



Universidad
Politécnica
de Cartagena



FACULTAD DE
CIENCIAS DE LA
EMPRESA

U P C T

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE COLAS A LA ATENCIÓN AL PÚBLICO DE UNA CORREDURÍA DE SEGUROS

Pedro Salvador González Vera

Curso 2012/13

Director/es: *Roberto Javier Cañavate Bernal*
Juan Francisco Sánchez García

Trabajo Fin de Grado para la obtención del título de
Graduado/a en Administración y Dirección de Empresas

Índice

Introducción

1. Teoría de colas

1.1. Estructura del sistema de colas

1.2. Elementos de un sistema de colas

1.3. Proceso elemental de colas

1.4. Notación y terminología

1.5. Condición de estado estable

1.6. Proceso de nacimiento y muerte

1.7. Modelos basados en el proceso de nacimiento y muerte

1.7.1. Modelo M/M/s

1.7.1.1. Resultados para $s=1$. Modelo M/M/s

1.7.1.2. Resultados para $s>1$

1.7.2. Variaciones del modelo

1.8. Modelos no exponenciales

1.8.1. Modelo M/G/1

1.8.2. Modelo M/G/1

1.8.3. Modelo M/ E_k /s

1.9. Aplicación de la teoría de colas

2. Estudio empírico

2.1. Descripción de la empresa

2.2. Contexto económico del sector

2.3. Funcionamiento de la empresa con respecto a los clientes

2.4. Contexto circunstancial

2.5. Toma de datos

2.6. Tratamiento de datos

2.6.1. Test χ^2

2.6.2. Test de Kolmogorov-Smirnov

2.6.3. Tabulación de datos

2.7. Contrastes estadísticos

2.7.1. Realización de los test al tiempo entre llegadas

2.7.2. Realización de los test al tiempo de servicio

2.8. Resultados en estado estable

3. Conclusiones y futuras líneas

ANEXOS

Anexo 1. Tabla de datos

Anexo 2. Tabla χ^2

Anexo 3. Tabla Kolmogorov-Smirnov

Anexo 4. Detalle de formulas de la Figura 28

Bibliografía

Introducción

En la realidad empresarial lo ideal es que cada elemento de nuestra empresa se encuentre optimizado, llamando optimizar a planificar una actividad de modo que se obtengan los mejores resultados posibles. Parte de estos elementos que deben ser optimizados son los fenómenos de espera que se generan en nuestra actividad. Dichos fenómenos son muy usuales en la vida cotidiana, ya que estamos acostumbrados a esperar y esto nos parece natural en gran cantidad de ocasiones, para pagar en un supermercado, en un peaje de la autopista, al entrar al cine, etc. Esto ocurre porque en un determinado momento la demanda de un servicio ha sobrepasado la capacidad de servicio de éste, hay mucha gente esperando pagar en comparación con el número de cajas, muchos coches a la vez para el peaje...

Desde el punto de vista de la empresa lo lógico es pensar en reducir costes, lo que se consigue con un bajo número de servidores que realicen el servicio, pero a la gente no le gusta esperar, y los clientes descontentos no son una buena opción pues pueden suponer un coste tanto a largo como a corto plazo. Para ayudar a solucionar este problema existe la llamada Teoría de Colas, que nos ofrece información muy útil para guiarnos a la hora de tomar esta decisión y diseñar el sistema de espera. A lo largo de este trabajo buscaremos la forma de aplicar esta teoría a una empresa real.

La empresa escogida en este caso para adaptar la teoría a la práctica es una correduría de seguros localizada en Cartagena, cuya elección está justificada por la existencia de una relación previa, al haber realizado en ella la asignatura “Prácticas en empresa”. Esto me hizo interesarme por el funcionamiento del sistema de esperas en esta empresa y recibir el permiso para la toma de datos.

Los objetivos de este trabajo son:

- Estudiar la Teoría de Colas y descubrir qué información nos proporciona, qué utilidad presenta y cómo nos puede ayudar al diseño de sistemas de espera.
- Realizar un estudio empírico seleccionando una empresa real, en nuestro caso una correduría de seguros, para comprobar cómo se puede aplicar esta teoría a la realidad. Para ayudar a una correcta aplicación se estudiara su funcionamiento interno y el entorno en el que se sitúa.

- Recopilar datos sobre el sistema de líneas de espera de la atención al público de la empresa
- Comprobar si los datos recopilados siguen los modelos de colas estudiados a través de test estadísticos no paramétricos (contrastados de bondad de ajuste)
- Aplicar los contenidos de la teoría de colas y analizar la información que se obtiene.

1. Teoría de Colas

La primera tarea que se presenta es el estudio de la teoría, sus fundamentos, qué herramientas ofrece y qué se necesita para poder llevarse a cabo. El estudio de la Teoría de Colas se encuentra recogido en gran cantidad de obras y manuales. La información que se ofrece a continuación proviene mayoritariamente de Hillier y Lieberman [4] así como en menor medida de otras fuentes como Anderson et al.[1], Kendall [6] o Sánchez García [10]

1.1. Estructura del sistema de Colas

En la generación de un sistema de colas actúan varios componentes. Fundamentalmente se requiere la realización de un servicio, el cual es demandado por unos clientes y efectuado en un determinado proceso de servicio.

Estos clientes se generan en el tiempo mediante una fuente de entrada para acceder al sistema y unirse a una cola. En determinado momento reciben el servicio y abandonan el sistema.

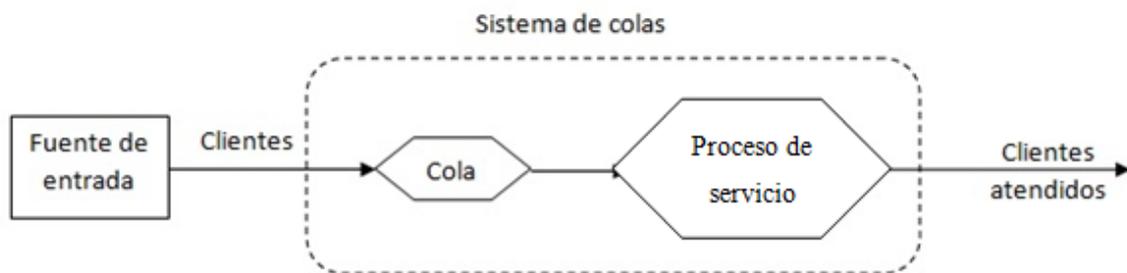


Figura 1: Proceso básico de colas

1.2. Elementos de un sistema de colas

Tal y como se observa en la fig.1, en el proceso básico de colas intervienen tres elementos principales, la fuente de entrada, la cola y el mecanismo de servicio. Cada uno de ellos tiene sus características específicas.

-Fuente de entrada: Una de las características que define la fuente de entrada es su tamaño, es decir, el número de clientes que pueden llegar a requerir el servicio en un momento dado, denominada población potencial o población de entrada. Esta población podrá ser finita o infinita, pero debido a que la sencillez de los cálculos es mayor en el caso infinito usualmente se toma este supuesto. Otra característica importante a especificar es la distribución estadística que determina la generación de clientes en el tiempo. Este fenómeno puede expresarse de dos formas: tiempo entre llegadas o tasa de llegada (clientes por unidad de tiempo) siendo las distribuciones más usuales la exponencial y la Poisson, respectivamente.

También hay que especificar la “paciencia” de los clientes, es decir, si estos tras esperar demasiado tiempo en cola la abandonan o no, o si al observar una cola elevada ni siquiera llegan a entrar en el sistema.

-Cola: La cola es el lugar donde los clientes esperan antes de recibir el servicio. Ésta posee dos características principales, en primer lugar la capacidad de la cola, es decir, el número máximo de clientes que puede llegar a soportar. Esta capacidad puede ser finita o infinita, el supuesto de cola infinita es el estándar en la mayoría de modelos ya que poner un límite a la cola puede complicar bastante el análisis, solo será necesario el supuesto contrario cuando el límite de cola sea bastante pequeño y se llegue a él con regularidad. El otro factor determinante de la cola es la disciplina que sigue, esto es, el orden que se toma para la realización del servicio de los clientes en la cola. Generalmente la disciplina utilizada es FIFO (first in, first out) según la cual se atenderá primero a los clientes que hayan entrado antes en la cola. Mencionar también la existencia de disciplinas con prioridades en las cuales determinados clientes tienen prioridad sobre otros.

-Mecanismo de servicio: Se trata de la forma en la que los clientes ven satisfecho el servicio demandado. Consiste en una o más estaciones de servicio, cada una de ellas con uno o varios canales de servicio paralelos, llamados servidores. El cliente llega a uno de estos canales para la prestación del servicio. Los modelos de colas simples suelen estar compuestos por una única estación, tenga ésta un único servidor o varios. En un modelo

de colas se debe especificar una distribución estadística para los tiempos de servicio de cada servidor. Es decir, del tiempo que transcurre desde el inicio del servicio para un cliente hasta que termina dicho servicio. Lo más usual es que esté establecida una misma distribución para todos los servidores y la que más se da en la práctica es la exponencial.

Llamamos estaciones de servicio a cada uno de los diferentes puntos en los que surge una cola. Es importante tener claro este concepto para no confundir las diferentes estructuras de fenómenos de espera. Por ejemplo, las ventanillas de un banco suelen ser una única estación de servicio con varios servidores ya que existe una única cola desde la cual los clientes se distribuyen hacia las diferentes ventanillas, mientras que un supermercado, en cambio, dispone de varias estaciones de servicio cada una de ellas con único servidor, pues surge una cola diferente tras cada cajero.

