



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena



**industriales**

etsii UPCT

# Diseño, análisis y optimización de engranajes cilíndricos de dentadura curvilínea

**Titulación:** Periodo de Formación de Doctorado en Tecnologías Industriales

**Alumno/a:** Ramón Ruiz Orzáez

**Directores:** Alfonso Fuentes Aznar  
Ignacio González Pérez

Cartagena, 21 de noviembre de 2012



# Índice general

<b>Nomenclatura</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Un poco de historia . . . . .	1
1.2. Justificación del trabajo . . . . .	3
1.3. Análisis del estado de arte . . . . .	7
1.4. Objetivos . . . . .	9
1.5. Metodología y fases del trabajo . . . . .	9
1.6. Estructura y planteamiento . . . . .	10
<b>2. Fundamentos teóricos de la generación de engranajes cilíndricos</b>	<b>13</b>
2.1. Generación de engranajes cilíndrico-rectos . . . . .	13
2.2. Generación de engranajes cilíndrico-helicoidales . . . . .	14
2.3. Generación de engranajes cilíndrico-curvilíneos . . . . .	14
2.4. Modelos matemáticos para la generación computacional de engranajes cilíndricos	17
2.4.1. Sección transversal de la herramienta de tallado . . . . .	18
2.4.2. Superficie de las herramientas de tallado . . . . .	26
2.4.3. Planteamiento de la ecuación de engrane . . . . .	32
2.5. Efecto de apuntamiento en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos	44
<b>3. Herramientas computacionales para el diseño de transmisiones avanzadas de engranajes</b>	<b>49</b>

3.1.	Procedimiento de simulación del engrane y análisis del contacto del diente . . . . .	49
3.1.1.	Método de análisis del contacto de carácter analítico . . . . .	52
3.1.2.	Método de análisis del contacto de carácter numérico . . . . .	58
3.2.	Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes . . . . .	60
<b>4.</b>	<b>Análisis tensional de transmisiones de engranajes cilíndricos</b>	<b>67</b>
4.1.	Influencia del grado de desalineación angular . . . . .	67
4.1.1.	Descripción de los casos a analizar . . . . .	68
4.1.2.	Procedimiento de optimización de la transferencia de carga . . . . .	72
4.1.3.	Simulación del engrane . . . . .	85
4.1.4.	Análisis tensional . . . . .	87
4.2.	Influencia del radio de la fresa circular generadora en el estado tensional de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos . . . . .	101
4.2.1.	Descripción de los casos a analizar . . . . .	102
4.2.2.	Optimización del rebaje de cabeza . . . . .	103
4.2.3.	Simulación del engrane . . . . .	105
4.2.4.	Análisis tensional . . . . .	106
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>115</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	115
5.2.	Trabajos futuros . . . . .	118
	<b>Bibliografía</b>	<b>121</b>

# Nomenclatura

<b>Símbolo</b>	<b>Definición</b>
$\alpha_n$	Ángulo de presión normal de referencia.
$\beta_p$	Ángulo de inclinación de referencia del dentado en transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales.
$\theta$	Coordenada paramétrica superficial generalizada de caracterización longitudinal de la cremallera de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, o de caracterización angular de la fresa circular de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$\theta_i$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización de la superficie activa del piñón ( $i = 1$ ) o de la rueda ( $i = 2$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos en la dirección longitudinal del diente.
$\theta_{CC}$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización angular de la superficie activa cóncava de los dientes de la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$\theta_{CV}$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización angular de la superficie activa convexa de los dientes de la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$\lambda$	Coordenada paramétrica superficial generalizada de caracterización del borde de cabeza del perfil de tallado de transmisiones de engranajes cilíndricos.

$\lambda_i$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización del borde de cabeza del perfil cóncavo ( $i = CC$ ) o convexo ( $i = CV$ ) de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o del perfil izquierdo ( $i = CC$ ) o derecho ( $i = CV$ ) de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales.
$\rho$	Radio de acuerdo de la sección transversal de la herramienta de tallado de las transmisiones de engranajes cilíndricos.
$\sigma_{\text{BENDING}}$	Tensión de flexión en la base del diente (Von Mises) en la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$\sigma_{\text{CONTACT}}$	Tensión de contacto (Von Mises) en la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$\nu_i$	Coefficiente de Poisson del material del piñón ( $i = P$ ) o de la rueda ( $i = G$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$\phi$	Parámetro generalizado del movimiento.
$\phi_i$	Ángulo de rotación del piñón ( $i = 1$ ) o de la rueda ( $i = 2$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$(\phi_1)_i$	Posición angular del piñón en el punto de discretización $i$ del algoritmo de análisis del contacto del diente.
$\phi_{CC}$	Parámetro generalizado del movimiento correspondiente a la posición $z = W/2$ de la superficie activa cóncava de los dientes de la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$\phi_{CV}$	Parámetro generalizado del movimiento correspondiente a la posición $z = W/2$ de la superficie activa convexa de los dientes de la rueda dentada de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$\omega_{GB}$	Velocidad angular de rotación del engranaje durante el proceso de tallado.
$\omega_{MC}$	Velocidad angular de rotación de la fresa circular de tallado de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

$\Delta\gamma_h$	Error de alineación angular en el plano horizontal entre los ejes de rotación en una transmisión de engranajes cilíndricos responsable de que dichos ejes de rotación se crucen en el espacio.
$\Delta\gamma_v$	Error de alineación angular en el plano vertical entre los ejes de rotación en una transmisión de engranajes cilíndricos responsable de que dichos ejes de rotación se intersecten en el espacio.
$\Delta\phi_2(\phi_1)$	Función de errores de transmisión.
$ \Delta\phi_2(\phi_1) _{max}$	Nivel máximo de la función de errores de transmisión.
$\Delta E$	Error de montaje en la distancia entre ejes de rotación en una transmisión de engranajes cilíndricos.
$a$	Altura de cabeza o <i>addendum</i> .
$a_{pf}$	Coefficiente de parábola característico del rebaje de cabeza de la herramienta de tallado de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$(a_{pf})_{optimal}$	Coefficiente de parábola característico del rebaje de cabeza de la herramienta de tallado de transmisiones de engranajes cilíndricos con transferencia de carga entre parejas de dientes optimizada.
$b$	Altura de pie o <i>dedendum</i> .
$h_{tr}$	Altura característica del rebaje de cabeza de la herramienta de tallado de transmisiones por engranajes cilíndricos.
$i$	Relación de transmisión de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$m_n$	Módulo del engranaje.
$m_B$	Relación de apoyo.
$n_{TCA}$	Número de posiciones angulares del piñón del algoritmo de análisis del contacto del diente.
$r_p$	Radio primitivo del engranaje de una transmisión de engranajes cilíndricos considerada.
$r_{p,i}$	Radio primitivo del piñón ( $i = 1$ ) o de la rueda ( $i = 2$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos considerada.

---

$t_R$	Espesor del aro bajo los dientes del elemento de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$u$	Coordenada paramétrica superficial generalizada de caracterización del perfil de tallado de las superficies activas de transmisiones de engranajes cilíndricos.
$u_i$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización de la superficie activa del piñón ( $i = 1$ ) o de la rueda ( $i = 2$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos en la dirección longitudinal del perfil transversal del diente.
$u_{CC}$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización de la superficie cóncava de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o de la superficie izquierda de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales.
$u_{CV}$	Coordenada paramétrica superficial de caracterización de la superficie convexa de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o de la superficie derecha de tallado, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales.
$v_{MC}$	Velocidad lineal de desplazamiento de la fresa circular de tallado de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$v_{RC}$	Velocidad lineal de desplazamiento de la cremallera de tallado de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales.
$E$	Distancia nominal entre ejes de rotación en una transmisión de engranajes cilíndricos.
$E'$	Distancia operativa entre ejes de rotación en una transmisión de engranajes cilíndricos.
$E_i$	Módulo de elasticidad del material del piñón ( $i = P$ ) o de la rueda ( $i = G$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$N_i$	Número de dientes del piñón ( $i = P$ ) o de la rueda ( $i = G$ ) de una transmisión de engranajes cilíndricos.

---

$N_{min}$	Número mínimo de dientes de un engranaje cilíndrico en condiciones libres de penetración o socavamiento.
$(N_P)_{min}$	Número mínimo de dientes del piñón de una transmisión de engranajes cilíndricos en condiciones libres de interferencia.
$R_C$	Radio de generación de la fresa circular de tallado de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$(R_C)_{lim}$	Radio de generación límite de la fresa circular de tallado de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$(R_C)_{optimal}$	Radio de generación óptimo de la fresa circular de tallado de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
$T$	Par torsor aplicado al piñón de una transmisión de engranajes cilíndricos.
$W$	Anchura de cara del engranaje cilíndrico.



# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

El presente documento recoge la memoria del trabajo de investigación de fin de periodo formativo del Doctorado en Tecnologías Industriales. Dicho trabajo de investigación se ha desarrollado en el seno del Grupo de Investigación de Transmisiones Avanzadas de Engranajes (GITAE) adscrito al Departamento de Ingeniería Mecánica (DIMEC) de la Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT).

Las transmisiones por engranajes constituyen el tipo de transmisiones mecánicas más ampliamente empleadas para transmitir movimiento y potencia desde un eje giratorio hasta otro. Se caracterizan por una relación de velocidad constante e independiente de la carga transmitida, por su seguridad de funcionamiento y larga duración, así como por sus dimensiones reducidas y elevado rendimiento.

### 1.1. Un poco de historia

El arte y ciencia de las transmisiones de engranajes se remonta a la época precristiana hace más de 2000 años. Los primeros testimonios escritos sobre engranajes corresponden a Aristóteles y datan del siglo IV A.C. Sin embargo, la reliquia más antigua que ha sobrevivido hasta nuestros días que incorpora engranajes es el mecanismo de Antikythera, el cual data del año 87 A.C. e incorpora una transmisión diferencial de engranajes epicicloidales cuya

disposición constructiva es extremadamente compleja. Por otro lado, prácticamente la totalidad de las autoridades coinciden en atribuir la aparición de las transmisiones de engranajes a Arquímedes alrededor del año 250 A.C., quien inventó el tornillo sinfín que imprimía un movimiento de rotación a una rueda dentada.

A lo largo de los siglos posteriores, las transmisiones de engranajes fueron aplicadas como elementos constructivos en maquinaria de trabajo, de medida de distancias o de tiempo. Algunos ejemplos de dichas aplicaciones son astrolabios, relojes astronómicos (1330) o relojes mecánicos (1364) entre otros. Sin embargo, no fue hasta mediados del siglo XIV cuando las transmisiones de engranajes sufren un gran avance tecnológico.

En el periodo temporal comprendido entre 1450 y 1750 se establecieron las bases matemáticas para la definición de los perfiles de dientes de engranajes y de formulación de la teoría de engranajes. A Albrecht Dürer se le atribuye el descubrimiento de la forma epicicloidal en el año 1525. Posteriormente, en el año 1694 Philip de la Hire desarrolló el perfil epicicloidal y recomendó el empleo de la curva de evolvente como perfil de dientes de engranajes, aunque esto último no fue usado en la práctica hasta 150 años después. Por último, Leonard Euler desarrolló la ley de acción conjugada en el año 1754, y con ello sentó las bases de la teoría de engranajes moderna.

Desde la Revolución Industrial hasta mediados del siglo XIX la ciencia de las transmisiones de engranajes se encontraba en su época dorada. Durante esos años, las transmisiones de engranajes se diseñaban atendiendo a principios científicos. En el año 1893 Wilfred Lewis propuso una expresión analítica de cálculo de las tensiones en la base de los dientes de engranajes, la cual sigue siendo utilizada todavía en nuestros días en los procesos de diseño de transmisiones de engranajes.

A lo largo del siglo XX la aparición de nuevos inventos conllevó la utilización de las transmisiones de engranajes en nuevas aplicaciones. En los primeros años de este siglo, el desarrollo de la turbina de vapor de reacción conllevó la aparición de reductores de engranajes de ejes paralelos. En el año 1916 se inició la época del desarrollo de maquinaria-herramienta de fabricación de engranajes. La aparición del automóvil implicó la necesidad de nuevas

transmisiones de engranajes más precisas y de funcionamiento más silencioso. A pesar de que en el año 1916 las transmisiones de engranajes hipoides eran capaces de ser mecanizadas, no fue hasta el año 1926 cuando se empezaron a emplear por primera vez en automóviles. La aparición de lubricantes especiales con aditivos antidesgaste en los años 20 permitió su uso en esta tipología de transmisiones mecánicas.

Entre los años 1920 y 1930 fueron desarrollados los aceros de alta resistencia aplicados a transmisiones de engranajes. Las técnicas de endurecimiento superficial en caja fueron introducidas en la década de los años 30, mientras que la técnica de endurecimiento por inducción apareció en los años 50. En los años 60 la aparición de los procesos de colada en vacío permitió la obtención de aceros de composición muy controlada, lo cual permitió a su vez prolongar la vida de las transmisiones de engranajes mecanizadas en esta clase de materiales.

## 1.2. Justificación del trabajo

El presente trabajo fin de periodo formativo de Doctorado (TFPFD) tiene como objetivo fundamental el estudio, análisis y optimización de una tipología de transmisión mecánica de engranajes cilíndricos con dentadura curvilínea, así como la valoración de su comportamiento para la transmisión de potencia frente a transmisiones clásicas mediante engranajes cilíndrico-rectos o helicoidales. La Figura 1.2.1 muestra un modelo 3D de este tipo de transmisión mecánica.

Las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos externos se emplean para la transmisión de potencia mecánica entre ejes paralelos. Se caracterizan por estar formados por dientes rectos y paralelos al eje del árbol sobre el cual se encuentran instalados, y constituyen la tipología de transmisiones por engranajes más simple de todas, motivo por el cual es la más utilizada si los requisitos de diseño lo permiten. Esta clase de transmisión mecánica solamente imprime cargas radiales sobre los cojinetes que sustentan los árboles sobre los cuales se encuentran instalados los engranajes que la integran. Generalmente, las transmisiones de



Figura 1.2.1: Modelo 3D de una transmisión de engranajes cilíndricos de dentado curvilíneo.

engranajes cilíndrico-rectos operan con velocidades de rotación reducidas, aunque puede trabajar con casi cualquier régimen de giro si el nivel de ruido de funcionamiento no es un requisito de diseño importante. La ley de engrane de esta clase de transmisión fue propuesta por Robert Willis en el año 1832.

Las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales externos también se emplean para la transmisión de potencia mecánica entre ejes paralelos. Esta clase de transmisión mecánica está formada por dientes que forman un ángulo agudo con respecto al eje del árbol sobre el cual se encuentran instalados y se caracterizan por un proceso de engrane durante el contacto entre parejas de dientes más uniforme y gradual que el correspondiente a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos, de modo que los esfuerzos a los que se ven sometidos sus dientes y su nivel de ruido de operación son más reducidos que los correspondientes a estas últimas. Sin embargo, esta clase de transmisión mecánica imprime cargas tanto radiales como axiales sobre los cojinetes que sustentan los árboles sobre los cuales se encuentran instalados los engranajes que la integran; solamente las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales

de doble dentado no imprimen cargas axiales. Las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales son capaces de operar con velocidades de rotación mucho más elevadas que las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos.

Las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales con perfil de evolvente, propuestos por primera vez por Leonard Euler (véase Apartado 1.1), poseen un campo de aplicación en la industria muy amplio debido a las múltiples ventajas que supone su uso, algunas de las cuales aparecen enunciadas en los siguientes puntos:

- Las herramientas de generación de esta clase de transmisiones de engranajes cilíndricos pueden ser producidas con una alta precisión.
- Resulta sencillo variar el espesor del diente y proporcionar una distancia entre centros no estándar, modificando para ello los ajustes de las máquinas herramientas empleadas en la generación de las transmisiones de engranajes.
- Las transmisiones de engranajes cilíndricos no estándar puede ser generadas haciendo uso de las mismas herramientas empleadas en la generación de las transmisiones de engranajes estándar.
- Un cambio en la distancia entre centros no da lugar a errores de transmisión, siempre dentro de unos límites.
- Las transmisiones de engranajes cilíndricos con perfil de evolvente poseen un contacto superficial de tipo lineal en condiciones ideales de engrane sin errores de alineación o deformaciones, de manera que constituyen una clase de transmisión mecánica con una elevada capacidad de carga.

Sin embargo, como principal inconveniente, las transmisiones de engranajes cilíndricos con perfil de evolvente resultan muy sensibles a errores de alineación angular entre los ejes que las integran, ya que dichos errores dan lugar a que el contacto se desplace al borde de las superficies con las consiguientes elevadas tensiones de contacto que pueden dar lugar al fallo prematuro de la transmisión. Por este motivo, resulta necesario localizar el contacto entre

ambos elementos dentados, lo cual puede lograrse mediante la aplicación de un proceso de abombamiento longitudinal de la superficie de uno de ellos, generalmente el piñón debido a su menor número de dientes.

Las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos externos constituyen una generalización de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos. Este tipo de transmisiones de engranajes cilíndricos fue propuesto por primera vez por Shue-Tseng Liu en el año 1988 [1], presentando las principales características y ventajas frente a otros tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos. Así mismo, en [1] se expone el procedimiento de mecanizado y las principales aplicaciones industriales de esta clase de transmisión mecánica. Además de Shue-Tseng Liu, diversos autores han publicado una amplia variedad de trabajos [2, 3, 4, 5, 6] en los cuales exponen las principales ventajas que supone el empleo de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos frente a transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales. Dichas ventajas aparecen expuestas en los siguientes puntos:

1. Mayor resistencia mecánica a la flexión y al contacto superficial de los dientes de la transmisión de engranajes.
2. Componente axial de la fuerza de contacto resultante de la transmisión de un par mecánico nula.
3. Mejores condiciones de lubricación.
4. Mayor grado de recubrimiento.
5. Los errores de transmisión son reducidos y poco sensibles frente a desalineaciones de tipo angular entre los ejes de los engranajes como consecuencia del contacto puntual entre las superficies activas de sus dientes, de modo que los niveles de ruido y vibración de operación son muy reducidos.
6. La reducida capacidad de carga de la transmisión de engranajes, la cual se encuentra limitada como consecuencia del contacto puntual que se establece entre las superficies

activas de sus dientes, puede incrementarse con la selección adecuada del radio nominal de la herramienta de tallado.

Sin embargo, la mayor parte de dichas ventajas no han sido suficientemente justificadas por los autores mediante la utilización de un procedimiento de diseño integral que incluya la generación virtual de la geometría de los engranajes cilíndricos de dentadura curvilínea, la simulación del engrane y el análisis del contacto así como el análisis tensional mediante el método de elementos finitos a lo largo de todo el ciclo de engranaje, constituyendo éste el objetivo fundamental del presente trabajo.

### 1.3. Análisis del estado de arte

Como ya se indicó con anterioridad en el Apartado 1.2, las transmisiones de engranajes cilíndricos de dentadura curvilínea han sido objeto de investigación durante los últimos años, puesto que aparentemente presentan ciertas ventajas con respecto a la utilización de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y helicoidales. En [2, 4] se propuso el modelo matemático de generación de la geometría de las superficies de los dientes, las condiciones necesarias para evitar el fenómeno de penetración en la base del diente, así como las características de contacto superficial de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos fabricadas por medio de un fresa cortadora. Las principales conclusiones relativas a este conjunto de trabajos fueron, por un lado, que la sección media de las superficies activas de los dientes de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos es la región donde se localiza el fenómeno de penetración con mayor facilidad y, por otro lado, que esta clase de transmisiones mecánicas no es sensible a desalineaciones axiales, es poco sensible a desalineaciones por errores de montaje, la trayectoria de contacto se localiza en las proximidades de la región media de la superficie activa de los dientes y la longitud del eje mayor de la elipse de contacto es directamente proporcional al radio nominal de la fresa cortadora.

Por otro lado, en [3] se propuso el modelo matemático y se simularon las líneas de acción de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos fabricada por medio de una

muela cortadora. Asimismo, en el mismo trabajo fue llevada a cabo la comparación entre los perfiles derivados de la simulación numérica del modelo matemático de dicha transmisión de engranajes y los perfiles correspondientes a una rueda dentada cilíndrico-curvilínea fabricada en nylon, resultando muy próximos entre sí los perfiles correspondientes.

En [5, 6], se estudió el modelo matemático de generación de la geometría de las superficies de los dientes, las condiciones para evitar el fenómeno de penetración del perfil y las características de contacto superficial de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos fabricadas por medio de un tornillo sinfín tipo ZN, herramienta equivalente a una fresa madre. En esta ocasión, las principales conclusiones fueron, por un lado, que el fenómeno de penetración posee una mayor facilidad de aparición sobre las superficies convexas de los dientes de engranajes cilíndrico-curvilíneos que sobre las correspondientes superficies cóncavas y, por otro lado, que el nivel de los errores de transmisión bajo condiciones ideales de ensamblaje no es nulo, pero sí muy reducido, y que éste decrece con el radio primitivo del piñón y de la rueda que integran la transmisión de engranajes.

Por último, en [7] se propuso un modelo matemático para la generación de la geometría de las superficies de los dientes y para el estudio de las características del contacto superficial en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos fabricadas por medio de una fresa cortadora cuyo perfil de tallado es un arco de círculo. Las principales conclusiones relativas a este trabajo fueron la gran sensibilidad de este tipo de transmisiones de engranajes frente a la variación de la distancia entre los ejes de los elementos que la integran, la posibilidad de introducir funciones de errores de transmisión prediseñadas de tipo parabólico mediante la variación de los radios de los perfiles de generación de las superficies activas de los dientes y, por último, la posibilidad de incrementar significativamente la superficie de las elipses de contacto, por un lado, mediante la reducción del radio de los perfiles de generación de las superficies activas de los dientes y, por otro lado, mediante el incremento del radio de tallado de la fresa cortadora.

## 1.4. Objetivos

Los principales objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo del presente trabajo son los siguientes:

1. Análisis de las ventajas e inconvenientes que ofrece el empleo de transmisiones de engranajes cilíndricos formados por dientes con forma geométrica curvilínea frente a transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales.
2. Verificación de los resultados y conclusiones acerca de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos recogidos en los diversos trabajos analizados en el apartado 1.3 del presente trabajo.
3. Estudio de optimización de la transferencia de carga entre parejas de dientes de los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas por medio de la aplicación de un proceso de rebaje de punta de cabeza.
4. Análisis del estado tensional a flexión y contacto bajo carga de los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos estudiados en el presente trabajo.
5. Estudio del sentido de rotación de operación más favorable de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, en vista de la diferencia existente entre las curvaturas correspondientes a las superficies activas cóncava y convexa de los dientes que las integran, con objeto de conocer si la superficie activa conductora de los dientes de un engranaje cilíndrico-curvilíneo debe ser la cóncava o la convexa.

## 1.5. Metodología y fases del trabajo

La metodología empleada en el desarrollo del presente trabajo, así como las distintas fases que lo integran, se resume a continuación:

1. Estudio de los fundamentos teóricos relativos a la teoría de engranajes moderna, generación virtual de transmisiones mecánicas de engranajes, técnicas computacionales de

- simulación del engrane y análisis del contacto, así como la generación automática de modelos de elementos finitos que permitan llevar a cabo el análisis tensional de dichas transmisiones mecánicas.
2. Generación computacional de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos, cilíndrico-helicoidales y cilíndrico-curvilíneos.
  3. Aplicación de un procedimiento de optimización de la geometría de las superficies activas de los dientes de los engranajes de transmisiones de engranajes cilíndricos por medio de un proceso de rebaje de punta de cabeza.
  4. Aplicación de un procedimiento computacional de simulación del engrane y análisis del contacto sobre las transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizadas, así como estudio de la influencia de los patrones de contacto frente a posibles errores de fabricación, alineación y/o montaje.
  5. Generación y análisis mediante el método de los elementos finitos de los modelos de las transmisiones de engranajes cilíndricos estudiadas e investigación de la evolución de las tensiones de flexión y contacto a lo largo del ciclo completo de engrane.
  6. Análisis de los resultados numéricos obtenidos y formulación de las conclusiones del trabajo.

## 1.6. Estructura y planteamiento

El presente trabajo de investigación se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1. Introducción y objetivos.
- Capítulo 2. Fundamentos teóricos de la generación de transmisiones de engranajes cilíndricos.

- Capítulo 3. Herramientas computacionales para el diseño de transmisiones avanzadas de engranajes.
- Capítulo 4. Análisis tensional de transmisiones de engranajes cilíndricos.
- Capítulo 5. Conclusiones.

En el Capítulo 1 han sido introducidos la justificación de la realización del presente trabajo fin de periodo formativo de Doctorado, el análisis del estado del arte en materia de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos y la exposición de los objetivos a alcanzar y de las distintas fases que integran la realización de dicho trabajo.

En el Capítulo 2 se van a exponer los fundamentos teóricos en los cuales se sustenta la generación virtual por ordenador de transmisiones de engranajes cilíndricos. Concretamente, se lleva a cabo el desarrollo de las expresiones analíticas que representan las superficies activas y de entalle de los dientes de las transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas. Posteriormente, las expresiones analíticas obtenidas han sido implementadas numéricamente a través de un código de programación para su obtención a través de un ordenador.

En el Capítulo 3 han sido expuestas las principales herramientas computacionales empleadas en el diseño de transmisiones avanzadas de engranajes. Fundamentalmente, dichas herramientas son algoritmos de análisis del contacto del diente y de generación de modelos de elementos finitos de transmisiones de engranajes cilíndricos.

En el Capítulo 4 han sido presentados los análisis tensionales de un conjunto de casos de transmisiones de engranajes cilíndricos. En primer lugar, ha sido optimizado el proceso de transferencia de carga entre parejas de dientes de cada uno de los casos de transmisiones de engranajes cilíndricos objeto del presente trabajo. Posteriormente ha sido llevada a cabo la simulación del engrane de cada una de las transmisiones previamente optimizadas. Por último, han sido comparadas entre sí las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos con las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales desde el punto de vista tensional para unas determinadas sollicitaciones mecánicas y de montaje. Adicionalmente, se ha estudiado la sensibilidad del comportamiento mecánico de las transmisiones de

engranajes cilíndrico-curvilíneos frente a distintos radios de tallado de la fresa generadora de las mismas.

En el Capítulo 5 se recogen las principales conclusiones de la realización del presente trabajo a partir de los resultados numéricos obtenidos, así como las líneas de trabajo que se podrían iniciar tomando como punto de partida el presente trabajo fin de periodo formativo de Doctorado.

## Capítulo 2

# Fundamentos teóricos de la generación de engranajes cilíndricos

En el presente capítulo se describen los procedimientos de generación de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente de círculo así como la geometría y movimientos de las herramientas involucradas en el proceso. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de este trabajo es la generación virtual por ordenador de estas transmisiones, se derivarán las expresiones analíticas de las superficies de los dientes de las distintas transmisiones de engranajes, presentando los sistemas de coordenadas empleados y las matrices de transformación de coordenadas utilizadas.

### 2.1. Generación de engranajes cilíndrico-rectos

El tallado de engranajes cilíndrico-rectos se basa en un proceso de generación haciendo uso de una fresa madre, que simula el movimiento de rodadura sin deslizamiento de una cremallera generadora sobre el cilindro primitivo del elemento de la transmisión que se fabrica. Por tanto, la superficie de los dientes de los engranajes se obtiene como la envolvente de la familia de superficies de la cremallera en las sucesivas posiciones durante el proceso de generación. Adicionalmente, durante el proceso de tallado, la cremallera describe un movimiento

oscilatorio lineal de avance a lo largo del eje del elemento dentado de la transmisión que está siendo generado.

El procedimiento de generación de engranajes cilíndrico-rectos descrito anteriormente se muestra representado esquemáticamente en la Figura 2.1.1. Tal como se observa en dicha figura, durante el proceso de fabricación el cilindro primitivo del engranaje que está siendo tallado es tangente al plano primitivo de la cremallera. Asimismo, el engranaje que está siendo tallado gira con una velocidad angular  $\omega_{GB}$ , mientras que la cremallera se desplaza con una velocidad  $v_{RC}$ . En virtud de la condición de rodadura sin deslizamiento entre el plano primitivo de la cremallera y el cilindro primitivo del engranaje, se establece que la relación entre la velocidad angular  $\omega_{GB}$  y la velocidad de traslación  $v_{RC}$ , viene dada por

$$v_{RC} = \omega_{GB}r_p \quad (2.1)$$

## 2.2. Generación de engranajes cilíndrico-helicoidales

Al igual que en el caso anterior, el tallado de engranajes cilíndrico-helicoidales se basa en un proceso de generación haciendo uso de una fresa madre, que simula el movimiento de rodadura sin deslizamiento de una cremallera generadora sobre el cilindro primitivo del elemento de la transmisión que se fabrica. Sin embargo, en este caso, el plano del perfil de la cremallera generadora está inclinado con respecto a un plano perpendicular al eje de rotación del engranaje helicoidal un determinado ángulo conocido como ángulo de hélice  $\beta_p$ . Una representación esquemática del procedimiento de generación de engranajes cilíndrico helicoidales aparece recogido en la Figura 2.2.1.

