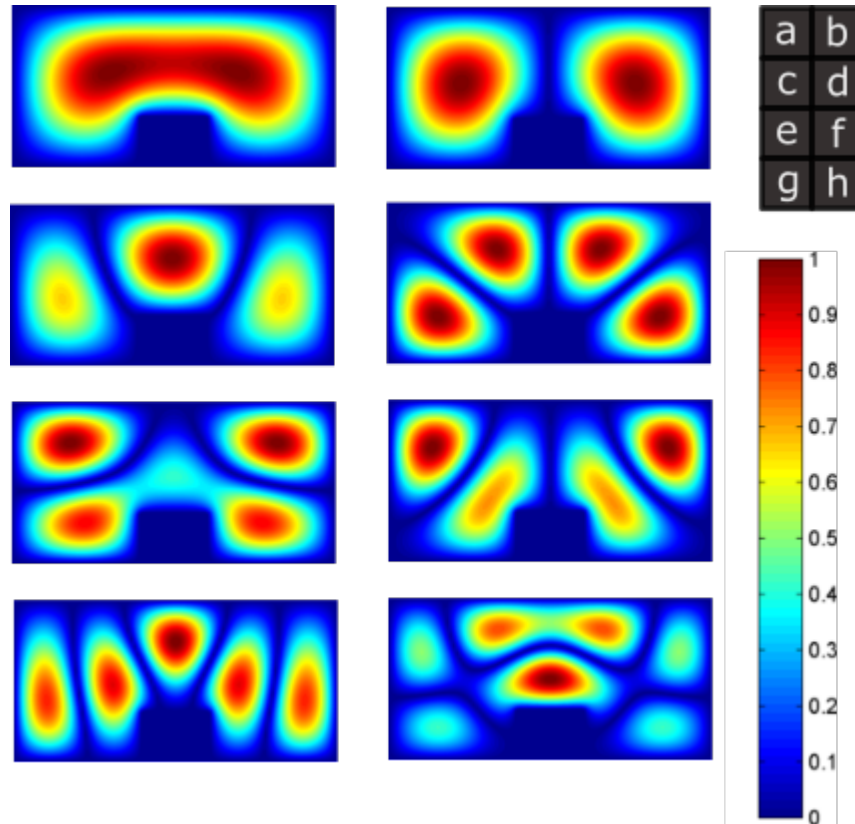


Figura 3.19: Primeros 8 modos TM de una guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm (guía *ridge*), analizada como una guía rectangular perturbada por una hoja conductora en forma de U invertida. Se representa la componente axial del campo eléctrico normalizada respecto al máximo.

3.9. Cálculo de los modos TE

La implementación del algoritmo de cálculo de los modos TE es considerablemente más complicada que la de los modos TM; ahora hemos de lidiar con la función de Green diádica —aparte de la función de Green escalar ya empleada—, además se usarán las derivadas de los splines y se introducirán operaciones vectoriales.

Las definiciones empleadas en relación a los índices relativos y absolutos asociados a los segmentos en los que se divide σ sigue siendo la misma que la que se usó en los apartados anteriores. La precisión en el cómputo de los modos TE requiere de la evaluación más fina posible de las integrales (3.18), (3.19) y (3.20).

Empezaremos por el cálculo de los elementos de la matriz \mathbf{R} . Recapitulamos que la expresión genérica para su cómputo es

$$R_{im} = \frac{1}{\beta_m^2} \int_{\sigma} u_i(l) \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \mathbf{e}_m(\mathbf{s}) dl$$

Como se comentó en el apartado de la teoría de los modos TE, $\hat{\mathbf{t}}(l)$ es un vector unitario tangencial a nuestra curva σ . Teniendo en cuenta el modelado de la perturbación empleando tramos rectos, podemos proporcionar una expresión para $\hat{\mathbf{t}}(l)$ en función de los parámetros del segmento en el que se encuentre el punto evaluado l . Si la abscisa l pertenece al k -ésimo segmento, entonces, sobre ese tramo, se cumplirá la relación

$$\hat{\mathbf{t}}(l) = \hat{\mathbf{t}}_k = \hat{\mathbf{x}} \frac{\Delta x_k}{\Delta l_k} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\Delta y_k}{\Delta l_k} \quad (3.91)$$

Teniendo en cuenta que el soporte asociado a cada spline constituyente de la i -ésima función base es finito, podemos descomponer R_{im} como la suma de las contribuciones del integrando sobre cada uno de dichos soportes.

$$R_{im} = \frac{1}{\beta_m^2} \sum_{k=1}^{K(i)} R_{im}^{(k)} \quad (3.92)$$

Aplicando el cambio de variable de l a t podemos expresar $R_{im}^{(k)}$ como

$$R_{im}^{(k)} = \Delta l_{i(k)} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) \hat{\mathbf{t}}_{i(k)} \cdot \mathbf{e}_m(t) dt \quad (3.93)$$

donde

$$\hat{\mathbf{t}}_{i(k)} \cdot \mathbf{e}_m(t) = \frac{1}{\Delta l_{i(k)}} \left[\Delta x_{i(k)} e_m^{(x)}(t) + \Delta y_{i(k)} e_m^{(y)}(t) \right] \quad (3.94)$$

Introduciendo (3.94) en (3.93) se obtiene

$$R_{im}^{(k)} = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) \left[\Delta x_{i(k)} e_m^{(x)}(t) + \Delta y_{i(k)} e_m^{(y)}(t) \right] dt \quad (3.95)$$

De forma aclaratoria, decir que $e_m^{(x)}(t)$ representa la componente x de $\mathbf{e}_m(t)$ mientras que $e_m^{(y)}(t)$ representa la componente y de ese mismo vector. La ecuación (3.95) está lista para ser evaluada numéricamente —lo cual se puede hacer de forma muy precisa mediante cuadratura de Gauss—.

Otra de las integrales a evaluar es

$$C_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \frac{\partial u_i(l)}{\partial l} \frac{\partial u_j(l')}{\partial l'} dl dl' = \int_{\sigma} \int_{\sigma} g(\mathbf{s}, \mathbf{s}') w_i(l) w_j(l') dl dl' \quad (3.96)$$

Por simplicidad de exposición, nos referiremos a las derivadas de los splines de acuerdo a

$$w_i(l) = \frac{\partial u_i(l)}{\partial l} \qquad w_j(l') = \frac{\partial u_j(l')}{\partial l'}$$

Lo primero de lo que hay que percatarse es de que (3.96) es idéntica en forma a la expresión de los elementos L'_{ij} empleada en cálculo de los modos TM; tan sólo se sustituyen las funciones base por sus derivadas. Por ello, el procedimiento para su cómputo es idéntico. Comenzamos descomponiendo la integral en el cuadrante definido por los soportes de $u_i(l)$ y $u_j(l)$ en integrales que alberguen parcelas más pequeñas.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{K(i)} \sum_{h=1}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} C_{ij}^{(k,h)} \quad (3.97)$$

Donde $C_{ij}^{(k,h)}$ representa la contribución asociada a la parcela definida por el k -ésimo segmento de la i -ésima base y el h -ésimo segmento de la j -ésima base. Una vez más, teniendo en cuenta el cambio de l a t :

$$C_{ij}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} w_i^{(k)}(t) w_j^{(h)}(t') g(t, t') dt dt' \quad (3.98)$$

En cuadrantes regulares (g no posee singularidades) aplicamos cualquier regla de integración numérica sobre (3.98) sin más. Sin embargo, en cuadrantes singulares tenemos que realizar la descomposición de $g(t, t')$ en parte regular ($g_r + g_{rd}$), y singular (g_s), de forma que

$$C_{ij}^{(k,h)} = C_{ijr}^{(k,h)} + C_{ijs}^{(k,h)} \quad (3.99)$$

Con

$$C_{ijr}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') [g_r(t, t') + g_{rd}(t, t')] dt dt' \quad (3.100)$$

$$C_{ijs}^{(k,h)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt dt' \quad (3.101)$$

La parte regular de $C_{ij}^{(k,h)}$ definida en (3.100) está lista para se integrada numéricamente. La parte singular (3.101) requiere del tratamiento adicional ya conocido:

$$\begin{aligned} C_{ijs}^{(k,h)} &= \int_{-0,5}^{0,5} w_i^{(k)}(t) \left[\int_{-0,5}^{0,5} w_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt' \right] dt \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} w_i^{(k)}(t) f_j^{(h)}(t) dt \end{aligned} \quad (3.102)$$

La función $f_j^{(h)}(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} f_j^{(h)}(t) &= \int_{-0,5}^{0,5} w_j^{(h)}(t') g_s(t, t') dt' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-0,5}^{0,5} w_j^{(h)}(t') \ln [\Delta t^2(t - t')^2] dt' \end{aligned} \quad (3.103)$$

Esta última integral es resoluble analíticamente aplicando la fórmula (3.90).

Habíamos dejado la parte más complicada para el final: la obtención de los elementos L_{ij} . Recapitulamos la expresión objetivo:

$$L_{ij} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l) u_j(l') \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') dl dl'$$

Al igual que se hizo en el procedimiento de cálculo de L'_{ij} para el caso TM con la función de Green escalar g , es conveniente analizar la expresión de la función de Green diádica $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ y mostrar sus componentes, de esta forma será más simple vislumbrar una estrategia que nos permita evaluar la integral de la forma más precisa posible.