1.3. Proceso elemental de colas

El proceso de colas más habitual es el siguiente: una sola línea de espera se forma frente a una única estación de servicio, dentro de ésta se pueden encontrar uno o más servidores. Cada cliente generado en la fuente de entrada es atendido por un servidor después de esperar en la cola su correspondiente turno.

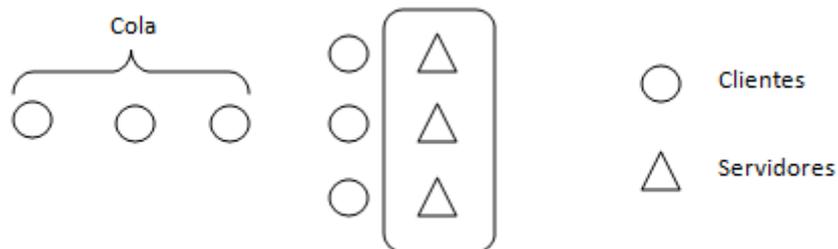


Figura 2: Sistema elemental de colas

Es importante para continuar aclarar un concepto importante. Normalmente al pensar en una cola la primera imagen que se recibe es una sucesión de personas colocados una detrás de otra esperando ser atendidos por otro individuo. Sin embargo esto no tiene por qué ser así, el servidor podría ser un grupo de personas que se coordinan para dar el servicio (por ejemplo un grupo de mecánicos) o incluso no tiene por qué ser una persona física, ya que podría tratarse de máquinas, vehículos o dispositivos electrónicos. Al igual que los servidores, los clientes tampoco tienen por qué ser personas: pueden ser

unidades que esperan un proceso, automóviles, llamadas telefónicas a una centralita, etc.

Además de esto, la cola en sí tampoco tiene por qué existir físicamente; la presencia de una línea de espera frente a la estación de servicio es innecesaria. Podrían estar, por ejemplo, dispersos por un área esperando recibir servicio. El único requisito es que a pesar de no existir la cola físicamente, los cambios efectuados en el número de clientes que esperan ser atendidos funcionen como si prevaleciera dicha situación física (similar a la figura 2).

1.4. Notación y terminología

Para clasificar los diferentes modelos de colas existe una notación estándar implantada por Kendall [6]. Ésta consiste en una serie de símbolos separados entre sí por barras

A/B/X/Y/Z

Donde:

A: Distribución del tiempo entre llegadas

B: Distribución del tiempo de servicio

X: Número de servidores

Y: Capacidad del sistema

Z: Disciplina de la cola

Los símbolos utilizados son:

CARACTERÍSTICA	SÍMBOLO	EXPLICACIÓN
Distribución del tiempo entre llegadas(A)	M	Exponencial
Distribución del tiempo de servicio(B)	D	Determinantica
	E_k	Erlang
	H_k	Hiperexponencial
	G	General
Nº de servidores(X)	1, 2,3..., ∞	
Capacidad del sistema(Y)		

Disciplina de la cola (Z)	FIFO	Primero en entrar, primero en salir.
	LIFO	Ultimo en entrar, primero en salir.
	RSS	Selección aleatoria para el servicio
	PR	Prioridades
	GD	Disciplina general

Es muy usual la utilización de únicamente los 3 primeros símbolos. Si esto ocurre, se supone que la capacidad del sistema es ilimitada y que la disciplina es FIFO.

En cuanto a terminología, el estándar en la Teoría de Colas es el siguiente.

Estado del sistema = Número de clientes en el sistema

Longitud de la cola = Número de clientes que esperan servicio

$N(t)$ = Número de clientes en el sistema de colas en el tiempo t

$P_n(t)$ = Probabilidad de que exactamente n clientes estén en el sistema en el tiempo t

s = Número de servidores

λ_n = tasa media de llegadas de nuevos clientes cuando hay n clientes en el sistema

μ_n = tasa media de servicio en todo el sistema cuando hay n clientes en el sistema (tasa combinada de todos los servidores)

Cuando estas tasas medias son constantes para toda n , pasan a denominarse λ y μ

$\mu_n = \mu * s$ para $n \geq s$

$1/\lambda$ = tiempo esperado entre llegadas

$1/\mu$ = tiempo esperado de servicio

$\rho = \lambda/(s\mu)$ Factor de utilización de la instalación del servicio

1.5. Condición de estado estable

A lo largo del trabajo se usará de forma habitual el supuesto de que la cola se encuentra en condición de estado estable, a continuación se definirá éste para una mayor comprensión.

Cuando el sistema acaba de iniciarse, el estado del sistema está afectado por el estado inicial y el tiempo transcurrido. El sistema entonces se encuentra en condición transitoria. Una vez transcurrido cierto tiempo, el estado del sistema se vuelve independiente del estado inicial y del tiempo transcurrido desde éste. Cuando se llega a este punto decimos que el sistema se encuentra en condición de estado estable.

Para que llegue a producirse la condición de estado estable es necesario que se cumpla uno de los siguientes supuestos:

- $\lambda_n = 0$ para algún valor mayor que el estado inicial (solo se permite un número limitado de estados)
- λ y μ estén definidos y ρ sea < 1

En este estado la distribución de probabilidad del estado del sistema se conserva a través de tiempo, razón por la que se tiende a analizar esta condición de estado estable. La notación de este sistema estable es:

P_n = Probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema

$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$ = Número esperado de cliente en el sistema

$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n - s) P_n$ = Longitud esperada de la cola

W = Tiempo de espera en el sistema para cada cliente

$W = E(W)$

W_q = Tiempo de espera en la cola para cada cliente

$W_q = E(W_q)$

Está demostrada la relación entre estas cuatro variables a través de las fórmulas de Little [7]. Suponiendo λ_n como constante λ para toda n y $1/\mu$ (tiempo medio de servicio) constante para toda $n \geq 1$ entonces:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W = W_q + (1/\mu)$$

1.6. Proceso de nacimiento y muerte

La suposición de que las entradas y las salidas del sistema ocurran según un proceso de nacimiento y muerte es común en la mayor parte de los modelos elementales de colas. Este proceso explica cómo varía el estado del sistema, $N(t)$, al aumentar t . En este contexto se entiende nacimiento como la llegada de un nuevo cliente al sistema y muerte como la salida de un cliente después de recibir el servicio.

Supuestos:

1. Dado $N(t) = n$, la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para el próximo nacimiento es exponencial con parámetro λ_n .
2. Dado $N(t) = n$, la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para la próxima muerte es exponencial con parámetro μ_n .
3. Las variables aleatorias del supuesto 1 y del supuesto 2 son independientes.

La siguiente transacción del estado será:

$$n \longrightarrow n+1 \text{ (un nacimiento)}$$

$$n \longrightarrow n-1 \text{ (una muerte)}$$

Tomando estos supuestos, el proceso es un tipo especial de cadena de Markov de tiempo continuo.

Los parámetros λ_n y μ_n son tasas medias en la distribución exponencial, en ocasiones estos valores serán constantes para toda n pero en otros casos variaran. En la Figura 3 se expone el diagrama de tasas, en éste las flechas representan las únicas transiciones posibles en el estado del sistema.

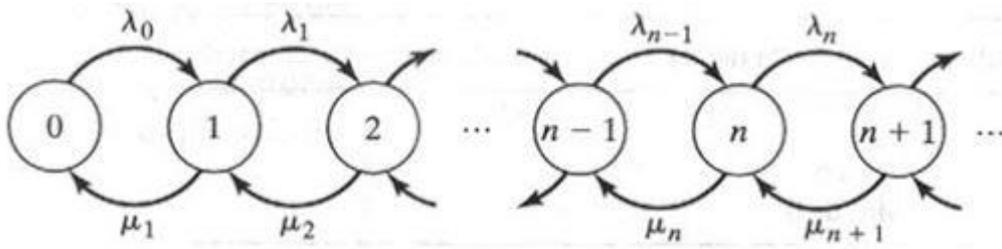


Figura 3: Diagrama de tasas del proceso de nacimiento y muerte

Considerando cualquier estado n , se cuenta el número de veces que el sistema entra en ese estado y el número de veces que se sale de él. Así

$E_n(t)$ = número de veces que el proceso entra en estado n hasta el tiempo t

$L_n(t)$ = número de veces que el proceso sale del estado n hasta el tiempo t

Puesto que estos eventos deben ser alternativos, estos dos números serán iguales o se diferenciarán en una unidad.

$$|E_n(t) - L_n(t)| \leq 1$$

Dividiendo estos valores entre t se obtiene la tasa real (número de entradas o salidas por unidad de tiempo), y si t tiende a infinito se obtiene la tasa media (numero esperado de eventos por unidad de tiempo). Se llega de este modo a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{E_n(t)}{t} - \frac{L_n(t)}{t} \right| = 0$$

Este resultado lleva a la conclusión de que las tasas medias de entrada son iguales a las tasas medias de salida.