## 2.3. Generación de engranajes cilíndrico-curvilíneos

El tallado de engranajes cilíndricos de dentadura curvilínea considerado en el presente trabajo se basa en un proceso de generación haciendo uso de una fresa circular. Al igual que en el caso del tallado por cremallera, en este tipo de proceso la superficie de los dientes de los

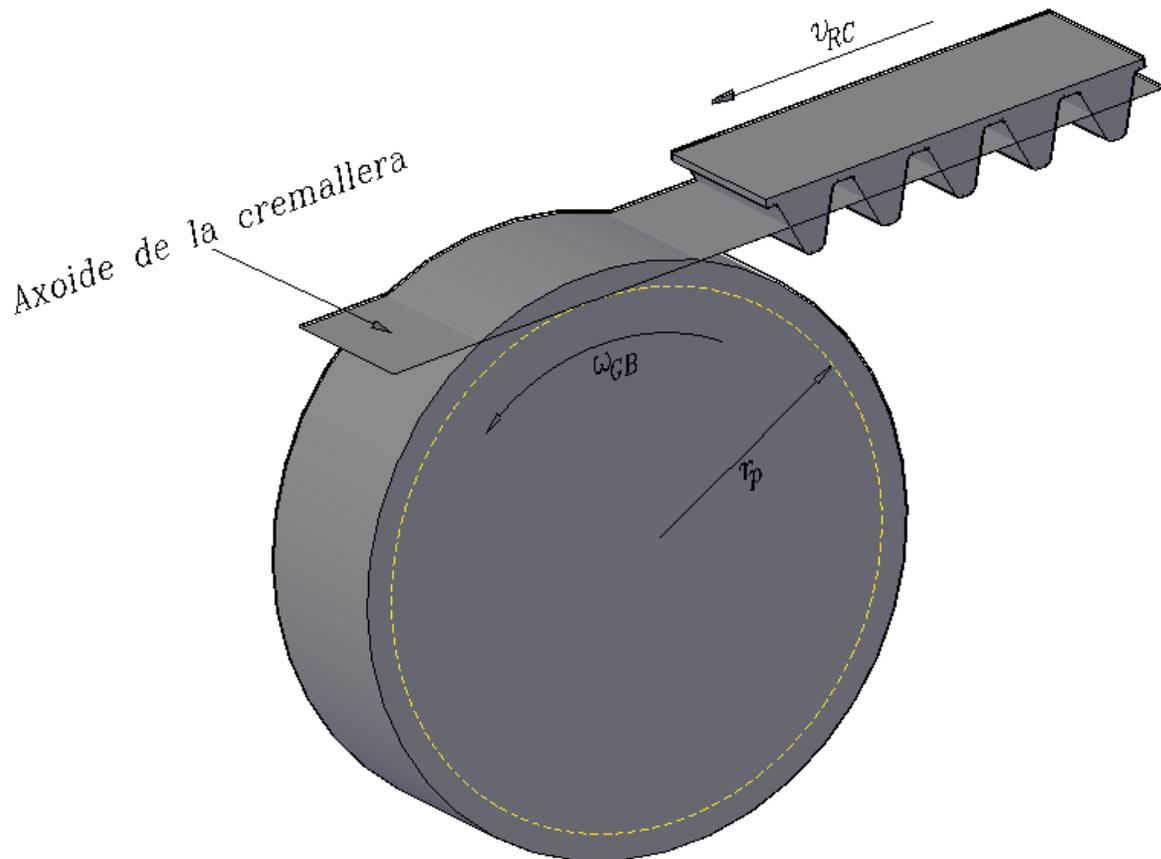


Figura 2.1.1: Esquema del procedimiento de fabricación de engranajes cilíndrico-rectos.

engranajes se genera como envolvente de la familia de posiciones adoptadas por la superficie de la fresa circular en su movimiento relativo de rodadura sin deslizamiento sobre el cilindro primitivo del elemento de la transmisión que está siendo fabricado. Adicionalmente, durante el proceso de tallado, la fresa circular gira en torno a su propio eje con una velocidad angular  $\omega_{MC}$ , la cual depende exclusivamente de la velocidad de corte.

En esta ocasión, como resultado del procedimiento de tallado descrito se obtienen unos engranajes en las que las superficies de sus dientes presentan una geometría curvilínea cóncava-convexa. Una transmisión de engranajes curvilíneos generados mediante una sola fresa cortadora presenta un contacto de tipo puntual, estando el contacto más localizado cuanto menor es el radio del cortador disminuyendo de esta manera la sensibilidad de la

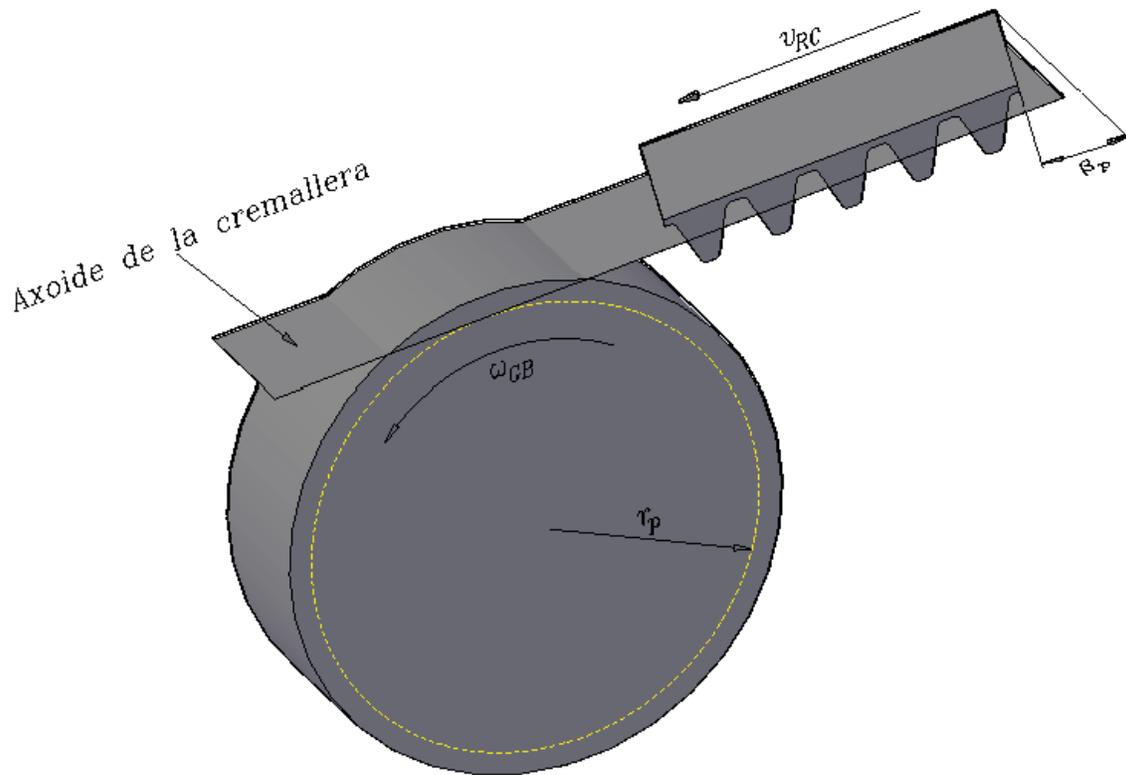


Figura 2.2.1: Esquema del procedimiento de fabricación de engranajes cilíndrico-helicoidales.

transmisión frente a errores de alineación y/o montaje. La obtención de un contacto de esta naturaleza tiene su origen en las diferencias existentes entre los radios de curvatura de las superficies cóncava (cuchilla interior) y convexa (cuchilla exterior) de la fresa circular, responsables de generar las superficies convexas y cóncavas, respectivamente, de los dientes de los engranajes. La Figura 2.3.1 muestra una representación esquemática del procedimiento de tallado de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

Por último, la relación matemática que representa la condición de rodadura sin deslizamiento entre el cilindro primitivo del engranaje y el plano primitivo de la fresa circular viene dada por

$$v_{MC} = \omega_{GB} r_p \quad (2.2)$$

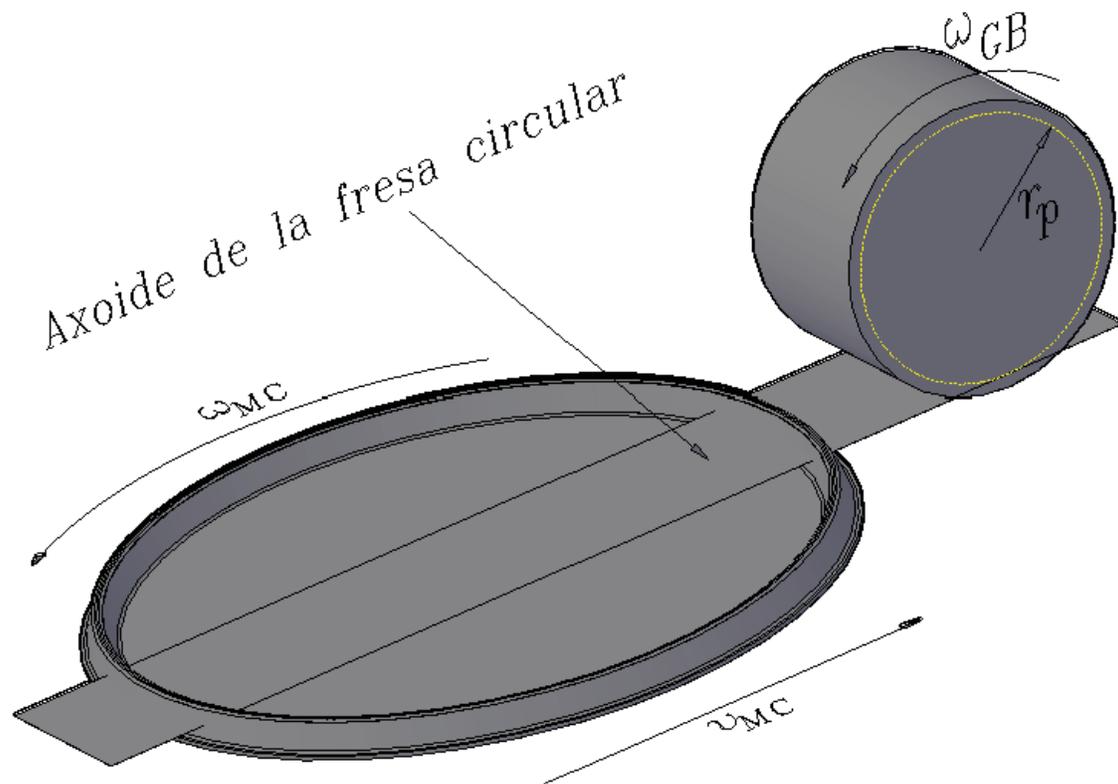


Figura 2.3.1: Esquema del procedimiento de fabricación de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

## 2.4. Modelos matemáticos para la generación computacional de engranajes cilíndricos

En el presente apartado se describen los modelos matemáticos empleados para la generación virtual y simulación computacional del contacto entre las superficies de los dientes de los engranajes correspondientes a los distintos tipos de transmisiones investigadas: (i) transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos, (ii) transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales, y (iii) transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

### 2.4.1. Sección transversal de la herramienta de tallado

En este apartado se describe la sección transversal de las cuchillas de tallado de los engranajes correspondientes a los tres tipos de transmisiones cilíndricas objeto de estudio en el presente trabajo. La citada sección transversal aparece representada en la Figura 2.4.1.

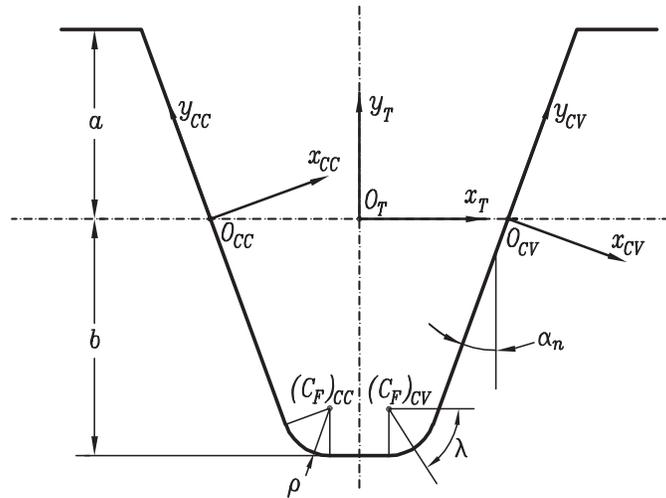


Figura 2.4.1: Sección transversal de las herramientas de tallado de las transmisiones de engranajes cilíndricos.

Los parámetros que definen la sección transversal de las cuchillas de tallado son los siguientes:

- Módulo de la transmisión de engranajes,  $m_n$ .
- Altura de cabeza o *addendum*,  $a$ .

$$a = m_n \quad ^1 \quad (2.3)$$

- Altura de pie o *dedendum*,  $b$ .

$$b = 1,25m_n \quad ^1 \quad (2.4)$$

- Ángulo de presión normal de referencia,  $\alpha_n$ .

---

<sup>1</sup>Caso de transmisiones de engranajes estándar.

- Radio de acuerdo  $\rho$ .

Para la definición analítica de las superficies generadoras de las herramientas de tallado, se han establecido en la sección transversal de la misma un total de tres sistemas de referencia auxiliares, los cuales aparecen representados en la Figura 2.4.1 y descritos a continuación:

- $S_T(x_T, y_T, z_T)$ . Se trata de un sistema de referencia solidario a la sección transversal del diente de la herramienta de tallado y cuyo origen  $O_T$  se localiza en el punto de intersección entre el eje de simetría de la sección transversal y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas  $y_T$  se encuentra dirigido en la dirección de dicho eje de simetría y orientado en el sentido del *addendum*.
- $S_{CC}(x_{CC}, y_{CC}, z_{CC})$ . Se trata de un sistema de referencia solidario al filo de la superficie cóncava de la herramienta de tallado, en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o al filo de la superficie izquierda de la herramienta de tallado, en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico helicoidales. Su origen  $O_{CC}$  se localiza en el punto de intersección entre el filo de tallado considerado y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas  $y_{CC}$  se encuentra dirigido en la dirección de dicho filo de tallado y orientado en el sentido del *addendum*.
- $S_{CV}(x_{CV}, y_{CV}, z_{CV})$ . Se trata de un sistema de referencia solidario al filo de la superficie convexa de la herramienta de tallado, en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o al filo de la superficie derecha de la herramienta de tallado, en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico helicoidales. Al igual que en el caso anterior, su origen  $O_{CV}$  se localiza en el punto de intersección entre el filo de tallado considerado y el plano primitivo de la herramienta de tallado empleada. El eje de coordenadas  $y_{CV}$  se encuentra dirigido en la dirección de dicho filo de tallado y orientado en el sentido del *addendum*.

Tal como se aprecia en la Figura 2.4.1, la superficie de generación de la herramienta de

tallado  $\Sigma_T$  está compuesta fundamentalmente por cuatro regiones claramente diferenciadas, las cuales aparecen descritas a continuación:

- Superficie cóncava de tallado  $(\Sigma_P)_{CC}$ . Esta superficie es la responsable del tallado del perfil activo convexo, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o del perfil activo derecho, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, de los dientes del engranaje. La sección transversal de la superficie de tallado considerada en el presente trabajo es un perfil recto, de modo que la sección transversal de las superficies activas de los dientes generados será un perfil de evolvente. La coordenada superficial paramétrica de caracterización de dicho perfil a lo largo de éste es  $u_{CC}$ , cuyo origen es coincidente con el origen  $O_{CC}$  y cuyo sentido positivo es coincidente con el sentido positivo del eje de coordenadas  $y_{CC}$ . El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $u_{CC}$  es el siguiente:

$$-\left(\frac{b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)}{\cos \alpha_n}\right) < u_{CC} < \frac{a}{\cos \alpha_n}. \quad (2.5)$$

- Superficie convexa de tallado  $(\Sigma_P)_{CV}$ . Esta superficie es la responsable del tallado del perfil activo cóncavo, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o del perfil activo izquierdo, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, de los dientes del engranaje. Al igual que en el caso anterior, la sección transversal de la superficie de tallado considerada en el presente trabajo es un perfil recto y la sección transversal de las superficies activas de los dientes generados será un perfil de evolvente. La coordenada superficial paramétrica de caracterización de dicho perfil a lo largo de éste es  $u_{CV}$ , cuyo origen es coincidente con el origen  $O_{CV}$  y cuyo sentido positivo es coincidente con el sentido positivo del eje de coordenadas  $y_{CV}$ . Debido a la simetría de la sección transversal del diente de la herramienta de tallado, el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $u_{CV}$  es coincidente con el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $u_{CC}$ , el cual aparece reflejado en la Ecuación (2.5).

- Radio del borde de cabeza del perfil concavo de la herramienta  $(\Sigma_F)_{CC}$ . Este radio de cabeza es el responsable del tallado de la superficie de entalle entre la superficie de pie y la superficie activa convexa, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o la superficie activa derecha, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, de los dientes del engranaje. El centro del radio de cabeza es  $(C_F)_{CC}$  y la coordenada paramétrica de caracterización del mismo a lo largo de éste es  $\lambda_{CC}$ , siendo su origen la posición horizontal y su sentido de giro antihorario. El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\lambda_{CC}$  es el siguiente:

$$\alpha_n < \lambda_{CC} < \frac{\pi}{2}. \quad (2.6)$$

- Radio del borde de cabeza del perfil convexo de tallado  $(\Sigma_F)_{CV}$ . Este radio de cabeza es el responsable del tallado de la superficie de entalle entre la superficie de pie y la superficie activa cóncava, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o la superficie activa izquierda, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, de los dientes del engranaje. El centro del radio de acuerdo es  $(C_F)_{CV}$  y coordenada paramétrica de caracterización de dicho radio de cabeza a lo largo de éste es  $\lambda_{CV}$ , siendo su origen la posición horizontal y su sentido de giro horario. Debido a la simetría de la sección transversal del diente de la herramienta de tallado, el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\lambda_{CV}$  es coincidente con el rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\lambda_{CC}$ , el cual aparece reflejado en la Ecuación (2.6).

Por último, se representarán los puntos pertenecientes a cada una de las regiones que integran la superficie  $\Sigma_T$  en el sistema de referencia  $S_T$ . Para ello, y a efectos de simplificación, se va a hacer uso de una única nomenclatura para las coordenadas paramétricas superficiales  $u$  y  $\lambda$  correspondientes a las superficies de tallado cóncava y convexa, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o izquierda y derecha, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, todo ello en virtud del

eje de simetría de la sección transversal del diente de la herramienta de tallado. Así pues, es posible distinguir dos casos claramente diferenciados, que se describen en los siguientes apartados.

### Superficies de tallado de los perfiles activos de los dientes $\Sigma_P$

El vector de posición de un punto  $P$  perteneciente al perfil de una superficie de tallado representado en un sistema de referencia solidario al mismo y expresado en coordenadas homogéneas viene dado por la Ecuación (2.7). En dicha ecuación, la coordenada paramétrica superficial  $u$  corresponde a la distancia  $\overline{O_{CV}P_{CV}}$ , en el caso de la superficie de tallado convexa (transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos) o derecha (transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales), o  $\overline{O_{CC}P_{CC}}$ , en el caso de la superficie de tallado cóncava (transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos) o izquierda (transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales).

$$\mathbf{r}_{CC}^{(P_{CC})}(u) = \mathbf{r}_{CV}^{(P_{CV})}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Por otro lado, las matrices de transformación de coordenadas que resulta preciso aplicar para la transformación de coordenadas entre los sistemas de referencia  $S_{CC}$  y  $S_{CV}$  hasta el sistema de referencia  $S_T$  son respectivamente,

$$\mathbf{M}_{T,CC} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & -\operatorname{sen} \alpha_n & 0 & -\frac{\pi}{4}m_n \\ \operatorname{sen} \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M}_{T,CV} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & \operatorname{sen} \alpha_n & 0 & \frac{\pi}{4} m_n \\ -\operatorname{sen} \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

De este modo, las ecuaciones del perfil de la superficie de tallado en el sistema de referencia  $S_T$  vienen dadas por:

$$\mathbf{r}_T^{(P_{CC})}(u) = \mathbf{M}_{T,CC} \mathbf{r}_{CC}^{(P_{CC})}(u) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{r}_T^{(P_{CV})}(u) = \mathbf{M}_{T,CV} \mathbf{r}_{CV}^{(P_{CV})}(u) \quad (2.11)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (2.7) y (2.8) en la Ecuación (2.10) y, por otro lado, las Ecuaciones (2.7) y (2.9) en la Ecuación (2.11), y teniendo en cuenta además la condición de simetría de la sección transversal del diente de la herramienta de tallado, es posible obtener la representación de la superficie  $\Sigma_P$  en el sistema de referencia  $S_T$  tras el desarrollo de las operaciones matemáticas pertinentes. La Ecuación (2.12) se obtiene como resultado de dicho desarrollo matemático.

$$\mathbf{r}_T^{(P)}(u) = \mathbf{r}_T^{(P_{CC})}(u) = \mathbf{r}_T^{(P_{CV})}(u) = \begin{bmatrix} \pm (u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) \\ u \cos \alpha_n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En la Ecuación (2.12) el signo superior (positivo) de la primera componente del vector de posición  $\mathbf{r}_T^{(P)}$  corresponde a la superficie de tallado cóncava, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o izquierda, en los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales, mientras que el signo inferior (negativo) corresponde a la superficie de tallado convexa, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o derecha, en los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales.

**Borde de cabeza del perfil de tallado  $\Sigma_F$** 

El vector de posición de un punto  $P$  perteneciente al borde de cabeza representado en el sistema de referencia  $S_T$  se obtiene a través de las expresiones analíticas de carácter vectorial recogidas en las Ecuaciones (2.13) y (2.14).

$$\mathbf{r}_T^{(P)} = \mathbf{r}_T^{(C_F)CC} + \mathbf{r}_{(C_F)CC}^{(P)} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{r}_T^{(P)} = \mathbf{r}_T^{(C_F)CV} + \mathbf{r}_{(C_F)CV}^{(P)} \quad (2.14)$$

Por un lado, los vectores de posición de un punto  $P$  perteneciente al borde de cabeza representado en un sistema de referencia paralelo al sistema de referencia  $S_T$  y cuyo origen sea coincidente con el centro del radio de acuerdo  $C_F$  aparecen recogidos en las Ecuaciones (2.15) y (2.16).

$$\mathbf{r}_{(C_F)CC}^{(P)}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\rho \cos \lambda \\ -\rho \operatorname{sen} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{r}_{(C_F)CV}^{(P)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \rho \cos \lambda \\ -\rho \operatorname{sen} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Por otro lado, los vectores de posición de los centros de los arcos circulares correspondientes a los bordes de cabeza que posee la sección transversal de las herramientas de tallado consideradas en el sistema de referencia  $S_T$  aparecen representados en las Ecuaciones (2.17)

y (2.18).

$$\mathbf{r}_T^{(C_F)CC} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) - \rho \cos \alpha_n\right) \\ \rho - b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_T^{(C_F)CV} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) - \rho \cos \alpha_n \\ \rho - b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (2.15) y (2.17) en la Ecuación (2.13) y, por otro lado, las Ecuaciones (2.16) y (2.18) en la Ecuación (2.14), y teniendo en cuenta además la condición de simetría de la sección transversal del diente de la herramienta de tallado, es posible obtener la representación de la superficie  $\Sigma_F$  en el sistema de referencia  $S_T$  tras el desarrollo de las operaciones matemáticas pertinentes. La Ecuación (2.19) se obtiene como resultado de dicho desarrollo matemático.

$$\mathbf{r}_T^{(P)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mp \left(\frac{\pi}{4}m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho(1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho(\cos \lambda - \cos \alpha_n)\right) \\ \rho(1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En la Ecuación (2.19) el signo superior (negativo) de la primera componente del vector de posición  $\mathbf{r}_T^{(P)}$  corresponde al radio de acuerdo tangente a la superficie de tallado cóncava, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o izquierda, en los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales, mientras que el signo inferior (positivo) corresponde al radio de acuerdo tangente a la superficie de tallado convexa, en el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, o derecha, en los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o cilíndrico-helicoidales.

### 2.4.2. Superficie de las herramientas de tallado

En el presente apartado se representan las superficies de tallado de cada una de las herramientas de generación de los distintos engranajes analizados en el presente trabajo en los sistemas de referencia solidarios a las distintas herramientas empleadas, que se denotarán de ahora en adelante como  $S_C(x_C, y_C, z_C)$ .

El proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia  $S_T$ , solidario a la sección transversal de las cuchillas de tallado, hasta el sistema de referencia  $S_C$ , en el que se describe la geometría de cada herramienta, resulta diferente para cada tipo de engranaje cilíndrico, debido fundamentalmente a las diferencias existentes entre los procesos de tallado de cada una de ellos. Las expresiones analíticas que representan el proceso de transformación de coordenadas citado para las superficies de tallado aparecen recogidas en las Ecuaciones (2.20) y (2.21).

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \mathbf{M}_{CT}(\theta)\mathbf{r}_T^{(P)}(u) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \mathbf{M}_{CT}(\theta)\mathbf{r}_T^{(P)}(\lambda) \quad (2.21)$$

Tal como se puede apreciar en las Ecuaciones (2.20) y (2.21), en todos los casos analizados las coordenadas superficiales paramétricas que representan la superficie de la herramienta de generación de las transmisiones de engranajes son  $\theta$  y  $u$ , en el caso de las superficies de tallado de las superficies activas de los dientes, y  $\theta$  y  $\lambda$ , en el caso de las superficies de tallado de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.

En los siguientes apartados se describen los procesos de transformación de coordenadas para cada uno de los tres tipos de engranajes cilíndricos analizados en el presente trabajo.

#### Herramienta para el tallado de engranajes cilíndrico-rectos

El proceso de transformación de coordenadas que representa la matriz  $\mathbf{M}_{CT}$  se muestra en la Figura 2.4.2. Tal como se aprecia en dicha figura, el proceso de transformación de

coordenadas consta de un único movimiento de traslación a lo largo del eje  $Z_C$  de una distancia igual a  $\theta$ .

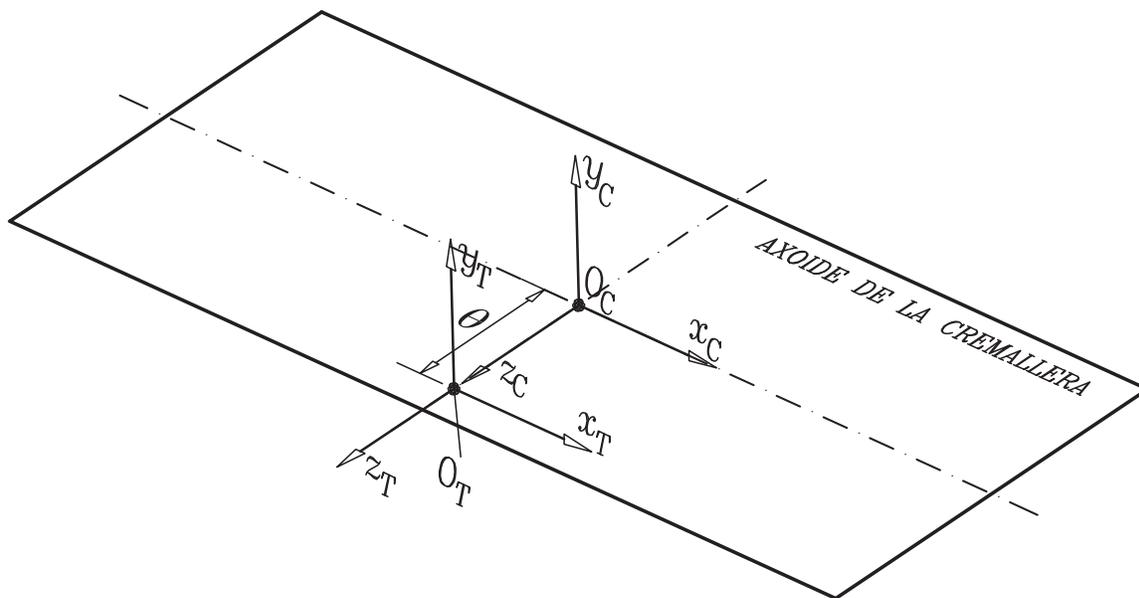


Figura 2.4.2: Proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia  $S_T$  hasta el sistema de referencia  $S_C$ .

A raíz de lo expuesto en el párrafo anterior resulta posible definir la matriz de transformación de coordenadas  $\mathbf{M}_{CT}$  mediante

$$\mathbf{M}_{CT}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (2.12) y (2.22) en la Ecuación (2.20), y, por otro lado, las Ecuaciones (2.19) y (2.22) en la Ecuación (2.21), resulta posible obtener las expresiones analíticas de las superficies de tallado en el sistema de referencia  $S_C$ ,

dadas por las Ecuaciones (2.23) y (2.24),

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \begin{bmatrix} \pm (u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) \\ u \cos \alpha_n \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \mp (\frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n)) \\ \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\theta$  viene dado por

$$-\frac{W}{2} < \theta < \frac{W}{2} \quad (2.25)$$

### Herramienta para el tallado de engranajes cilíndrico-helicoidales

El proceso de transformación de coordenadas que representa la matriz  $\mathbf{M}_{CT}$  se muestra en la Figura 2.4.3. Tal como se aprecia en dicha figura, el proceso de transformación de coordenadas consta de un total de dos movimientos fundamentales, los cuales aparecen descritos a continuación:

1. Movimiento de traslación a lo largo del eje  $Z_T$  una distancia igual a  $\theta$ .
2. Movimiento de rotación en torno al eje  $Y_C$  un ángulo igual a  $\beta_p$ .