Para una estructura rectangular de anchura a y altura b limitada por paredes perfectamente conductoras y posicionada en el plano XY como la mostrada en la figura 3.11 la función $\bar{\mathbf{G}}_{st}$ se puede expresar como

$$\bar{\mathbf{G}}_{st}(x, y, x', y') = G_{xx}\hat{x}\hat{x} + G_{xy}\hat{x}\hat{y} + G_{yx}\hat{y}\hat{x} + G_{yy}\hat{y}\hat{y} \quad (3.104)$$

Donde

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{T_m^+}{T_m^-} - |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} - \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \\ G_{xy} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m X_m \left(\frac{\sin Y^+}{T_m^+} - \frac{\sin Y^-}{T_m^-} \right) \\ G_{yx} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m \left(\frac{\sin Y^+}{T_m^+} - \frac{\sin Y^-}{T_m^-} \right) \\ G_{yy} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^m \left[\ln \left(4T_m^+ T_m^- e^{-2|X_m|} \right) + |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \right\} + \frac{x + x' - |x - x'|}{2b} - \frac{xx'}{ab} \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{\pi}{b} \left[x - \left(m + \frac{1}{2} \right) a - (-1)^m \left(x' - \frac{a}{2} \right) \right] \\ Y^\pm &= \frac{\pi}{b} (y \pm y') \\ T_m^\pm &= \cosh X_m - \cos Y^\pm \end{aligned}$$

En las figuras 3.20 a 3.23 se muestran representaciones de cuatro componentes de la función de Green diádica, asumiendo un punto fuente en medio de la guía rectangular base ($x' = a/2$, $y' = b/2$). Es importante resaltar la

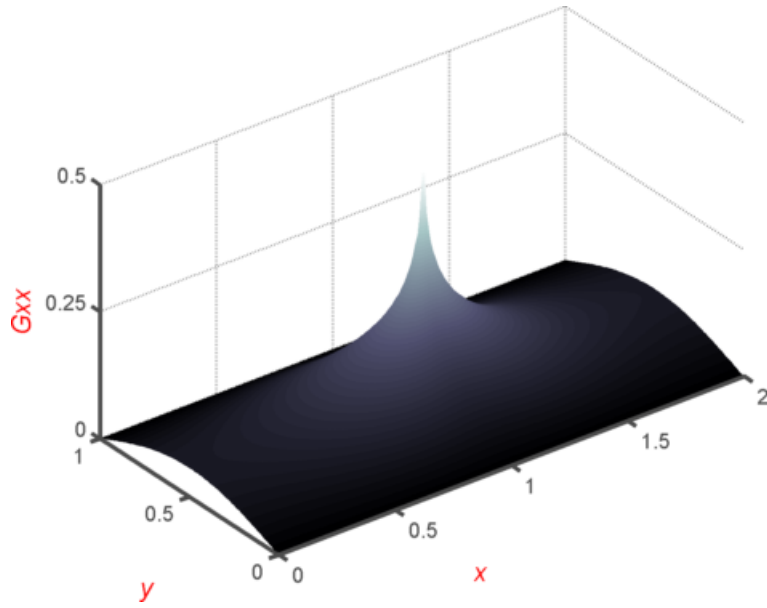


Figura 3.20: G_{xx} , para para un punto de fuente en $x' = a/2, y' = b/2$. Notar la singularidad cuando el punto de fuente se acerca al de observación.

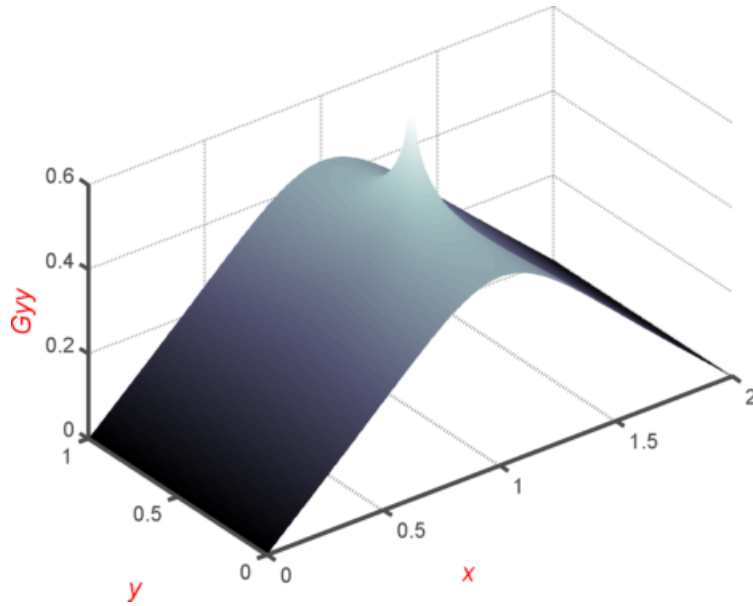


Figura 3.21: G_{yy} , para para un punto de fuente en $x' = a/2, y' = b/2$. Notar la singularidad cuando el punto de fuente se acerca al de observación.

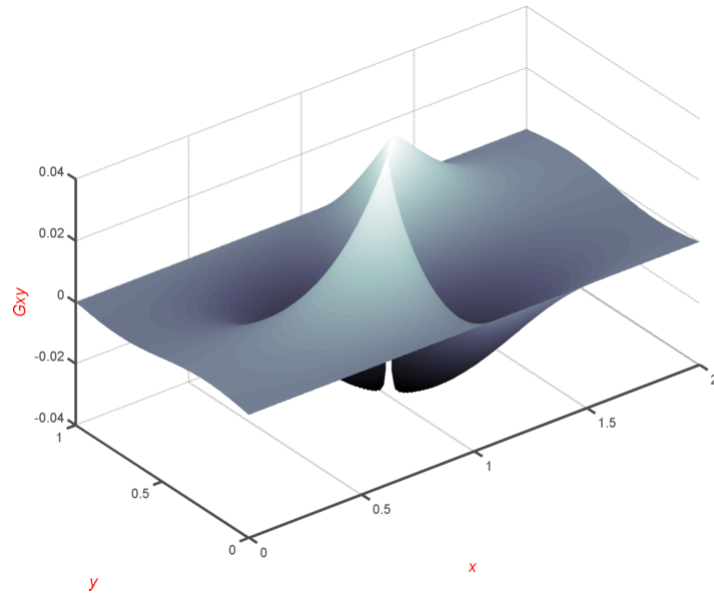


Figura 3.22: G_{xy} , para para un punto de fuente en $x' = a/2, y' = b/2$. Existe una discontinuidad evitable en el $x = x', y = y'$.

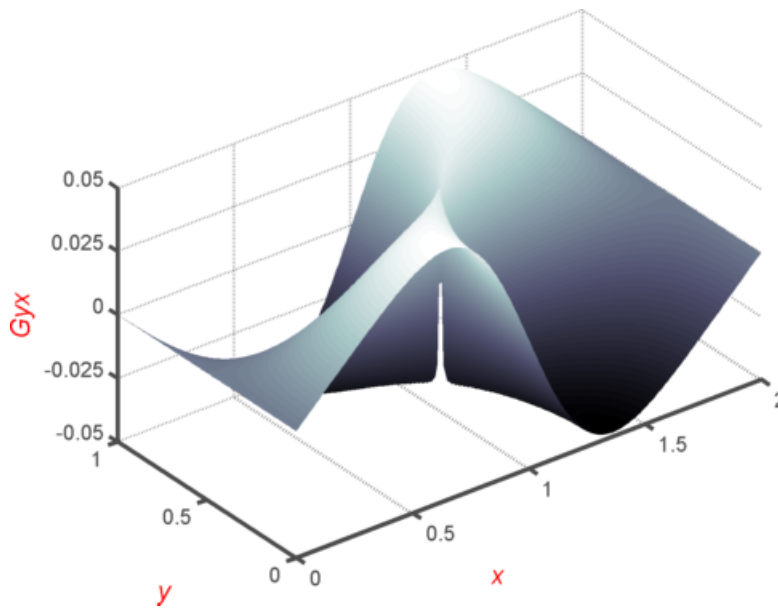


Figura 3.23: G_{yx} , para para un punto de fuente en $x' = a/2, y' = b/2$. Existe una discontinuidad evitable en el $x = x', y = y'$.

presencia de la singularidad logarítmica en G_{xx} y G_{yy} cuando el punto de observación y el de fuente convergen ($x \rightarrow x'$, $y \rightarrow y'$). Para poder llevar a cabo la integral presente en la expresión de L_{ij} será necesario aislar dicha singularidad para proceder, posteriormente, a su integración analítica. Por otra parte, las componentes G_{xy} y G_{yx} presentan una discontinuidad evitable en $x = x'$, $y = y'$. Salvar esta discontinuidad puede ser oportuno según la regla de integración numérica que tengamos pensado emplear.

El término $\hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{t}}(l')$ se puede expandir como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}(l) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{st} \cdot \hat{\mathbf{t}}(l') &= t_x(l)t_x(l')G_{xx} + t_x(l)t_y(l')G_{xy} \\ &\quad + t_y(l)t_x(l')G_{yx} + t_y(l)t_y(l')G_{yy} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Esto nos permite descomponer L_{ij} en cuatro términos

$$L_{ij} = L_{ijxx} + L_{ijxy} + L_{ijyx} + L_{ijyy} \quad (3.106)$$

$$L_{ijxx} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l)u_j(l')t_x(l)t_x(l')G_{xx}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')dldl' \quad (3.107)$$

$$L_{ijxy} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l)u_j(l')t_x(l)t_y(l')G_{xy}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')dldl' \quad (3.108)$$

$$L_{ijyx} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l)u_j(l')t_y(l)t_x(l')G_{yx}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')dldl' \quad (3.109)$$

$$L_{ijyy} = \int_{\sigma} \int_{\sigma} u_i(l)u_j(l')t_y(l)t_y(l')G_{yy}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')dldl' \quad (3.110)$$

Teniendo en cuenta que la base i -ésima se soporta sobre $K(i)$ segmentos y la base j -ésima sobre $H(j)$ segmentos podemos expresar cada una de las integrales anteriores como la suma de las contribuciones de cada cuadrante (definido por un par de segmentos en l y l') al total.