Las ecuaciones que expresan este principio son llamadas ecuaciones de balance y se ven recogidas en la Figura 4

Estado	Tasa de entrada = Tasa de salida
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_2$
\vdots	\vdots
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$
\vdots	\vdots

Figura 4: Ecuaciones de balance

El procedimiento para resolver estas ecuaciones no es otro que despejar todas las variables en términos de una de ellas, siendo la más conveniente P_0 . El requisito de que la suma de las probabilidades debe ser igual a 1 se puede usar para evaluar P_0 , obteniéndose los resultados de la Figura 5.

$$\begin{array}{lcl}
0 & P_1 & = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\
1 & P_2 & = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 \\
2 & P_3 & = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0 \\
& \vdots & \vdots \\
n-1 & P_n & = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1} P_0 \\
n & P_{n+1} & = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \dots \mu_1} P_0 \\
& \vdots & \vdots
\end{array}$$

Figura 5: Resultados de las ecuaciones de balance

Para simplificar la notación llamaremos C_n al multiplicador de P_0

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1}$$

Se define $C_n = 1$ para $n=0$ y la expresión de la probabilidad de estado estable es:

$$P_n = C_n \cdot P_0$$

El requisito $\sum P_n = 1$ implica que $(\sum C_n) P_0 = 1$ o lo que es lo mismo $P_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} C_n)^{-1}$

Estos resultados son de estado estable pues al aplicar el límite cuando t tiende a infinito nos alejamos todo lo posible del momento inicial y se desarrollan bajo el supuesto de que los parámetros λ_n y μ_n tienen valores con los cuales el proceso puede alcanzar la condición de estado estable visto en el punto 1.5.

1.7. Modelos basados en el proceso de nacimiento y muerte

A continuación se exponen algunos de los modelos de colas más importantes basados en el proceso de nacimiento y muerte.

1.7.1. Modelo M/M/s

De acuerdo con la notación de Kendall este modelo tiene entradas de Poisson y tiempos de servicio exponencial. Es decir supone que tanto los tiempos entre llegadas como los de servicio son independientes e idénticamente distribuidos según una exponencial (una para llegadas otra para servicios) además de un número de servidores igual a s .

La función de densidad de la distribución exponencial es:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

De modo que las funciones de densidad de los tiempos de llegada y de servicio son esa misma expresión sustituyendo α por λ y μ respectivamente.

Así pues, sigue un proceso de nacimiento y muerte en el cual las tasas medias de llegadas y de servicio son constantes e independientes del estado del sistema (λ y μ)

Cuando el estado solo tiene un servidor $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$

Cuando tiene más de un servidor $\mu_n = n\mu$ cuando $n \leq s$

$\mu_n = s\mu$ cuando $n \geq s$

1.7.1.1. Resultados para $s=1$. Modelo M/M/1

Al contar con un único servidor, el factor C_n que se ha definido anteriormente se reduce a:

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n$$

Siguiendo con lo hallado anteriormente tenemos que:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)^{-1}$$

Observamos que se trata de una serie geométrica, y sustituyendo por la expresión de la suma de términos en progresión geométrica obtenemos:

$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho$$

De este modo hallamos la solución en sistema estable.

$$P_n = C_n \cdot P_0 = (1 - \rho)\rho^n$$

Una vez calculada esta distribución de probabilidad, se puede calcular L , L_q , W y W_q .

Los resultados son:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = L_q + \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

1.7.1.2. Resultados para $s > 1$

En este caso C_n es:

$$C_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & \text{para } n = 1, 2, \dots, s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} & \text{para } n = s, s + 1, \dots \end{cases}$$

Y al realizar las pertinentes operaciones se obtiene:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{1}{1 - \lambda/(s\mu)} \right) \right]}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{Para } n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 & \text{Para } n \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1 - \rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right)$$

1.7.2. Variaciones del modelo

Este modelo posee diferentes variaciones que generan nuevos modelos más complejos para casos más específicos.

-Variación de cola finita o modelo M/M/s/K.

En esta variación se supone que no se permite que el número de clientes en el sistema supere un número concreto (K). La capacidad de la cola es pues K-s y cuando un cliente llega y encuentra la cola llena no entra al sistema.

-Variación de fuente de entrada finita.

En esta ocasión el supuesto que se lleva a cabo es que la población potencial es finita. Es decir cada cliente está dentro o está fuera, y cuando hay n clientes dentro del sistema solo existen N-n clientes fuera que puedan entrar. (N=población potencial)

1.8. Modelos no exponenciales

El modelo anterior y sus variaciones estaban basados en el proceso de nacimiento y muerte y por tanto requiere que tanto las llegadas como el servicio sigan una distribución exponencial. Pero, ¿qué pasa si el tiempo de servicio no se adapta a una distribución exponencial? El análisis es mucho más complejo en modelos de colas con distribuciones no exponenciales, pero se ha llegado a soluciones útiles en algunos casos.

1.8.1. Modelo M/G/1

En este caso no se especifica ninguna distribución de los tiempos de servicio, sino que sólo necesita conocer la media ($1/\mu$) y la varianza de esa distribución.

Los resultados en condición estable serán:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

L , W y W_q se hallan con las relaciones existentes entre ellas que ya conocemos (pag. 9)

1.8.2. Modelo M/D/s

Nos encontramos en este modelo cuando la tarea de servicio es rutinaria y tiende a existir poca variación entre los tiempos de cada cliente. Se suponen los tiempos de servicio como una constante.

Cuando sólo se tiene un servidor (M/D/1) se trata de un caso M/G/1 en el cual se considera la varianza igual a 0.

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}$$

1.8.3. Modelo M/E_k/s

En este caso se supone que sigue una distribución de Erlang cuya función de densidad es:

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t} \quad \text{para } t \geq 0$$

Siendo μ y k estrictamente positivos y k está restringido a valores enteros

Su media y varianza son:

Media= $1/\mu$

Varianza= $1/(k\mu^2)$

Cuando sólo se tiene un servidor ($M/E_k/1$) se trata de un caso especial de $M/G/1$ en el cual la varianza es la ya mencionada.

$$L_q = \frac{\lambda^2/(k\mu^2) + \rho^2}{2(1 - \rho)} = \frac{1 + k}{2k} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

1.9. Aplicación de la teoría de colas

Una vez llegados a este punto se han obtenido una serie de datos y resultados, de modo que el siguiente paso es analizarlos y buscarles una aplicación útil para la empresa.

Estos resultados son de suma utilidad a la hora de diseñar los sistemas de líneas de espera. La decisión a tomar más común es el número de servidores que deben estar en funcionamiento, aunque también son importantes otros aspectos como número de servidores por instalación de servicio, eficiencia de los servidores, número de instalaciones de servicio, tamaño de la sala de espera...

A la hora de tomar estas decisiones en la empresa el objetivo será normalmente optimizar costes. Para ello se han de tener en cuenta dos grandes factores: en primer lugar el coste que supone dar el servicio, ya que cuanto mayor sea el número de servidores en mayores costes incurrirá la empresa, cuanto mayor sea la eficiencia de esos servidores en menores costes incurrirá pero mayor inversión requerirá; en segundo lugar nos encontramos con el coste que supone que los clientes esperen dentro del sistema. Así pues la decisión correcta es la que suma ambos costes y hace este resultado mínimo.

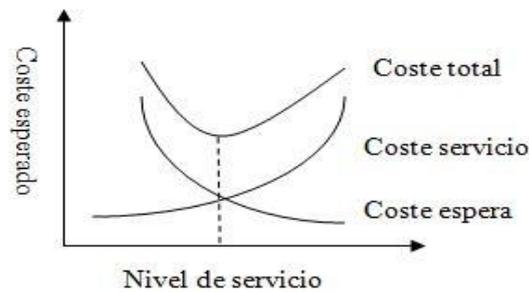


Figura 6: Procedimiento de toma de decisiones en función del coste esperado

Si llamamos $E(CT)$ al coste total esperado, $E(CS)$ al coste de servicio esperado y $E(CW)$ al coste de espera de los clientes esperado, analíticamente quedaría como:

$$\text{Min}[E(CT)] = E(CS) + E(CW)$$

La fijación del coste de servicio es relativamente sencilla: cuánto cuesta disponer de ese nivel de servicio, cuál es el coste de mantener un cierto número de servidores activos, cuál es el coste de la eficiencia de esos servidores.... Son de datos de los que usualmente se dispone y no suponen mayor problema. Por ejemplo el coste de un procesador u otro, coste de un empleado más...

El principal problema de este procedimiento, que parece en principio sencillo, es la dificultad para establecer un coste concreto a la espera de los clientes, fijar $E(CW)$. Para esta tarea es importante conocer el tipo de organización y el tipo de cliente. Para una organización no lucrativa, el coste es un coste social, por ejemplo, listas de espera quirúrgica o comedores sociales. En este caso, al tratarse de una empresa que tiene ánimo de lucro, debemos optimizar el sistema para minimizar un coste real, no social.

Si los clientes son internos, este proceso se facilita bastante. Cada cliente puede ser un trabajador o una máquina que genera un rendimiento para la empresa, de esta manera es sencillo identificar el coste directo de que nuestros trabajadores estén esperando. El tiempo perdido en la cola supone una ganancia no obtenida por la empresa debido a la productividad perdida. Nos basamos en esto para establecer CW .

Si los clientes en cambio son externos a la empresa, el coste de la espera estará relacionado con la pérdida de ganancias por ventas perdidas. El cliente puede cansarse

de esperar e irse, observar la cola existente y no llegar a entrar o realizar su servicio, pero irse con una mala sensación y no volver más. Este coste es mucho más difícil de establecer, y es justamente el caso en que nos encontramos.

Cuando el cliente no sea humano, quizá sí que podría asignársele un coste de forma más sencilla, como por ejemplo el coste de los inventarios, el mantenimiento, etc.

2. Estudio empírico

El siguiente paso es seleccionar una empresa en la cual aplicar la teoría, llevar a cabo esta aplicación y analizar la información obtenida.