A raíz de lo expuesto en el párrafo anterior resulta posible definir la matriz de transformación de coordenadas  $\mathbf{M}_{CT}$ , mediante

$$\mathbf{M}_{CT}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \beta_p & 0 & -\operatorname{sen} \beta_p & -\theta \operatorname{sen} \beta_p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \beta_p & 0 & \cos \beta_p & \theta \cos \beta_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

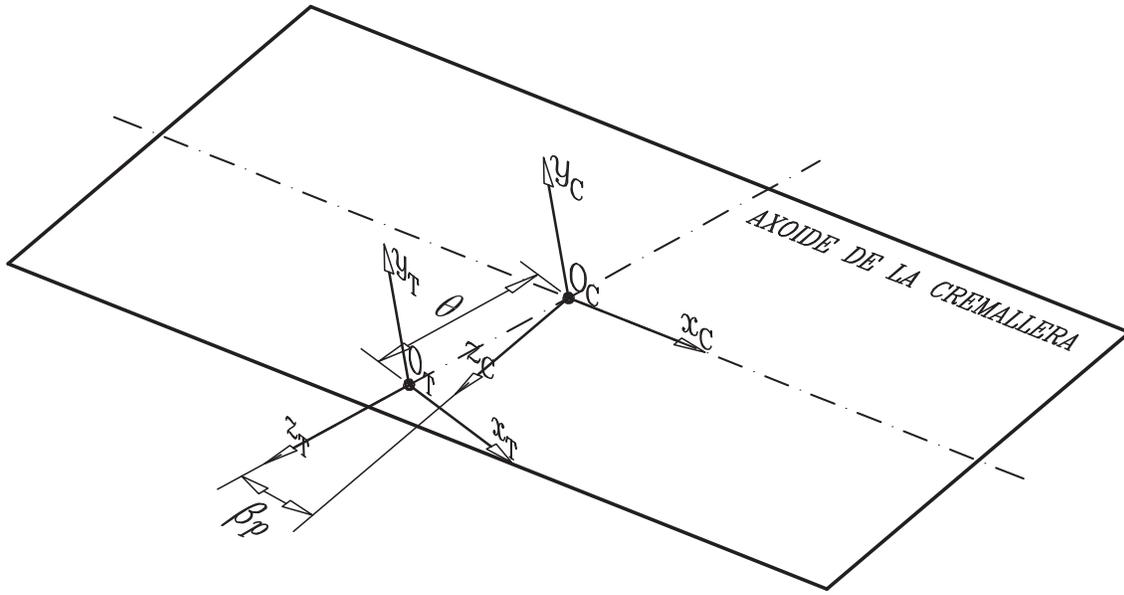


Figura 2.4.3: Proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia  $S_T$  hasta el sistema de referencia  $S_C$ .

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (2.12) y (2.26) en la Ecuación (2.20), y, por otro lado, las Ecuaciones (2.19) y (2.26) en la Ecuación (2.21), resulta posible obtener las expresiones analíticas de las superficies de tallado en el sistema de referencia  $S_C$ , las cuales vienen dadas por

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \begin{bmatrix} \pm \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - \theta \operatorname{sen} \beta_p \\ u \cos \alpha_n \\ \pm \operatorname{sen} \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \theta \cos \beta_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \mp \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) - \theta \operatorname{sen} \beta_p \\ \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ \mp \operatorname{sen} \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) + \theta \cos \beta_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\theta$  es

$$-\left(\frac{W}{2} + \operatorname{tg} \beta_p \left(\frac{\pi}{4} m_n + a \operatorname{tg} \alpha_n\right)\right) < \theta < \frac{W}{2} + \operatorname{tg} \beta_p \left(\frac{\pi}{4} m_n + a \operatorname{tg} \alpha_n\right) \quad (2.29)$$

### Herramienta para el tallado de engranajes cilíndrico-curvilíneos

El proceso de transformación de coordenadas que representa la matriz  $\mathbf{M}_{CT}$  se muestra en la Figura 2.4.4. Tal como se aprecia en dicha figura, el proceso de transformación de coordenadas consta de un total de tres movimientos fundamentales, los cuales aparecen descritos a continuación:

1. Movimiento de traslación a lo largo del sentido positivo del eje  $X_T$  una distancia igual a  $R_C$ .
2. Movimiento de rotación en torno al eje  $Y_T$  un ángulo igual a  $\theta$ .
3. Movimiento de traslación a lo largo del sentido negativo del eje  $X_C$  una distancia igual a  $R_C$ .

A raíz de lo expuesto en el párrafo anterior resulta posible definir la matriz de transformación de coordenadas  $\mathbf{M}_{CT}$  mediante

$$\mathbf{M}_{CT}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta & R_C (1 - \cos \theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta & -R_C \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Finalmente, introduciendo, por un lado, las Ecuaciones (2.12) y (2.30) en la Ecuación (2.20), y, por otro lado, las Ecuaciones (2.19) y (2.30) en la Ecuación (2.21), resulta posible obtener la expresión analítica de las superficies de tallado en el sistema de referencia  $S_C$ , las cuales vienen dadas por

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, u) = \begin{bmatrix} \pm \cos \theta \left(u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n\right) + R_C (1 - \cos \theta) \\ u \cos \alpha_n \\ \pm \operatorname{sen} \theta \left(u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n\right) - R_C \operatorname{sen} \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

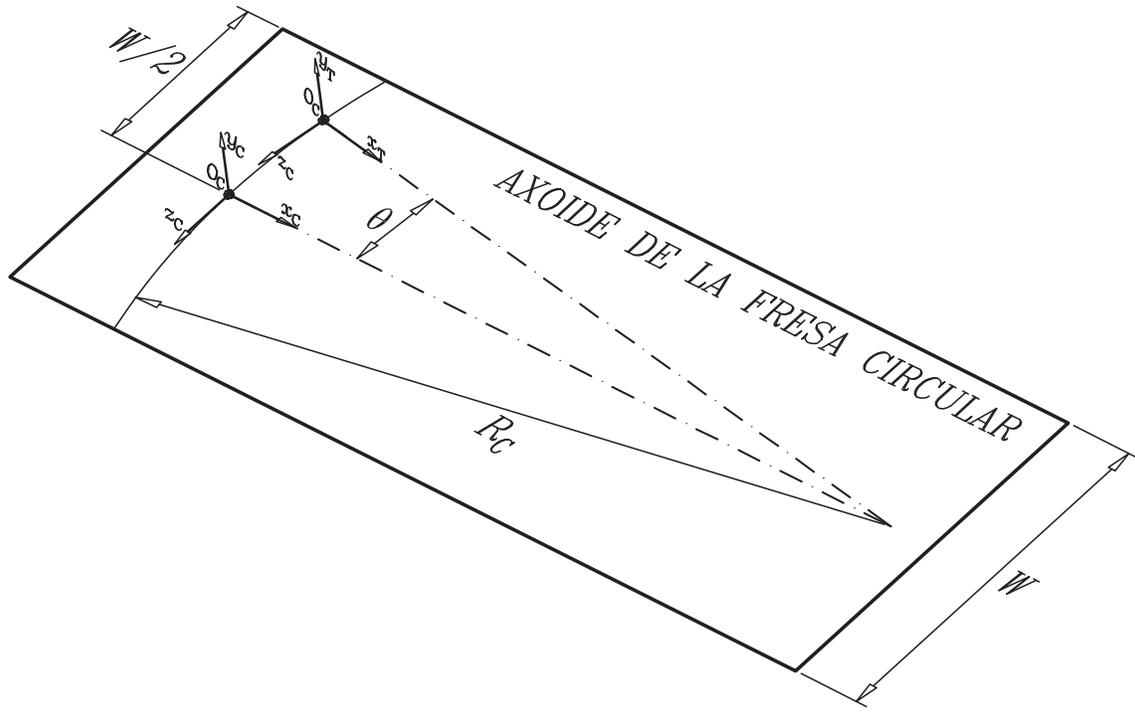


Figura 2.4.4: Proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia  $S_T$  hasta el sistema de referencia  $S_C$ .

$$\mathbf{r}_C^{(P)}(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \mp \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ + R_C (1 - \cos \theta) \\ \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \\ \mp \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ - R_C \operatorname{sen} \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

El rango de variación de la coordenada paramétrica superficial  $\theta$  es

$$- \operatorname{arcsen} \left( \frac{\frac{W}{2R_C}}{1 - \frac{1}{R_C} \left( \frac{\pi}{4} m_n + a \operatorname{tg} \alpha_n \right)} \right) < \theta < \operatorname{arcsen} \left( \frac{\frac{W}{2R_C}}{1 - \frac{1}{R_C} \left( \frac{\pi}{4} m_n + a \operatorname{tg} \alpha_n \right)} \right) \quad (2.33)$$

### 2.4.3. Planteamiento de la ecuación de engrane

En el presente apartado se va a proceder a plantear una expresión analítica conocida en la Teoría de Engranajes como ecuación de engrane, la cual constituye la condición necesaria de existencia de las superficies de los elementos dentados que integran una transmisión de engranajes. Según la citada condición, la superficie de un engranaje existe si permanece tangente a la superficie de su herramienta generadora [8].

Conviene señalar como detalle importante que en el presente trabajo no se van a analizar las condiciones suficientes de existencia de las superficies de los elementos que integran las transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio, las cuales proporcionan que dichas superficies de hecho permanecen tangentes a las superficies de su correspondiente herramienta generadora, y, además, las superficies de los engranajes son regulares. Las condiciones suficientes de existencia de la superficie de un engranaje se determinan a través del análisis de las condiciones de no penetración durante su proceso de tallado. Tal como ya se mencionó con anterioridad en el Apartado 1.3 del presente trabajo, diversos autores han publicado una serie de trabajos [2, 8, 6] en los cuales se ha llevado a cabo el estudio desde el punto de vista analítico de las condiciones de no penetración en el proceso de fabricación de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

Las expresiones analíticas correspondientes a las ecuaciones de engrane desarrolladas y propuestas en geometría diferencial aparecen recogidas en las Ecuaciones (2.34) y (2.35) para la superficie activa y de la base del diente, respectivamente.

$$f(u, \theta, \phi) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.34)$$

$$f(\lambda, \theta, \phi) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.35)$$

Las ecuaciones de engrane presentadas anteriormente relacionan las coordenadas superficiales paramétricas  $\theta$  y  $u$ , en el caso de la Ecuación (2.34), o  $\theta$  y  $\lambda$ , en el caso de la Ecuación (2.35), con el parámetro generalizado del movimiento  $\phi$ .

Para llevar a cabo el planteamiento de las Ecuaciones de Engrane (2.34) y (2.35), resulta preciso determinar previamente la representación paramétrica de la familia de superficies generada en el sistema de referencia solidario al engranaje por la superficie de la herramienta de tallado  $\Sigma_C$ , para lo cual resulta preciso definir un proceso de transformación de coordenadas desde el sistema de referencia  $S_C$  hasta el sistema de referencia solidario al engranaje que está siendo generado, el cual se denominará de ahora en adelante  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ . Dicho proceso de transformación de coordenadas aparece representado de forma esquemática en la Figura 2.4.5, y de caracteriza por una matriz de transformación de coordenadas  $\mathbf{M}_{1C}$ , la cual viene dada por

$$\mathbf{M}_{1f}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{M}_{fC}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_p \phi \\ 0 & 1 & 0 & r_p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{M}_{1C}(\phi) = \mathbf{M}_{1f}(\phi)\mathbf{M}_{fC}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 & r_p (\text{sen } \phi - \phi \cos \phi) \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 & r_p (\cos \phi + \phi \text{sen } \phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

En el caso de que las Ecuaciones (2.34) y (2.35) se satisfagan, entonces la superficie de envolvente formada por la familia de posiciones adoptadas por la superficie de la cremallera talladora en el sistema de referencia  $S_1$ , la cual se denominará de ahora en adelante por  $\Sigma_\phi$ , existe, y puede ser representada en dicho sistema de referencia por medio de la consideración simultánea de las ecuaciones (2.39) y (2.40).

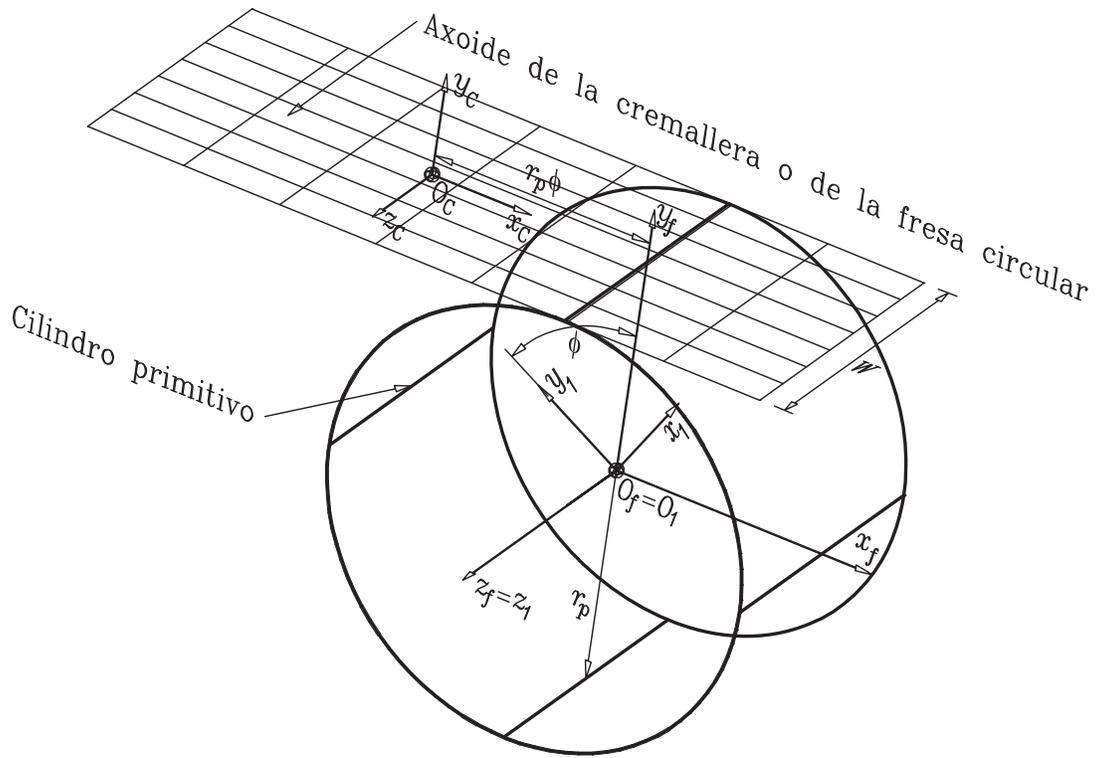


Figura 2.4.5: Representación esquemática del proceso de generación de engranajes cilíndricos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1C}(\phi) \mathbf{r}_C^{(P)}(u, \theta) \\ f(u, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1C}(\phi) \mathbf{r}_C^{(P)}(\lambda, \theta) \\ f(\lambda, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Las ecuaciones (2.39) y (2.40) constituyen el modelo matemático de las superficies de los dientes de una rueda dentada de la transmisión de engranajes considerada.

A continuación se procederá a la determinación analítica de las ecuaciones (2.39) y (2.40) correspondientes a cada uno de los tres tipos de engranajes cilíndricos analizados en el presente trabajo.

### Engranajes cilíndrico-rectos

En virtud de lo todo lo expuesto anteriormente, resulta preciso distinguir dos casos distintos, los cuales aparecen descritos en los siguientes apartados.

**Superficies de los perfiles activos de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.23) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto (2.39). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\begin{cases} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \pm \cos \phi \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \sin \phi + r_p (\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \mp \sin \phi \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \theta \end{cases} \quad (2.41)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designado por (2.41) resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (2.34). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.42), (2.43) y (2.44).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \pm \cos \phi \sin \alpha_n + \cos \alpha_n \sin \phi \\ \mp \sin \phi \sin \alpha_n + \cos \alpha_n \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \mp \operatorname{sen} \phi \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \mp \cos \phi \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - u \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.42), (2.43) y (2.44) en la Ecuación (2.34), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.45).

$$f(u, \theta, \phi) = u + \frac{\pi}{4} m_n \operatorname{sen} \alpha_n \mp r_p \phi \operatorname{sen} \alpha_n = 0 \quad (2.45)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.41) y (2.45) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de los perfiles activos de los dientes de un engranaje cilíndrico-recto.

**Superficies de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.24) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto designado por (2.40). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \mp \cos \phi \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \pm \operatorname{sen} \phi \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\cos \phi + \phi \cos \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \theta \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designadas por (2.46), resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (2.35). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.47), (2.48) y (2.49).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \pm \rho \cos \phi \operatorname{sen} \alpha - \rho \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\ \mp \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha - \rho \cos \phi \cos \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \pm \operatorname{sen} \phi \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \pm \cos \phi \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ - \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.47), (2.48) y (2.49) en la Ecuación (2.35), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.50).

$$f(\lambda, \theta, \phi) = \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) + \frac{\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b}{\operatorname{tg} \lambda} \pm r_p \phi = 0 \quad (2.50)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.46) y (2.50) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes de un engranaje cilíndrico-recto.

## Engranajes cilíndrico-helicoidales

Al igual que en el caso anterior, resulta preciso distinguir dos casos distintos, los cuales aparecen descritos en los siguientes apartados.

**Superficies de los perfiles activos de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.27) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto (2.39). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \pm \cos \phi \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - \theta \operatorname{sen} \beta_p \cos \phi + u \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi \\ \quad + r_p (\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \mp \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi + u \cos \alpha_n \cos \phi \\ \quad + r_p (\cos \phi + \phi \operatorname{sen} \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \pm \operatorname{sen} \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \theta \cos \beta_p \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designado por (2.51) resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (2.34). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.54).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \pm \cos \phi \cos \beta_p \operatorname{sen} \alpha_n + \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi \\ \mp \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \operatorname{sen} \alpha_n + \cos \alpha_n \cos \phi \\ \pm \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \alpha_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} - \operatorname{sen} \beta_p \cos \phi \\ \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi \\ \cos \beta_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \mp \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \mp \cos \phi \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \theta \operatorname{sen} \beta_p \cos \phi - u \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.52), (2.53) y (2.54) en la Ecuación (2.34), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.55).

$$f(u, \theta, \phi) = \operatorname{sen} \alpha_n \cos \beta_p \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) \mp \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \alpha_n + u \cos^2 \alpha_n \cos \beta_p \mp r_p \phi \operatorname{sen} \alpha_n = 0 \quad (2.55)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.51) y (2.55) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de los perfiles activos de los dientes de un engranaje cilíndrico-helicoidal.

**Superficies de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.28) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto designado por (2.40). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\begin{cases} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \mp \cos \phi \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad - \theta \operatorname{sen} \beta_p \cos \phi + \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \pm \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p (\cos \phi + \phi \operatorname{sen} \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \mp \operatorname{sen} \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) + \theta \cos \beta_p \end{cases} \quad (2.56)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designadas por (2.56), resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la

Ecuación de Engrane (2.35). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.57), (2.58) y (2.59).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \pm \rho \cos \phi \cos \beta_p \operatorname{sen} \lambda - \rho \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\ \mp \rho \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \operatorname{sen} \lambda - \rho \cos \phi \cos \lambda \\ \pm \rho \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \beta_p \cos \phi \\ \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi \\ \cos \beta_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \pm \operatorname{sen} \phi \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ + \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \phi + \cos \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \pm \cos \phi \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \alpha_n)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ + \theta \operatorname{sen} \beta_p \cos \phi - \operatorname{sen} \phi (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.57), (2.58) y (2.59) en la Ecuación (2.35), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.60).

$$f(\lambda, \theta, \phi) = -\rho \operatorname{sen} \lambda \cos \beta_p \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \mp \rho \theta \operatorname{sen} \beta_p \operatorname{sen} \lambda + \rho \cos \lambda \cos \beta_p (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) \mp r_p \phi \rho \operatorname{sen} \lambda = 0 \quad (2.60)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.56) y (2.60) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes de un engranaje cilíndrico-helicoidal.

## Engranajes cilíndrico-curvilíneos

Al igual que en los casos anteriores, resulta preciso distinguir dos casos distintos, los cuales aparecen descritos en el siguiente par de apartados.

**Superficies de los perfiles activos de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.31) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto (2.39). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \pm \cos \phi \cos \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + R_C \cos \phi (1 - \cos \theta) \\ \quad + u \cos \alpha_n \sin \phi + r_p (\sin \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \mp \sin \phi \cos \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \sin \phi (1 - \cos \theta) \\ \quad + u \cos \alpha_n \cos \phi + r_p (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ z_1^{(P)}(u, \theta, \phi) = \pm \sin \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \sin \theta \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designado por (2.61) resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la ecuación de engrane (2.34). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.62), (2.63) y (2.64).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \pm \cos \phi \cos \theta \sin \alpha_n + \cos \alpha_n \sin \phi \\ \mp \sin \phi \cos \theta \sin \alpha_n + \cos \alpha_n \cos \phi \\ \pm \sin \theta \sin \alpha_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \mp \cos \phi \sin \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + R_C \cos \phi \sin \theta \\ \pm \sin \phi \sin \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \sin \phi \sin \theta \\ \pm \cos \theta \left( u \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \mp \operatorname{sen} \phi \cos \theta \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \operatorname{sen} \phi (1 - \cos \theta) + u \cos \alpha_n \cos \phi \\ + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \mp \cos \phi \cos \theta \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C \cos \phi (1 - \cos \theta) - u \cos \alpha_n \operatorname{sen} \phi \\ + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.62), (2.63) y (2.64) en la Ecuación (2.34), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.65).

$$\begin{aligned} f(u, \theta, \phi) = & \pm \operatorname{sen} \alpha_n \cos \theta \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right)^2 - R_C \operatorname{sen} \alpha_n \cos \theta \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) \\ & R_C (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \alpha_n \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) \mp R_C^2 \operatorname{sen} \alpha_n (1 - \cos \theta) \\ & \pm u \cos^2 \alpha_n \cos \theta \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) - R_C u \cos^2 \alpha_n \cos \theta \\ & - r_p \phi \operatorname{sen} \alpha_n \left( u \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n \right) + \pm r_p \phi R_C \operatorname{sen} \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.61) y (2.65) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de los perfiles activos de los dientes de un engranaje cilíndrico-curvilíneo.

**Superficies de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes.** La representación paramétrica de la superficie de envolvente  $\Sigma_\phi$  correspondiente a este caso se obtiene por sustitución de las Ecuaciones (2.32) y (2.38) en la primera ecuación del conjunto designado por (2.40). Los resultados de dicha sustitución aparecen recogidos a

continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \mp \cos \phi \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad + R_C \cos \phi (1 - \cos \theta) + \rho \operatorname{sen} \phi (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \operatorname{sen} \phi + r_p (\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \\ y_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \pm \operatorname{sen} \phi \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ \quad - R_C \operatorname{sen} \phi (1 - \cos \theta) + \rho \cos \phi (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \cos \phi + r_p (\cos \phi + \phi \operatorname{sen} \phi) \\ z_1^{(P)}(\lambda, \theta, \phi) = \mp \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) - R_C \operatorname{sen} \theta \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Tomando como punto de partida el conjunto de expresiones analíticas designadas por (2.66), resulta posible obtener analíticamente cada uno de los tres términos que componen la Ecuación de Engrane (2.35). La determinación de dicha terna de términos aparece recogida en las Ecuaciones (2.67), (2.68) y (2.69).

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \pm \cos \phi \cos \theta (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) - \rho \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\ \mp \operatorname{sen} \phi \cos \theta (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) - \rho \cos \phi \cos \lambda \\ \pm \operatorname{sen} \theta (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \pm \cos \phi \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ + R_C \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \mp \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ - R_C \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \mp \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) - R_C \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P)}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \pm \operatorname{sen} \phi \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ - R_C \operatorname{sen} \phi (1 - \cos \theta) + \rho \cos \phi (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b \cos \phi + r_p \phi \operatorname{sen} \phi \\ \pm \cos \phi \cos \theta \left( \frac{\pi}{4} m_n - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ - R_C \cos \phi (1 - \cos \theta) - \rho \operatorname{sen} \phi (1 - \operatorname{sen} \lambda) + b \operatorname{sen} \phi + r_p \phi \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Introduciendo las expresiones analíticas (2.67), (2.68) y (2.69) en la Ecuación (2.35), operando y reordenando términos, es posible obtener la formulación final de la ecuación de engrane, la cual aparece recogida en la Ecuación (2.70).

$$\begin{aligned} f(\lambda, \theta, \phi) = & \pm \cos \theta (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right)^2 \\ & + (r_p \phi - R_C (1 - \cos \theta)) (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ & \pm \rho \cos \lambda \cos \theta (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ & + R_C \cos \theta (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha_n (b - \rho (1 - \operatorname{sen} \lambda)) + \rho (\cos \lambda - \cos \alpha_n) \right) \\ & \pm R_C (r_p \phi - R_C (1 - \cos \theta)) (\rho \operatorname{tg} \alpha_n \cos \lambda + \rho \operatorname{sen} \lambda) + R_C \rho \cos \theta \cos \lambda (\rho (1 - \operatorname{sen} \lambda) - b) = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Así pues, finalmente las Ecuaciones (2.66) y (2.70) constituyen conjuntamente el modelo matemático de la superficie de entalle entre la superficie de pie y las superficies activas de los dientes de un engranaje cilíndrico-curvilíneo.

## 2.5. Efecto de apuntamiento en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos

El efecto de apuntamiento constituye, junto con el efecto de penetración, uno de los dos problemas que afectan a la superficie de los dientes de los engranajes y que debilitan su

comportamiento bajo carga. Este efecto aparece en engranajes cuando la anchura de la cabeza de los dientes de los engranajes se hace nula, es decir, cuando los perfiles de las superficies cóncava y convexa (o superficies conductora y de respaldo) de los dientes se intersectan en el radio de cabeza.

En el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, el riesgo de aparición del efecto de apuntamiento siempre está presente debido a la mayor curvatura de la superficie convexa frente a la superficie cóncava por efecto de la propia naturaleza del proceso de tallado por generación de este tipo de transmisiones mecánicas. De este modo, una elección inadecuada del radio de generación de la fresa circular talladora  $R_C$  y de la anchura de cara  $W$  de los engranajes cilíndrico-curvilíneos podría dar lugar a la aparición del efecto descrito. En las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos el límite de apuntamiento siempre aparece en los extremos de las superficies activas de los dientes de las ruedas dentadas, es decir, en las posiciones  $z = W/2$  y  $z = -W/2$ .

Resulta posible determinar en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, para una anchura de cara  $W$  determinada, el radio de generación límite de la fresa circular talladora  $(R_C)_{lim}$  por debajo del cual el efecto de apuntamiento aparece en dichas transmisiones mecánicas. Para la obtención de este parámetro límite resulta preciso el planteamiento de un sistema de 7 ecuaciones no lineales con 7 incógnitas y la resolución numérica del mismo, para lo cual es necesario establecer, por un lado, un conjunto de ecuaciones correspondientes a la superficie activa convexa de los dientes, y, por otro lado, otro conjunto de ecuaciones correspondientes a la superficie activa cóncava de los dientes. El establecimiento de los mencionados conjuntos de ecuaciones aparece expuesto a continuación.

- Superficie activa convexa de los dientes.

$$\mathbf{r}_C^{(PCV)}((R_C)_{lim}, \theta_{CV}, u_{CV}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{CV} (u_{CV} \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) + (R_C)_{lim} (1 - \cos \theta_{CV}) \\ u_{CV} \cos \alpha_n \\ \operatorname{sen} \theta_{CV} (u_{CV} \operatorname{sen} \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) - (R_C)_{lim} \operatorname{sen} \theta_{CV} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^{(P_{CV})}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) &= \begin{bmatrix} x_1^{(P_{CV})}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) \\ y_1^{(P_{CV})}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) \\ z_1^{(P_{CV})}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_{1C}(\phi_{CV}) \mathbf{r}_C^{(P_{CV})}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$f((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CV})}}{\partial u_{CV}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CV})}}{\partial \theta_{CV}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CV})}}{\partial \phi_{CV}} = 0 \quad (2.73)$$

- Superficie cóncava activa de los dientes.

$$\mathbf{r}_C^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, \theta_{CC}, u_{CC}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{CC} (u_{CC} \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) + (R_C)_{lim} (1 - \cos \theta_{CC}) \\ u_{CC} \cos \alpha_n \\ \sin \theta_{CC} (u_{CC} \sin \alpha_n + \frac{\pi}{4} m_n) - (R_C)_{lim} \sin \theta_{CC} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) &= \begin{bmatrix} x_1^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \\ y_1^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \\ z_1^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{M}_{1C}(\phi_{CC}) \mathbf{r}_C^{(P_{CC})}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$f((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CC})}}{\partial u_{CC}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CC})}}{\partial \theta_{CC}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(P_{CC})}}{\partial \phi_{CC}} = 0 \quad (2.76)$$

Finalmente, tomando como punto de partida las Ecuaciones (2.71), (2.72), (2.73), (2.74), (2.75) y (2.76) anteriormente expuestas, es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones

no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} f((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCV)}}{\partial u_{CV}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCV)}}{\partial \theta_{CV}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCV)}}{\partial \phi_{CV}} = 0 \\ \left( x_1^{(PCV)}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) \right)^2 + \left( y_1^{(PCV)}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) \right)^2 = (r_p + a)^2 \\ z_1^{(PCV)}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) = \frac{W}{2} \\ f((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCC)}}{\partial u_{CC}} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCC)}}{\partial \theta_{CC}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1^{(PCC)}}{\partial \phi_{CC}} = 0 \\ \left( x_1^{(PCC)}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \right)^2 + \left( y_1^{(PCC)}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \right)^2 = (r_p + a)^2 \\ z_1^{(PCC)}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) = \frac{W}{2} \\ x_1^{(PCV)}((R_C)_{lim}, u_{CV}, \theta_{CV}, \phi_{CV}) = x_1^{(PCC)}((R_C)_{lim}, u_{CC}, \theta_{CC}, \phi_{CC}) \end{array} \right. \quad (2.77)$$



Figura 2.5.1: Detalle del efecto de apuntamiento sobre un engranaje cilíndrico-curvilíneo.

Las incógnitas del sistema de ecuaciones no lineales (2.77) planteado son  $u_{CV}$ ,  $\theta_{CV}$ ,  $\phi_{CV}$ ,  $u_{CC}$ ,  $\theta_{CC}$ ,  $\phi_{CC}$  y  $(R_C)_{lim}$ .