$$\begin{aligned} L_{ijxx} &= \sum_{k=0}^{K(i)} \sum_{h=0}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} L_{ijxx}^{(k,h)} & L_{ijxy} &= \sum_{k=0}^{K(i)} \sum_{h=0}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} L_{ijxy}^{(k,h)} \\ L_{ijyx} &= \sum_{k=0}^{K(i)} \sum_{h=0}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} L_{ijyx}^{(k,h)} & L_{ijyy} &= \sum_{k=0}^{K(i)} \sum_{h=0}^{H(j)} \Delta l_{i(k)} \Delta l_{j(h)} L_{ijyy}^{(k,h)} \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable estudiado $l \rightarrow t$, $l' \rightarrow t'$

$$L_{ijxx}^{(k,h)} = t_{i(k)}^{(x)} t_{j(h)}^{(x)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') G_{xx}(t, t') dt dt' \quad (3.111)$$

$$L_{ijxy}^{(k,h)} = t_{i(k)}^{(x)} t_{j(h)}^{(y)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') G_{xy}(t, t') dt dt' \quad (3.112)$$

$$L_{ijyx}^{(k,h)} = t_{i(k)}^{(y)} t_{j(h)}^{(x)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') G_{yx}(t, t') dt dt' \quad (3.113)$$

$$L_{ijyy}^{(k,h)} = t_{i(k)}^{(y)} t_{j(h)}^{(y)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') G_{yy}(t, t') dt dt' \quad (3.114)$$

Seguidamente hay que tratar la singularidad de G_{xx} y G_{yy} con el objetivo de aislarla e integrarla analíticamente. Inspeccionando las expresiones de dichos elementos vemos que la singularidad la provoca el término $\ln(T_m^-)$, que tiende a infinito cuando el punto de fuente \mathbf{s} y observación \mathbf{s}' convergen. Nos encontramos con una dificultad adicional al separar G_{xx} y G_{yy} en parte regular y parte singular: la parte regular presenta una discontinuidad que puede requerir tratamiento adicional. Debido a estas características es conveniente expresar las mencionadas funciones como

$$G_{xx} = G_{xxrc} + G_{xxrd} + G_{xxs} + G_{xxrs} \quad (3.115)$$

$$G_{yy} = G_{yyrc} + G_{yyrd} + G_{yys} + G_{yyrs} \quad (3.116)$$

Siendo

- G_{xxrc} la componente continua de la parte regular de G_{xx} .
- G_{xxrd} la componente discontinua de la parte regular de G_{xx} .
- G_{xxrs} la parte regular discontinua resultante del proceso de extracción de la componente singular de G_{xx} .
- G_{xxs} la componente singular de G_{xx} .

Las expresiones de todas estas componentes —así como las de G_{yy} — son mostradas a continuación

$$\begin{aligned}
G_{xxrc} &= \frac{1}{8\pi} - \frac{1}{8\pi} |X_0| \frac{\cos Y^+ - e^{-|X_0|}}{T_0^+} \\
&\quad + \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left[\ln \frac{T_m^+}{T_m^-} - |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} - \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \\
G_{xxrd} &= \frac{1}{8\pi} |X_0| \frac{\cos Y^- - e^{-|X_0|}}{T_0^-} \\
G_{xxrs} &= -\frac{1}{8\pi} \ln \left(\frac{T_0^-}{R^2} \right) \\
G_{xxs} &= -\frac{1}{8\pi} \ln(R^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{yyrc} &= \frac{x+x' - |x-x'|}{2b} - \frac{xx'}{ab} - \frac{1}{8\pi} \ln \left(4T_0^+ e^{-2|X_0|} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} |X_0| \frac{\cos Y^+ - e^{-|X_0|}}{T_0^+} - \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left\{ (-1)^m \left[\ln \left(4T_m^+ T_m^- e^{-2|X_m|} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |X_m| \left(\frac{\cos Y^+ - e^{-|X_m|}}{T_m^+} + \frac{\cos Y^- - e^{-|X_m|}}{T_m^-} \right) \right] \right\} \\
G_{yyrd} &= -\frac{1}{8\pi} |X_0| \frac{\cos Y^- - e^{-|X_0|}}{T_0^-} \\
G_{yyrs} &= -\frac{1}{8\pi} \ln \left(\frac{T_0^-}{R^2} \right) \\
G_{yys} &= -\frac{1}{8\pi} \ln(R^2)
\end{aligned}$$

Las componentes cruzadas de la función de Green diádica se pueden separar únicamente en parte continua y discontinua, al carecer de singularidades.

$$\begin{aligned}
G_{xy} &= G_{xyc} + G_{xyd} \\
G_{yx} &= G_{yxc} + G_{yxd}
\end{aligned}$$

Siendo

$$G_{xyc} = \frac{1}{8\pi} X_0 \frac{\sin Y^+}{T_0^+} + \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} (-1)^m X_m \left(\frac{\sin Y^+}{T_m^+} - \frac{\sin Y^-}{T_m^-} \right)$$

$$G_{xyd} = \frac{1}{8\pi} X_0 \frac{\sin Y^-}{T_0^-}$$

$$G_{yxc} = -\frac{1}{8\pi} X_0 \frac{\sin Y^+}{T_0^+} - \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} X_m \left(\frac{\sin Y^+}{T_m^+} - \frac{\sin Y^-}{T_m^-} \right)$$

$$G_{yxd} = \frac{1}{8\pi} X_0 \frac{\sin Y^-}{T_0^-}$$

Para salvar las discontinuidades hay que calcular el límite cuando $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}'$ de las componentes discontinuas de cada función para después redefinir dichas componentes "tapando" la discontinuidad. El valor del límite para G_{xxrd} , G_{yyrd} , G_{xyd} y G_{yxd} depende del tipo de segmento sobre el que nos estemos moviendo (en nuestro caso son segmentos rectos). Calcularlos requiere realizar el cambio de variable $x = x_0 + \Delta x(t + 0,5)$, $x' = x_0 + \Delta x(t' + 0,5)$, $y = y_0 + \Delta y(t + 0,5)$, $y' = y_0 + \Delta y(t' + 0,5)$. Realizando el desarrollo de Taylor en $t = t'$ de las expresiones resultantes y calculando el límite se obtienen los siguientes resultados

$$\lim_{t \rightarrow t'} G_{xxrd}(t, t') = -\lim_{t \rightarrow t'} G_{yyrd}(t, t') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta x}{\Delta l} \right)^2$$

$$\lim_{t \rightarrow t'} G_{xyd}(t, t') = \lim_{t \rightarrow t'} G_{yxd}(t, t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta l^2}$$

La parte regular total de G_{xx} y G_{yy} es la suma de las partes continuas y discontinuas. Las expresiones siguientes tienen en cuenta los límites calculados para salvar la discontinuidad.

$$G_{xxr} = \begin{cases} G_{xxrc} + G_{xxrd}, & \text{si } t \neq t' \\ G_{xxrc} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta x}{\Delta l} \right)^2, & \text{si } t = t' \end{cases} \quad (3.117)$$

$$G_{yyr} = \begin{cases} G_{yyrc} + G_{yyrd}, & \text{si } t \neq t' \\ G_{yyrc} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Delta x}{\Delta l} \right)^2, & \text{si } t = t' \end{cases} \quad (3.118)$$

De la misma forma

$$G_{xy} = \begin{cases} G_{xyc} + G_{xyd}, & \text{si } t \neq t' \\ G_{xyc} + \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta l^2}, & \text{si } t = t' \end{cases} \quad (3.119)$$

$$G_{yx} = \begin{cases} G_{yxc} + G_{yxd}, & \text{si } t \neq t' \\ G_{yxc} + \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta l^2}, & \text{si } t = t' \end{cases} \quad (3.120)$$

Las funciones G_{xxrs} y G_{yyrs} también poseen una discontinuidad en $s = s'$, pero en este caso el valor de límite es independiente del tipo de segmento.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} G_{xxrs} = \lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ y \rightarrow y'}} G_{yyrs} = -\frac{1}{8\pi} \ln \left(\frac{\pi^2}{2b^2} \right) \quad (3.121)$$

En cuadrantes regulares aplicaremos una cuadratura directamente sobre (3.111)-(3.114). En cuadrantes singulares descomponemos el cálculo en dos partes, una que implique a la parte regular de G_{xx} y G_{yy} y otra que implique a su parte singular. Como $G_{xxs} = G_{yys}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} L_{ijxx}^{(k,h)} &= L_{ijxxr}^{(k,h)} + L_{ijs}^{(k,h)} \\ L_{ijyy}^{(k,h)} &= L_{ijyyr}^{(k,h)} + L_{ijs}^{(k,h)} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} L_{ijxxr}^{(k,h)} &= t_{i(k)}^{(x)} t_{j(h)}^{(x)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') [G_{xxr}(t, t') + G_{xxrs}(t, t')] dt dt' \\ L_{ijyyr}^{(k,h)} &= t_{i(k)}^{(y)} t_{j(h)}^{(y)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') [G_{yyr}(t, t') + G_{yyrs}(t, t')] dt dt' \\ L_{ijs}^{(k,h)} &= t_{i(k)}^{(y)} t_{j(h)}^{(y)} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) u_j^{(h)}(t') G_{xxs}(t, t') dt dt' \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta última expresión G_{xxs} por su valor y manipulando algebraicamente la ecuación resultante se obtiene

$$L_{ijs}^{(k,h)} = t_{i(k)}^{(y)} t_{j(h)}^{(y)} \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(k)}(t) f_j^{(h)}(t) dt \quad (3.122)$$

Siendo

Orden	λ_c (cm) (BI-RME)	λ_c (cm) (Ref.[11])	Error rel. (%)
1	3.39363749	3.39447781	-0.0248
5	1.90719321	1.90795097	-0.0397
10	1.39726000	1.39790732	-0.0463
20	0.91541942	0.91607066	-0.0711

Tabla 3.4: Longitudes de onda de corte de cuatro modos TE de la guía elíptica de semieje mayor $a_e = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$, obtenidas por nuestra implementación de BI-RME y por el procedimiento teórico expuesto en [14].

$$f_j^{(h)}(t) = -\frac{1}{8\pi} \int_{-0,5}^{0,5} \left[a_j^{(h)} t'^2 + b_j^{(h)} t' + c_j^{(h)} \right] \ln [\Delta l^2 (t - t')^2] dt' \quad (3.123)$$

La expresión analítica de esta última integral se obtiene automáticamente a partir de (3.90).