La selección de la empresa fue fruto de una relación previa, pues realicé en ella la asignatura Prácticas en Empresa de la titulación que pretendo culminar con este trabajo fin de grado. Gracias a esta relación obtuve permiso para realizar la toma de datos.

2.1. Descripción de la empresa

La empresa seleccionada es una correduría de seguros, es decir, una empresa que actúa como intermediario de varias compañías aseguradoras, sin estar vinculado en exclusivo a ninguna de ellas. Puede comercializar productos de cualquiera de éstas, trabajando para el tomador y representando a éste ante la aseguradora y en caso de siniestro, prestan asistencia y asesoramiento. Se trata de una empresa consolidada en el sector, con más de treinta y cinco años de antigüedad. Localizada en el centro de Cartagena, cuenta con un equipo de veinte profesionales que ofrecen asesoramiento integral a cada cliente, ofreciendo planes a medida según sus necesidades.

La correduría de seguros se encuentra dividida en diferentes departamentos. Para nuestro estudio nos centraremos únicamente en el departamento comercial, concretamente en la atención al público que demande seguros de no vida (todos aquellos seguros diferentes a los seguros de vida). Se ha escogido esta parte de la empresa y no otra por ser la que más flujo de clientes presenta y donde se forman mayoritariamente las colas. La zona de siniestros recibe menos clientes y en ella no se comercializan nuevos productos, mientras que en el caso de los seguros de no vida únicamente una persona se encarga de ellos y no se forman colas reseñables por este servicio.

El departamento comercial está constituido por siete profesionales:

- Dos de ellos se dedican respectivamente a la atención al público de seguros de vida y a las operaciones de grandes volúmenes. Puesto que no tienen relación directa con la parte de la empresa analizada quedan fuera de nuestro estudio.
- Tres de ellos son comerciales, son los que ofrecen el servicio a los clientes y por tanto los que consideramos servidores. Gran parte de su jornada laboral consiste

en la atención al público, pero además necesitan parte del tiempo para realizar otros trabajos internos como realización y recepción de llamadas, recepción de los inspectores de las diferentes compañías de seguros y otra serie de trabajos que es necesario efectuar.

- Otra persona se encarga de la atención de los agentes auxiliares, aunque además puede ofrecer servicio al público. Funciona así como un servidor de reserva, entrando en acción únicamente en caso de necesidad, esto es, cuando la cola se satura y no están todos los comerciales en activo (se encuentran realizando alguna de las tareas antes mencionadas).
- La última persona se encarga de la recepción de los clientes a su llegada y no realiza tareas relacionadas con la comercialización de los seguros.

2.2. Contexto económico del sector

Para dar una visión más global de la empresa es necesario observar el contexto económico en que se encuentra (véase [2][3][5][8][12]). Es conocido por todos que España se encuentra sumida en una crisis de larga duración, la cual obviamente ha tenido también su repercusión en el sector asegurador. Si se estudia el comportamiento del sector en su conjunto se observa una evolución bastante positiva, un comportamiento anticíclico que mantiene las primas y los resultados en un crecimiento moderado durante todos estos años y una posición de fortaleza y solvencia a pesar de las dificultades. Al desagregar el sector se observan más los efectos de la crisis. Si se estudian por separado las dos grandes categorías de productos, seguros de vida y seguros de no vida, se observa una evolución muy dispar.

En los seguros de vida nos encontramos con una evolución muy positiva, son éstos los que han actuado de forma anticíclica manteniendo al sector en su conjunto en crecimiento. En 2011, por ejemplo, las primas en conjunto subieron un 4,1% y esto es debido a una subida del 9,4% en la rama de no vida.

Si en cambio observamos los seguros de no vida (la parte de la empresa que vamos a analizar se dedica a esta categoría de productos) los resultados son contrarios. Por ejemplo, si nos centramos en la rama de automóviles observamos que hasta 2012 acumulaba cinco años consecutivos de pérdidas en las primas. Este fenómeno se explica

por dos grandes razones, una importante bajada de la matriculación de vehículos nuevos y un descenso de la prima media debido a una guerra de precios (entre 2011 y 2012 disminuyeron un 7% el precio de las pólizas). Otras ramas de no vida también ha sufrido bastante debido a la crisis y la situación en el mercado laboral. Algunas de ellas son las relacionadas con la construcción o el sector industrial, con pérdidas importantes en los seguros de responsabilidad civil. Sin embargo no todo es negativo en el sector de la no vida, los seguros multiriesgo y de salud crecieron, y esto, junto a un descenso de la siniestralidad, pudo compensar en gran medida las pérdidas producidas en las otras ramas.

Si nos centramos exclusivamente en las corredurías se observa una gran economía de escala, con una gran distancia entre las corredurías de gran tamaño y el resto, registrándose comportamientos diferentes a lo largo del tiempo. Las corredurías de gran tamaño son las que a lo largo de los años generalmente han incrementado sus balances, mejorado la solvencia, liquidez, cuenta de resultados, etc., mientras que las de tamaño mediano, como la que nos ocupa, se resentían más. Sin embargo es digno de mención un cambio en este comportamiento en 2010, donde las grandes empresas son las que acumulan mayores problemas y las de tamaño mediano mejoran de forma importante los aspectos citados.

2.3. Funcionamiento de la empresa con respecto a los clientes

El horario usual de atención al público (de septiembre a junio) es de 8:30 a 14:00 de la mañana y de 16:30 a 19:30 de la tarde. En periodo estival pasa a ser exclusivamente de mañana de 8:00 a 14:30.

El mecanismo de servicio es el siguiente: Los clientes acceden a la empresa y son inmediatamente atendidos por la persona que se encuentra en recepción. En ésta pueden ser directamente satisfechas sus demandas, ser redirigidos al departamento de siniestros o ser redirigidos a los comerciales. Este último es el caso que nos interesa y el cual estudiaremos.

Una vez que recepción los ha redirigido a los comerciales, los clientes aguardan en una sala de espera hasta que llega su turno. Como es usual, la disciplina de la cola es FIFO, es decir, primero en entrar primero en salir. Una vez que ha llegado el turno de uno de los clientes en la cola, éste entra a una sala contigua en la que se encuentran los

comerciales. En ella es atendido por uno de los comerciales que en ese momento se encuentren disponibles para la realización del servicio (no estén realizando otro trabajo interno) y una vez finalizado el cliente abandona el local.

2.4. Contexto circunstancial

El momento del tiempo en que nos encontramos es un factor muy importante pues todo el patrón del sistema puede cambiar de un momento a otro. No es lo mismo verano que invierno, por la mañana que por la tarde, principio de mes que final de éste, un día de la semana u otro o incluso no es lo mismo una determinada hora que otra de la misma mañana.

Estos factores temporales afectan al comportamiento de los elementos de nuestro sistema. La distancia al periodo de cobro de salarios, el cansancio de los servidores, determinados periodos vacacionales o el simple hecho de que se acerca la hora de la comida modifican de forma importante el comportamiento del sistema. Esta variación podemos localizarla principalmente en la distribución de tiempos entre clientes y tiempos de servicio.

Los datos para este trabajo fueron recogidos durante la primera semana del mes de julio de 2013. Esto implica varias cosas, en primer lugar se trata del mes de transición de la jornada, que pasa de mañana y tarde a solo mañana, lo que nos induce a pensar que, al no poder venir por la tarde, más clientes llegarán por la mañana; también observamos que se trata de la primera semana del mes, lo que supone un índice de mayor afluencia de personas. Sin embargo, sabemos que históricamente el mes de junio recibe menos clientela.

En cuanto a lo que respecta a los diferentes días de la semana, se sospecha que siguen diferentes distribuciones. Sin embargo al solo poseer datos de una única semana nos es imposible verificar esto ya que se precisarían más datos y con una mayor distribución temporal.

La toma de datos fue realizada en torno a media mañana, aproximadamente en un periodo de tiempo entre las 10:00 y las 13:30 (variando la hora exacta en cada día). Siendo el horario de atención al público de 8:00 a 14:30, el periodo de toma de datos seleccionado nos garantiza encontrar el sistema en un estado estable, no demasiado cerca de la apertura para que se vea afectado por ésta, ni demasiado cerca del cierre,

donde las llegadas de los clientes disminuyen (debido al el miedo a no terminar la atención, la cercanía de la hora usual de comer...)

2.5. Toma de datos

El proceso de recogida de datos lo llevé a cabo de forma personal en las instalaciones de la empresa. Para su realización fue necesaria una localización estratégica en un emplazamiento cercano a la recepción, desde el cual se disponía de libre visión de la puerta, la recepción, la sala de espera y la sala contigua donde se localizan los comerciales. En este lugar se pudieron recopilar los datos necesarios sin interferir de ningún modo en el sistema, no entablando ningún tipo de relación con el cliente ni interrumpiendo la tarea de los comerciales o la recepción, además de no ocupar un hueco en la sala de espera ni dar a los clientes la impresión de estar siendo observados o utilizados de ningún modo.

Una vez en la localización, se utilizó Microsoft Excel complementado con Visual Basic para Aplicaciones para anotar de forma precisa el momento de cada uno de los sucesos que se dan en el sistema (entrada de un cliente, inicio de atención y fin de atención), así como el comercial que realizó la atención y el número de comerciales activos en ese momento. Automáticamente se obtenían además los tiempos, que eran calculados por diferencia entre los momentos registrados (tiempo entre clientes, tiempo de espera, tiempo de servicio y tiempo total en el sistema). También se registraba automáticamente en el momento de la entrada de cada cliente el estado del sistema, el estado de la cola.