A modo de ejemplo de aplicación, en la Figura 2.5.1 aparece recogido el detalle del efecto de apuntamiento incipiente sobre el piñón de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos. Con objeto de lograr alcanzar dicha situación de apuntamiento incipiente sobre el piñón mostrado en dicha figura se ha adoptado como radio de generación de la fresa talladora  $R_C$  un valor muy próximo al radio de generación límite de la fresa talladora  $(R_C)_{lim}$  obtenido tras la resolución numérica del sistema de ecuaciones (2.77). Tal como se puede apreciar en la Figura 2.5.1, el piñón representado alcanza el fenómeno de apuntamiento en las posiciones  $z = \frac{W}{2}$  y  $z = -\frac{W}{2}$ .

## Capítulo 3

# Herramientas computacionales para el diseño de transmisiones avanzadas de engranajes

### 3.1. Procedimiento de simulación del engrane y análisis del contacto del diente

En el presente apartado se describen las herramientas computacionales utilizadas para llevar a cabo el proceso de simulación del engrane y el análisis del contacto (TCA) en cada uno de los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio en el presente trabajo.

Para llevar a cabo el proceso de simulación del engrane y análisis del contacto, se ha planteado un modelo que permite la simulación de los errores de desalineación existentes entre los elementos dentados de la transmisión de engranajes cilíndricos considerada. Dicho modelo aparece representado esquemáticamente por etapas en la Figura 3.1.1. Para llevar a cabo el proceso de simulación del engrane y análisis del contacto se han definido los siguientes sistemas de referencia:

- $S_f(x_f, y_f, z_f)$ . Se trata de un sistema de referencia absoluto, solidario al bastidor de la transmisión de engranajes considerada.
- $S_1(x_1, y_1, z_1)$ . Se trata de un sistema de referencia solidario al piñón de la transmisión. El eje  $z_1$  constituye su eje de rotación. La orientación del sistema de referencia  $S_1$  con respecto al sistema de referencia  $S_f$  aparece esquematizada en la Figura 3.1.1(a).
- $S_2(x_2, y_2, z_2)$ . Se trata de un sistema de referencia solidario a la rueda de la transmisión. El eje  $z_2$  constituye su eje de rotación. La orientación del sistema de referencia  $S_2$  con respecto al sistema de referencia  $S_h$  (definido posteriormente) aparece esquematizada en la Figura 3.1.1(c).
- $S_d(x_d, y_d, z_d)$ . Se trata de un sistema de referencia cuyo ejes coordenados resultan paralelos a los ejes coordenados correspondientes al sistema de referencia  $S_f$  y cuyos respectivos orígenes se encuentran separados entre sí una distancia operativa en la dirección del eje  $y_f$  dada por la Ecuación (3.1). La orientación del sistema de referencia  $S_d$  con respecto al sistema de referencia  $S_f$  aparece esquematizada en la Figura 3.1.1(b).

$$E' = E + \Delta E = r_{p,1} + r_{p,2} + \Delta E \quad (3.1)$$

A raíz del análisis de la Ecuación (3.1) se aprecia como el sistema de referencia en cuestión permite la simulación del error de montaje por variación de la distancia entre los centros del piñón y de la rueda de la transmisión de engranajes cilíndricos,  $\Delta E$ .

- $S_v(x_v, y_v, z_v)$ . Se trata de un sistema de referencia que permite la simulación de errores de alineación angular en el plano vertical entre los ejes de rotación del piñón y de la rueda que integran la transmisión de engranajes. La simulación de la desalineación angular vertical se alcanza por medio de la aplicación de un movimiento de rotación en torno al eje  $x_v$  del sistema de referencia considerado con un valor angular  $\Delta\gamma_v$  con respecto al sistema de referencia  $S_d$ . La orientación del sistema de referencia  $S_v$  con respecto a los sistemas de referencia  $S_f$  y  $S_d$  aparece esquematizada en la Figura 3.1.1(b).

- $S_h(x_h, y_h, z_h)$ . Se trata de un sistema de referencia que permite la simulación de errores de alineación angular en plano horizontal entre los ejes de rotación del piñón y de la rueda que integran la transmisión de engranajes. La simulación de la desalineación angular horizontal se alcanza por medio de la aplicación de un movimiento de rotación en torno al eje  $y_h$  del sistema de referencia considerado con un valor angular  $\Delta\gamma_h$  con respecto al sistema de referencia  $S_v$ . La orientación del sistema de referencia  $S_h$  con respecto a los sistemas de referencia  $S_f$  y  $S_v$  aparece esquematizada en la Figura 3.1.1(b).

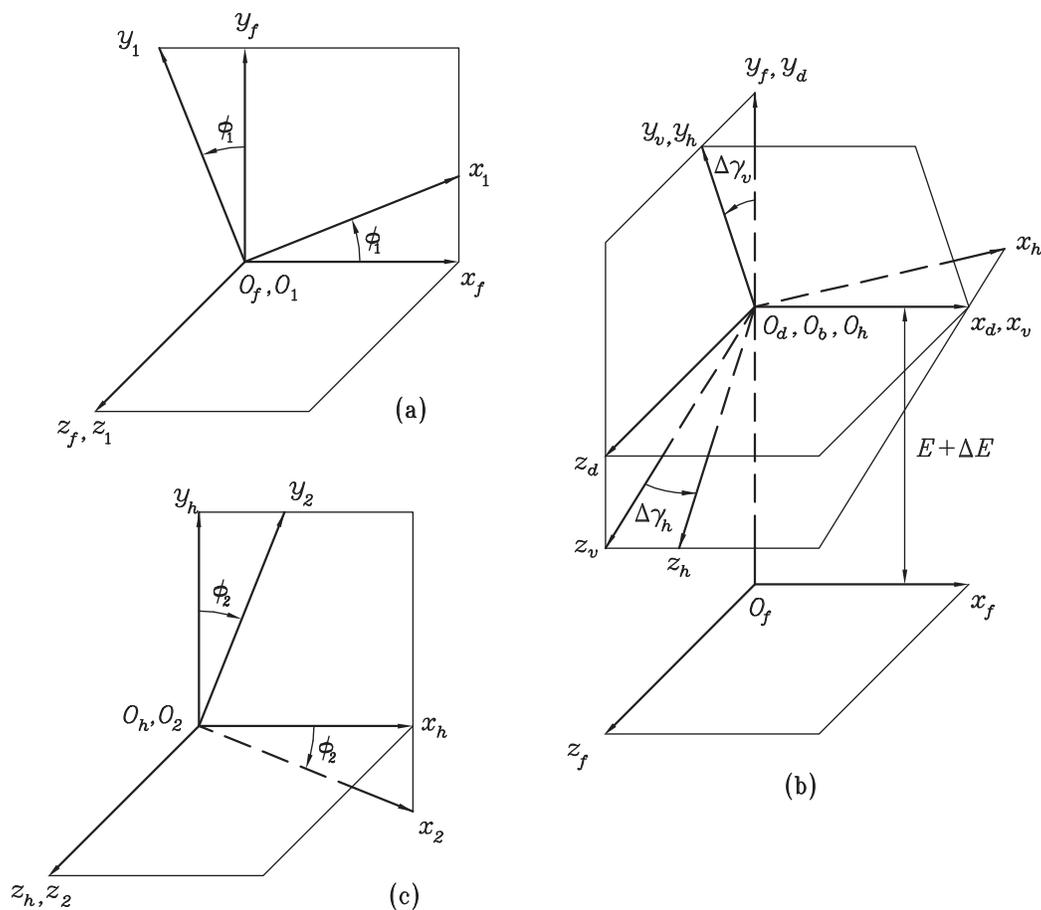


Figura 3.1.1: Sistemas de coordenadas empleados para la simulación del engrane y análisis del contacto.

Además de la definición de un modelo que permita la simulación del engrane, resulta

preciso hacer uso de un método de análisis del contacto entre superficies de los dientes o TCA<sup>11</sup>, cuyos principales propósitos son:

1. Trazado de la trayectoria de contacto sobre la superficie de los dientes de los elementos que integran la transmisión de engranajes.
2. Determinación de la función de errores de transmisión causados por los errores de alineación y/o montaje. Los errores de transmisión se determinan a través de la Ecuación (3.2).

$$\Delta\phi_2(\phi_1) = \phi_2(\phi_1) - \frac{N_P}{N_G}\phi_1 \quad (3.2)$$

3. Determinación de las patrones de contacto mediante la representación de las sucesivas elipses de contacto instantáneas.

En los métodos de análisis de contacto se consideran conocidas las superficies de los dientes del piñón y de la rueda de la transmisión de engranajes analizada, así como la localización y la orientación de los ejes de los mismos una vez tenidos en cuenta los diferentes errores de alineación. En los siguientes subapartados se describirán los procedimientos empleados para llevar a cabo el análisis del contacto del diente en los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos analizados en el presente trabajo.

### 3.1.1. Método de análisis del contacto de carácter analítico

Esta metodología ha sido propuesta por los autores Fador L. Litvin y Alfonso Fuentes [8], y permite la simulación del engrane y análisis del contacto entre las superficies de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes con contacto localizado, de modo que su empleo en el presente trabajo se encontraría limitado a las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, las cuales constituyen el único tipo de transmisión analizada cuya geometría estándar posee dicha tipología de contacto superficial.

---

<sup>11</sup>Siglas de la denominación anglosajona *Tooth Contact Analysis*.

Las superficies activas de los dientes del piñón y de la rueda de la transmisión de engranajes considerada, las cuales se denominarán de ahora en adelante por  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , respectivamente, se representan en los sistemas de referencia  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, mediante

$$(i = 1, 2) \begin{cases} r_i(u_i, \theta_i) \in C^2 \\ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \neq 0 \\ (u_i, \theta_i) \in E_i \end{cases} \quad (3.3)$$

Los vectores unitarios normales a una superficie activa de diente de engranaje arbitraria  $i$  se determinan a través de la Ecuación (3.4).

$$\mathbf{n}_i(u_i, \theta_i) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \right|} \quad (3.4)$$

Las superficies activas de los dientes del piñón y de la rueda en contacto entre sí deben encontrarse en la condición de tangencia continua, la cual aparecen esquematizada en la Figura 3.1.2. Dicha condición se alcanza si se verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

1. Coincidencia de los vectores de posición del punto de contacto superficial entre el piñón y la rueda de la transmisión de engranajes.

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) \quad (3.5)$$

2. Colinealidad de los vectores unitarios normales en el punto de contacto superficial entre el piñón y la rueda de la transmisión de engranajes.

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) \times \mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \quad (3.6)$$

Los vectores de posición  $\mathbf{r}_f^{(1)}$  y  $\mathbf{r}_f^{(2)}$  representan los vectores de posición del punto de contacto en la superficie del piñón,  $\mathbf{r}_f^{(1)}$ , y de la rueda,  $\mathbf{r}_f^{(2)}$ , representados en el sistema de referencia fijo  $S_f$ . Dado que los vectores de posición  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , definidos en la Ecuación (3.3), de un punto de la superficie activa del diente del piñón y de la rueda, respectivamente, se encuentran representados en sus respectivos sistemas de referencia, resulta preciso definir

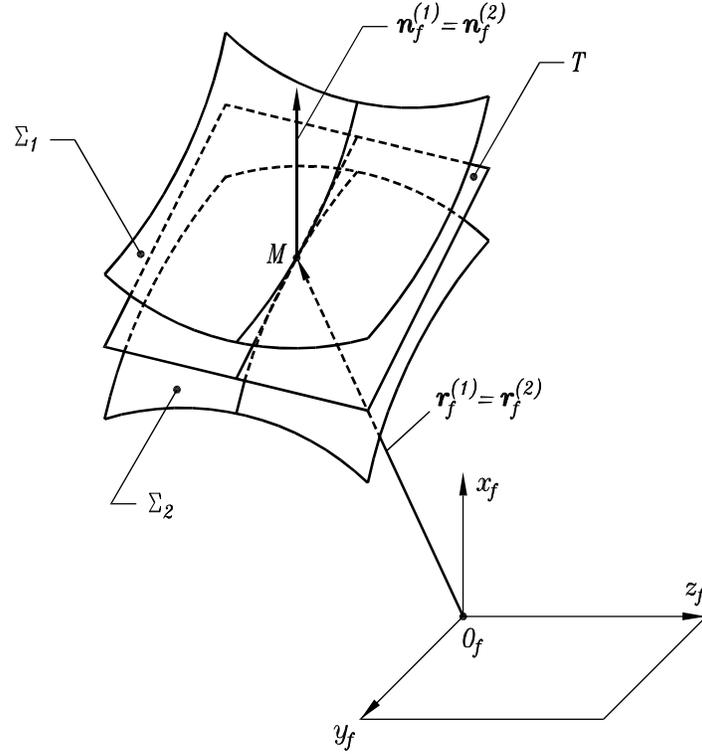


Figura 3.1.2: Condiciones del contacto puntual entre superficies.

las matrices de transformación de coordenadas desde los sistemas de referencia \$S\_1\$ y \$S\_2\$ hasta el sistema de referencia fijo \$S\_f\$. Dichos procesos se caracterizan por sendas matrices de transformación de coordenadas \$\mathbf{M}\_{f1}\$ y \$\mathbf{M}\_{f2}\$, que vienen dadas por las Ecuaciones (3.7) y (3.8).

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{M}_{f1}(\phi_1)\mathbf{r}_1(u_1, \theta_1) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{f2}(\phi_2)\mathbf{r}_2(u_2, \theta_2) = \mathbf{M}_{fd}\mathbf{M}_{dv}\mathbf{M}_{vh}\mathbf{M}_{h2}(\phi_2)\mathbf{r}_2(u_2, \theta_2) \quad (3.8)$$

Las matrices de transformación de coordenadas recogidas en las Ecuaciones (3.7) y (3.8) aparecen definidas en las Ecuaciones (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13).

$$\mathbf{M}_{f1}(\phi_1) = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\text{sen } \phi_1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{M}_{fd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E + \Delta E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{M}_{dv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_v & -\text{sen} \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & \text{sen} \Delta\gamma_v & \cos \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{M}_{vh} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_h & 0 & \text{sen} \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \Delta\gamma_h & 0 & \cos \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_{h2}(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \text{sen} \phi_2 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

De modo similar, dado que en la Ecuación (3.6) los vectores unitarios normales se encuentran representados en el sistema de referencia fijo  $S_f$  y los vectores unitarios normales obtenidos a través de la Ecuación (3.4) se encuentran representados en los sistemas de referencia  $S_1$  y  $S_2$ , resulta preciso definir nuevamente las matrices de transformación de coordenadas desde los sistemas de referencia  $S_1$  y  $S_2$  hasta el sistema de referencia fijo  $S_f$ . Dichos procesos se caracterizan por sendas matrices de transformación de coordenadas  $\mathbf{L}_{f1}$  y  $\mathbf{L}_{f2}$ , cuyos procedimientos de determinación aparecen planteados en las Ecuaciones (3.14) y (3.15).

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{L}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n}_1(u_1, \theta_1) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{L}_{f2}(\phi_2)\mathbf{n}_2(u_2, \theta_2) = \mathbf{L}_{fv}\mathbf{L}_{vh}\mathbf{L}_{h2}(\phi_2)\mathbf{n}_2(u_2, \theta_2) \quad (3.15)$$

Las matrices de rotación recogidas en las Ecuaciones (3.14) y (3.15) aparecen definidas a continuación:

$$\mathbf{L}_{f1}(\phi_1) = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\text{sen } \phi_1 & 0 \\ \text{sen } \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{L}_{fh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_v & -\text{sen } \Delta\gamma_v \\ 0 & \text{sen } \Delta\gamma_v & \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{L}_{hv} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_h & 0 & \text{sen } \Delta\gamma_h \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \Delta\gamma_h & 0 & \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{L}_{v2}(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \text{sen } \phi_2 & 0 \\ -\text{sen } \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Las ecuaciones vectoriales designadas por (3.5) y (3.6), constituyen la condición de tangencia continua entre las superficies activas de los dientes del piñón y de la rueda de la transmisión de engranajes considerada, y constituyen un total de cinco ecuaciones escalares independientes con un total de seis incógnitas, ya que se verifica la siguiente condición de módulo unidad de los vectores normales a las superficies activas de los dientes:

$$|\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1)| = |\mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2)| = 1 \quad (3.20)$$

Las citadas cinco ecuaciones escalares independientes pueden expresarse como:

$$\begin{cases} f_1(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \\ f_2(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \\ f_3(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \\ f_4(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \\ f_5(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0 \end{cases} \quad f_i \in C^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.21)$$

El principal objetivo de la metodología de análisis del contacto es la obtención a partir del sistema de ecuaciones escalares no lineales (3.21) de funciones del tipo que se expone a continuación:

$$\{u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)\} \in C^1 \quad (3.22)$$

Las funciones representadas en (3.22) proporcionan información completa acerca de las condiciones de engrane entre las superficies activas de las parejas de dientes que establecen entre sí un contacto de tipo puntual.

- Ley del movimiento.

$$\phi_2(\phi_1) \quad (3.23)$$

- Trayectoria de los puntos de contacto sobre la superficie  $\Sigma_1$ .

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(u_1, \theta_1) \\ u_1(\phi_1) \\ \theta_1(\phi_1) \end{cases} \quad (3.24)$$

- Trayectoria de los puntos de contacto sobre la superficie  $\Sigma_2$ .

$$\begin{cases} \mathbf{r}_2(u_2, \theta_2) \\ u_2(\phi_2) \\ \theta_2(\phi_2) \end{cases} \quad (3.25)$$

- Conjunto de líneas de acción.

$$\begin{cases} \mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) \\ u_1(\phi_1) \\ \theta_1(\phi_1) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) \\ \phi_2(\phi_1) \\ u_2(\phi_1) \\ \theta_2(\phi_1) \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.1.2. Método de análisis del contacto de carácter numérico

Esta metodología numérica ha sido desarrollada en el seno del Grupo de Investigación en Transmisiones Avanzadas de Engranajes (GITAE) perteneciente al Departamento de Ingeniería Mecánica (DIMEC) de la Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT), y permite la simulación del engrane y el análisis del contacto (TCA) entre las superficies de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes para toda clase de contacto, tanto localizado como lineal, de manera que se puede emplear con cualquier tipo de transmisión de engranajes.

Hasta nuestros días, la metodología analizada todavía no ha sido publicada en ningún trabajo. Sin embargo, resulta posible describir brevemente los pasos fundamentales que la integran, los cuales aparecen descritos en los siguientes puntos:

- PASO 1. Definición de un sistema de mallado discreto sobre las superficies activas de tres pares de dientes consecutivas del piñón y de la rueda de la transmisión de engranajes analizada.
- PASO 2. Para una determinada posición angular fija del piñón  $\phi_1$  y para una cierta posición angular de la rueda  $\phi_2$ , determinación de la distancia mínima existente entre las superficies activas correspondiente al lado conductor del piñón y de la rueda de cada una de las tres parejas de dientes en la dirección del movimiento de rotación de la rueda.
- PASO 3. Evaluación de si la distancia mínima determinada en el PASO 2 resulta inferior a un valor consigna previamente establecido. En este paso es preciso distinguir los situaciones posibles:
  - En caso negativo, aplicar a la rueda una rotación en el sentido de giro de aproximación entre las superficies activas de los dientes con la magnitud angular correspondiente a la distancia mínima existente entre las superficies activas correspondiente al lado conductor del piñón y de la rueda de las tres parejas de dientes consideradas, y repetir el PASO 2.

- En caso positivo, se habrá determinado una posición angular de contacto entre el piñón y la rueda, la cual vendrá caracterizada por unas posiciones angulares  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , y de este modo, se podrá proseguir por el PASO 4.
- PASO 4. Trazado de la elipse de contacto correspondiente a la posición de contacto determinada en el PASO 3. Para ello, es preciso determinar aquellos puntos de las superficies activas de los dientes del piñón y de la rueda que se encuentran separados entre sí una distancia igual o inferior a un cierto valor consigna. La distancia entre dichas superficies activas se determina en la dirección perpendicular al plano tangente común a ambas superficies en el punto de contacto considerado.

La metodología descrita en el párrafo anterior se aplica en un primer paso para la determinación de la posición angular inicial de contacto entre el piñón y la rueda de la transmisión de engranajes bajo estudio, la cual se denomina  $(\phi_1)_0$  y, con posterioridad, se aplicará un número de veces igual al número de posiciones angulares del piñón  $\phi_1$  de discretización del algoritmo de análisis del contacto del diente adoptadas. Cada una de dicha posiciones angulares se determina a través de la Ecuación (3.27).

$$(\phi_1)_i = (\phi_1)_0 - \frac{2\pi}{N_P} + \frac{4\pi}{N_P} \frac{i}{n_{TCA}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n_{TCA}) \quad (3.27)$$

Por último, a modo de ejemplo de aplicación, en la Figura 3.1.3 aparecen representadas tanto los puntos de la trayectoria como las elipses de contacto en todas las posiciones angulares del piñón  $\phi_1$  de discretización. Los resultados mostrados han sido proporcionados por el algoritmo numérico de análisis del contacto del diente descrito en el presente apartado para el caso de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos, el cual ha sido implementado en una aplicación de software que está siendo actualmente desarrollada por el Grupo de Investigación en Transmisiones Avanzadas de Engranajes (GITAE) denominada IGD<sup>III</sup>.

---

<sup>III</sup>Siglas de la denominación anglosajona *Integrated Gear Design*.

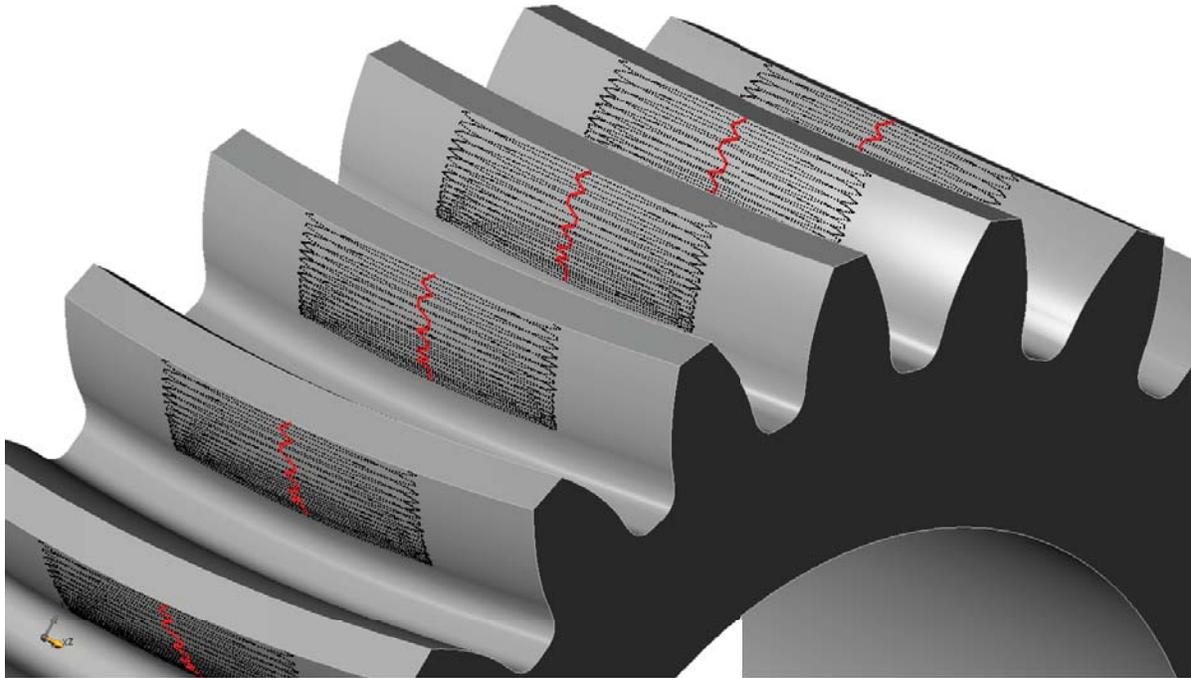


Figura 3.1.3: Resultados proporcionados por el algoritmo de análisis de contacto del dientes de carácter numérico para el caso de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

## 3.2. Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes

En el presente apartado se describe el algoritmo numérico de construcción del modelo de elementos finitos que resulta preciso implementar para llevar a cabo el análisis tensional que forma parte de procedimiento general de diseño de transmisiones avanzadas de engranajes. El análisis tensional permite llevar a cabo las acciones que se citan a continuación:

1. Determinación de las tensiones de contacto superficial que aparecen sobre los flancos de los dientes y de las tensiones de flexión que aparecen en la base de los dientes a lo largo del ciclo de engrane.
2. Investigación del proceso de formación del contacto.

### 3. Localización de posibles áreas de contacto severo durante el ciclo de engrane.

La primera etapa del proceso de análisis tensional constituye la construcción del modelo de elementos finitos. La fase de preproceso o construcción del modelo de elementos finitos se ejecuta de forma automática y parametrizada, teniendo en cuenta para ello la geometría de la superficie de los dientes. Una vez generado dicho modelo numérico, se lleva a cabo el proceso de análisis tensional a través del método de los elementos finitos, haciendo uso para ello de un código numérico de propósito general.

La generación del modelo de elementos finitos consta de una serie de pasos, los cuales aparecen descritos en los siguientes puntos:

- PASO 1. Determinación del modelo geométrico del diente, tomando como punto de partida las ecuaciones de las superficies de los flancos y el espesor del aro que sirve de base para éste. El procedimiento analítico de obtención de dichas ecuaciones ha sido descrito con anterioridad en el Apartado 2.4. La Figura 3.2.1(a) muestra el volumen a modelizar correspondiente al diente de una transmisión de engranajes cilíndrico-rectos.
- PASO 2. División del volumen a modelizar en cada diente en un total de 6 subvolúmenes, haciendo uso para ello de 6 superficies intermedias auxiliares determinadas analíticamente, las cuales permiten controlar la discretización de los citados subvolúmenes en elementos finitos. Este paso aparece esquematizado en la Figura 3.2.1(b).
- PASO 3. Determinación analítica de las coordenadas de los nodos en función del número de elementos previamente definidos en las direcciones longitudinal y del perfil del diente. Este paso aparece esquematizado en la Figura 3.2.1(c).
- PASO 4. Discretización de los 6 subvolúmenes obtenidos en el PASO 2 en elementos finitos, haciendo uso para ello de los nodos determinados en el PASO 3. Este paso aparece esquematizado en la Figura 3.2.1(d).
- PASO 5. Implementación de las condiciones de contorno atendiendo al conjunto de ideas que se expone a continuación:

1. Restricción de los 6 grados de libertad de la rueda de la transmisión de engranajes por medio de la fijación de los nodos de las superficies laterales e inferior del aro correspondiente a la misma.
2. Definición de una superficie rígida formada por los nodos de las superficies laterales e inferior del aro correspondiente al piñón, la cual constituye una estructura geométrica tridimensional indeformable que posee un movimiento de sólido rígido (rotación y traslación) asociado a un único nodo denominado **nodo de referencia**.
3. Definición del nodo  $N$  del eje del piñón que actúa como nodo de referencia de la superficie rígida.
4. Establecimiento del giro en torno al eje del piñón como único grado de libertad del nodo de referencia  $N$  no restringido. La aplicación de un par mecánico según el grado de libertad libre del nodo  $N$  permite la transmisión de dicho par al modelo del piñón a través de la superficie rígida.

La esquematización de las condiciones de contorno aplicadas a un modelo de elementos finitos de la transmisión de engranajes considerada formado por tres pares de dientes aparece recogida en la Figura 3.2.2.

- **PASO 6.** Definición de las superficies de contacto. El propio procedimiento de construcción del modelo de elementos finitos permite identificar automáticamente todos los elementos necesarios para la formación de dichas superficies. Resulta preciso definir dos tipos de superficies, la superficie esclava y la superficie maestra, siendo esta última la perteneciente al elemento de la transmisión de engranajes más rígido o, en el caso de rigideces similares del par de elementos de contacto, al elemento con menor curvatura.

Las principales características del modelo de elementos finitos construido en base a los pasos descritos con anterioridad aparecen recogidas a continuación:

- El modelo de elementos finitos puede ser determinado automáticamente para cualquier posición angular de la rueda y del piñón de la transmisión de engranajes obtenida

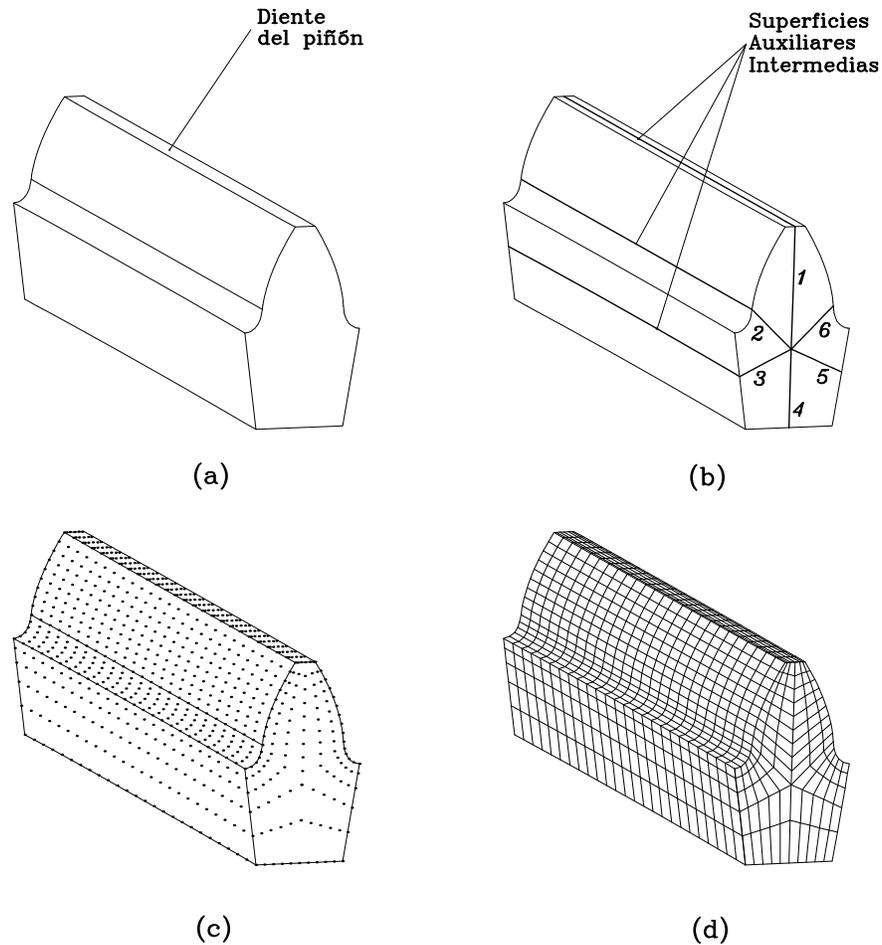


Figura 3.2.1: Etapas que conforman el proceso de discretización por elementos finitos del volumen de un diente aislado de una transmisión de engranajes cilíndrico-rectos.

por medio del algoritmo de análisis de contacto (TCA) descrito previamente en el Apartado 3.1. La convergencia se encuentra garantizada debido a la existencia de, al menos, un punto de contacto entre las superficies del par de elementos de la transmisión de engranajes.