Ejemplos

Vamos a estudiar los mismos cuatro ejemplos que ya se vieron para el caso TE: la guía circular de radio $r = 9,525$ mm, la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm (guía *ridge*), la guía elíptica de semieje mayor $a_e = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$. Se mostrarán también, a modo de ejemplo, los campos modales de una guía en forma de cruz.

Para analizar la guía en forma de círculo y la elíptica se han empleado $N = 120$ segmentos y $M = 500$ modos de la guía rectangular base, obteniendo un total de $M + N = 620$ modos de la estructura perturbada (de los cuales hay que separar los que pertenecen a la región de interés, i.e. aquellos que se propagan por el interior de la perturbación circular o elíptica frente a los que se propagan por fuera de esta). Se han empleado 8 puntos de cuadratura por segmento (64 por cuadrante para las integrales 2D). Ejecutando el programa confeccionado sobre MATLAB el tiempo de cálculo ha sido de 14 s, empleando un procesador *Intel I5 7200U* de dos núcleos a 2,50 GHz.

Orden	f_c (GHz) (BI-RME)	f_c (GHz) (TEORÍA)	Error rel.(%)
1	9.2252	9.2230	0.0241
2	15.3037	15.2995	0.0272
3	19.1993	19.1941	0.0269
4	21.0518	21.0450	0.0326
5	26.6476	26.6371	0.0391
6	26.7149	26.7067	0.0308
7	32.1544	32.1377	0.0520
8	33.6051	33.5929	0.0361
9	35.1559	35.1431	0.0366
10	37.5994	37.5760	0.0624

Tabla 3.5: Frecuencias de corte de los 10 primeros modos TE de la guía circular de radio $r = 9,525$ mm, obtenidos por BI-RME (con segmentos rectos) y el error cometido en relación al valor teórico.

Orden	f_c (GHz) (BI-RME)	f_c (GHz) (BI-RME [11])	FEM	TLM
1	6.71585	6.71569	6.640	6.715
2	15.1311	15.1309	14.956	15.083
3	16.8551	16.8550	16.788	16.839
4	17.1712	17.1713	17.159	17.201
5	22.3046	22.3047	22.173	22.314
6	24.3071	-	-	-
7	27.2632	-	-	-
8	29.0101	-	-	-

Tabla 3.6: Frecuencias de corte de los 8 primeros modos TE de la guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm, obtenidos por BI-RME. Se compara el primer modo con resultados obtenidos mediante otras técnicas.

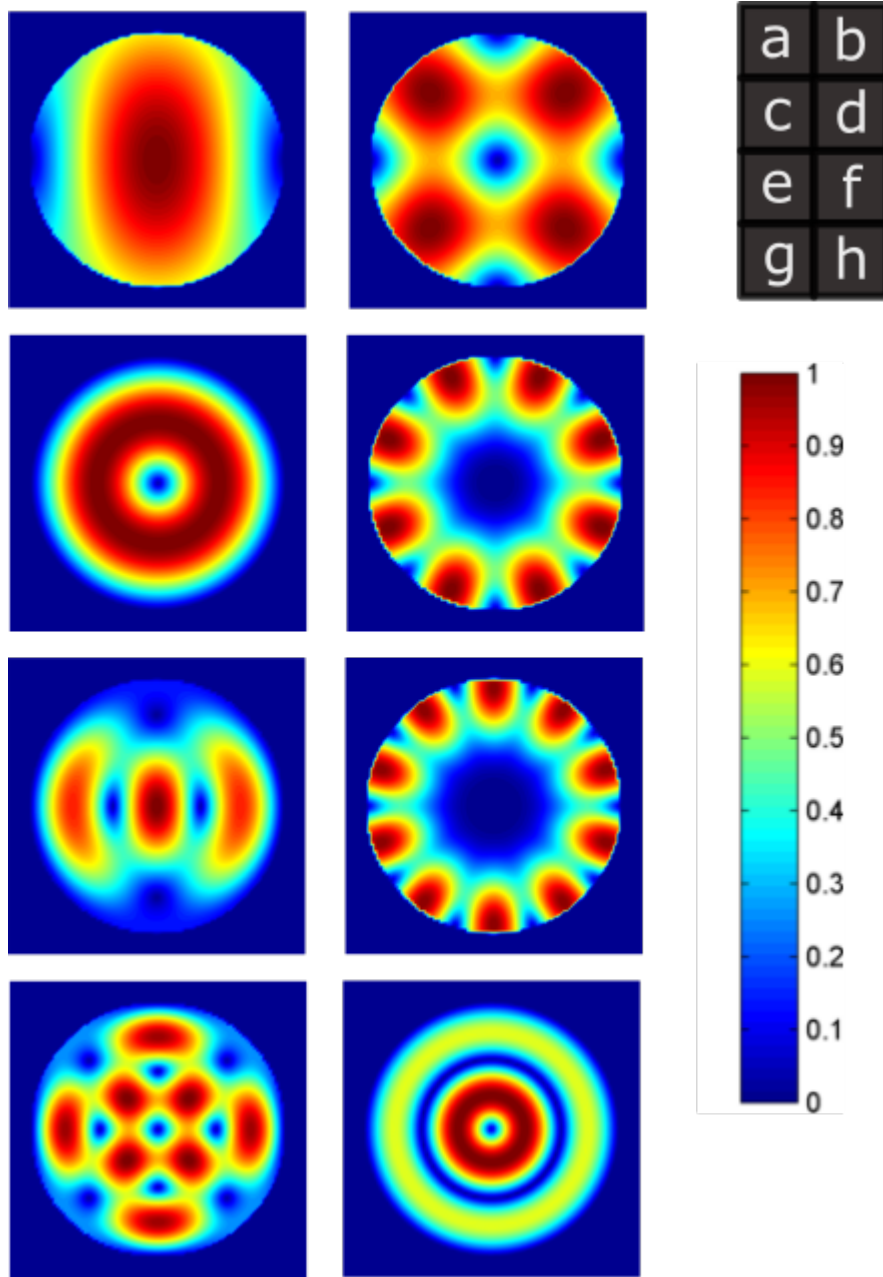


Figura 3.24: Campo eléctrico transversal ($|\mathbf{E}_t|$) (normalizado respecto al máximo) de los primeros 8 modos TE de la guía circular de diámetro $d = 12$ mm (guía ridge), analizada como una guía cuadrada perturbada por una hoja conductora en forma de círculo.

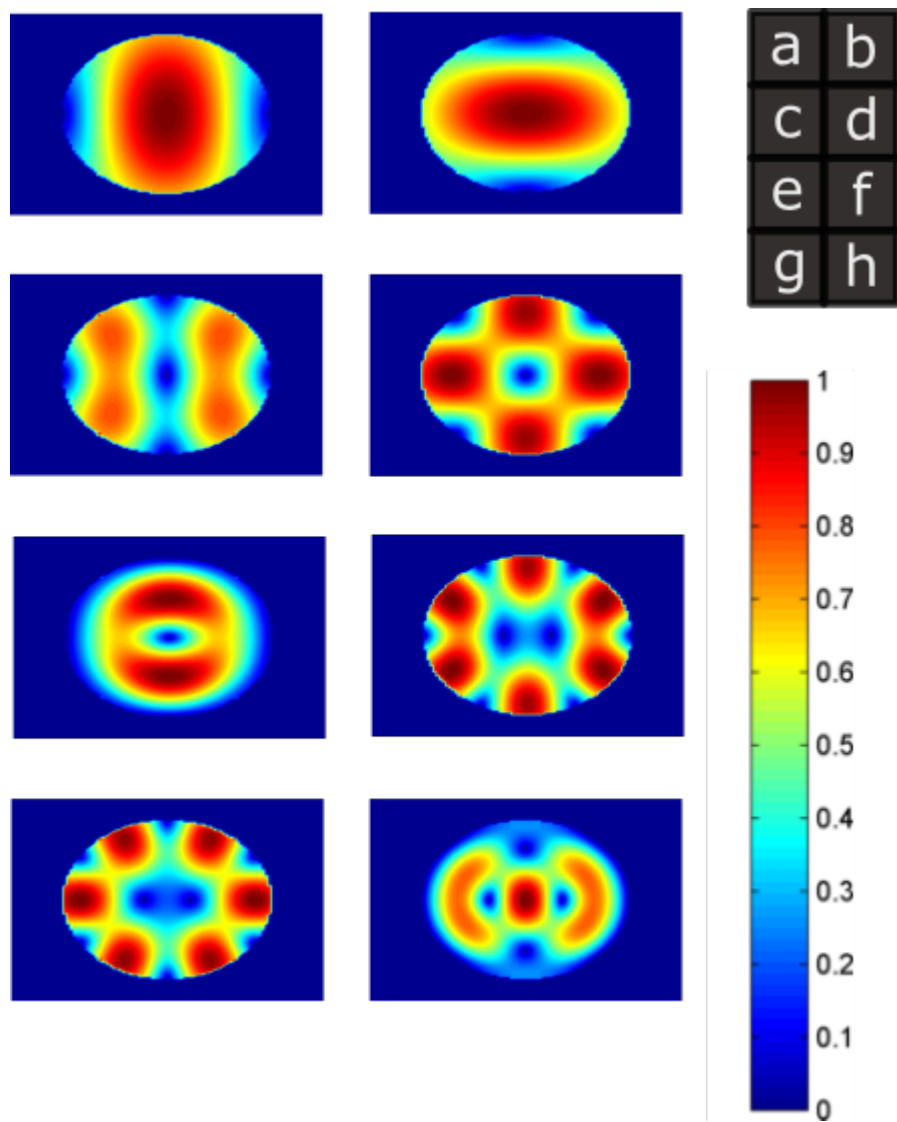


Figura 3.25: Campo eléctrico transversal ($|\mathbf{E}_t|$) (normalizado respecto al máximo) de los 8 primeros modos TE de la guía elíptica de semieje mayor $a = 10$ mm y excentricidad $e = 0,5$, analizada como una guía rectangular perturbada por una hoja conductora en forma de elipse.