Para la realización de esta toma de datos es muy importante la identificación de cada cliente. Esto es crucial para saber en qué fase del proceso se encuentra, poder seguir su trayectoria dentro del sistema y relacionar las diferentes horas de sus eventos. Cuando un cliente termina el proceso regular y abandona el sistema debe de haber pasado por tres eventos temporales: llegada, inicio de atención y final de servicio. Puesto que un simple identificador numérico podría llegar a confusiones en la práctica a la hora de asignar estos tiempos a cada cliente “¿el hombre que acaba de salir por la puerta era el 10 ó el 11? No lo recuerdo, llevaban mucho tiempo atendiéndolo” y no queríamos tener ninguna relación con el cliente o el personal que afecte de algún modo al sistema (podríamos preguntar el nombre o el DNI al cliente, que recepción nos indique con qué código figura en la base de datos de la empresa o algún identificador similar) se emplearon identificadores visuales para esta tarea. Características de los clientes con las

cuales podemos identificarlos con un simple vistazo mientras se encuentran dentro del sistema. Estos identificadores pueden incluir el color del pelo, peinado, vestimenta, edad o cualquier otro que nos permita realizar su función.

Cuando nos pusimos a planificar la recogida de datos, lo lógico era pensar que el cliente se incorpora al sistema al entrar por la puerta, que la fuente de entradas del sistema es la calle, la puerta en sí. Pero algunos de esos clientes que entran por la puerta no se dirigen a los comerciales, unos se dirigen a siniestros y otros son atendidos directamente en la recepción. Es en la recepción donde se plantea el problema y surge la duda de qué papel juega exactamente. En primer lugar pensé que si atiende de por sí a determinado grupo de clientes se trataba un servidor más, solo que cuenta con un tiempo de servicio diferente al resto, mucho más reducido, pero estos tiempos son tan pequeños que los consideramos nulos.

Llegamos entonces a la conclusión de que la recepción es en realidad la fuente de entrada del sistema, y ésta no era la puerta como suponíamos al principio. Los clientes entran por la puerta, van a recepción y allí son atendidos directamente o enviados a siniestros en cuyo caso no llegan a entrar en nuestro sistema y no deben de ser registrados, o por otro lado son redirigidos a la zona comercial, y es en este momento, y no antes, cuando el cliente entra en el sistema. El proceso para darnos cuenta de que se trataba de la fuente de entrada, y no un servidor más o un sistema de colas donde primero se esperaba en recepción y luego se esperaba para acceder a los comerciales, hizo que se perdieran los datos del lunes pero se aclararon los conceptos para la recogida de datos de los días posteriores.

Otro problema que se plantea, son los clientes que una vez dentro del sistema y con un servidor disponible, prefieren seguir esperando para ser atendidos por un comercial en concreto. Este fenómeno “infla” artificialmente el tiempo de espera, pues ese tiempo no depende de la empresa, el cliente no espera porque no se le pueda ofrecer servicio sino por voluntad propia. Puesto que esta alteración afecta únicamente al tiempo de espera y los tiempos que vamos a usar para aplicar la teoría son los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio, simplemente pasamos este fenómeno por alto, y registramos los tiempos del cliente de forma normal. El tiempo medio de espera es una de las soluciones que da el modelo, no lo necesitamos para aplicarlo.

A continuación se explica el funcionamiento de la aplicación usada para la toma de datos:

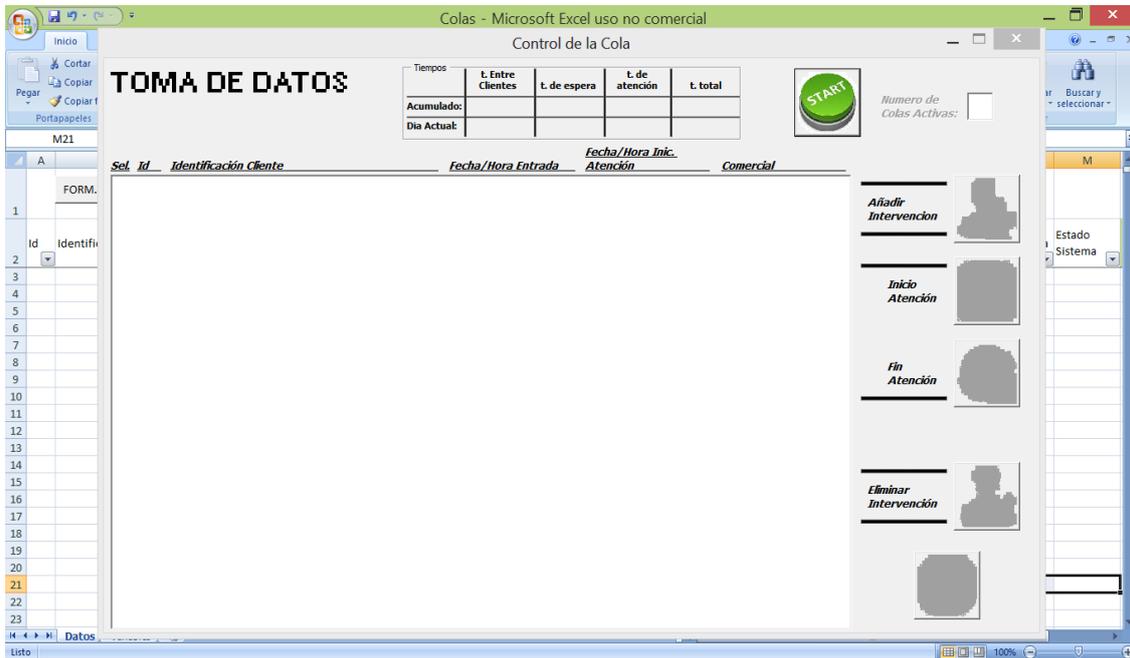


Figura 7: Toma de datos

El primer paso es rellenar la casilla “Número de Colas Activas” (servidores) en la esquina superior derecha, después pulsamos el botón “START” para que empiece la cuenta del tiempo (Figura 7).

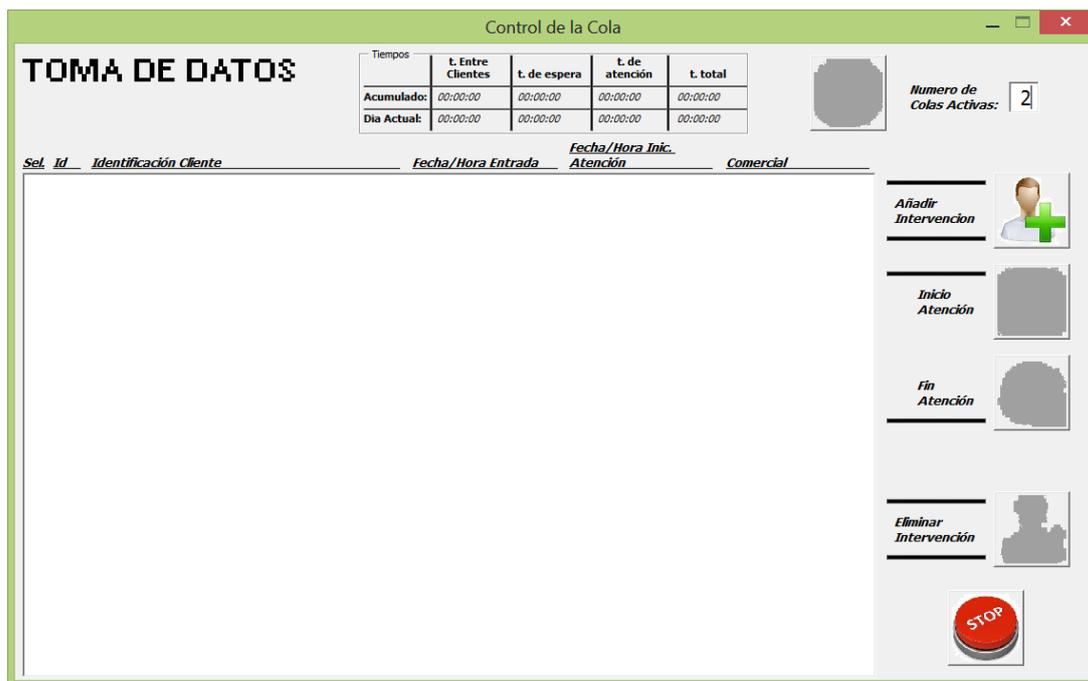


Figura 8: Toma de datos

Al realizar esta acción observamos que se habilita la opción “Añadir Intervención” (Figura 8). La utilizamos para dar entrada al sistema a nuevos clientes, registrando el momento exacto en que llegó. En segundo plano se registra además el tiempo entre llegadas, para realizar esta acción con el primer cliente se tomará como tiempo inicial el momento en que comenzó la toma de datos (cuando pulsamos el botón “START”)

En el momento en que se pulsa el botón, aparecerá un cuadro de texto para darle al cliente su identificador visual (Figura 9).