- No se requiere la suposición de una distribución de carga sobre la superficie del diente determinada, ya que el algoritmo de contacto del código numérico de propósito general empleado permite la determinación del área de contacto y de las distribuciones superficiales de tensiones de contacto y de flexión a partir de la aplicación de un par

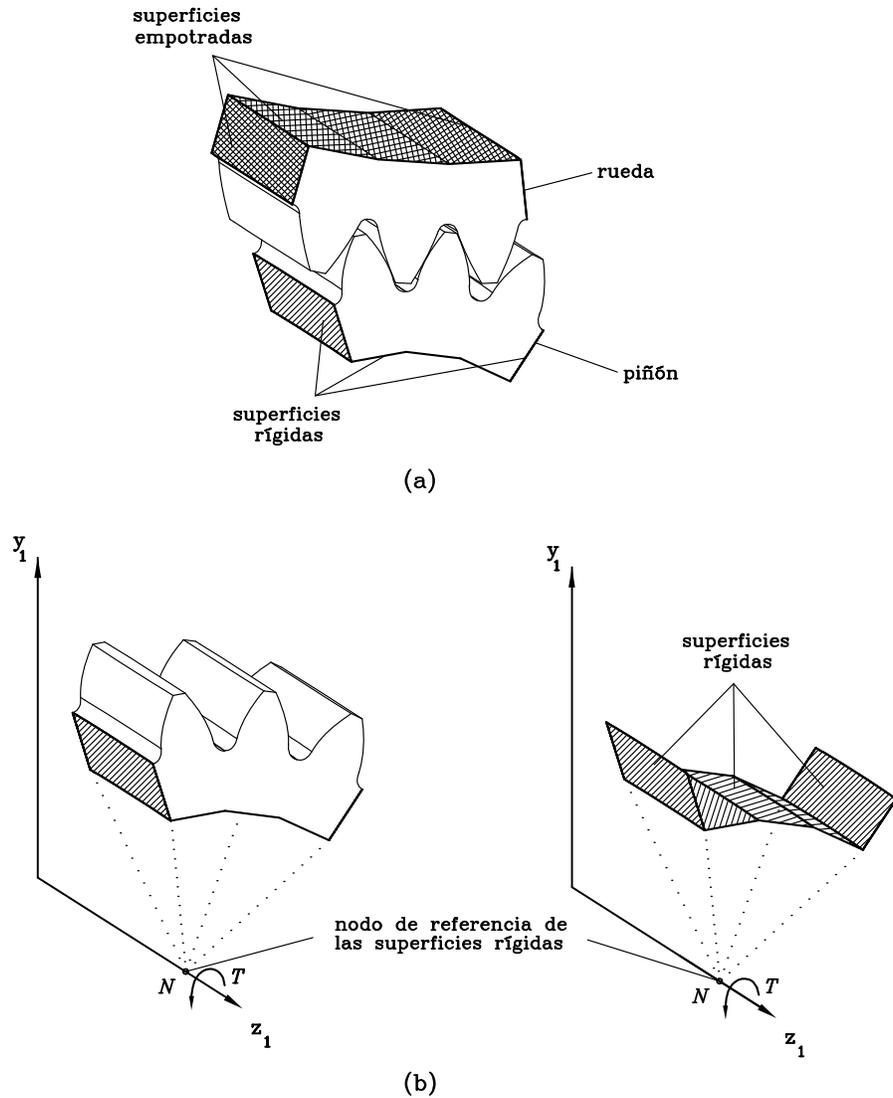


Figura 3.2.2: Ilustración esquemática de: (a) Condiciones de contorno en piñón y rueda de la transmisión de engranajes (b) Superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón de la transmisión de engranajes.

torsor sobre el piñón de la transmisión de engranajes, manteniéndose fija la rueda. El modelo de elementos finitos generado tiene en consideración las superficies reales de piñón y rueda en contacto en una determinada posición angular como resultado de la aplicación del algoritmo de análisis de contacto (TCA).

- Resulta posible obtener modelos de elementos finitos con cualquier número de parejas de dientes, resultando adecuado el empleo de modelos de 3 o 5 parejas de dientes, teniendo en cuenta la actual capacidad de los ordenadores empleados en el análisis tensional. Las ventajas del empleo de modelos de elementos finitos formados por varios pares de dientes aparecen expuestas en los siguientes puntos:
  - Las condiciones de contorno correspondientes a las restricciones de movimientos de los elementos de la transmisión de engranajes se encuentran suficientemente alejadas de los regiones de aplicación de las cargas.
  - Resulta posible estudiar el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo, detectar contactos en borde y áreas de contacto severo como consecuencia de la elasticidad de las superficies de los dientes.

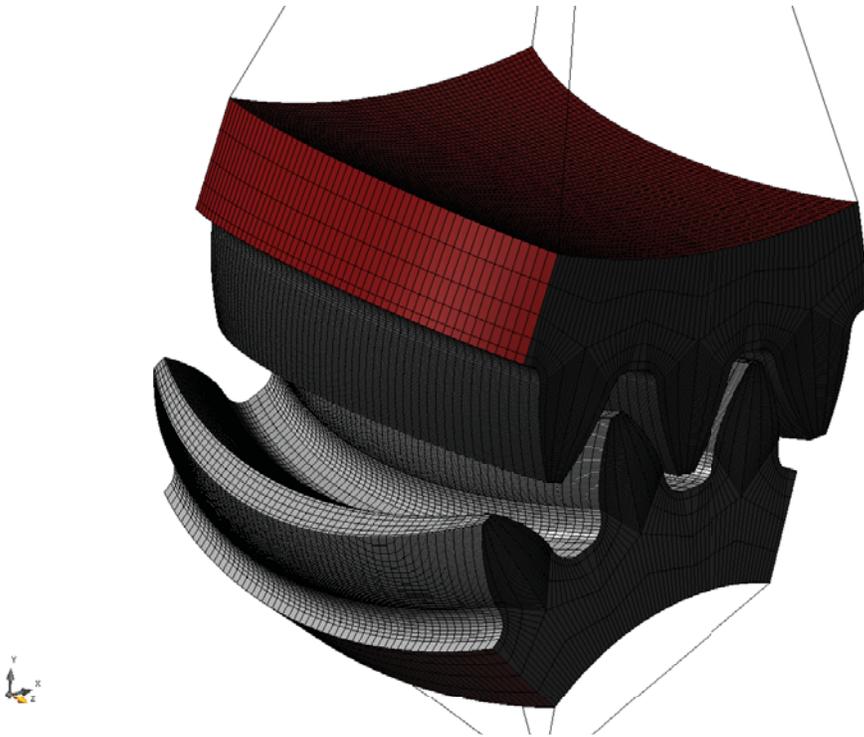


Figura 3.2.3: Modelo de elementos finitos generado para el caso de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

Por último, a modo de ejemplo de aplicación, en la Figura 3.2.3 aparecen representado el modelo de elementos finitos formado por 3 parejas de dientes de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos. Al igual que en el caso del algoritmo numérico de análisis del contacto del diente descrito en el Apartado 3.1.2, el proceso de construcción automática del modelo de elementos finitos descrito en el presente apartado ha sido implementado en la aplicación de software IGD<sup>III</sup>.

# Capítulo 4

## Análisis tensional de transmisiones de engranajes cilíndricos

En el presente capítulo se describe el procedimiento general que ha sido aplicado para llevar a cabo el análisis tensional de los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio en el presente trabajo. El objetivo final del citado análisis tensional es la obtención de resultados numéricos que permitan desarrollar los estudios de sensibilidad de las tensiones de contacto y flexión en los dientes de los engranajes frente a la aparición de errores de alineación y/o montaje en los distintos tipos de transmisiones objeto de estudio en el presente trabajo.

### 4.1. Influencia del grado de desalineación angular

El objetivo del presente estudio de sensibilidad es la determinación de las posibles ventajas e inconvenientes que supone el empleo de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos frente a transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales. La descripción del procedimiento de generación del modelo de elementos finitos requerido para poder llevar a cabo el análisis tensional de transmisiones de engranajes cilíndricos aparece descrito en el Apartado 3.2 del presente trabajo.

Para la obtención de datos numéricos a partir de los cuales llevar a cabo el estudio de sensibilidad en cuestión, ha sido necesario plantear un conjunto de casos prácticos de transmisiones de engranajes cilíndricos. Básicamente, las etapas que componen el procedimiento general aplicado a cada uno de dichos casos prácticos aparecen definidas a continuación:

1. Optimización de la transferencia de carga entre parejas sucesivas de dientes en contacto para el conjunto de transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas por medio de la aplicación de un proceso de rebaje de punta de cabeza del diente.
2. Simulación del engrane del conjunto de transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizados en la primera etapa.
3. Análisis tensional del conjunto de transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizados en la primera etapa.

#### 4.1.1. Descripción de los casos a analizar

En el presente subapartado se va a proceder a describir cada uno de los casos prácticos de transmisiones de engranajes cilíndricos que han sido analizados en el presente estudio de sensibilidad.

La Tabla 4.1.1 recoge los parámetros básicos de diseño comunes de las distintas transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas. Los parámetros particulares de cada tipo de transmisión se muestran en la Tabla 4.1.2.

Resulta preciso verificar que tanto el piñón como la rueda pertenecientes a las tipologías de transmisiones de engranajes cilíndricos recogidos en la Tabla 4.1.2 permanecen libres de los fenómenos de interferencia y de penetración. Para ello, es necesario hacer uso de las expresiones siguientes:

- Número mínimo de dientes de un engranaje cilíndrico en condiciones libres de penetración o socavamiento del perfil.

$$N_{min} = \frac{2 \cos \beta_p (\cos^2 \beta_p + \operatorname{tg}^2 \alpha_n)}{\operatorname{tg}^2 \alpha_n} \quad (4.1)$$

Variable	Unidad	Valor numérico
Número de dientes del piñón, $N_P$	-	24
Número de dientes de la rueda, $N_G$	-	34
Módulo normal, $m_n$	mm	2
Anchura de cara de los engranajes, $W$	mm	20
Radio de acuerdo, $\rho$	mm	$0.25m_n$
Módulo de elasticidad del material de constitución del piñón, $E_P$	Gpa	210
Módulo de elasticidad del material de constitución de la rueda, $E_G$		
Coefficiente de Poisson del material de constitución del piñón, $\nu_P$	-	0.3
Coefficiente de Poisson del material de constitución de la rueda, $\nu_G$		

Tabla 4.1.1: Parámetros básicos de diseño comunes a los distintos tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas.

- Número mínimo de dientes del piñón de una transmisión de engranajes cilíndricos en condiciones libres de interferencia.<sup>1V</sup>.

$$(N_P)_{min} = \frac{2 \cos^2 \beta_p}{(1 + 2i) \sin^2 \alpha_n} \left( i \cos \beta_p + \sqrt{i^2 \cos^2 \beta_p + (1 + 2i) \sin^2 \alpha_n} \right) \quad (4.2)$$

Aplicando las Ecuaciones (4.1) y (4.2), es posible obtener los límites inferiores que es preciso imponer al número de dientes del piñón y de la rueda de las transmisiones de engranajes cilíndricos recogidas en la Tabla 4.1.2 para que se encuentren libres de los fenómenos de

<sup>1V</sup>El término  $i$  hace referencia a la relación de transmisión, parámetro que se define a través de la siguiente ecuación:

$$i = \frac{N_G}{N_P}$$

Caso	Tipología de transmisión de engranajes cilíndricos	$\beta_p$ [°]	$R_C$ [mm]	Sentido de rotación	$\alpha_n$ [°]
1	Rectos	0	-	CW , CCW	20
2					25
3	Helicoidales	10			20
4					25
5					20
6		15			25
7					20
8					25
9	Curvilíneos	-	80	CW	20
10				25	
11				CCW	20
12				25	

Tabla 4.1.2: Tipos y parámetros de diseño específicos de los distintos tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas.

penetración e interferencia. Los resultados obtenidos tras redondearse al número entero superior más próximo aparecen recogidos en la Tabla 4.1.3. Tras el análisis de dichos resultados se confirma que las transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas en el presente trabajo permanecen libres de los fenómenos de penetración e interferencia, en virtud de los parámetros de diseño característicos de las mismas que aparecen reflejados en la Tabla 4.1.1.

Asimismo, para el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos recogidos en la Tabla 4.1.2, resulta preciso verificar que tanto el piñón como la rueda permanecen libres del fenómeno de apuntamiento descrito previamente en el Apartado 2.5 del presente trabajo. Para ello, es necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineales (2.77) planteado en el

Tipología de transmisión de engranajes cilíndricos	$\beta_p$ [°]	$\alpha_n$ [°]	$N_{\min}$	$(N_P)_{\min}$
Rectos	0	20	18	14
		25	12	9
Helicoidales	10	20	17	13
		25	11	9
	15	20	16	13
		25	11	9
	20	20	12	10
		25	8	7
Curvilíneos	0	20	18	14
		25	12	9

Tabla 4.1.3: Límites inferiores aplicados al número de dientes del piñón y de la rueda de transmisiones de engranajes cilíndricos libres de penetración e interferencia.

Apartado 2.5 para el cálculo del radio de generación límite de la fresa circular generadora  $(R_C)_{lim}$  correspondiente a los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos planteados. Las soluciones obtenidas para el radio de generación límite de la fresa circular generadora  $(R_C)_{lim}$  para los casos considerados aparecen reflejados en la Tabla 4.1.4. Tras el análisis de los resultados obtenidos, se concluye que las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas permanecen libres del fenómeno de apuntamiento, ya que se verifica la condición reflejada en la Ecuación (4.3).

$$R_C = 80 \text{ mm} > (R_C)_{lim} \quad (4.3)$$

Por último, cada uno de los tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos recogidas en la Tabla 4.1.2 han sido sometidas en cada uno de los procesos de análisis tensional a las solicitaciones mecánicas y errores de alineación que se recogen en la Tabla 4.1.5.

Elemento de la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos	$\alpha_n$ [°]	$(R_C)_{lim}$ [mm]
Piñón	20	15.88
	25	18.20
Rueda	20	15.61
	25	17.77

Tabla 4.1.4: Soluciones numéricas de la variable  $(R_C)_{lim}$ .

Variable	Unidad	Valor numérico
$T$	Nm	150
$\Delta\gamma_h$	°	0.00
		0.02
		0.04

Tabla 4.1.5: Solicitaciones mecánicas y errores de alineación aplicados a las transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas.

#### 4.1.2. Procedimiento de optimización de la transferencia de carga

Previo al inicio del estudio comparativo entre los tres tipos de transmisiones de engranajes cilíndricos definidas en la Tabla 4.1.2, resulta preciso optimizar la geometría de los flancos de los dientes de los elementos que las integran, con objeto de suavizar la transición del contacto entre parejas de dientes consecutivas y, de este modo, alcanzar una evolución lo más uniforme posible de las tensiones y de las presiones de contacto a lo largo del ciclo de engrane completo, lográndose así un funcionamiento más silencioso de dichas transmisiones mecánicas y el aumento de la duración esperada de las mismas.

En el presente trabajo, el objetivo de optimización de la geometría de los flancos de los dientes se ha alcanzado a partir de un rebaje del espesor en cabeza de los mismos, haciendo uso para ello de una herramienta de generación cuya geometría de la sección transversal se

encuentra modificada con respecto a la geometría reflejada en la Figura 2.4.1. Los cambios de dicha geometría modificada con respecto a la geometría inicial aparecen esquematizados en la Figura 4.1.1. A este proceso se le conoce con el nombre de despulla en cabeza o rebaje de punta. En la Figura 4.1.1 es posible apreciar que los parámetros de diseño del perfil de una sección transversal de la herramienta de tallado son  $a_{pf}$  y  $h_{tr}$ . Uno de los principales beneficios que supone el empleo del rebaje de punta en los procesos de tallado de engranajes es la eliminación de los indeseados contactos en los bordes de la superficie que dan lugar al deterioro prematuro de la transmisión.

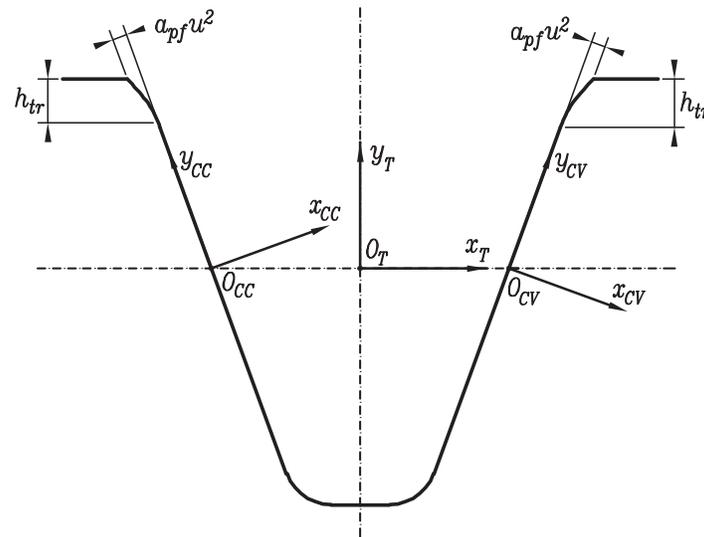


Figura 4.1.1: Sección transversal de la herramienta de tallado de transmisiones de engranajes cilíndricos con transferencia de carga optimizada.

La existencia de un grado óptimo de rebaje de punta de la cabeza de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes específica para unas determinadas sollicitaciones mecánicas de operación se justifica en base a las consideraciones recogidas en los siguientes puntos:

- Un grado de rebaje de cabeza inferior al óptimo o inexistente dará lugar a unos excesivos incrementos de las tensiones y de las presiones de contacto en las posiciones angulares en las cuales se establece contacto entre el borde de cabeza de las superficies de los

dientes del piñón y la superficie activa de los dientes de la rueda o viceversa.

- Sin embargo, un grado de rebaje de cabeza superior al óptimo también dará lugar a unos excesivos incrementos de las tensiones y de las presiones de contacto, debido a que el contacto al final del ciclo de engrane entre una pareja de dientes, aún no siendo en borde, tendrá lugar en la región rebajada de la superficie del flanco del diente del piñón, zona en la cual el radio de curvatura de la superficie como consecuencia del rebaje es reducido y, en consecuencia, el valor de la presión de contacto será elevado.

Además de la incidencia sobre la tensión y presión de contacto descrita en el párrafo anterior, un incremento del grado de rebaje de cabeza de los dientes de los elementos de una transmisión de engranajes da lugar a un incremento del valor promedio de la tensión de flexión en la base de los dientes de los engranajes a lo largo del ciclo completo de engrane. Dicho incremento se justifica en base a la reducción del arco de conducción que ocasiona el rebaje de la punta de cabeza de los dientes, lo que a su vez conlleva la reducción del grado de recubrimiento de la transmisión de engranajes. A raíz de lo expuesto, queda justificado que la aplicación de una despulla de cabeza de los dientes de una transmisión de engranajes debe ser controlada mediante técnicas de simulación avanzadas que incluyan la generación virtual de las geometrías modificadas de las superficies así como el análisis tensional por elementos finitos con objeto de evitar un excesivo incremento de las tensiones de contacto.

Entre los distintos tipos de despulla de cabeza, en el presente trabajo se ha aplicado un rebaje de cabeza de tipo parabólico tangente al perfil de envolvente, con objeto de evitar la aparición de aristas o discontinuidades sobre las superficies de los dientes. Para alcanzar la optimización del rebaje de cabeza que permita lograr una evolución lo más uniforme posible de las tensiones y presiones de contacto sobre el ciclo de engrane completo, se han llevado a cabo simulaciones numéricas del análisis tensional en cada uno de los casos de transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio, en las que se ha ido incrementando gradualmente el coeficiente de parábola  $a_{pf}$  característico del rebaje de cabeza en la herramienta de generación de la transmisión de engranajes considerada. Los parámetros geométricos característicos del proceso de rebaje de cabeza aplicado a cada una de las transmisiones de engranajes cilíndricos

en cada uno de los casos de simulación numérica llevados a cabo aparecen recogidos en la Tabla 4.1.6.

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_{pf}$ [1/mm]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
$h_{tr}$ [mm]	0.7								

Tabla 4.1.6: Casos de simulación numérica para la optimización del rebaje de cabeza.

Tal como se aprecia en la Tabla 4.1.6, en todos los casos analizados se ha empleado la misma altura de rebaje de cabeza  $h_{tr}$ . La justificación a dicha elección es introducir en todos los casos analizados modificaciones de la superficie de los dientes fuera del área de contacto correspondiente a un grado de recubrimiento unidad y, de este modo, no inducir errores de transmisión [9].

Las características de las distintas simulaciones computacionales llevadas a cabo para la optimización del rebaje de cabeza de los dientes de las transmisiones de engranajes cilíndricos bajo estudio son semejantes a las adoptadas en las simulaciones computacionales ejecutadas para la resolución numérica tanto del análisis del contacto (TCA) como del análisis tensional de las mismas transmisiones mecánicas una vez optimizadas. Las citadas características numéricas van a ser descritas posteriormente en los Apartados 4.1.3 y 4.1.4, respectivamente, dado que en el presente apartado tanto el TCA como el análisis tensional no constituyen el objetivo fundamental del mismo. El análisis de los resultados numéricos obtenidos en las simulaciones computacionales encaminadas a la optimización de la geometría de la superficie de los flancos de los dientes aparecen recogidos en los siguientes apartados.

### Transmisión de engranajes cilíndrico-rectos ( $\alpha_n = 20^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$ , recogidos en la Tabla 4.1.6, aparecen reflejados en la Figura 4.1.2. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor

óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.02 1/mm.

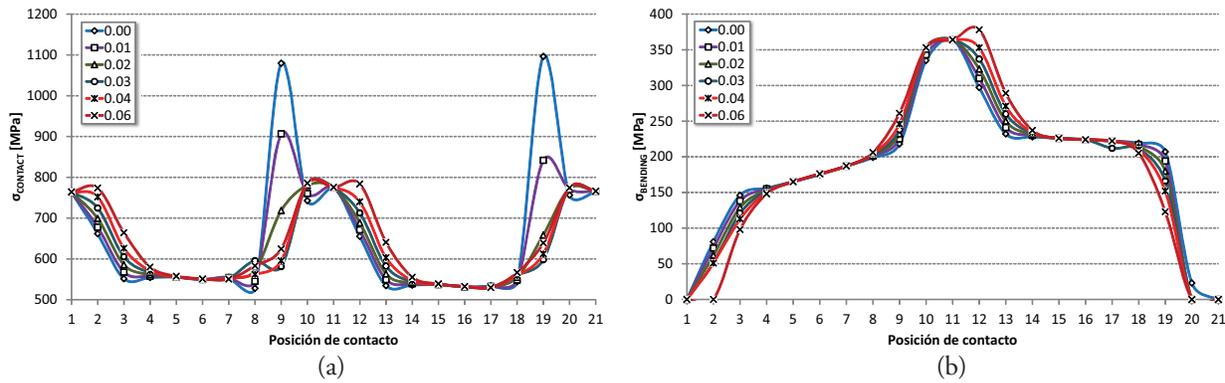


Figura 4.1.2: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos con  $\alpha_n = 20^\circ$ .

### Transmisión de engranajes cilíndrico-rectos ( $\alpha_n = 25^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.3. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.01 1/mm.

### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 10^\circ$ , $\alpha_n = 20^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.4. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de

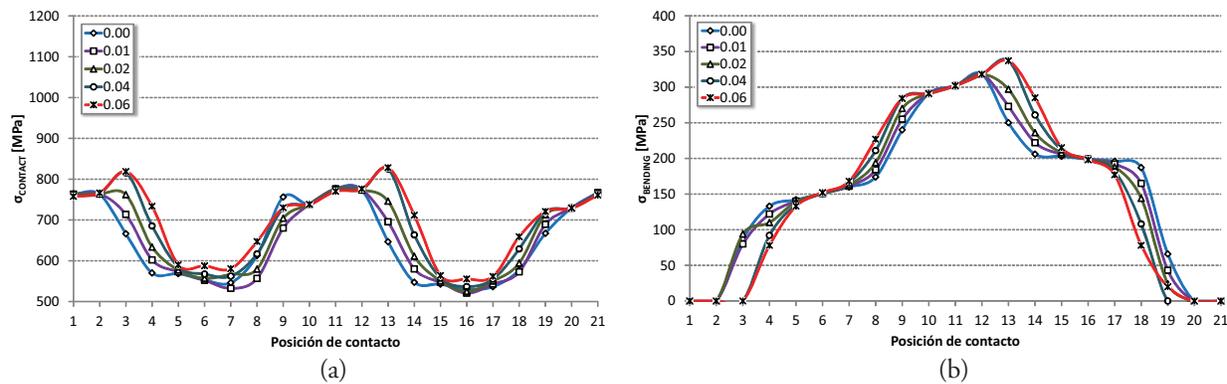


Figura 4.1.3: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos con  $\alpha_n = 25^\circ$ .

parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.07 1/mm.

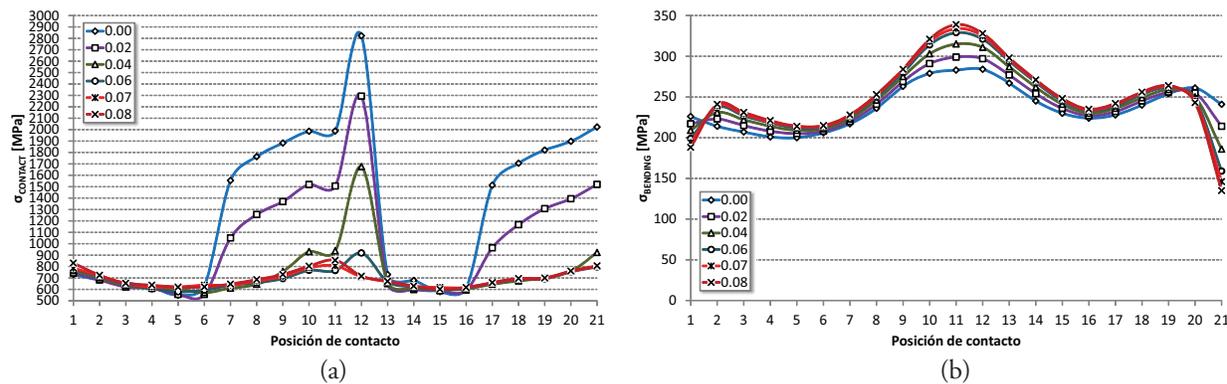


Figura 4.1.4: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 10^\circ$  y  $\alpha_n = 20^\circ$ .

### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 10^\circ$ , $\alpha_n = 25^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.5. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.04 1/mm.

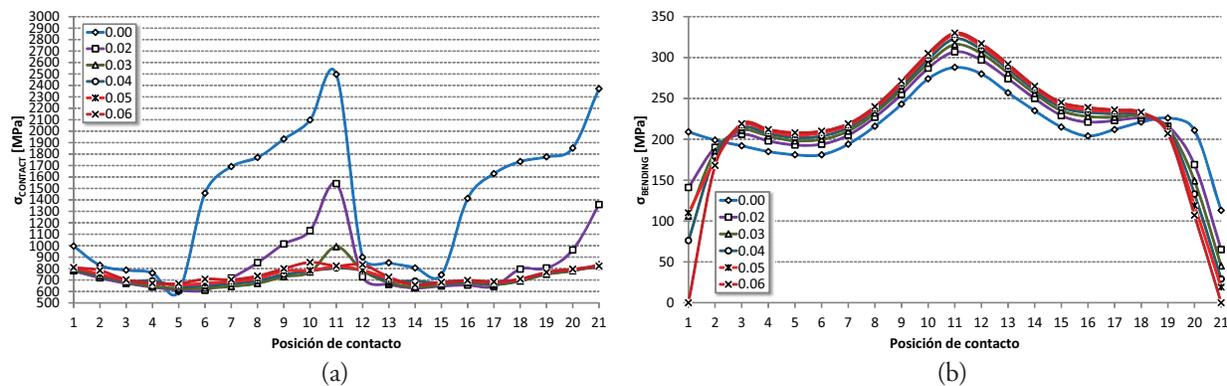


Figura 4.1.5: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 10^\circ$  y  $\alpha_n = 25^\circ$ .

### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 15^\circ$ , $\alpha_n = 20^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.6. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.06 1/mm.