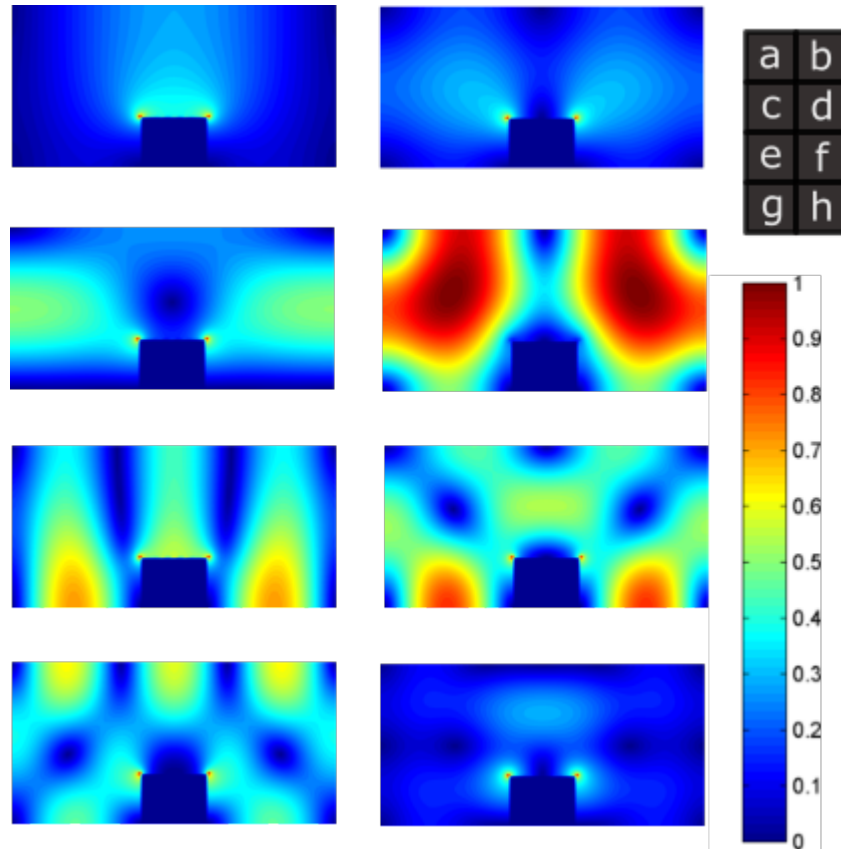


Figura 3.26: Campo eléctrico transversal ($|E_t|$) (normalizado respecto al máximo) de los primeros 8 modos TE de una guía rectangular de dimensiones $a = 19,05$ mm, $b = 9,525$ mm con un reentrante de anchura $w = 4$ mm y altura $h = 2,976$ mm, analizada como una guía rectangular perturbada por una hoja conductora en forma de U invertida.

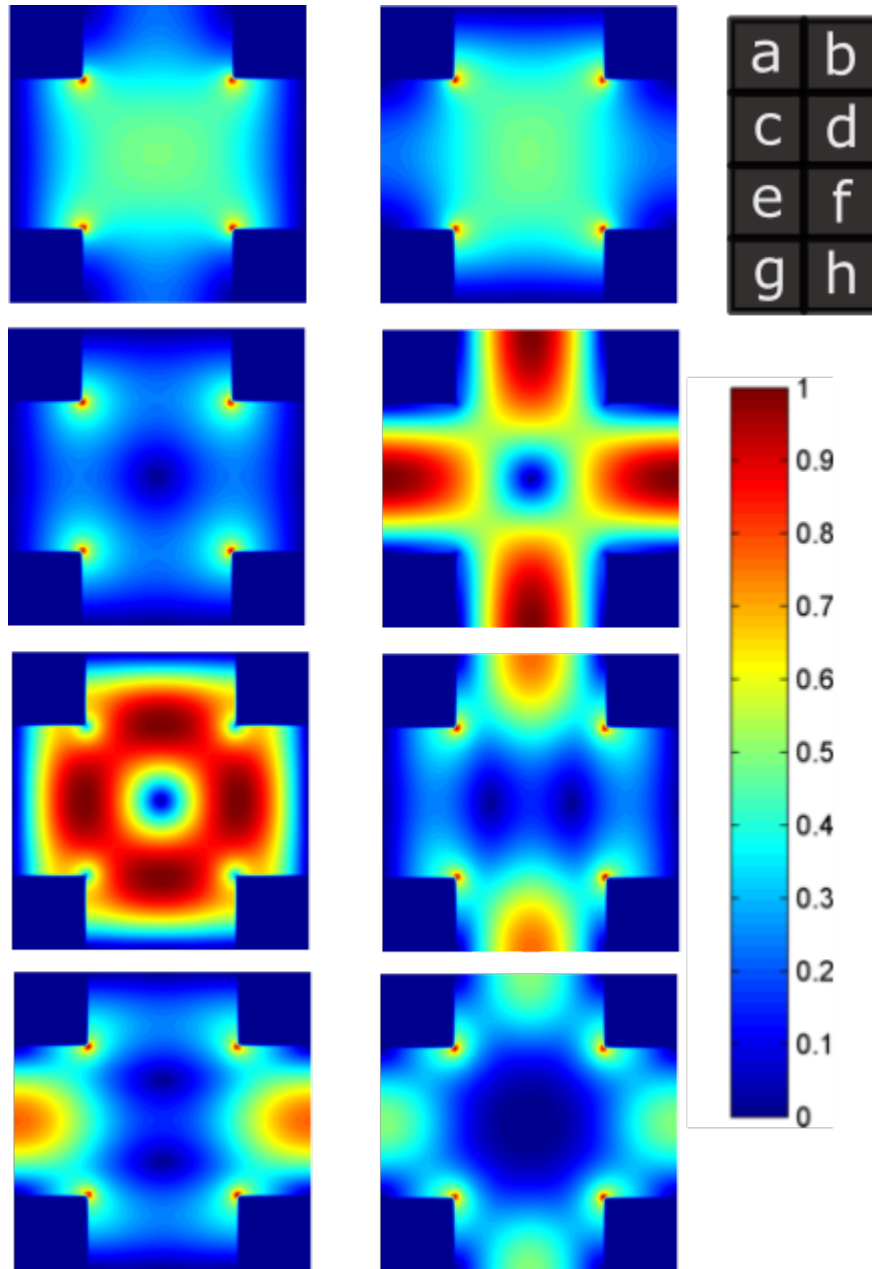


Figura 3.27: Campo eléctrico transversal ($|E_t|$) (normalizado respecto al máximo) de los primeros 8 modos TE de la guía en forma de cruz de relación $b/a = 0,25$, analizada como una guía cuadrada perturbada por cuatro escuadras conductoras colocadas en las esquinas.

3.10. Cálculo de los modos TEM

La obtención de los modos TEM tienen la peculiaridad —frente a los modos TE y TM— de que sólo nos interesa el campo modal (puesto que el número de onda de corte de un modo de este tipo es siempre cero). Como ya se explicó en la parte de teoría, para el cómputo de estos modos vamos a definir dos conjuntos de curvas —perturbaciones— distintas: aquellas que hacen contacto con la pared metálica de la guía base y que, por tanto, están sometidas a su mismo potencial —que fijaremos a cero— y por otra parte aquellas curvas internas cuyo potencial es diferente de cero. Las perturbaciones del primer conjunto las denotamos con un asterisco a modo de superíndice (σ_1^* , σ_2^* , ...). Nos referimos a las del segundo conjunto sin el asterisco (σ_1 , σ_2 , ...).

Cada una de estas curvas está definida por cierto número de segmentos y tiene asociado un conjunto de funciones base propio, las cuales están definidas —toman valores distintos de cero— sólo sobre segmentos pertenecientes a esa curva en particular. Esto quiere decir que dos funciones base pertenecientes a dos curvas σ distintas no deben entrelazarse. Este concepto se intenta reflejar en la figuras 3.28 y 3.29: es esa ilustración se observan 3 contornos perturbantes (σ^* , σ_1 y σ_2). A la hora de realizar el desarrollo de todas las perturbaciones sobre el eje l tenemos que definir bien en qué punto del eje acaba una y empieza otra. Definir bien los límites nos permitirá establecer correctamente las funciones base y, a partir de ahí, implementar el método numérico de forma correcta. Este concepto es extrapolable al procedimiento para el cómputo de los modos TE y TM explicados anteriormente (en BI-RME no existe restricción en cuanto al número de curvas perturbantes definidas).

Evidentemente, en una estructura que admita modo TEM, sólo existirá uno de estos modos —y empezará a propagarse el primero, como modo fundamental de la estructura—. Cuando tengamos una geometría como la de la figura 3.28 en la que tenemos más de un conductor interno (entendiendo por conductor interno aquél que no haga contacto eléctrico con la pared de la guía base, en ese ejemplo, σ_1 y σ_2) existirán tantos *pseudomodos* como conductores internos haya. Un *pseudomodo* TEM es una configuración electromagnética en la que se asume que todos los conductores presentes en la estructura estudiada están a potencial cero, menos un conductor interno previamente seleccionado. De acuerdo a esta definición, existirán tantos *pseudomodos* como conductores internos hayan. El campo TEM total en el interior de la guía será la superposición de todos los *pseudomodos* presentes.