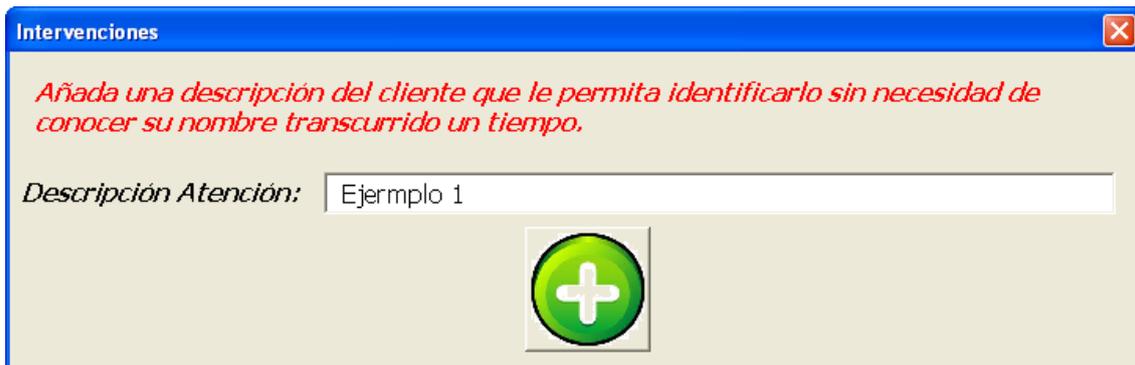


Figura 9: Registro de identificadores visuales

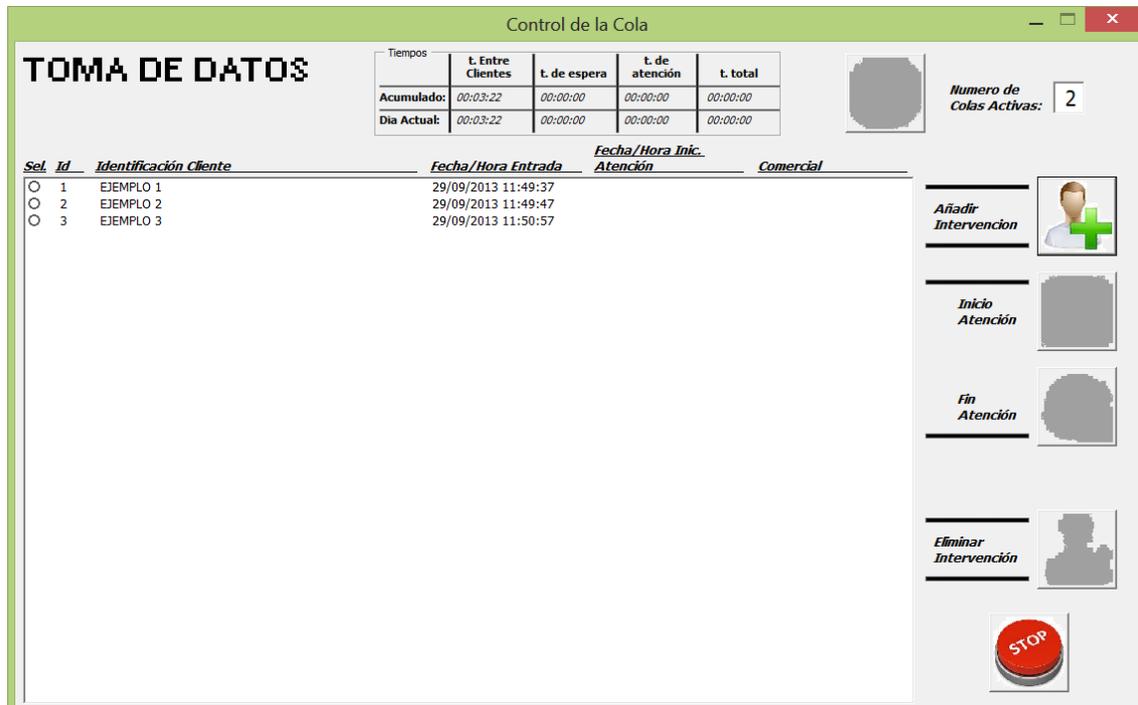


Figura 10: Toma de datos

Conforme se van añadiendo clientes al sistema éstos aparecen en nuestra pantalla (Figura 10). Al seleccionar uno en concreto se habilitarán las opciones de “Inicio Atención” y “Eliminar Intervención” (Figura 11).

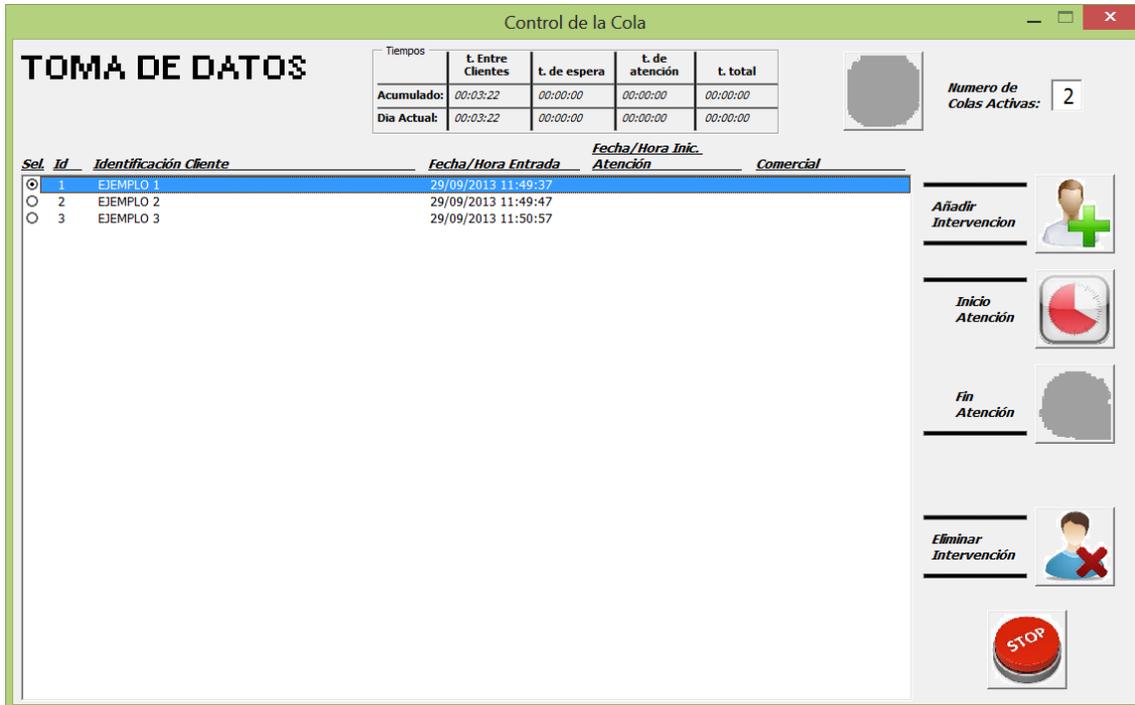


Figura 11: Toma de datos

“Eliminar Intervención” sirve para suprimir el cliente seleccionado de la pantalla y cualquier dato relacionado con él que se haya guardado en Excel (eliminaremos ejemplo 2). Con “Inicio Atención” se registra el momento exacto en que empieza a ser atendido, el tiempo de espera y por qué servidor en concreto va a ser atendido. (Figura12)

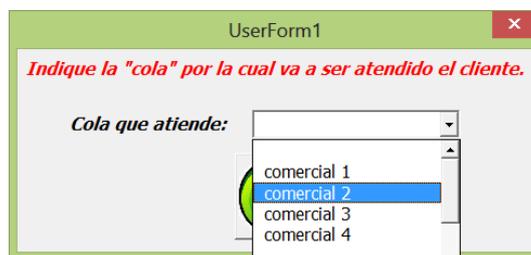


Figura 12: Identificador de comercial

En la pantalla se ve el momento el que empieza a ser atendido y por quién. De este modo con un simple vistazo a la pantalla podemos observar el estado del sistema, cuántos clientes hay y dónde se encuentra cada uno.

Al seleccionar un cliente que está siendo atendido se habilita la opción “Fin Atención”. Con ella registramos el momento del tiempo en que termina de ser atendido y abandona el sistema. Además se recogerá el tiempo de atención y el tiempo total en el sistema (Figura 13).

The screenshot shows the 'Control de la Cola' application window. The main area is titled 'TOMA DE DATOS'. At the top right, there is a summary table for times and a 'Numero de Colas Activas' field showing the value 2.

Tiempos				
	t. Entre Clientes	t. de espera	t. de atención	t. total
Acumulado:	00:04:58	00:12:16	00:00:00	00:00:00
Día Actual:	00:04:58	00:12:16	00:00:00	00:00:00

Below the summary table is a table of active clients:

Sele.	Id	Identificación Cliente	Fecha/Hora Entrada	Fecha/Hora Inic. Atención	Comercial
<input checked="" type="radio"/>	1	EJEMPLO 1	29/09/2013 11:49:37	29/09/2013 12:01:53	comercial 2
<input type="radio"/>	3	EJEMPLO 3	29/09/2013 11:50:57		

On the right side of the interface, there are several control buttons: 'Añadir Intervención' (with a person and plus icon), 'Inicio Atención' (with a person icon), 'Fin Atención' (with a clock icon), 'Eliminar Intervención' (with a person and minus icon), and a red 'STOP' button.

Figura 13: Toma de datos

Cuando se usa la opción “Fin Atención” el cliente desaparece de la pantalla, de este modo ésta no se satura de datos, y al dar un vistazo veremos exactamente lo que hay en el sistema en ese momento, no lo que ha pasado por él (Figura 14).