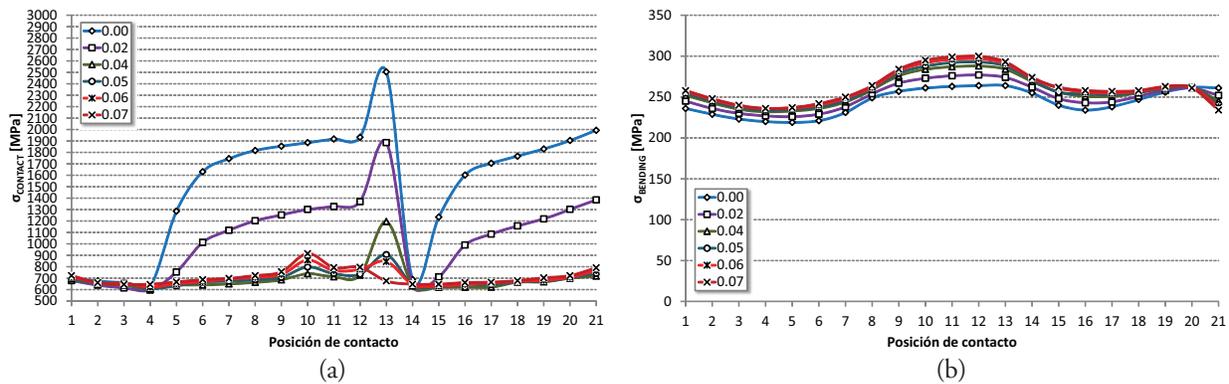


Figura 4.1.6: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 15^\circ$  y  $\alpha_n = 20^\circ$ .

#### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 15^\circ$ , $\alpha_n = 25^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.7. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.03 1/mm.

#### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 20^\circ$ , $\alpha_n = 20^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.8. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.06 1/mm.

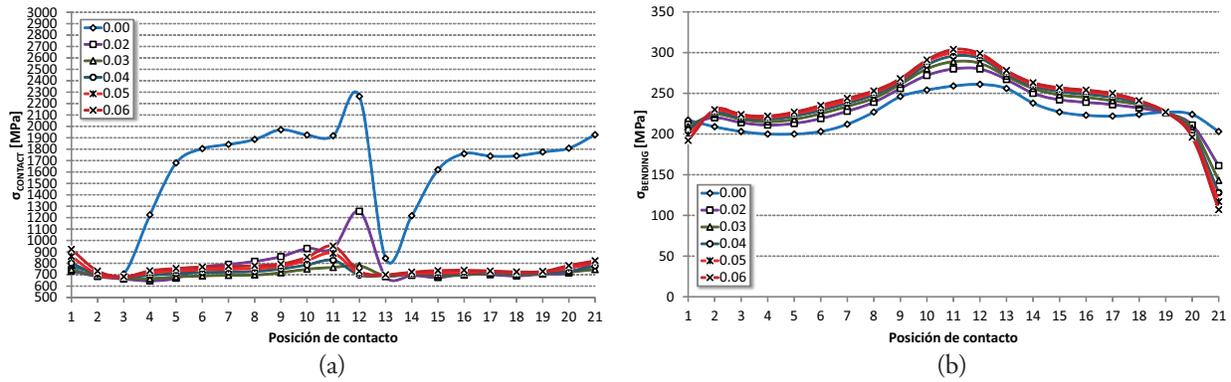


Figura 4.1.7: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 15^\circ$  y  $\alpha_n = 25^\circ$ .

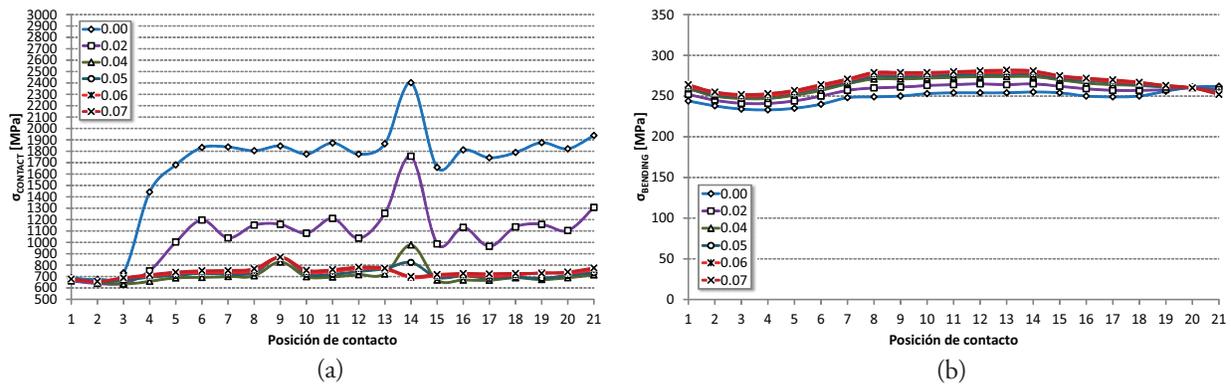


Figura 4.1.8: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 20^\circ$  y  $\alpha_n = 20^\circ$ .

### Transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales ( $\beta_p = 20^\circ$ , $\alpha_n = 25^\circ$ )

Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.9. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.04 1/mm.

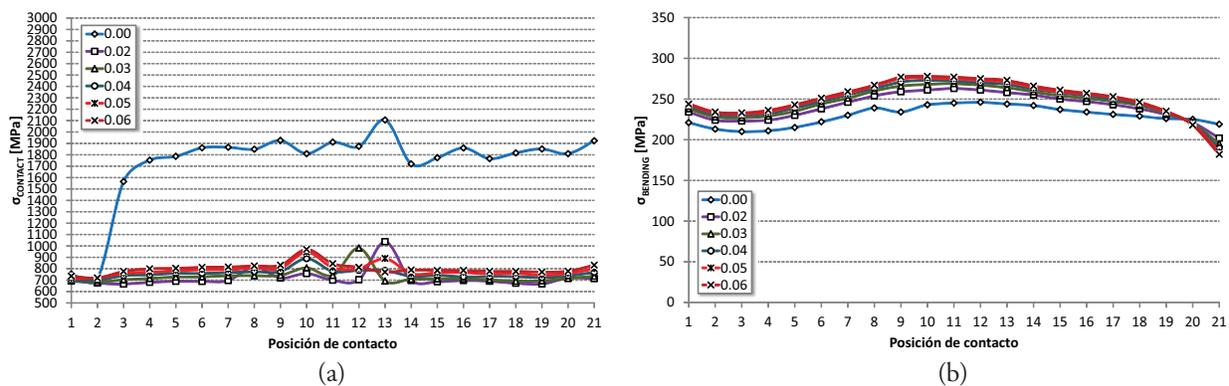


Figura 4.1.9: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-helicoidales con  $\beta_p = 20^\circ$  y  $\alpha_n = 25^\circ$ .

### Transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos ( $R_C = 80$ mm, $\alpha_n = 20^\circ$ )

Como ya se ha señalado con anterioridad en el Apartado 1.4, otro de los objetivos de este trabajo es la determinación del sentido de rotación más favorable de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, ya que, cuando el piñón de dicha transmisión mecánica opera en el sentido de rotación horario (CW) la superficie activa conductora de los dientes de éste es la convexa, mientras que cuando el mismo piñón opera en el sentido de rotación anti-horario (CCW) entonces es la superficie cóncava de los dientes la que actúa como superficie activa conductora. A raíz de lo expuesto, queda justificado que el proceso de optimización

por rebaje de cabeza en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos se realizará para cada uno de los dos sentidos de giro.

**Sentido de rotación horario (CW).** Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.10. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.05 1/mm.

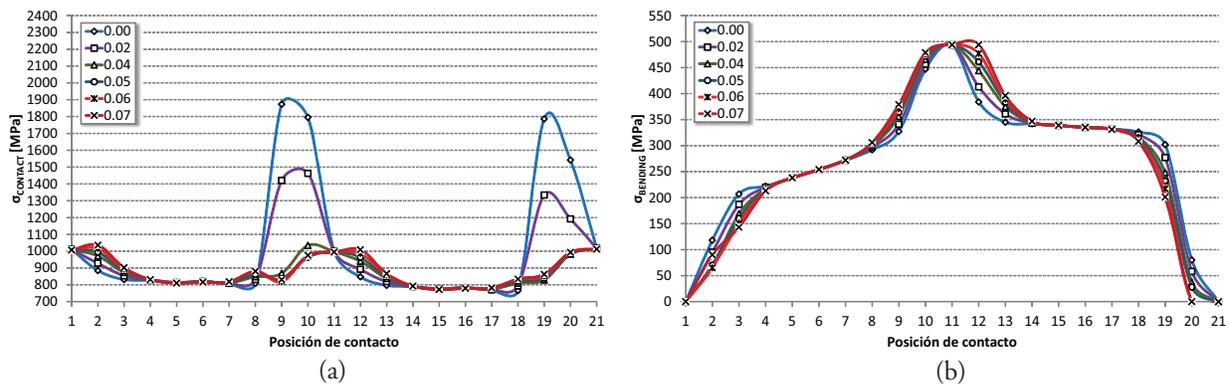


Figura 4.1.10: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos con  $R_C = 80$  mm y  $\alpha_n = 20^\circ$  cuando el piñón gira en sentido horario.

**Sentido de rotación antihorario (CCW).** Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.11. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.03 1/mm.

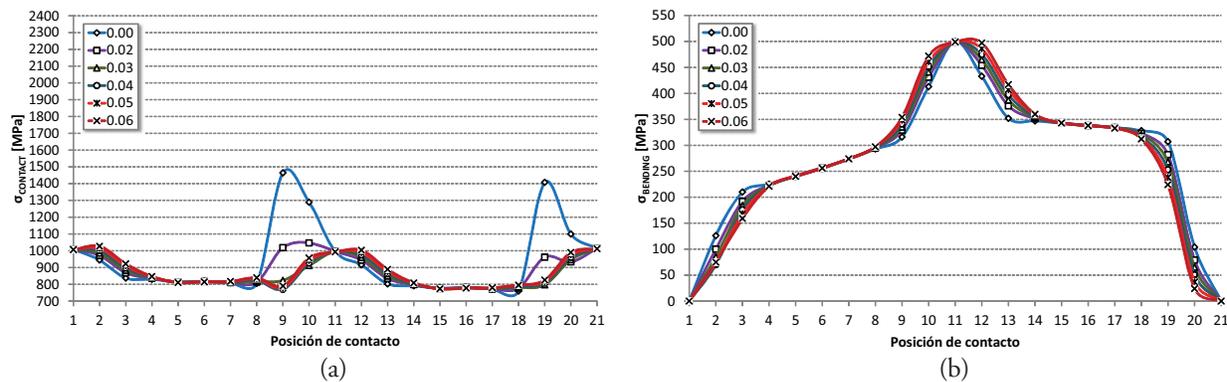


Figura 4.1.11: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos con  $R_C = 80$  mm y  $\alpha_n = 20^\circ$  cuando el piñón gira en sentido antihorario.

#### Transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos ( $R_C = 80$ mm, $\alpha_n = 25^\circ$ )

Al igual que en el caso anterior y por los mismos motivos expuestos en éste, en el presente caso también se ha llevado a cabo el proceso de optimización para cada uno de los dos sentidos de rotación del piñón de la transmisión mecánica.

**Sentido de rotación horario (CW).** Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.12. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.04 1/mm.

**Sentido de rotación antihorario (CCW).** Las representaciones gráficas de las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón para los distintos valores del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  aparecen reflejados en la Figura 4.1.13. Tal como se puede apreciar en dicha figura, el valor óptimo del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  que reduce en mayor grado los máximos

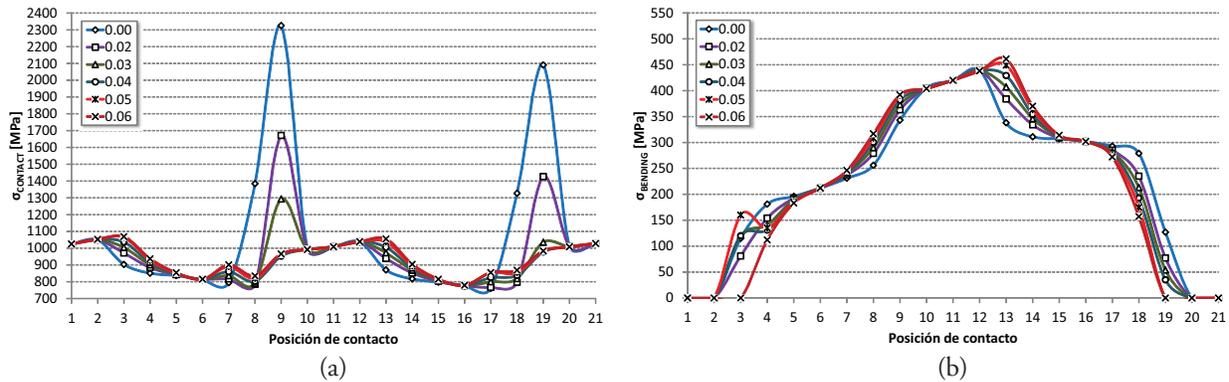


Figura 4.1.12: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos con  $R_C = 80$  mm y  $\alpha_n = 25^\circ$  cuando el piñón gira en sentido horario.

de tensión de contacto y que mantiene su componente media lo más reducida posible a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso analizado es 0.03 1/mm.

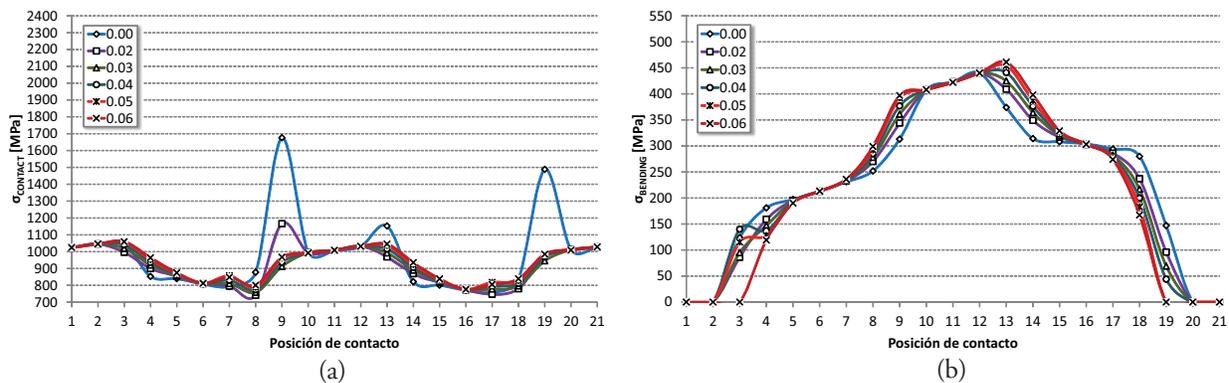


Figura 4.1.13: Evolución de (a) tensiones de contacto y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo de engrane para la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos con  $R_C = 80$  mm y  $\alpha_n = 25^\circ$  cuando el piñón gira en sentido antihorario.

### Análisis de los resultados obtenidos

Finalmente, una vez optimizadas individualmente las superficies de los flancos de los dientes de cada una de las transmisiones de engranajes cilíndricos recogidas en la Tabla 4.1.2, en la Tabla 4.1.7 aparecen recogidas las características geométricas de las transmisiones de engranajes cilíndricos optimizadas.

Tipología de transmisiones de engranajes cilíndricos	$\beta_p$ [°]	$R_C$ [mm]	Sentido de rotación	$\alpha_n$ [°]	$(a_{pf})_{\text{optimal}}$ [mm]
Rectos	0	-	CW , CCW	20	0.02
				25	0.01
Helicoidales	10	-	CW , CCW	20	0.07
				25	0.04
	15	-	CW , CCW	20	0.06
				25	0.03
	20	-	CW , CCW	20	0.06
				25	0.04
Curvilíneos	-	80	CW	20	0.05
				25	0.04
			CCW	20	0.03
				25	0.03

Tabla 4.1.7: Transmisiones de engranajes cilíndricos con transferencia de carga entre parejas de dientes optimizada.

#### 4.1.3. Simulación del engrane

En el presente subapartado se va a proceder a llevar a cabo la simulación del engrane de las transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizadas en el Apartado 4.1.2, bajo las condiciones de operación descritas en la Tabla 4.1.5. Para llevar a cabo la simulación del

engrane, se va a hacer uso de algoritmo de análisis del contacto (TCA) de carácter numérico que ha sido descrito en el Apartado 3.1.2.

Se ha decidido adoptar para todas las tipologías de transmisiones de engranajes cilíndricos recogidas en la Tabla 4.1.2 las mismas características numéricas del algoritmo TCA empleado. Dichas características numéricas aparecen resumidas en la Tabla 4.1.8.

Parámetro	Valor numérico
Número de puntos de discretización de la malla numérica en la dirección longitudinal del perfil activo del diente	80
Número de puntos de discretización de la malla numérica en la dirección longitudinal de la superficie activa del diente	60
Número de pares de dientes de la transmisión de engranajes implicados en la ejecución del algoritmo TCA	3
Número de posiciones angulares del piñón $\phi_1$ de discretización del algoritmo TCA adoptadas	21

Tabla 4.1.8: Características numéricas al algoritmo TCA empleado.

Los resultados numéricos derivados de la aplicación de la variante numérica del algoritmo TCA sobre las transmisiones de engranajes recogidas en la Tabla 4.1.7 aparecen reflejados en las Figuras 4.1.14 y 4.1.15. Del análisis de los resultados reflejados en dichas figuras cabe realizar los siguientes comentarios:

- Los niveles máximos de errores de transmisión en transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos resultan ser del mismo orden de magnitud, e inferiores a los niveles máximos de errores correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales.
- En el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales, los niveles máximos de errores de transmisión son crecientes con el error de desalineación angular horizontal  $\Delta\gamma_h$  y con el ángulo de inclinación del dentado de referencia  $\beta_p$ , y decrecientes con

el ángulo de presión normal  $\alpha_n$ , mientras que en los casos de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos dichos niveles máximos de errores son ligeramente crecientes con el error de desalineación angular horizontal  $\Delta\gamma_h$ .

- Los niveles máximos de errores de transmisión en transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos resultan ser prácticamente independientes del ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .
- Las diferencias existentes entre los niveles máximos de error de transmisión de las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales y los correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos son tanto mayores cuanto mayores son el error de desalineación angular horizontal  $\Delta\gamma_h$  y el ángulo de inclinación del dentado de referencia  $\beta_p$ .

#### 4.1.4. Análisis tensional

En este subapartado se van a analizar los resultados numéricos obtenidos de la aplicación del método de los elementos finitos para la determinación del estado tensional del conjunto de transmisiones de engranajes cilíndricos objeto de estudio en el presente trabajo y sometidas a las solicitaciones mecánicas y de errores de alineación recogidas en la Tabla 4.1.5.

Las características genéricas del modelo de elementos finitos empleado en todos los casos analizados ya han sido descritas en el Apartado 3.2. Las características específicas del modelo de elementos finitos empleado aparecen descritas en los siguientes puntos:

- Las características específicas de los mallados de discretización de los dientes del piñón y de la rueda que configuran los modelos de elementos finitos correspondientes aparecen resumidas en la Tabla 4.1.9. Conviene señalar como detalle importante que el término relación de apoyo  $m_B$  recogido en la Tabla 4.1.9 se define a través de la Ecuación (4.4).

$$m_B = \frac{t_R}{a + b} \quad (4.4)$$

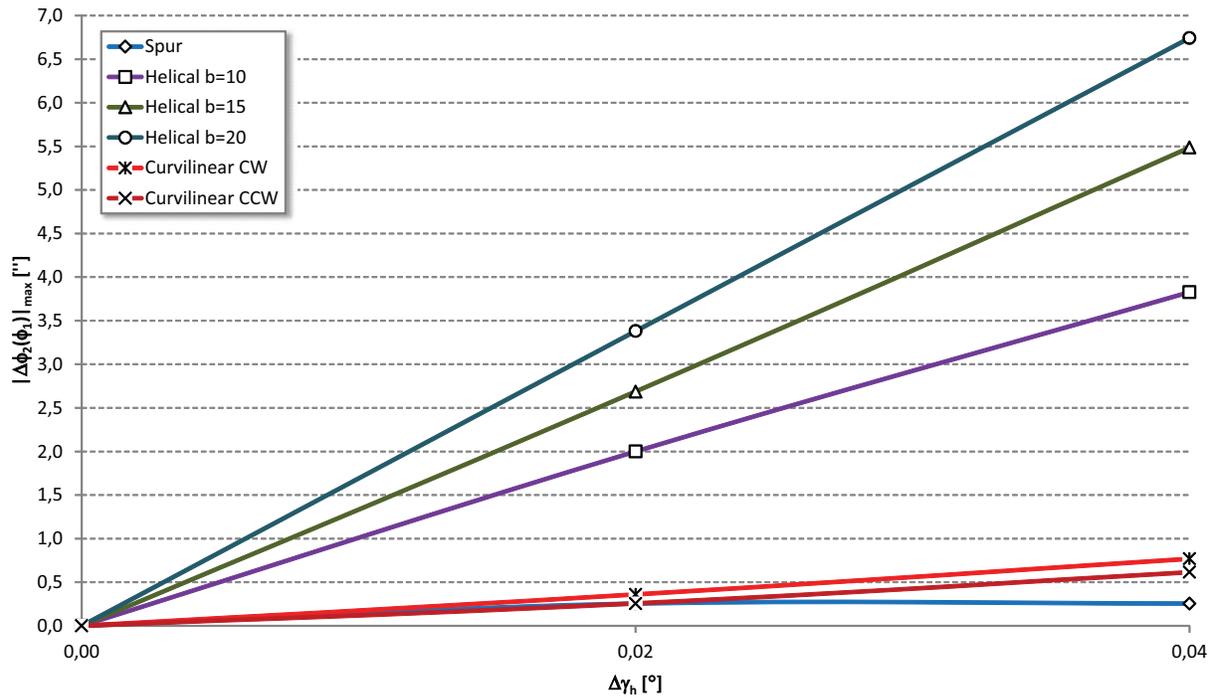


Figura 4.1.14: Variación del nivel máximo de errores de transmisión en función del grado de desalineación angular en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20.

- Los modelos de elementos finitos incorporan un número de etapas de carga igual al número de posiciones angulares del piñón  $\phi_1$  para las que ha aplicado el algoritmo numérico de análisis del contacto del diente (TCA). En cada una de dichas etapas se le aplica a la rueda de la transmisión de engranajes analizada el giro obtenido como resultado de la ejecución del algoritmo numérico del TCA estando el piñón cargado con el momento torsor correspondiente en todas las posiciones.
- Para la resolución del problema de contacto se ha hecho uso del método de análisis tensional estático de carácter no lineal, debido a la geometría no lineal considerada en el mismo. Dicha técnica numérica de cálculo se fundamenta en la formulación de grandes desplazamientos, según la cual los elementos empleados son formulados en su

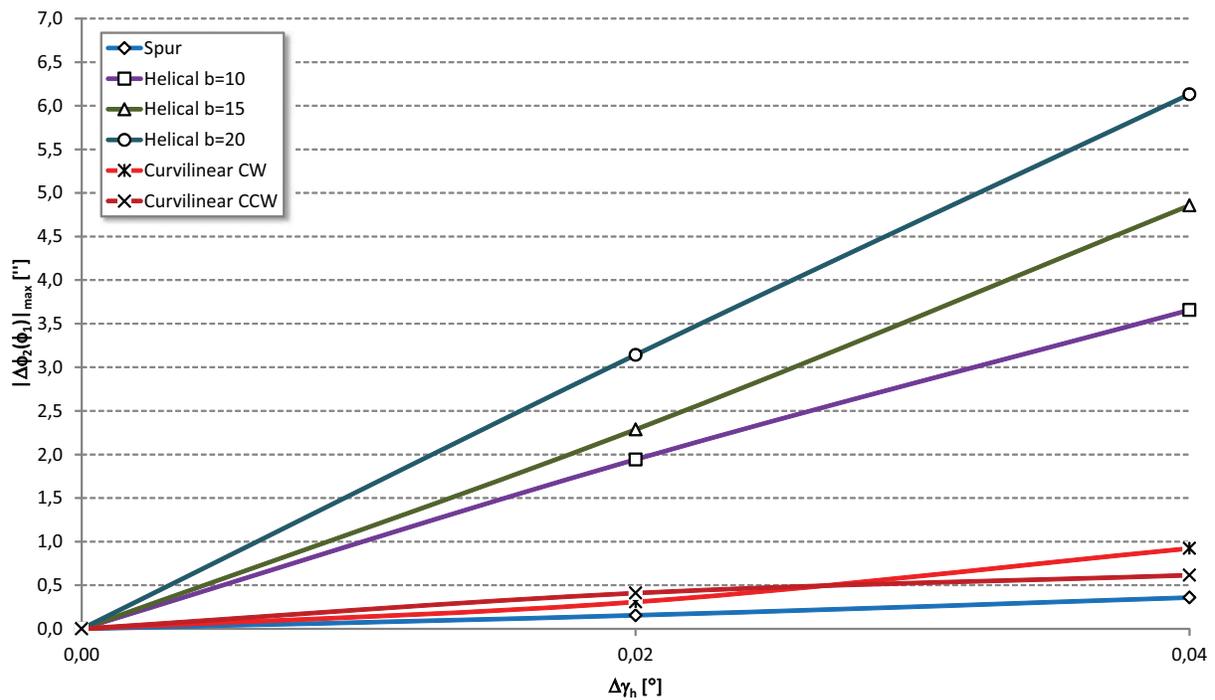


Figura 4.1.15: Variación del nivel máximo de los errores de transmisión en función del grado de desalineación angular en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25.

configuración geométrica deformada tras la aplicación del estado de carga, e incluye los efectos y fuentes de no linealidad característicos del problema analizado.

- Se ha considerado un comportamiento elástico lineal para el material del piñón y de la rueda de las transmisiones de engranajes analizadas. Asimismo, se ha asumido que dicho material es de carácter isótropo.
- Se ha hecho uso de elementos sólidos (continuos) tridimensionales del tipo C3D8I. Se trata de elementos de tipo tensión/desplazamiento de primer orden hexaédricos mejorados mediante modos de deformación incompatibles, lo cual permite la mejora de su comportamiento frente a esfuerzos de flexión. La selección de esta tipología de elemento presenta las siguientes ventajas:

Parámetro	Valor numérico	
	PIÑÓN	RUEDA
Número de nodos de discretización en la dirección longitudinal de la superficie activa del diente	60	55
Número de nodos de discretización en la dirección del perfil de la superficie activa del diente	55	50
Número de nodos de discretización en la dirección del perfil de la superficie de entalle entre el cilindro de pie y las superficies activas del diente	12	
Número de nodos situados bajo las superficies activas de diente	2	
Relación de apoyo $m_B$	1	
Número de pares de dientes considerados	3	

Tabla 4.1.9: Principales características de los mallados de las ruedas dentadas de las transmisiones de engranajes cilíndricos para la construcción de sus respectivos modelos de elementos finitos.

- Los elementos del tipo tensión/desplazamiento se emplean en la modelización de problemas complejos de análisis mecánico no lineal, los cuales podrían incluir contacto, plasticidad y/o grandes deformaciones.
- Esta tipología de elementos proporcionan resultados numéricos muy precisos en problemas dominados por esfuerzos de flexión.
- Es recomendable el empleo de elementos de primer orden hexaédricos o elementos tetraédricos modificados en problemas que impliquen contacto [10]. Sin embargo, en el caso del empleo de elementos tetraédricos modificados, los resultados numéricos obtenidos puede ser imprecisos en regiones de gradientes de tensión elevados.

- Los elementos hexaédricos poseen con respecto a elementos tetraédricos una mayor velocidad de convergencia, proporcionan soluciones numéricas igualmente precisas a un menor coste en mallados regulares y resultan insensibles a la orientación de dicho mallado regular.
  - Esta clase de elementos resultan insensibles al fenómeno con denominación anglosajona *shear locking*, consistente en incrementos ficticios de la deformación tangencial (deformación tangencial parásita) por efecto de la propia formulación numérica de ciertos elementos, hecho que da lugar a que dichos elementos posean una rigidez excesiva bajo esfuerzos de flexión.
  - Adicionalmente, estos elementos eliminan la rigidez artificial derivada del efecto de Poisson en fenómenos de flexión, fenómeno que aparece en elementos de desplazamiento regular por efecto de la variación lineal de las tensiones perpendiculares a la dirección del esfuerzo de flexión.
  - Esta clase de elementos posee un comportamiento muy similar al correspondiente a elementos de segundo orden en diversas situaciones, siempre que los primeros posean una distorsión reducida.
  - No resulta adecuado el empleo de elementos regulares de segundo orden en problemas de contacto en los cuales se adopta la relación de contacto "dura", la cual va a ser descrita con posterioridad, debido a la aparición de problemas de convergencia.
- Se han definido un total de tres pares de contacto entre las superficies activas correspondientes de tres parejas de dientes de cada una de las transmisiones de engranajes analizadas, estableciéndose en el presente trabajo como superficies maestras las superficies activas de los dientes de la rueda y como superficies esclavas las superficies activas de los dientes del piñón. Las principales características de la condición de contacto definida en el presente trabajo aparecen definidas a continuación:
- Se ha hecho uso de la formulación de contacto de deslizamiento finito. Dicha for-

mulación del contacto permite un movimiento arbitrario entre las superficies que establecen contacto entre sí: separación arbitraria, deslizamiento y rotación. Resulta posible emplear esta clase de formulación de contacto porque las superficies maestras (rueda de la transmisión de engranajes) constituyen superficie regulares como consecuencia de la propia naturaleza del proceso de generación virtual de las transmisiones de engranajes analizadas.