Para calcular el modo TEM de una estructura hemos de obtener una

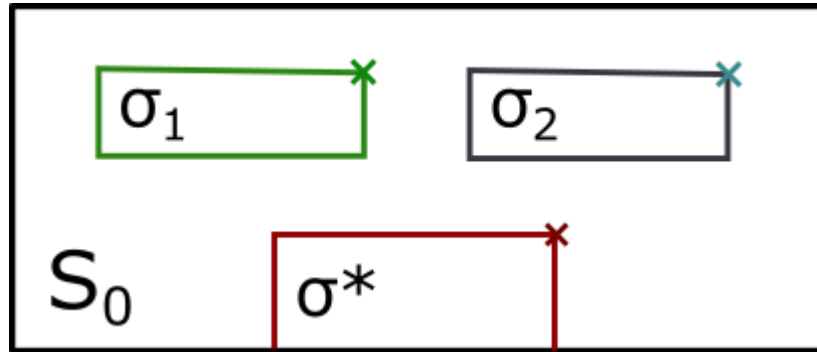


Figura 3.28: Guía rectangular con tres contornos perturbantes internos, uno de ellos haciendo contacto con la pared de la guía base.

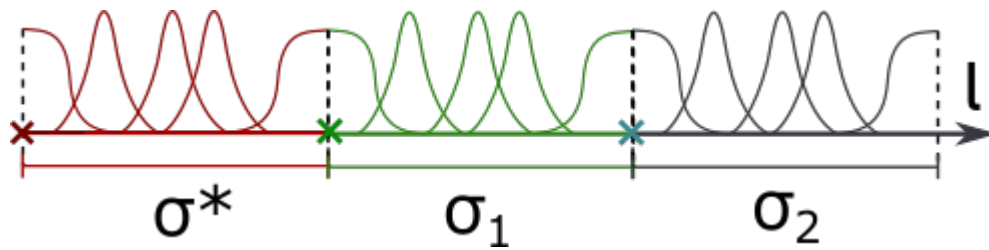


Figura 3.29: Las bases pertenecientes a distintas curvas perturbantes no han de entrelazar entre ellas.

matriz \mathbf{L}'' y una matriz \mathbf{f} . Los elementos de la matriz \mathbf{L}'' se obtienen como se indica en (3.36). Evidentemente, esa integral es exáctamente la misma que la que ya se resolvió en el cálculo de los modos TM para la obtención de los elementos L'_{ij} , con lo que este problema ya está resuelto.

La matriz \mathbf{f} está formada por tantos vectores columna como conductores internos tenga la estructura. Cada vector columna permite obtener un *pseudomodo*. El número de elementos de estos vectores es igual al número de funciones base definidas sobre toda la perturbación (aquí se incluyen todas las curvas σ), estando cada elemento del vector asociado a una función base —específicamente, a aquella cuyo índice coincide con la posición del elemento dentro del vector—. El vector columna asociado al *m-ésimo pseudomodo* debe tener todas sus componentes a cero salvo aquellas ligadas a las funciones base asociadas a la perturbación que define dicho *pseudomodo*, que quedan fijadas al potencial ligado a ese conductor específico (se impone potencial 1). Para el ejemplo de las figuras 3.28 y 3.29 definiríamos la matriz \mathbf{f} como refleja la ecuación (3.124).

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

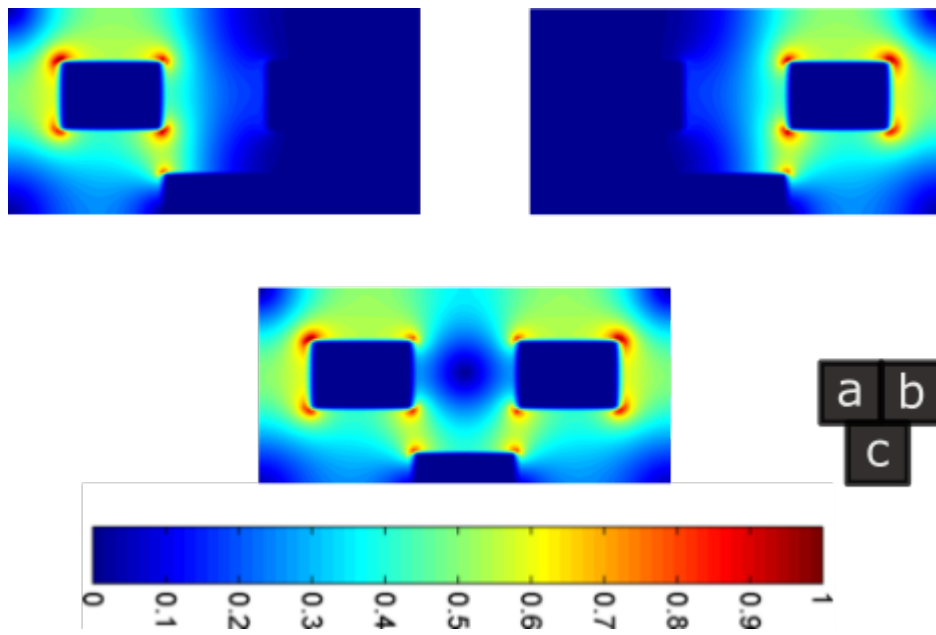


Figura 3.30: Componente transversal de los campos asociados a los pseudomodos TEM (a,b) y al modo total TEM (c), compuesto por la superposición de ambos pseudomodos. Los campos están normalizados respecto al máximo.

3.11. Algoritmo de descarte modal

El método BI-RME permite calcular los modos de una guía rectangular o circular perturbada por láminas conductoras. Estas perturbaciones pueden sencillamente modificar la geometría de la guía base (como es el caso del reentrante añadido en el caso de la guía *ridge*) o bien dividir el interior de la guía base en subregiones perfectamente cerradas. Una forma de proceder al estudio modal de una guía de sección transversal arbitraria es introducir el contorno de la misma en el seno de la guía base. En este caso, las longitudes de onda de corte obtenidas tras la aplicación de los procedimientos vistos hasta ahora proporcionarán valores asociados a la región de interés —es decir, al interior de la guía arbitraria sujeta a estudio— así como valores asociados a la región externa a esta (la región definida entre las paredes de la guía arbitraria y las paredes de la guía base rectangular o circular). Es por esto que necesitamos un procedimiento que nos permita discriminar los modos que pertenecen a la región externa frente a aquellos que pertenecen a la región de interés. El algoritmo de descarte modal [11] permite distinguir los modos internos de interés frente a los modos externos no deseados.

El funcionamiento es simple: definir dos líneas de puntos en torno a la curva perturbante σ , una interna a la región de interés y otra externa a la misma, tal como se muestra en la figura 3.31. El número de puntos internos y externos es el mismo.

Para un modo determinado, obtenemos el módulo de su campo eléctrico asociado tanto para los puntos internos $|\mathbf{E}_i^+|$ como externos $|\mathbf{E}_i^-|$; además, obtenemos el área de la región interés S^+ y el de la región externa S^- . Seguidamente calculamos un cociente Q definido como

$$Q = \frac{S^+ \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}_i^+|^2}{S^- \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}_i^-|^2} \quad (3.125)$$

siendo N el número de puntos tomados para una de las regiones (es decir, el número total de puntos entre dos). Atendiendo al valor de Q diremos que:

- Si $Q > 100$, el modo pertenece a la región interna.
- Si $Q < 1$, el modo pertenece a la región externa, y ha de ser descartado.
- Si $1 < Q < 100$ el modo se considerará dudoso, y en principio, no se descartará.

Los puntos internos a S_1 y externos a esta región se pueden obtener de forma sencilla a partir de la perturbación segmentada en tramos rectos:

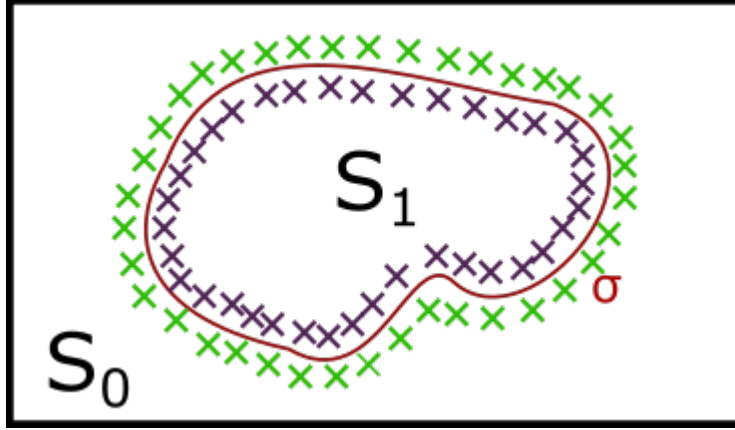


Figura 3.31: Puntos en torno a la perturbación σ tomados para la aplicación del algoritmo de descarte modal.

obtenemos K puntos a cada lado del segmento, cada uno a una distancia d de este último. En [11] se recomienda que $d = \lambda_h/2$ siendo λ_h la longitud de onda de corte asociada al modo de mayor orden de la guía base rectangular o circular empleado en la aplicación de BI-RME. Dado un segmento recto definido por (x_0, y_0) y $(\Delta x, \Delta y)$ de longitud $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ podemos calcular los puntos internos $(P_{ink}^{(x)}, P_{ink}^{(y)})$ y externos $(P_{outk}^{(x)}, P_{outk}^{(y)})$ aplicando el procedimiento siguiente.