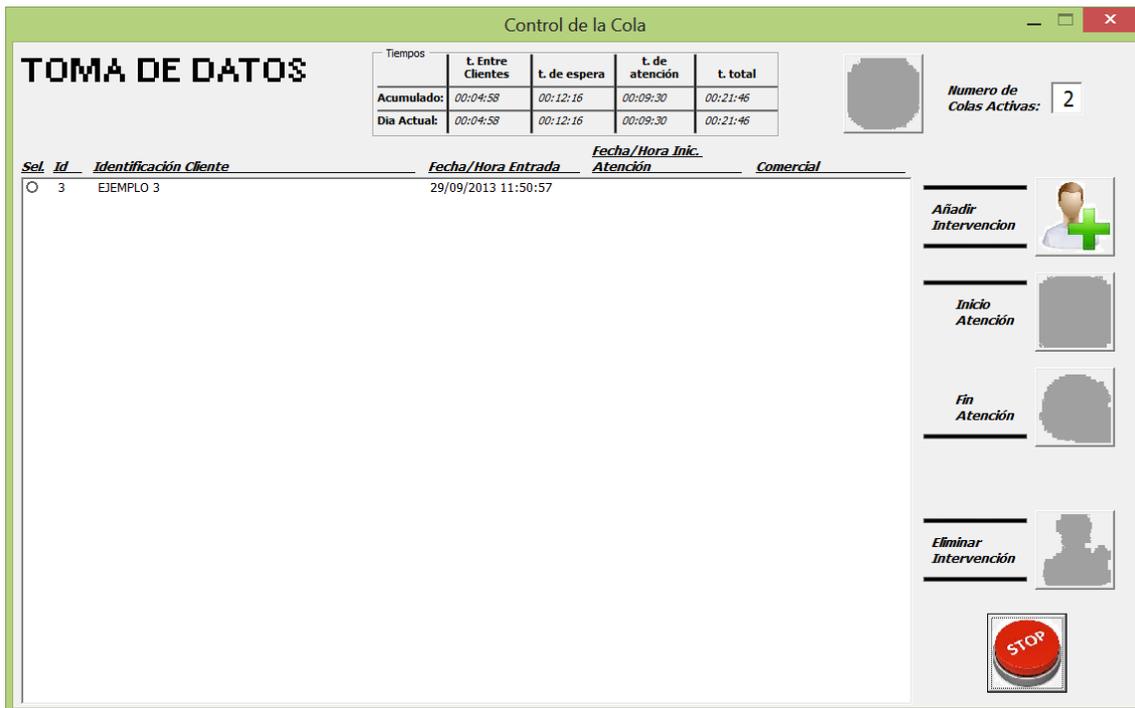


Figura 14: Toma de datos

Para terminar observamos un botón en la parte inferior derecha con el símbolo “STOP”. Este botón pone fin a la toma de datos y en caso de que quede algún cliente en el sistema que no haya terminado de ser atendido lo eliminará. Se observa también una tabla en la parte superior que nos muestra los tiempos medios que se van registrando en Excel.

La lista en Excel queda finalmente de la forma que se observa en la Figura 15.

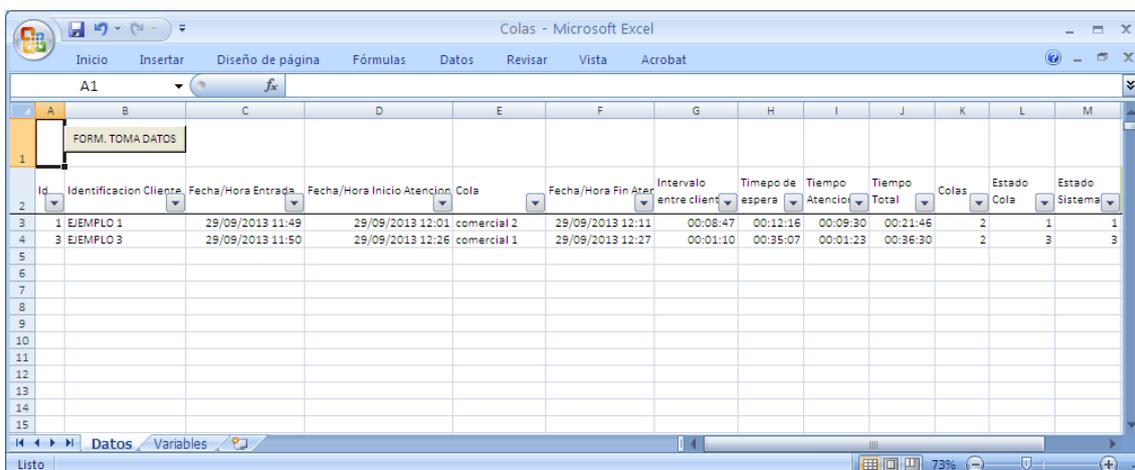


Figura 15: Ejemplo de toma de datos

En el Anexo 1 se encuentra la tabla con los datos tomados durante la semana excluyendo la columna del identificador visual.

2.6. Tratamiento de datos

El siguiente paso consiste en analizar los datos obtenidos e intentar aplicarles la teoría estudiada en el primer apartado de este trabajo a ellos.

Lo primero que debemos hacer con los datos es comprobar si los tiempos entre llegadas o la tasa media de llegadas y los tiempos medios de servicio o la tasa de servicio siguen una distribución estadística que nos sitúe en uno de los modelos de colas estudiados.

Puesto que existe más de un comercial, los resultados obtenidos para modelos con servicios no exponenciales no se aplican, pues todos los expuestos en el punto 1.7 requieren la existencia de un único servidor ($M/G/1$; $M/D/1$; $M/E_k/1$). De este modo llegamos a la conclusión de que para obtener una información fácil de interpretar, el modelo que debe seguir el sistema es el $M/M/s$. Para que se ajuste a este modelo las llegadas deben de seguir una distribución de Poisson y los tiempos de servicio una distribución exponencial. Una vez que sabemos qué distribuciones sería deseable que siguieran nuestros datos buscamos un método que nos proporcione esta información.

La herramienta adecuada para esta tarea son los contrastes de bondad de ajuste, un tipo de contraste no paramétrico cuyo objetivo es comprobar si una muestra tiene procedencia de una población con determinada distribución de probabilidad.

Los test de bondad de ajuste que se utilizan son el test χ^2 y el Kolmogorov-Smirnov [9] y estos se llevan a cabo con la herramienta Excel.

2.6.1. Test χ^2

Este se basa en la comparación entre las frecuencias observadas en la muestra (FO) y las frecuencias teóricas de la distribución que queremos comprobar que sigue (FT).

El estadístico que se usa para realizar el test es el siguiente, basado en la diferencia entre FO y FT.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(FO - FT)^2}{FT}$$

Debido a la aleatoriedad de la muestra es normal que existan diferencias, si bien es cierto que si sigue la distribución, lo común es que éstas sean pequeñas.

Las diferencias aparecen elevadas al cuadrado para evitar que el signo de éstas pueda compensar el resultado global y ponderadas por FT para obtener un resultado relativo que nos proporcione una información más útil que las simples diferencias globales. El estadístico sigue una distribución χ^2 con grados de libertad igual al número de intervalos en que se agrupan los datos menos uno.

La hipótesis nula a contrastar es que la muestra extraída pertenece a una población que sigue una determinada distribución. La hipótesis alternativa es lo contrario, que no se ajusta a la distribución. Puesto que un valor alto del estadístico nos indica unas grandes desviaciones, un valor alto de éste indicará que se rechaza la hipótesis nula. La región crítica tendrá pues la forma: $\chi^2 \geq K$ (se rechaza la hipótesis nula)

El valor crítico K se determina en las tablas de la χ^2 , con los grados de libertad antes indicados y fijando un nivel de significación α .

2.6.2. Test de Kolmogorov-Smirnov

Este test está basado en la comparación entre las frecuencias relativas acumuladas. Si la muestra realmente sigue la distribución, la diferencia entre la frecuencia relativa acumulada observada (FAO) y la frecuencia relativa acumulada teórica (FAT) no será muy significativa.

El estadístico que usaremos en este caso será la mayor diferencia entre FAO y FAT

$$D_n = \max_{-\infty < x < \infty} |FAO(x) - FAT(x)|$$

Las hipótesis nula y alternativa para este test son idénticas a las anteriores, y puesto que un valor alto del estadístico también indica grandes desviaciones la región crítica tendrá la misma forma: $\chi^2 \geq K$ (se rechaza la hipótesis nula)

El valor crítico K para diferentes tamaños muestrales y niveles de significación se recoge en una tabla de los anexos.

2.6.3. Tabulación de datos

Para poder realizar estos test, lo primero que debemos hacer es clasificar los datos de manera correcta, agruparlos en intervalos y obtener todas las frecuencias necesarias.

El primer paso es colocar los datos obtenidos en un determinado número de intervalos. Para elegir ese número de intervalos se utiliza la regla de Sturges [11], redondeando el resultado hacia arriba.

$$K = 1 + 1.322 \log n$$

A continuación calculamos el rango de datos (restando el menor valor de x al mayor) y dividiendo el rango entre el número de intervalos obtenemos la amplitud.

	E	F
4	MAX	=MAX(C4:C47)
5	MIN	=MIN(C4:C47)
6	RANGO	=F4-F5
7	N	=CONTAR(C4:C47)
8	k Sturges	=1+3,322*LOG10(F7)
9	Redondeo	=REDONDEAR.MAS(F8;0)
10	Amplitud	=F6/F9

Figura 16: Detalle de fórmulas Excel E4:F10

Después de esto, clasificamos los datos en los diferentes intervalos, obteniendo las frecuencias observadas.