- Se ha hecho uso de la relación de contacto "dura", cuyas principales características de formulación aparecen recogidas a continuación:
  - Se minimiza la penetración de la superficie esclava sobre la superficie maestra.
  - No se permite la transmisión de tensión de tracción a través de la interfase de contacto entre ambas superficies.
  - Solamente se transmite presión entre ambas superficies en aquellos puntos comunes en los cuales ambas permanecen en contacto.
  - Las superficies maestra y esclava permanecen separadas en aquellos puntos en los cuales la presión de contacto entre ambas es nula, y establecen contacto entre sí en aquellos puntos en los cuales la holgura entre ambas se anula.

La metodología de aplicación de la relación de contacto descrita es el método clásico de los multiplicadores de Lagrange.

- Se ha asumido nulo el fenómeno de fricción por efecto del deslizamiento relativo entre las superficies maestras y esclavas.

A modo de ejemplo de aplicación, en la Figura 4.1.16 aparecen representados los resultados numéricos de tensiones de contacto máximas  $\sigma_{\text{CONTACT}}$  sobre un piñón obtenidos tras la ejecución del modelo de elementos finitos formado por 3 parejas de dientes de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos que ha sido descrito con anterioridad. Dicho modelo de elementos finitos ha sido ejecutado haciendo uso para ello de un código numérico de propósito general.

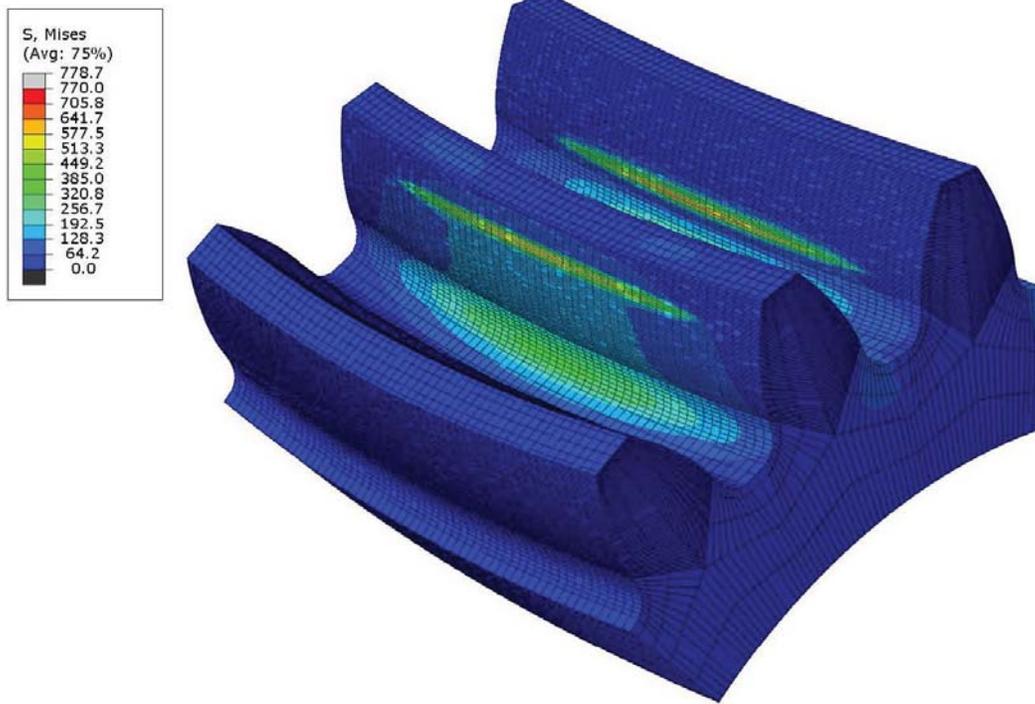


Figura 4.1.16: Resultados numéricos obtenidos tras la ejecución del modelo de elementos finitos de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos a través del código de propósito general ABAQUS®.

### Transmisiones de engranajes cilíndricos perfectamente alineados

Las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizadas recogidas en la Tabla 4.1.7 aparecen reflejadas en Figuras 4.1.17 y 4.1.18. Del análisis de los resultados reflejados en dichas figuras cabe realizar los siguientes comentarios:

- La tensión máxima de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane es mayor en las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que en las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales, y, a su vez, en estas últimas dicha componente media es mayor que en las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos. Esta tendencia observada es totalmente acorde, ya que, por un lado, en transmisiones de engranajes

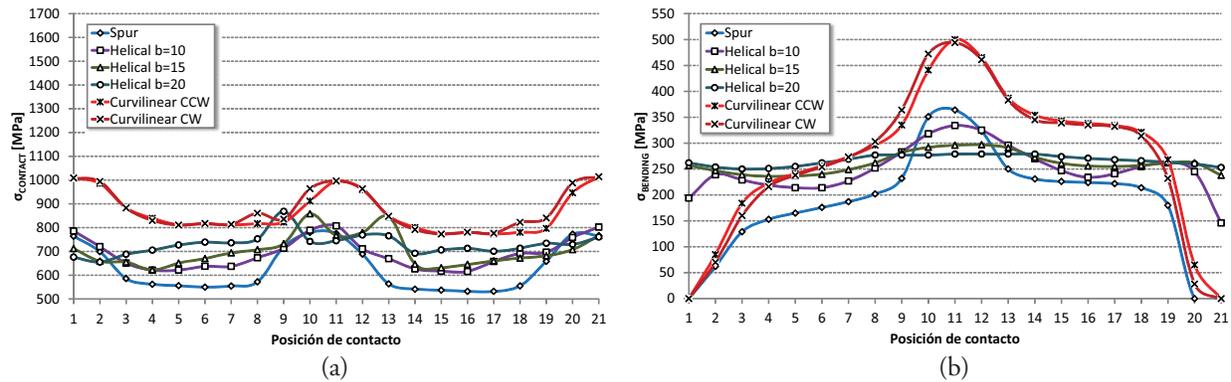


Figura 4.1.17: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20 previamente optimizadas con rebaje de cabeza.

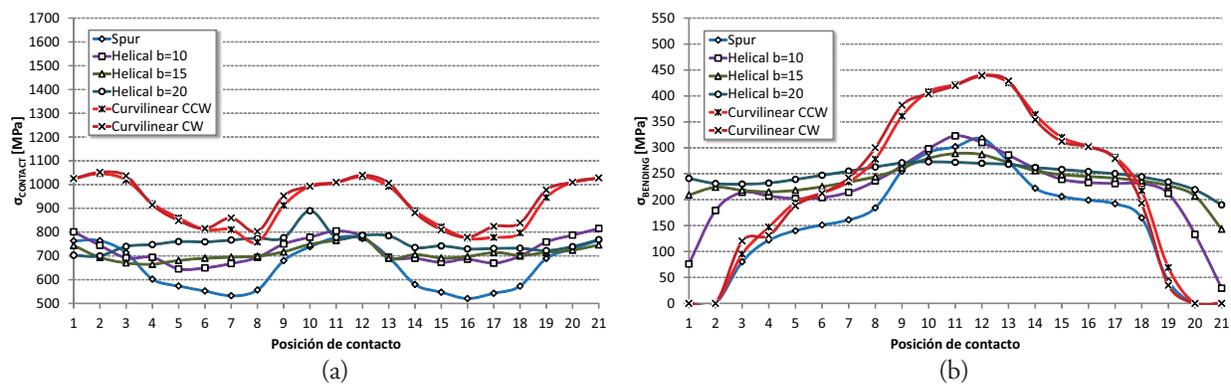


Figura 4.1.18: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25 previamente optimizadas con rebaje de cabeza.

cilíndrico-curvilíneos el contacto se encuentra localizado, y, por otro lado, en transmisiones de engranajes cilíndricos-helicoidales la longitud total de contacto resulta inferior a la correspondiente a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos en la región de carga compartida del ciclo de engrane.

- Las tensiones máximas de contacto de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos y cilíndrico-rectos presentan aproximadamente la misma tendencia y la misma componente alternante a lo largo del ciclo completo de engrane, siendo la componente media mayor en el primer caso que en el segundo como consecuencia del contacto localizado de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
- Al igual que en el caso anterior, la componente media de las tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane resulta superior en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos como consecuencia de la localización del contacto en el primer caso.
- La mayor uniformidad de las tensiones de flexión máximas en la base del diente en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales con respecto a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos tiene su origen en la inclinación de las líneas de contacto que se extienden desde la base a la cabeza durante todo el ciclo de engrane.
- La componente media de las tensiones de contacto máximas de todas las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25 analizadas resultan ligeramente superiores a las correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20 como consecuencia del mayor ángulo de presión normal  $\alpha_n$  en el primer caso que en el segundo.

A raíz de todo lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje perfectas y en ausencia de deflexiones propias de los ejes que sustentan los engranajes durante el proceso de transmisión de potencia, las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos

y cilíndrico-helicoidales se comportan mejor que las transmisiones de engranajes-curvilíneos objeto del presente trabajo. Sin embargo, dichas condiciones de montaje y operación son teóricas e ideales, puesto que, por un lado, en el montaje de transmisiones de engranajes siempre existen holguras o errores de alineación o fabricación, y, por otro lado, la transferencia de potencia en transmisiones de engranajes siempre conlleva deflexiones tanto angulares como lineales de los ejes sobre los cuales se encuentran montados los engranajes.

### Transmisiones de engranajes cilíndricos que presentan una desalineación angular

$$\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$$

Las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizadas recogidas en la Tabla 4.1.7 aparecen reflejadas en las Figuras 4.1.19 y 4.1.20. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

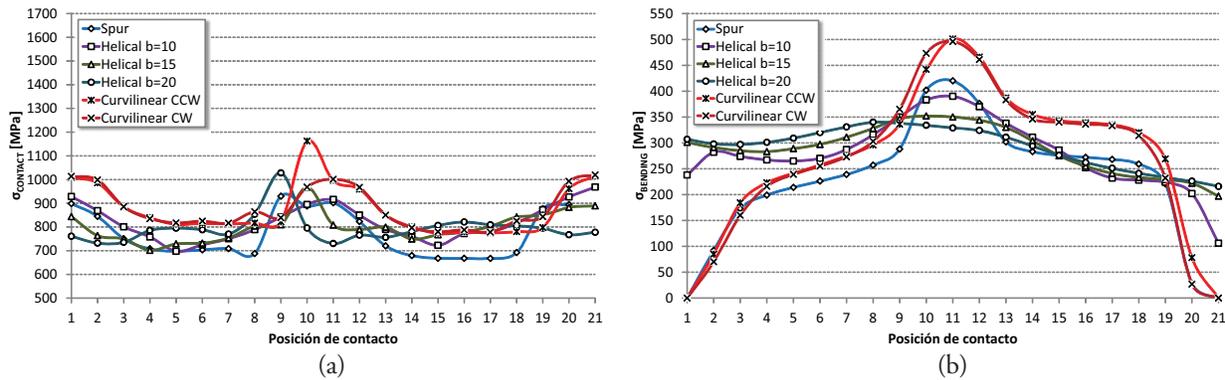


Figura 4.1.19: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20 previamente optimizadas con rebaje de cabeza y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$ .

- Las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane se incrementa en los casos de las transmisiones de engranajes

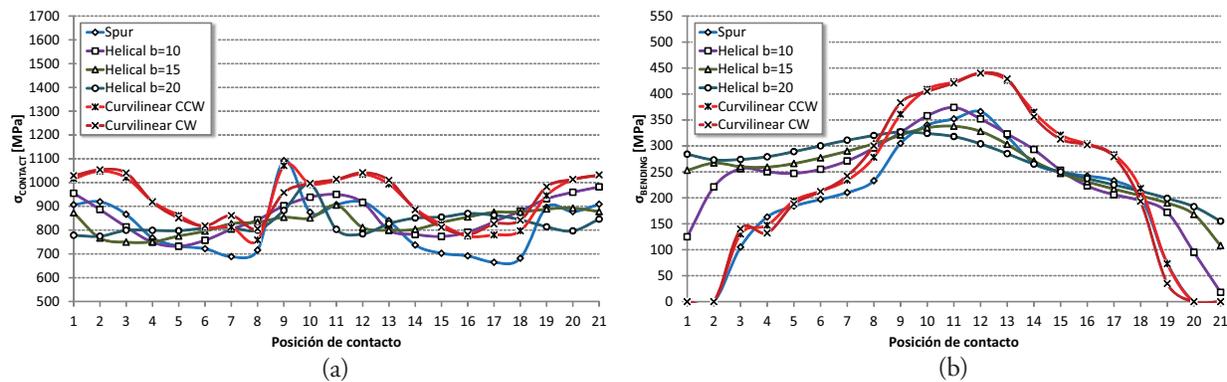


Figura 4.1.20: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25 previamente optimizadas con rebaje de cabeza y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$ .

cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales con respecto al apartado anterior, mientras que en los casos de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos las tensiones máximas de contacto permanecen prácticamente invariables debido al efecto de localización del contacto y menor sensibilidad de la transmisión frente a los errores de alineación.

- Las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, a pesar de la introducción de un grado de desalineación angular intermedio, continúan poseyendo una componente media de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane inferiores a las correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos. El fenómeno observado puede tener su origen en el proceso previo de optimización de la geometría de los dientes de las transmisiones de engranajes cilíndricos a través de la aplicación del procedimiento de rebaje de punta de cabeza.
- En el caso de las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20, las de engranajes

curvilíneos posee los valores más elevados de la tensión de contacto máxima a lo largo del ciclo completo de engrane con respecto a las de engranajes rectos o helicoidales.

- En el caso de las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25, la de engranajes rectos y curvilíneos son las que poseen los valores más elevados de la tensión de contacto máxima a lo largo del ciclo completo de engrane con respecto a las cilíndrico-helicoidales. Este fenómeno de igualación observado tiene su origen en el incremento del ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .
- La transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos que opera en el sentido de giro antihorario (CCW) posee un valor de tensión máxima de contacto más elevado que el correspondiente a la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos que opera en el sentido de giro horario (CW) debido a la aparición de un fenómeno de contacto en borde por efecto del grado de desalineación angular.

A raíz de lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje en las que existe un grado de desalineación angular intermedio, el comportamiento tensional de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos generadas con una fresa circular de radio  $R_C = 80$  mm mejora con respecto a los comportamientos tensionales de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, pero no lo suficiente como para justificar su empleo frente a las transmisiones de engranajes cilíndricos clásicas, ya que, para el grado de desalineación angular considerado en el presente apartado, el procedimiento de optimización por despulla en cabeza de la transferencia de carga en las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales posee una notable influencia sobre la reducción del estado tensional en dichas transmisiones mecánicas.

### **Transmisiones de engranajes cilíndricos que presentan una desalineación angular**

$$\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$$

Las tensiones de contacto y de flexión obtenidas en el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndricos previamente optimizadas recogidas en la Tabla 4.1.7 aparecen refleja-

das en las Figuras 4.1.21 y 4.1.22. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

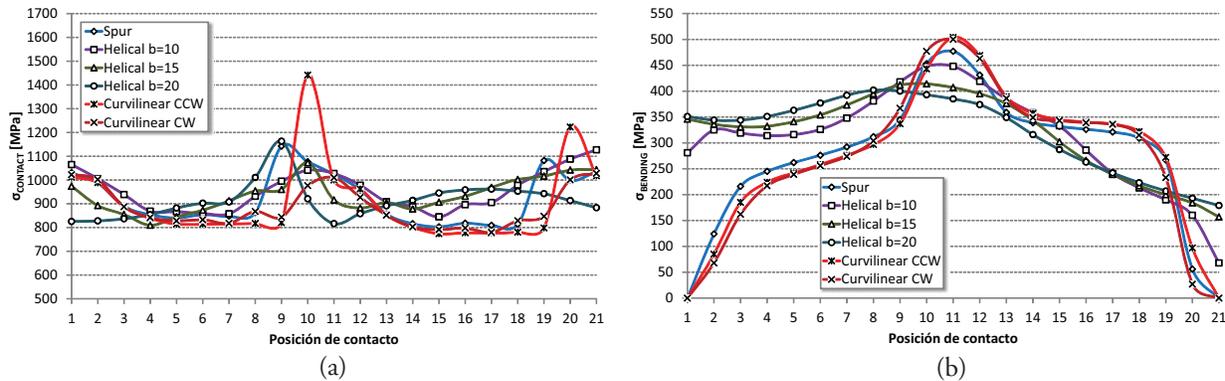


Figura 4.1.21: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20 previamente optimizadas con rebaje de cabeza y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$ .

- Las tensiones máximas de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos resultan inferiores a las componentes medias correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales, mientras que las componentes medias de las tensiones máximas de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane son prácticamente las mismas en todas las transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas.
- Las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en el caso de la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos que operan en el sentido de giro horario (CW) permanecen prácticamente invariables en cada uno de los tres casos de desalineación angular analizados, mostrando una muy baja sensibilidad frente a los errores de alineación.
- El valor más elevado de las tensiones de contacto máximas a lo largo del ciclo completo

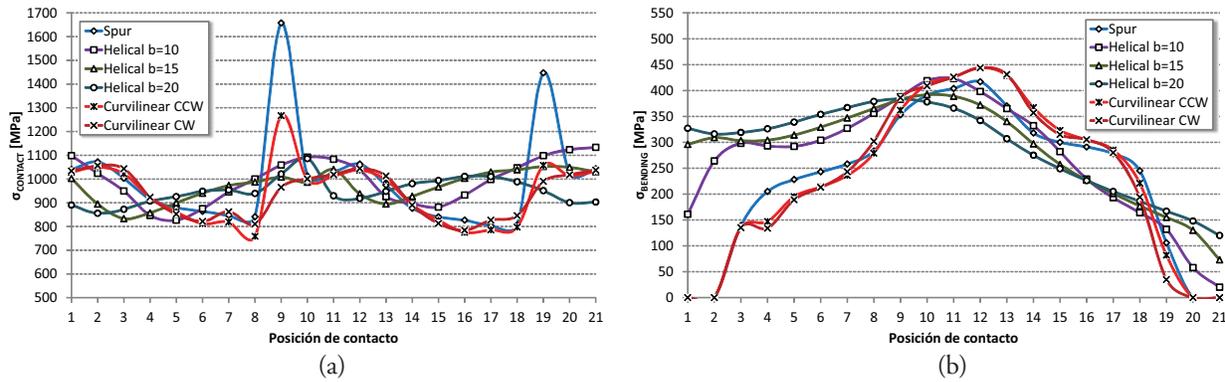


Figura 4.1.22: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente (Von Mises) a lo largo del ciclo completo de engrane, en transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25 previamente optimizadas con rebaje de cabeza y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$ .

de engrane en el caso de la transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos que operan en el sentido de giro horario (CW) es claramente inferior a los valores más elevados de las tensiones de contacto máximas correspondientes a las restantes transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas.

- Al igual que en el caso de desalineación angular del subapartado anterior, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que operan en el sentido de giro antihorario (CCW) poseen un valor máximo de tensión de contacto más elevado que el correspondiente a las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que operan en el sentido de giro horario (CW) por efecto de un fenómeno de contacto en borde.

A raíz de todo lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje en las que existe un grado de desalineación angular severo, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que operan en el sentido de giro horario (la superficie convexa de los dientes actúa como superficie activa conductora), y que han sido generadas con un radio tallado  $R_C = 80$  mm, se comportan mejor que las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales desde el punto de vista tensional, justificándose de este modo su

empleo como transmisiones que pueden sustituir a las clásicas transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos o helicoidales.

## 4.2. Influencia del radio de la fresa circular generadora en el estado tensional de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos

El objetivo del presente apartado es el estudio de la influencia del radio de la fresa circular generadora  $R_C$  de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos en el estado tensional de estas transmisiones de engranajes.

La inclusión de este estudio se justifica en base a los resultados reflejados en varios trabajos [4, 6, 7] acerca del comportamiento de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, lo cual puede resumirse en las siguientes puntos:

- Una disminución del radio de la fresa generadora  $R_C$  reduce la extensión de las elipses de contacto y, por lo tanto, aumenta la localización del contacto, reduciéndose el nivel máximo de los errores de transmisión  $|\Delta\phi_2(\phi_1)|_{max}$  y aumentando el nivel de las tensiones de contacto  $\sigma_{CONTACT}$  y de flexión en la base del diente  $\sigma_{BENDING}$ .
- Por el contrario, un incremento del radio de la fresa generadora  $R_C$  aumenta la extensión de las elipses de contacto y, por lo tanto, disminuye la localización del contacto, incrementándose el nivel máximo de los errores de transmisión  $|\Delta\phi_2(\phi_1)|_{max}$  y reduciéndose el nivel de las tensiones de contacto  $\sigma_{CONTACT}$  y de flexión en la base del diente  $\sigma_{BENDING}$ .

A raíz de lo expuesto, cabría pensar que para cada transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos y, partiendo de unas condiciones de operación determinadas, existe un rango de variación del radio de generación de la fresa generadora  $R_C$  dentro del cual es posible alcanzar una solución de compromiso entre el nivel máximo de los errores de transmisión

$|\Delta\phi_2(\phi_1)|_{max}$  y los niveles máximos de las tensiones de contacto  $\sigma_{\text{CONTACT}}$  y de flexión en la base del diente  $\sigma_{\text{BENDING}}$ .

Por lo tanto, en el presente apartado se van a analizar las tendencias del nivel máximo de los errores de transmisión  $|\Delta\phi_2(\phi_1)|_{max}$  y de los niveles máximos de las tensiones de contacto  $\sigma_{\text{CONTACT}}$  y de flexión en la base del diente  $\sigma_{\text{BENDING}}$  con el radio de la fresa generadora  $R_C$ . Previamente a comenzar con el estudio de sensibilidad propiamente dicho, conviene señalar como detalle importante que se va a adoptar el sentido de rotación horario (CW) como sentido de giro de operación de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, en virtud de las conclusiones obtenidas en el Apartado 4.1.4.

### 4.2.1. Descripción de los casos a analizar

Los parámetros básicos de diseño comunes a todas las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos estudiadas aparecen recogidos en la Tabla 4.1.1, mientras que los diferentes casos analizados aparecen recogidos en la Tabla 4.2.1.

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha_n$ [°]	20	25	20	25	20	25	20	25	20	25	20	25
$R_C$ [mm]	80	100	120	140	160	$\infty$						

Tabla 4.2.1: Tipos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas.

Los casos 11 y 12 recogidos en la Tabla 4.2.1 corresponden a transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos, las cuales constituyen el caso límite de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

Tal como ya se ha expuesto con anterioridad en el Apartado 4.1.1, todas las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos recogidas en la Tabla 4.2.1 permanecen libres de los fenómenos de penetración e interferencia. Asimismo, el intervalo de variación del radio de la fresa circular  $R_C$  analizado (ver Tabla 4.2.1), resulta muy superior a los valores numéricos del radio de generación límite de la fresa generadora  $(R_C)_{lim}$  reflejados en la Tabla 4.1.4, de

modo que todos los casos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos recogidos en la Tabla 4.2.1 permanecen libres del fenómeno de apuntamiento.

Por último, cada uno de los tipos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos recogidos en la Tabla 4.2.1 han sido sometidos en cada uno de los procesos de análisis tensional a las sollicitaciones mecánicas y de errores de alineación reflejadas en la Tabla 4.1.5.

### 4.2.2. Optimización del rebaje de cabeza

Al igual que en el Apartado 4.1.2 del presente trabajo, resulta necesario optimizar la geometría de los flancos de los dientes de las tipologías de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos definidas previamente en la Tabla 4.2.1 antes de iniciar el estudio de influencia del estado tensional de este tipo de transmisiones de engranajes con el radio de la fresa generadora  $R_C$ . Para ello, también se va a hacer uso del tipo de rebaje de cabeza de tipo parabólico tangente al perfil de envolvente de la superficie de los flancos de los dientes. Los parámetros geométricos característicos del rebaje de cabeza aplicado a cada una de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos en cada uno de los casos de simulación numérica llevados a cabo aparecen recogidos en la Tabla 4.2.2.

Caso	1	2	3	4	5	6	7
$a_{pf}$ [1/mm]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$h_{tr}$ [mm]	0.7						

Tabla 4.2.2: Casos de simulación numérica para la optimización del proceso de rebaje de cabeza.

El procedimiento completo de optimización de las superficies activas de los dientes de las transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos definidas previamente en la Tabla 4.2.1 empleado es exactamente el mismo que el aplicado a las transmisiones de engranajes cilíndricos analizadas en el Apartado 4.1.2. De este modo, y con efectos de simplificación, en

el presente apartado únicamente se van a mostrar los resultados numéricos obtenidos tras la aplicación de dicho procedimiento. Dichos resultados numéricos aparecen reflejados en la Tabla 4.2.2, la cual recoge las características geométricas de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos optimizadas a las cuales se les va a aplicar el algoritmo numérico de simulación del engrane posteriormente en el Apartado 4.2.3.

Caso	$R_C$ [mm]	$\alpha_n$ [°]	$(a_{pf})_{optimal}$ [1/mm]
1	80	20	0.05
2		25	0.04
3	100	20	0.04
4		25	0.03
5	120	20	0.04
6		25	0.03
7	140	20	0.04
8		25	0.02
9	160	20	0.04
10		25	0.02
11	$\infty$	20	0.02
12		25	0.01

Tabla 4.2.3: Tipos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas

Por último, conviene destacar como detalle importante la disminución del coeficiente de parábola óptimo  $(a_{pf})_{optimal}$  característico del proceso de rebaje de cabeza con el incremento del radio de generación de la fresa talladora  $R_C$  y del ángulo de presión normal de referencia  $\alpha_n$  en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

### 4.2.3. Simulación del engrane

En el presente subapartado se va a llevar a cabo la simulación del engrane de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos previamente optimizadas en el Apartado 4.2.2, bajo las condiciones de operación descritas en la Tabla 4.1.5. Al igual que en el Apartado 4.1.3, para llevar a cabo la simulación del engrane se he hecho uso del algoritmo de análisis de contacto (TCA) de carácter numérico que ha sido previamente descrito en el Apartado 3.1.2, para lo cual se han adoptado las mismas características numéricas recogidas en la Tabla 4.1.8.

Los resultados numéricos derivados de la aplicación de la variante numérica del algoritmo TCA sobre las transmisiones de engranajes recogidas en la Tabla 4.2.1 aparecen reflejados en las Figuras 4.2.1 y 4.2.2. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

- Los niveles máximos de errores de transmisión en transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos son muy reducidos e inferiores a los correspondientes a transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
- A pesar de que no parece existir una cierta tendencia de los resultados numéricos con el radio de generación de la fresa talladora  $R_C$ , sí que se puede afirmar que los niveles máximos de errores de transmisión en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos son crecientes, en mayor o menor grado, con el error de desalineación angular horizontal  $\Delta\gamma_h$ .
- De forma general, se puede afirmar que los niveles máximos de errores de transmisión de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25 son iguales o superiores a los correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20, especialmente para grados severos de desalineación angular horizontal  $\Delta\gamma_h$ .

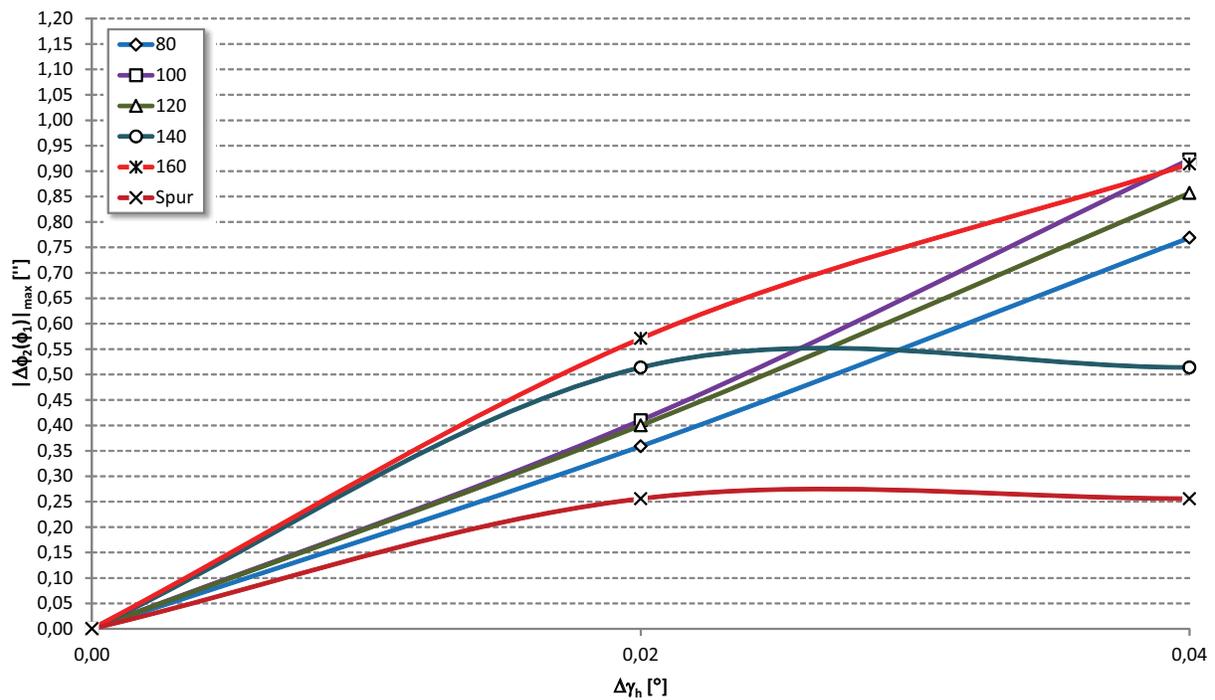


Figura 4.2.1: Variación del nivel máximo de los errores de transmisión con el grado de desalineación angular en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20.

#### 4.2.4. Análisis tensional

En el presente apartado se van a analizar los resultados numéricos obtenidos de la aplicación del método de los elementos finitos para la determinación del estado tensional del conjunto de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas en el presente trabajo sometidas a las sollicitaciones mecánicas y de errores de alineación recogidas en la Tabla 4.1.5.