- Definimos $\Delta t = 1/(K + 1)$
- Definimos $t_k = k\Delta t - 0,5$, siendo $k = 1, \dots, K$
- Obtenemos $x_k = x_0 + \Delta x(t_k + 0,5)$, $y_k = y_0 + \Delta y(t_k + 0,5)$

$$\begin{aligned} P_{ink}^{(x)} &= x_k - \frac{\Delta y}{\Delta l} d & P_{ink}^{(y)} &= y_k + \frac{\Delta x}{\Delta l} d \\ P_{outk}^{(x)} &= x_k + \frac{\Delta y}{\Delta l} d & P_{outk}^{(y)} &= y_k - \frac{\Delta x}{\Delta l} d \end{aligned}$$

A modo de aclaración

- $(P_{ink}^{(x)}, P_{ink}^{(y)})$ es el k -ésimo punto interno al segmento considerado.
- $(P_{outk}^{(x)}, P_{outk}^{(y)})$ es el k -ésimo punto externo al segmento considerado.

Finalmente, vamos a explicar cómo obtener el área de las regiones interna S^+ y externa S^- . Este problema se resuelve aplicando el teorema de la divergencia en dos dimensiones:

$$\int \int_S \nabla \cdot \mathbf{A} ds = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (3.126)$$

Tomando un campo vectorial arbitrario \mathbf{A} tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 1$, por ejemplo $A = x\hat{\mathbf{x}}$, la primera integral sería igual al área S , por lo que

$$S = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \oint_{\sigma} x\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (3.127)$$

Si nuestra perturbación σ viene aproximada por N segmentos rectos la superficie encerrada por la curva será la suma de las contribuciones asociadas a cada segmento, es decir:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i \quad (3.128)$$

Con

$$S_i = \int_{\sigma_i} x\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (3.129)$$

Aplicando el cambio de variable de l , x a t se tiene

$$\begin{aligned} x &= x_{0i} + \Delta x_i(t + 0,5) & y &= y_{0i} + \Delta y_i(t + 0,5) \\ \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\Delta y}{\Delta l} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\Delta x}{\Delta l} \hat{\mathbf{y}} \\ dl &= \Delta l dt \end{aligned}$$

Por tanto:

$$S_i = \int_{-0,5}^{0,5} \Delta y_i [x_{0i} + \Delta x_i(t + 0,5)] dt = \Delta y_i \left[x_{0i} + \frac{\Delta x_i}{2} \right] \quad (3.130)$$

Finalmente, el área externa a la perturbación es la diferencia entre el área total encerrada por la guía rectangular base (dimensiones $a \times b$) y el área interna S^+ a la perturbación .

$$S^- = ab - S^+ \quad (3.131)$$

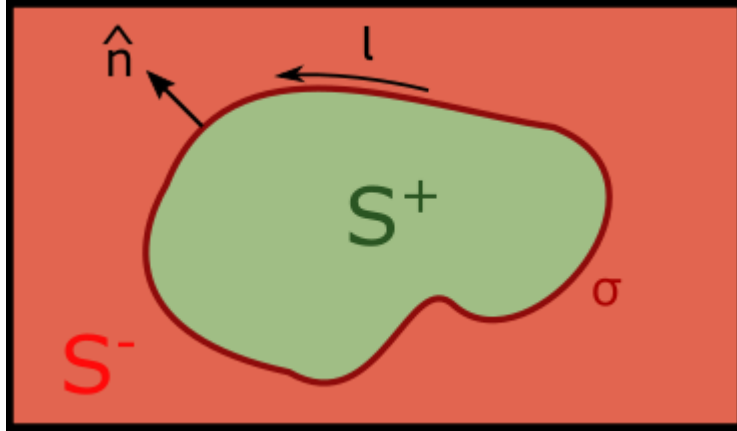


Figura 3.32: Escenario sobre el que aplicamos el teorema de la divergencia.

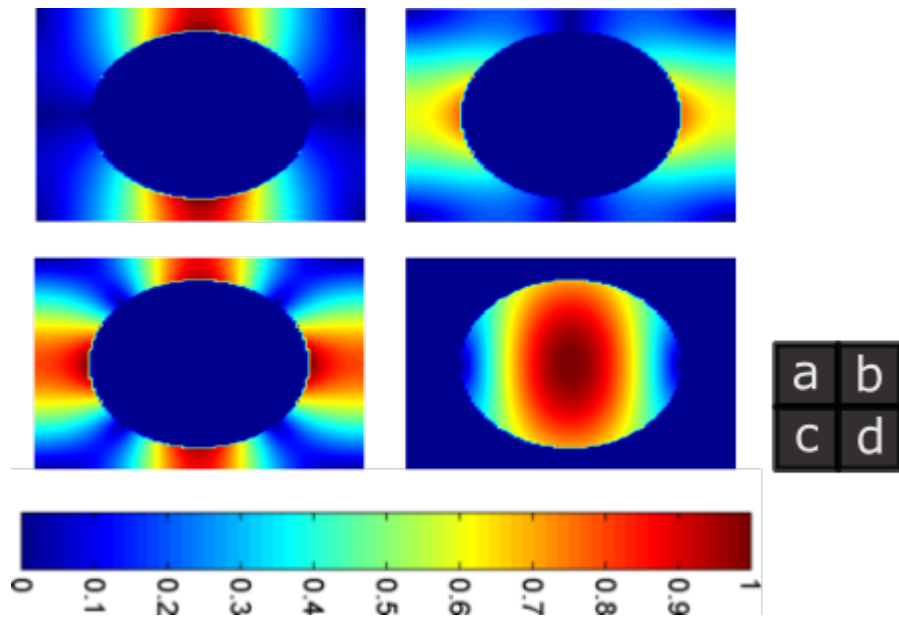


Figura 3.33: Campo eléctrico transversal (normalizado respecto al máximo) de los cuatro primeros modos TE obtenidos para la guía rectangular perturbada con una hoja conductora en forma de elipse. Notar como (a),(b) y (c) pertenecen a la región externa a la propia elipse.

Capítulo 4

Conclusiones y líneas futuras

A lo largo de este documento, se ha abordado el estudio de guías de onda de sección transversal arbitraria de forma satisfactoria: por una parte, se han aplicado métodos básicos de mallado del espacio para resolver la ecuación de onda en estructuras bidimensionales; por otra parte, se ha implementado de forma exitosa el método BI-RME aplicando segmentación por tramos rectos, con todos los pasos que ello implica (estudio de las ecuaciones y el método en general, implementación de las funciones auxiliares, resolución de singularidades y discontinuidades, implementación computacional eficiente...).

Si hay una línea futura de investigación que puede resultar bastante interesante, es la de expandir el método BI-RME para poder utilizar contornos perturbantes que sean conductores magnéticos perfectos (en lugar de los PEC que se han usado en exclusividad). Esta tarea puede ser muy laboriosa desde el punto de vista matemático: la dificultad no radica únicamente en la resolución matemática del problema de ecuación integral, sino en poder expresar las ecuaciones que definen el procedimiento de una forma clara y sencilla de implementar, tal y como ocurre con BI-RME en su estado actual, definido por un problema de autovalores donde los elementos de las matrices que lo constituyen vienen definidos por expresiones claras y concisas. Otro problema abierto de mayor complejidad sería resolver BI-RME en guías que incluyan perturbaciones dieléctricas.

La otra línea que se podría abordar viene del lado de los métodos diferenciales: definir un método para crear funciones base bidimensionales adaptadas a las condiciones de contorno previamente establecidas en la guía de sección arbitraria. Esto simplificaría la complejidad computacional del problema disminuyendo considerablemente el tamaño del problema de autovalores que lastra a los métodos diferenciales, conservando la versatilidad de

los mismos. Básicamente, consistiría en definir un algoritmo que, dado un contorno en forma paramétrica —el contorno que define la guía a analizar— te genera un conjunto de funciones polinomiales de dos variables que cumplan las condiciones de contorno de la guía y sirvan de base para componer cualquier modo que se pueda propagar por el interior de la misma.

Apéndice A

Expresiones normalizadas de las funciones modales

Las funciones modales ψ_m , \mathbf{e}_m —campos eléctricos— definidos en la guía base y empleados en el cálculo de las matrices \mathbf{R}' (modos TM) y \mathbf{R} (modos TE) han de estar normalizados para proporcionar estabilidad al algoritmo. Esto implica que tanto el campo eléctrico axial de los modos TM (ψ_m) como el campo transversal de los modos TE (\mathbf{e}_m) han de cumplir:

$$\int_{S_0} \psi_m^2 ds = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{S_0} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m ds = 0 \quad (\text{A.2})$$

Si la guía de onda base es rectangular de dimensiones $a \times b$, dichas funciones seguirían las siguientes expresiones

$$\psi_m = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{s\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{e}_m = e_m^{(x)} \hat{\mathbf{x}} + e_m^{(y)} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.4})$$

Siendo

$$e_m^{(x)} = \frac{A \times s}{b} \cos\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{s\pi}{b}y\right)$$
$$e_m^{(y)} = -\frac{A \times r}{a} \sin\left(\frac{r\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{s\pi}{b}y\right)$$

Con

$$A = \frac{\sqrt{uv}}{r^2b/a + s^2a/b}$$

Donde

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0 \\ 2 & \text{si } s \neq 0 \end{cases} \quad v = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 2 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

Finalmente, presentamos las expresiones para las funciones modales del resonador circular, las cuales son de gran utilidad para la implementación de BI-RME empleando guías base circulares en vez de rectangulares. Para una guía circular de radio a tendríamos

$$\psi_m = BJ_r(\beta_\rho \rho) \cos(r\phi) \quad (\text{A.5})$$

Con

$$B = \left(\frac{qa^2}{4} \int_{-1}^1 (t+1) J_r^2 \left[\frac{\beta_\rho a}{2} (t+1) \right] dt \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

Donde

$$\beta_\rho = \frac{\chi_{rs}}{a}, \text{ siendo } \chi_{rs} \text{ el } s\text{-ésimo cero de } J_r$$

$$q = \begin{cases} 2\pi & \text{si } r = 0 \\ \pi & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

Y para el caso TE

$$\mathbf{e}_m = e_m^{(\rho)} \hat{\boldsymbol{\rho}} + e_m^{(\phi)} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.7})$$