El modelo de elementos finitos empleado en las simulaciones computacionales de todos los casos analizados de transmisiones de engranajes cilíndricos es el mismo que el descrito en los Apartados 3.2 y 4.1.4. La representación gráfica de los resultados numéricos obtenidos para cada una de las tres condiciones de montaje recogidas en la tabla 4.1.5 aparecen recogidas

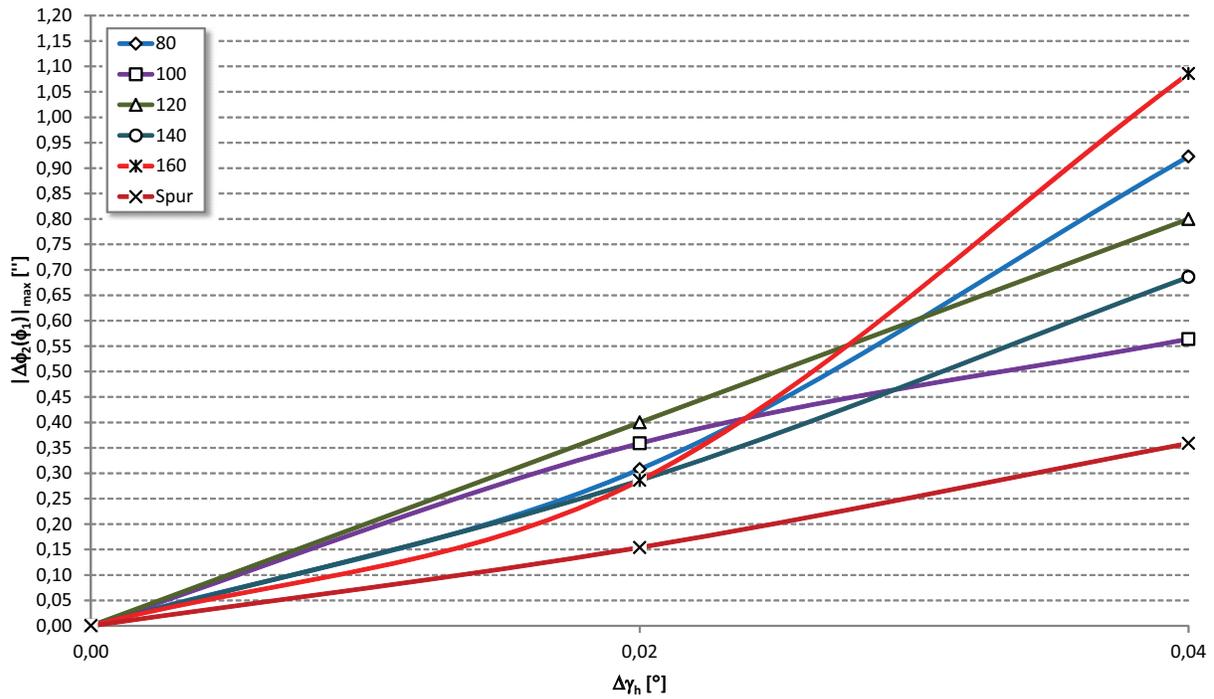


Figura 4.2.2: Variación del nivel máximo de los errores de transmisión con el grado de desalineación angular en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25.

en los siguiente subpartados.

### Transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos perfectamente alineados

Las tensiones máximas de contacto y de flexión obtenidas para el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos previamente optimizadas (ver Tabla 4.2.2) en condiciones de alineación perfecta (ausencia de errores de alineación y/o montaje) se muestra en las Figuras 4.2.3 y 4.2.4. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

- Las tendencias observadas en los resultados numéricos obtenidos resultan totalmente acordes con las conclusiones obtenidas en varios de los trabajos consultados [4, 6, 7],

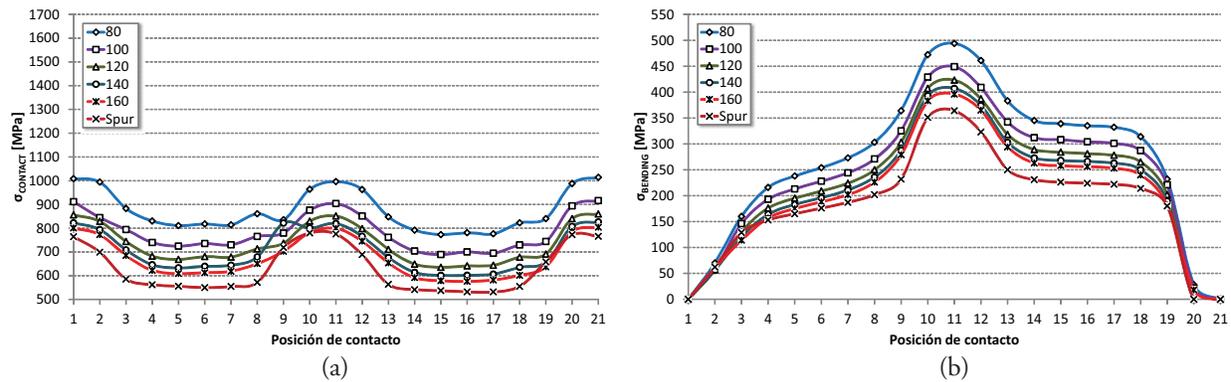


Figura 4.2.3: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20 previamente optimizadas y perfectamente alineadas.

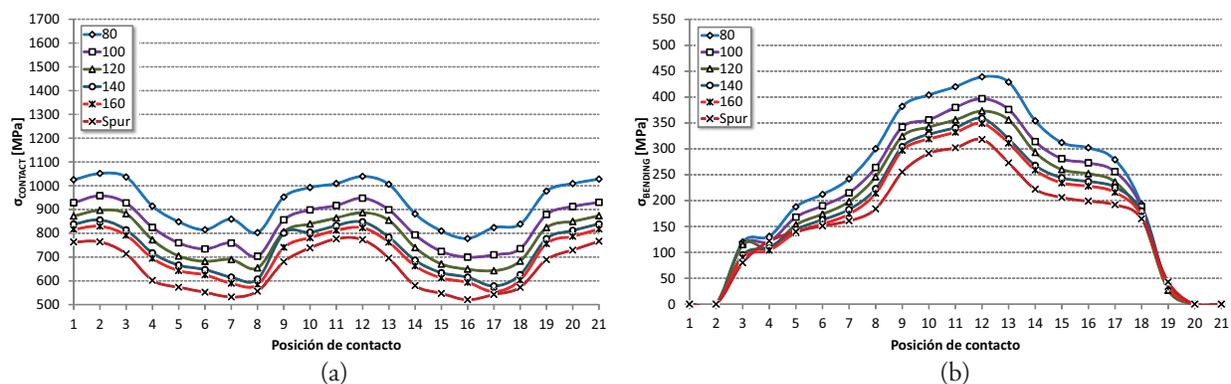


Figura 4.2.4: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25 previamente optimizadas y perfectamente alineadas.

ya que cuanto mayor es el radio de generación de la fresa talladora  $R_C$  mayor es la extensión de las elipses de contacto, y, por lo tanto, menor es la componente media de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane.

- Las tensiones máximas de contacto de los distintos tipos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos presentan aproximadamente la misma tendencia y la misma componente alternante a lo largo del ciclo completo de engrane.
- También es posible observar como las diferencias existentes entre las componentes medias de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane de los distintos casos analizados disminuyen a medida que se incrementa el radio de la fresa circular generadora  $R_C$ . Este hecho observado hace pensar que va a existir un valor límite para este parámetro de fabricación a partir de cual grandes incrementos del mismo dan lugar a leves disminuciones de las componentes medias de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente.
- Al igual que en el caso de las transmisiones de engranajes cilíndricos anteriormente analizadas en el Apartado 4.1, la componente media de las tensiones de contacto máximas de todas las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 25/25 analizadas resultan ligeramente superiores a las correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndricos tipo 20/20 como consecuencia del mayor ángulo de presión normal  $\alpha_n$  en el primer caso que en el segundo.

A raíz de todo lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje perfectas y en ausencia de deflexiones propias del proceso de transmisión de carga, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos se comportan mejor cuanto mayor sea el radio de generación de la fresa circular generadora  $R_C$ . Sin embargo, tal como ya se ha indicado con anterioridad en el Apartado 4.1.4, dichas condiciones de montaje y operación son teóricas e ideales.

## Transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que presentan una desalineación angular $\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$

Las tensiones máximas de contacto y de flexión obtenidas en el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos previamente optimizadas recogidas en la Tabla 4.2.2 aparecen reflejadas en las Figuras 4.2.5 y 4.2.6. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

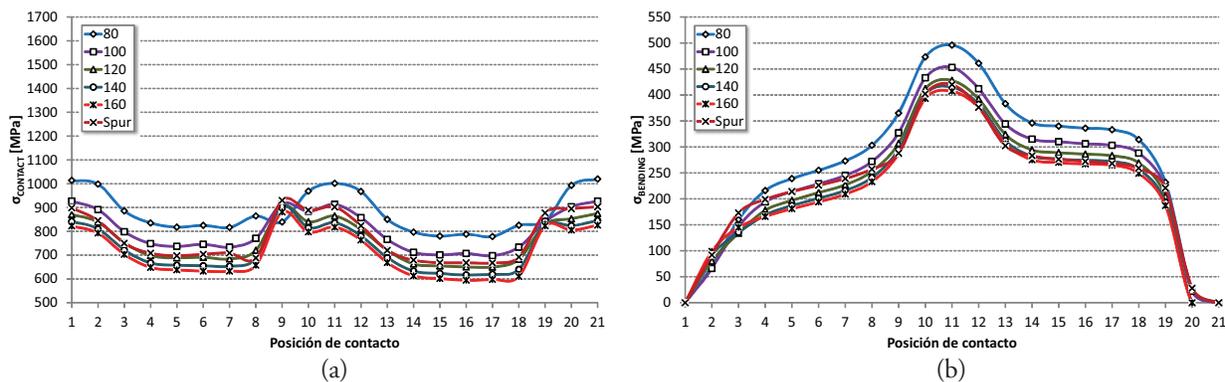


Figura 4.2.5: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20 previamente optimizadas y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$

- Las componentes medias de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane se incrementa en todos los casos analizados de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, siendo dichos incrementos tanto mayores cuanto mayor es el radio de la fresa generadora  $R_C$ .
- Para un grado de desalineación angular intermedio, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos en los casos  $R_C = 120 \text{ mm}$ ,  $R_C = 140 \text{ mm}$  y  $R_C = 160 \text{ mm}$  poseen las componentes medias de sus respectivas tensiones máximas de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane inferiores a las correspondientes a las transmisiones

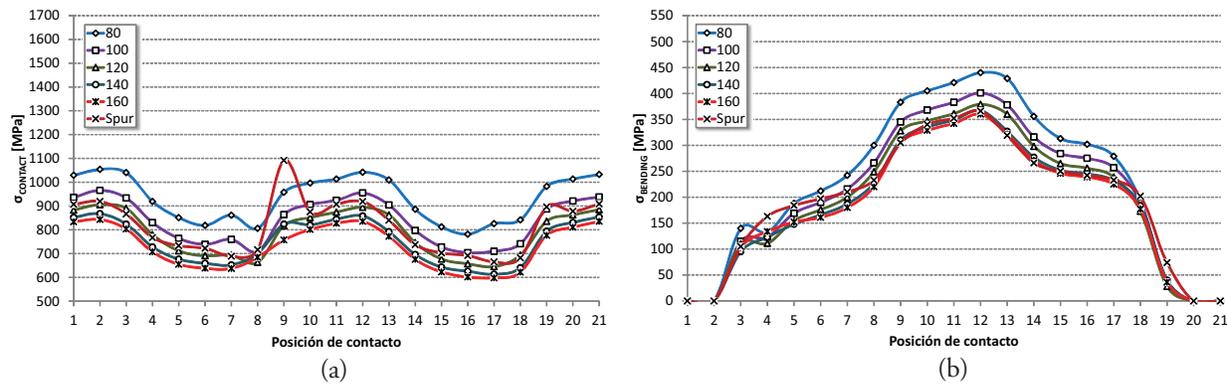


Figura 4.2.6: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25 previamente optimizadas y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,02^\circ$

de engranajes cilíndrico-rectos, mientras que en los casos  $R_C = 80$  mm y  $R_C = 100$  mm se invierte la tendencia observada. El hecho observado hace pensar que todas las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, para un grado de desalineación angular determinado, poseen un radio de fresa generadora óptimo  $(R_C)_{optimal}$  en el cual se minimizan las componentes medias de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane.

- Se aprecia la existencia de un incremento súbito de las tensiones máximas de contacto en la región de transferencia total de carga de una pareja de dientes a la contigua en todos los casos analizados de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20, excepto el caso  $R_C = 80$  mm. El hecho observado puede tener su origen en la aparición de un fenómeno de contacto en borde por efecto del grado de desalineación angular a medida que se incrementa el radio de la fresa generadora  $R_C$ , existiendo un valor límite para este parámetro de fabricación por debajo del cual no aparece el fenómeno indeseado citado debido a un nivel de localización del contacto mayor. Dicho efecto no está presente en las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo

25/25 como consecuencia del mayor ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .

- Se aprecia como el fenómeno de contacto de borde citado es tanto más acusado cuanto mayor es el radio de la fresa generadora  $R_C$  y cuanto menor es el ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .

A raíz de todo lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje en las que existe un grado de desalineación angular intermedio, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos se comportan mejor que las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos para un cierto rango del radio de la fresa generadora  $R_C$ , existiendo un valor óptimo de dicho parámetro de fabricación para el cual se minimizan las componentes medias de las tensiones máximas de contacto y de flexión en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane. Fuera del intervalo indicado, el procedimiento de optimización por despulla en cabeza posee una mayor influencia sobre la reducción del estado tensional en las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos frente al empleo de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.

### **Transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos que presentan una desalineación angular $\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$**

Las tensiones máximas de contacto y de flexión obtenidas en el piñón de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos previamente optimizadas recogidas en la Tabla 4.2.2 aparecen reflejados en las Figuras 4.2.7 y 4.2.8. Del análisis de los resultados obtenidos cabe realizar los siguientes comentarios:

- Las componentes medias de las tensiones máximas de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane de todos los tipos de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos resultan inferiores a las componentes medias correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos.
- En los casos de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20, el efecto de contacto en el borde de cabeza del diente debido a la existencia del grado

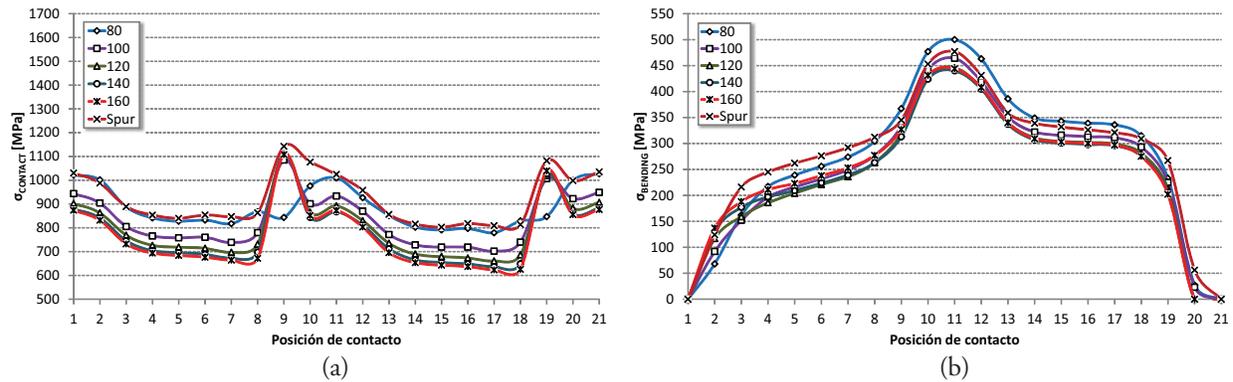


Figura 4.2.7: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20 previamente optimizadas y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$

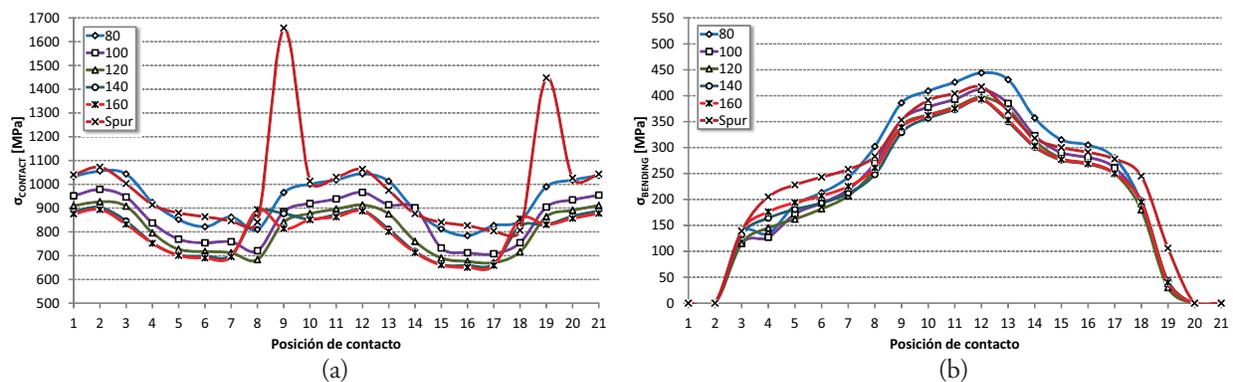


Figura 4.2.8: Evolución de (a) tensiones de contacto máximas y (b) tensiones de flexión máximas en la base del diente a lo largo del ciclo completo de engrane en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25 previamente optimizadas y sometidas a una desalineación angular  $\Delta\gamma_h = 0,04^\circ$

de desalineación angular da lugar a la aparición del valor más elevado de las tensiones de contacto máximas a lo largo del ciclo completo de engrane, exceptuando el caso  $R_C = 80$  mm. Dado que el valor máximo de las tensiones de contacto alcanza su nivel más reducido en el caso  $R_C = 80$  mm, dicha tipología de transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos se comporta mejor que la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos tipo 20/20 y los restantes casos analizados de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 20/20.

- En los casos de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25, el efecto de contacto de borde solamente aparece en los casos  $R_C = 140$  mm y  $R_C = 160$  mm y con un grado de severidad muy reducido. A raíz de lo expuesto, queda justificado que todos los casos analizados de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos tipo 25/25 se comportan mejor que la transmisión de engranajes cilíndrico-rectos tipo 25/25.
- Tomando también como base los resultados numéricos obtenidos en el Apartado 4.2.4, es posible afirmar que el fenómeno de contacto de borde aparece en una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos debido a la existencia de un cierto grado de desalineación angular a partir de un determinado radio de la fresa generadora  $R_C$ . En el caso de que dicho fenómeno indeseado aparezca es tanto más severo cuanto mayor sea el radio de la fresa generadora  $R_C$  y cuanto menor sea el ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .

A raíz de todo lo expuesto anteriormente, queda justificado que, en condiciones de montaje en las que existe un grado de desalineación angular severo, las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas en el presente estudio de sensibilidad se comportan mejor que las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos desde el punto de vista tensional, justificándose de este modo su empleo en estas situaciones.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones

Las principales conclusiones que se pueden extraer de la realización del presente trabajo son las siguientes:

- Las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos constituyen una tipología de transmisiones de engranajes que permiten localizar el contacto haciendo uso de un útil fresa que realiza un proceso simple de talla por generación, sin necesidad de tener que aplicar movimientos adicionales de herramienta para lograr un proceso de abombamiento simple longitudinal de la superficie del piñón de la transmisión en cuestión. Sin embargo, para ello es preciso aplicar un proceso de indexado ya que la generación de cada hueco entre dientes es independiente.
- La optimización del coeficiente de parábola  $a_{pf}$  característico del proceso de rebaje de punta de cabeza permite reducir notablemente el nivel de las tensiones máximas de contacto a lo largo del ciclo completo de engrane, aunque supone un leve incremento del nivel máximo de las tensiones de flexión en la base del diente. Resulta preciso tener en consideración que en la mayoría de transmisiones de engranajes, la picadura o fatiga superficial producida por las elevadas tensiones de contacto constituye la principal

causa del fallo. A raíz de lo expuesto, la optimización de la geometría de los flancos lograda por medio de la despulla en cabeza permite un aumento notable del factor de seguridad frente a picadura  $S_H$  en las distintas tipologías de transmisiones de engranajes analizadas, e implica un ligero descenso del factor de seguridad en flexión  $S_F$  de las mismas, lográndose de esta forma incrementar la duración esperada.

- El coeficiente de parábola óptimo  $(a_{pf})_{optimal}$  característico del proceso de rebaje de punta de cabeza es decreciente con el radio de generación de la fresa talladora  $R_C$  y con el ángulo de presión normal  $\alpha_n$ .
- Asimismo, la optimización de la geometría de los flancos mediante el rebaje de punta de cabeza ha dado resultados muy satisfactorios en transmisiones de engranajes cilíndricos reduciendo notablemente las tensiones máximas alcanzadas a lo largo de todo el ciclo de engrane.
- Los niveles máximos de error de transmisión en las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos son notablemente inferiores a los correspondientes a las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales, siendo las diferencias entre ambos grupos de transmisiones mecánicas tanto mayores cuanto mayores son el grado de desalineación angular  $\Delta\gamma_h$  y el ángulo de inclinación del dentado de referencia  $\beta_p$ .
- Las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-curvilíneos no requieren de la aplicación de funciones de errores de transmisión prediseñadas de tipo parabólico para la absorción de funciones de errores de transmisión cuasilineales y discontinuas originadas por efecto de los errores de alineación angular, ya que los niveles máximos de los errores de transmisión de este tipo de transmisiones mecánicas por efecto del grado de desalineación angular  $\Delta\gamma_h$  son tan reducidos que no se justifica el empleo de abombamiento simple en la dirección del perfil activo de las superficies de los dientes de las mismas, puesto que su empleo podría llegar a ser contraproducente. En el caso de las transmisiones de engranajes cilíndrico-helicoidales, sí que podría ser recomendable emplear funciones de errores de transmisión prediseñadas de tipo parabólico para

absorber los elevados niveles máximos de errores de transmisión.

- Todas las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos poseen, para unas condiciones de diseño determinadas, un radio de generación límite de la fresa circular generadora  $(R_C)_{lim}$  por debajo del cual aparece el fenómeno indeseado del apuntamiento.
- El incremento del radio de la fresa circular generadora  $R_C$  de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos reduce la componente media de las tensiones de contacto y de flexión en la base del diente, siendo las diferencias entre distintos casos tanto menores cuanto mayor es este parámetro de fabricación.
- En unas determinadas condiciones de desalineación angular, existe un rango del radio de la fresa generadora  $R_C$  para el cual una familia de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, dadas unas condiciones de diseño y fabricación fijas, se comportan mejor que las correspondientes transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales desde el punto de vista del nivel tensional. Fuera de dicho rango, la aplicación del proceso de optimizado por medio del rebaje de punta de cabeza sobre las superficies activas de los dientes de las transmisiones de engranajes cilíndrico-rectos y cilíndrico-helicoidales resulta más beneficiosa que el empleo de las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos.
- Bajo condiciones de desalineación angular, aparecen fenómenos de contacto en borde en transmisiones de engranajes cilíndrico curvilíneos previamente optimizadas. El riesgo de aparición de este fenómeno indeseado es tanto mayor cuanto mayor sea el radio de generación de la fresa talladora  $R_C$  y cuanto menor sea el ángulo de presión normal  $\alpha_n$ , y se ha observado que también es dependiente del sentido de giro de operación de las transmisión mecánica. El grado de severidad del fenómeno de contacto en borde es creciente con el grado de desalineación angular  $\Delta\gamma_h$ .
- El incremento del ángulo de presión normal  $\alpha_n$  en las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos eleva levemente la componente media de las tensiones de contacto,

pero reduce notablemente el riesgo de aparición del fenómeno indeseado de contacto en borde, además del grado de severidad de dicho fenómeno en el caso de que finalmente aparezca. De este modo, el incremento del ángulo de presión normal  $\alpha_n$  posee un efecto muy beneficioso sobre este tipo de transmisiones mecánicas.

- Se ha demostrado que las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos analizadas en el presente trabajo operan más adecuadamente cuando la superficie activa conductora es la superficie convexa de sus dientes. Esto se debe al fenómeno indeseado de contacto en borde aparece en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos para radios de tallado  $R_C$  más reducidos operando con la superficie cóncava de sus dientes como superficie activa conductora que operando con la superficie convexa de los mismos.

## 5.2. Trabajos futuros

Los posibles trabajos que pueden iniciarse tomando como punto de partida los resultados obtenidos en el presente trabajo aparecen expuestos a continuación:

- Estudio del comportamiento mecánico de una transmisión de engranajes cilíndrico-curvilíneos particular, caracterizada por unas condiciones de diseño y fabricación determinadas, para unas condiciones de operación establecidas, en función del radio de generación de la fresa talladora  $R_C$ , cuyo rango de variación es  $((R_C)_{lim}, \infty)$ , y del sentido de rotación de operación de la transmisión mecánica.
- Estudio del fenómeno de contacto en borde en transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos y cuantificación de su grado de dependencia con el radio de generación de la fresa talladora  $R_C$ , con el ángulo de presión normal  $\alpha_n$  y con el sentido de rotación de operación de la transmisión mecánica.
- Implementación computacional para el caso de transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos de un proceso de generación independiente para cada una de las dos su-

perfiles activos de sus dientes, desligando de este modo el grado de localización del contacto con el radio de la fresa circular generadora.

- Aplicación del procedimiento de síntesis local a las transmisiones de engranajes cilíndrico-curvilíneos, con objeto de optimizar las curvaturas de las superficies activas de los dientes para unas condiciones de engrane predeterminadas.
- Perfeccionamiento del modelo de elementos finitos de las transmisiones de engranajes cilíndricos utilizado a través de la introducción de las mejoras que se citan a continuación:
  - Modelización del conjunto formado por el eje y por la rueda dentada.
  - Modelización del efecto de torsión sobre los dientes de los engranajes.
  - Modelización del alma de la rueda dentada.



# Bibliografía

- [1] Shue-Tseng Liu. Curvilinear cylindrical gears. *Gear Technology*, 5(3):8–12, may 1988.
- [2] Jui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay. Mathematical model and undercutting of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth. *Mechanism and Machine Theory*, 36(11–12):1189–1202, november 2001.
- [3] L. Andrei, G. Andrei, A. Epureanu, N. Oancea, and D. Walton. Numerical simulation and generation of curved face width gears. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 42(1):1–6, january 2002.
- [4] Rui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay. Contact characteristics of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth. *Mechanism and Machine Theory*, 39(9):905–919, september 2004.
- [5] Jui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay. Mathematical Model and Surface Deviation of Cylindrical Gears With Curvilinear Shaped Teeth Cut by a Hob Cutter. *Journal of Mechanical Design*, 127(5):982–987, september 2005.
- [6] Jui-Tang Tseng and Chung-Biau Tsay. Undercutting and Contact Characteristics of Cylindrical Gears With Curvilinear Shaped Teeth Generated by Hobbing. *Journal of Mechanical Design*, 128(3):634–643, may 2006.
- [7] Yi-Cheng Wu, Kuan-Yu Chen, Chung-Biau Tsay, and Yukinori Ariga. Contact Characteristics of Circular-Arc Curvilinear Tooth Gear Drives. *Journal of Mechanical Design*, 131(8):0810031–0810038, august 2009.

- 
- [8] Faydor L. Litvin and Alfonso Fuentes Aznar. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK, second edition, 2004.
- [9] Alfonso Fuentes-Aznar, Ignacio Gonzalez-Perez, Francisco T. Sanchez-Marin, and Kenichi Hayasaka. On the behaviour of asymmetric cylindrical gears in gear transmissions. In *Proceeding of FISITA 2012 World Automotive Congress*, november 2012.
- [10] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen IV: Elements (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [11] John J. Coy. *Gear Design, Manufacturing and Inspection Manual*, chapter 1. Society of Automotive Engineers, 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA 15096-0001, 1990.
- [12] Darle W. Dudley. *Handbook of Practical Gear Design*. Technomic, 851 New Holland Avenue, Box 3535, Lancaster, Pennsylvania 17604 U.S.A., 1994.
- [13] Ignacio González Pérez. *Diseño, simulación del engrane, estudio del contacto y análisis tensional de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo ruido y contacto mejorado*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cartagena, diciembre 2003.
- [14] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen II: Analysis (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [15] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen III: Meterials (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [16] *ABAQUS Analysis User's Manual. Volumen V: Prescribed Conditions, Constraints & Interactions (Version 6.5)*. ABAQUS, Inc., Rising Sun Mills 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, 2004.
- [17] Robert L. Mott. *Diseño de elementos de máquinas*. Pearson Educación, Atlacomulco 500-50. piso, Industrial Atoto, 53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México, fourth edition, 2006.

- 
- [18] Raynald Guilbault, Claude Gosselin, and Louis Cloutier. Helical Gears, Effects of Tooth Deviations and Tooth Modifications on Load Sharing and Fillet Stresses. *Journal of Mechanical Design*, 128(2):444–456, march 2006.
- [19] K. Mao. Gear tooth contact analysis and its application in the reduction of fatigue wear. *Wear*, 262(11–12):1281–1288, may 2007.
- [20] Richard G. Budynas and J. Keith Nisbett. *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. McGraw-Hill, Edificio Punta Santa Fe, Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A, Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01376, México, D. F., eighth edition, 2008.
- [21] Pilar Lafont Morgado, Andrés Díaz Lantada, and Javier Echávarri Otero. *Diseño y cálculo de transmisiones por engranajes*. Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, C/ José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid, 2009.