Siendo

$$e_m^{(\rho)} = \frac{C \times r}{\rho} J_r(\beta_\rho \rho) \sin(r\phi)$$

$$e_m^{(\phi)} = C \beta_\rho J_r'(\beta_\rho \rho) \cos(r\phi)$$

Con

$$C = \left(r^2 v I_1 + \frac{u a^2 \beta_\rho^2}{4} I_2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Donde

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+1} J_r^2 \left[\frac{a\beta_\rho}{2}(t+1) \right] dt \quad u = \begin{cases} 2\pi & \text{si } r = 0 \\ \pi & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (t+1) J_r^2 \left[\frac{a\beta_\rho}{2}(t+1) \right] dt \quad v = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \pi & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$$

Apéndice B

Gradiente de la función de Green escalar

El gradiente de la función de Green escalar $g(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ se utiliza tanto para el cálculo de las componentes transversales del campo eléctrico para todos los modos (TM, TE y TEM). Se puede realizar numéricamente a partir del mallado del espacio, pero si se desea obtener el valor del mismo para puntos concretos del espacio es conveniente usar su expresión. Para una guía base rectangular de dimensiones $a \times b$ tendríamos

$$\nabla g(x, y, x', y') = \frac{\partial g}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{B.1})$$

Siendo

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{4a} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s^{10} + C_s^{01} + C_s^{00} + C_s^{11} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4b} \sum_{r=-\infty}^{\infty} K_r^{10} + K_r^{01} + K_r^{00} + K_r^{11} \quad (\text{B.3})$$

Con

$$C_s^{pq} = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right]}{\cosh \left[\frac{\pi}{a} (y - (-1)^q y' + 2sb) \right] - \cos \left[\frac{\pi}{a} (x - (-1)^p x') \right]} \quad (\text{B.4})$$

$$K_r^{pq} = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y') \right]}{\cosh \left[\frac{\pi}{b} (x - (-1)^q x' + 2ar) \right] - \cos \left[\frac{\pi}{b} (y - (-1)^p y') \right]} \quad (\text{B.5})$$

Apéndice C

Directrices generales de programación

Hasta ahora nos hemos dedicado a desarrollar las ecuaciones de BI-RME en base a un modelo de la perturbación que considera la división de la misma en segmentos rectos. Todo ello nos ha permitido obtener una serie de expresiones que hay que programar. A continuación vamos a dar unas cuantas pinceladas que conciernen al desarrollo del software de cálculo modal, el cual hace uso de las expresiones descritas a lo largo del capítulo.

Por supuesto, existen muchas formas de implementar las distintas funciones que componen el programa. Aquí se explicará una manera sencilla, intuitiva y robusta.

Lo primero que habría que comentar es cómo representar la aproximación de la perturbación σ en base a segmentos rectos. Puesto que un segmento recto queda completamente definido por un punto inicial y un punto final, una forma es definir σ sería mediante una matriz tridimensional *SEGMENTS*[i, j, k] donde la coordenada asociada a las filas i nos permite acceder a cada uno de los N segmentos que constituyen la curva perturbante, j permite acceder a un extremo del segmento seleccionado ($j = 1$ refiere al extremo inicial y $j = 2$ al extremo final) y el índice k indica la coordenada del extremo a la que queremos acceder ($k = 1$ accedería a la coordenada x y $k = 2$ a la coordenada y). Ejemplo:

- *SEGMENTS*[5, 1, 1] accede a la coordenada x del extremo **inicial** del **quinto** segmento.
- *SEGMENTS*[5, 1, 2] accede a la coordenada y del extremo **inicial** del **quinto** segmento.

- **SEGMENTS**[5, 2, 1] accede a la coordenada x del extremo **final** del **quinto** segmento.
- **SEGMENTS**[5, 2, 2] accede a la coordenada y del extremo **final** del **quinto** segmento.

Esta matriz es va a ser el punto de partida en la ejecución del programa. Otra matriz necesaria va a definir lo que hemos denominado como *desarrollo* de la perturbación sobre el eje l , y va a contener los puntos que delimitan cada segmento en dicho eje. Denominaremos a esa matriz **LIMSL**[i, k], donde la primera coordenada permite acceder al i -ésimo segmento y k permite seleccionar el extremo ($k = 1$ accede al extremo inicial y $k = 2$ al segmento final del i -ésimo segmento). Ejemplo

- **LIMSL**[5, 1] accede a la coordenada l del extremo **inicial** del **quinto** segmento.
- **LIMSL**[5, 2] accede a la coordenada l del extremo **final** del **quinto** segmento.

Esta matriz se construye a partir de **SEGMENTS** aplicando el procedimiento descrito en el apartado 3.5. Con **LIMSL** nos es posible proceder a la obtención de los coeficientes que definen los splines de las funciones base sobre el eje l , para lo cual se pueden emplear las expresiones desarrolladas en 3.6. Podemos guardar dichos coeficientes en una matriz llamada **COEFFSL**[i, j, k] donde i hace referencia a la i -ésima función base, j al j -ésimo spline que da soporte a la misma y k al coeficiente en cuestión a obtener ($k = 1$ accede al coeficiente a asociado al término cuadrático, $k = 2$ accede al coeficiente b asociado al término de grado uno y $k = 3$ accede al término independiente c). Ejemplo:

- **COEFFSL**[2, 1, 1] accede al coeficiente a del **primer** spline constituyente de la **segunda** función base.
- **COEFFSL**[2, 2, 1] accede al coeficiente a del **segundo** spline constituyente de la **segunda** función base.
- **COEFFSL**[2, 3, 3] accede al coeficiente c del **tercer** spline constituyente de la **segunda** función base.

Además, para la implementación del programa de cálculo de los modos TE, se requiere de otra matriz con los coeficientes asociados a la derivada de

los splines respecto a l . Esta matriz $DCOEFFSL[i, j, k]$, de dimensiones $N \times 3 \times 2$ se obtiene de forma inmediata a partir de $COEFFSL$ teniendo en cuenta que la derivada de un spline parabólico tipo $f = al^2 + bl + c$ es $u = 2al + b$. Al sólo tener 2 coeficientes en lugar de 3, el tamaño de la tercera dimensión de $DCOEFFSL$ es una unidad menor que en $COEFFSL$.

Por motivos de generalización se hace necesario realizar una traducción de los coeficientes desde el eje l al eje $t \in [-0,5, 0,5]$. Los coeficientes de los splines definidos sobre el eje t son los que se emplean en todos los cálculos finales, por tanto, se va a definir una matriz $COEFFST[i, j, k]$ y otra de derivadas $DCOEFFST[i, j, k]$ que los albergue. El modelo de indexación de ambas es idéntico al usado en sus versiones sobre el eje l .

Además de obtener todas estas matrices será necesario programar la función de Green escalar (3.72) y también las partes de su descomposición g_r (3.77) y g_{rd} (3.78). También habrá que definir las componentes de la función de Green diádica y las distintas partes que las componen, que se requieren para resolver el problema en cuadrantes singulares bajo la presencia de singularidades y discontinuidades.

Con estas directrices lo único que hay que hacer es implementar las ecuaciones descritas a lo largo de los apartados dedicados al cálculo de los modos para obtener las matrices L' y R' (TM); L , C y R (TE) y L'' (TEM). Una vez hecho esto estaremos ante un problema de autovalores que se puede resolver aplicando uno de los múltiples algoritmos existentes.

Si la programación del algoritmo se lleva a cabo en un entorno basado en matrices (como MATLAB) es conveniente evitar —en la medida de lo posible— el uso de bucles y dar preferencia a la **vectorización** de los datos.

Bibliografía

- [1] Jean G. Van Bladel, *Electromagnetic Fields, 2nd Edition*, Wiley-IEEE Press, 2007.
- [2] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1st edition, 23 de Febrero, 1989.
- [3] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 10th edition, 16 de Agosto, 2011.
- [4] Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, 2nd edition, 24 de Enero, 2012.
- [5] David M. Pozar, *Microwave Engineering*, Wiley, 2nd edition, 12 de Agosto, 1997.
- [6] Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Wiley-IEEE Press; Reprint edition, 5 de Mayo, 1993.
- [7] B.E. Spielman, Roger F. Harrington, *Waveguides of Arbitrary Cross Section by Solution of a Nonlinear Integral Eigenvalue Equation*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Volume 20, Issue 9. Septiembre, 1972.
- [8] Christopoulos, C. (1997). The Transmission-line Modeling Method: TLM [Reviews and Abstracts]. *Antennas and Propagation Magazine*, IEEE. 39. 90-92. 10.1109/MAP.1997.583522.
- [9] G. Conciauro, M. Bressan, C. Zuffada, *Waveguide Modes Via an Integral Equation Leading to a Linear Matrix Eigenvalue Problem*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Volume 32, Issue 11. 16 de Agosto, 1983.

- [10] G. Conciauro, M. Bressan, *Rapidly converging expressions for dyadic Green's functions in two-dimensional resonators of circular and rectangular cross section*, Alta Frecuen, special issue on Applied Electromagnetics, 1983.
- [11] S. Marini, Vicente E. Boria, S. Cogollos, *Análisis Modal Eficiente de Dispositivos Pasivos de Microondas implementados con Guías de Onda de Sección Transversal Arbitraria. Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Valencia (UPV), Mayo 2005.
- [12] S. Cogollos, S. Marini, V. E. Boria, P. Soto, A. Vidal, H. Esteban, J. V. Morro, B. Gimeno, *Efficient modal analysis of arbitrarily shaped waveguides composed of linear, circular, and elliptical arcs using the BI-RME method*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Volume 51, Issue 12, 2003.
- [13] Maysum Panju, *Iterative Methods for Computing Eigenvalues and Eigenvectors*, University of Waterloo.
- [14] B. Gimeno y M. Guglielmi, "Full wave network representation for rectangular, circular, and elliptical waveguide junctions", IEEE Trans. Microwave Theory Tech, Marzo 1997.