	E	F	G
12	L.INTERVALO	=F5	
13		=F12+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
14		=F13+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
15		=F14+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
16		=F15+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
17		=F16+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
18		=F17+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)
19		=F18+\$F\$10	=FRECUENCIA(C4:C47;F13:F19)

Figura 17: Detalle de fórmulas Excel E12:G19

Dividiendo cada uno de estos valores por “n” obtenemos las frecuencias relativas observadas. Para calcular las frecuencias teóricas, en primer lugar se hallan las

frecuencias relativas teóricas y luego éstas se multiplican por n, número de datos en la muestra.

Excel nos ofrece las frecuencias relativas de la Poisson en una función integrada en el programa. En el caso de la exponencial deberemos calcularlas, para ello se realiza la integral comprendida entre cada extremo del intervalo de la función de densidad de la exponencial.

$$\int_{ext\ inf}^{ext\ sup} \alpha e^{-\alpha t} dt = \alpha \int_{ext\ inf}^{ext\ sup} e^{-\alpha t} dt = \alpha \left| \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right|$$

Siendo α la tasa media, ya sea de llegadas o de servicio.

Para hallar α (μ o λ) en primer lugar hacemos la media de los tiempos. Este resultado es $1/\alpha$. Obteniendo la inversa de este resultado se halla α

	E	F
21	$1/\mu$	=PROMEDIO(C4:C47)
22	μ	=1/F21

Figura 18: Detalle de fórmulas Excel E21:F22

	O
5	FRT
6	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F13)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * 0)))$
7	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F14)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F13)))$
8	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F15)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F14)))$
9	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F16)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F15)))$
10	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F17)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F16)))$
11	= $\$F\$22 * ((-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F18)) - (-\$F\$21 * EXP(-\$F\$22 * F17)))$
12	=1-O6-O7-O8-O9-O10-O11

Figura 19: Detalle de fórmulas Excel O5:O12

A continuación se obtiene la frecuencia relativa acumulada tanto observada como teórica y ya se dispone de todos los datos que nos hacen falta.

2.7. Contrastes estadísticos

2.7.1. Realización de los test al tiempo entre llegadas

Para que se encuentre en el modelo M/M/s se necesita que la tasa media de llegadas siga una distribución Poisson o que el tiempo entre llegadas siga una distribución exponencial. Estos dos conceptos son similares y están relacionados entre sí, mientras que la media de uno es λ , la del otro será $1/\lambda$. En este caso se ha escogido comprobar si los tiempos entre llegadas siguen una exponencial.

En primer lugar se hace la media de los datos para hallar $1/\lambda$:

$1/\lambda$	10,3791667
λ	0,09634685

Figura 20: Media de los datos

Después se establecen los intervalos en los cuales vamos a clasificar los datos:

		L.INTERVALC	0,12
MAX	40,53		5,89
MIN	0,12		11,66
RANGO	40,42		17,44
N	44,00		23,21
k Sturges	6,46		28,99
redondeo	7,00		34,76
Amplitud	5,77		40,53

Figura 21: Cálculo del número de intervalos

El siguiente paso es tabular los datos y obtener todos los datos necesarios para la realización de los test:

intervalo	marca	FO	FRO	FAO	FT	FRT	FAT
0,12-5,89	3,00	20,00	0,45454545	0,45454545	19,0553139	0,43	0,43
5,89-11,66	8,78	10,00	0,22727273	0,68181818	10,6430711	0,24	0,67
11,66-17,44	14,55	4,00	0,09090909	0,77272727	6,10202528	0,14	0,81
17,44-23,21	20,33	6,00	0,13636364	0,90909090	3,49849325	0,08	0,89
23,21-28,99	26,10	1,00	0,02272727	0,93181818	2,00580209	0,05	0,94
28,99-34,76	31,87	2,00	0,04545455	0,97727272	1,14999279	0,03	0,96
34,76-40,53+	37,65	1,00	0,02272727	1	1,54530153	0,04	1,00
	Σ	44	1		44	1,00	

Figura 22: Tabulación de datos

Finalmente calculamos los estadísticos y los comparamos con los valores críticos calculados al nivel de significación (α) 0,05 para comprobar si se rechaza la hipótesis nula de que los datos siguen una distribución exponencial. El estadístico χ^2 presenta un valor de 3,92, al ser inferior al valor crítico obtenido en la tabla (12,59) podemos afirmar que no se rechaza la hipótesis nula. El test de Kolmogorov-Smirnot ofrece resultados similares. ($0.04 < 0,2$)

intervalo	marca	FO	FRO	FAO	FT	FRT	FAT	(fo-ft)^2/ft	FAO-FAT	
0,12-5.89	3,00	20,00	0,45454545	0,454545455	19,0553139	0,43	0,43	0,04683375	0,02147014	
5,89-11,66	8,78	10,00	0,22727273	0,681818182	10,6430711	0,24	0,67	0,03885537	0,00685488	
11,66-17,44	14,55	4,00	0,09090909	0,772727273	6,10202528	0,14	0,81	0,72410553	0,04091842	
17,44-23,21	20,33	6,00	0,13636364	0,909090909	3,49849325	0,08	0,89	1,78863744	0,01593401	
23,21-28,99	26,10	1,00	0,02272727	0,931818182	2,00580209	0,05	0,94	0,50435576	0,00692513	
28,99-34,76	31,87	2,00	0,04545455	0,977272727	1,14999279	0,03	0,96	0,62827547	0,01239322	
34,76-40,53+	37,65	1,00	0,02272727	1	1,54530153	0,04	1,00	0,19242442	1,1102E-16	
	Σ	44	1		44	1,00		3,92348774	DIF MAX	0,0409184
chi(0,05;6)	12,5916									
k-s(0,05;44)	0,20056									

Figura 23: Test estadísticos

Puesto que algunos valores de la frecuencia teórica son menores a 5, es posible que el test χ^2 no sea del todo fiable por lo que se reagrupan intervalos y se repita el proceso para asegurarse, obtenemos resultados similares.

intervalo	FO	FRO	FAO	FT	FRT	FAT	(fo-ft)^2/ft	FA-FAT	
0,12-5.89	20,00	0,45454545	0,454545455	19,0553139	0,43	0,43	0,04683375	0,02147014	
5,89-11,66	10,00	0,22727273	0,681818182	10,6430711	0,24	0,67	0,03885537	0,00685488	
11,66-17,44	4,00	0,09090909	0,772727273	6,10202528	0,14	0,81	0,72410553	0,04091842	
17,44 +	10,00	0,22727273	1	8,19958966	0,19	1,00	0,39532191	0	
	44	1		44	1,00		1,20511656	DIF MAX	0,0409184
chi(0,05;3)	7,8147								
k-s(0,05;44)	0,20056								

Figura 24: Test estadísticos

Ninguno de los test rechaza la hipótesis nula por lo que podemos afirmar que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial.

2.7.2. Realización de los test al tiempo de servicio

En este caso para que se encuentren en el modelo M/M/s los tiempos de servicio tienen que seguir una distribución exponencial. No es posible que la tasa media de servicio

siga una distribución Poisson porque para ello los servidores deberían estar en todo momento en funcionamiento y no es un supuesto que podamos aceptar.

Repetimos los pasos realizados anteriormente:

$1/\mu$	19,28522727
μ	0,051853161

Figura 25: Media de los datos

intervalo	marca	FO	FRO	FAO	FT	FRT	FAT	(fo-ft)^2/ft	FAO-FAT	
2,27-8,46	5,36	9,00	0,204545455	0,204545455	15,6277055	0,36	0,36	2,81080807	0,15062967	
8,46-14,66	11,56	6,00	0,136363636	0,340909091	7,79536659	0,18	0,53	0,4134945	0,19143346	
14,66-20,85	17,75	9,00	0,204545455	0,545454545	5,653568	0,13	0,66	1,98080347	0,11537818	
20,85-27,05	23,95	10,00	0,227272727	0,772727273	4,10023451	0,09	0,75	8,48908342	0,01870739	
27,05-33,24	30,15	5,00	0,113636364	0,886363636	2,97368371	0,07	0,82	1,38076477	0,06476004	
33,24-39,44	36,34	3,00	0,068181818	0,954545455	2,15665586	0,05	0,87	0,32978342	0,08392695	
39,44-45,63+	42,54	2,00	0,045454545	1	5,69278578	0,13	1,00	2,39542947	0	
	Σ	44	1		44	1,00		17,8001671	DIF MAX	0,191433
chi(0,05;6)	12,5916		se rechaza la hipótesis nula							
k-s(0,05;44)	0,20056		no se rechaza la hipótesis nula							

Figura 26: Test estadísticos

intervalo	marca	FO	FRO	FAO	FT	FRT	FAT	(fo-ft)^2/ft	FAO-FAT	
2,27-8,46	5,36	9,00	0,204545455	0,204545455	15,6277055	0,36	0,36	2,81080807	0,15062967	
8,46-14,66	11,56	6,00	0,136363636	0,340909091	7,79536659	0,18	0,53	0,4134945	0,19143346	
14,66-20,85	17,75	9,00	0,204545455	0,545454545	5,653568	0,13	0,66	1,98080347	0,11537818	
20,85-33,24	27,05	15,00	0,340909091	0,886363636	7,07391822	0,16	0,82	8,88090171	0,06476004	
33,24+	39,44	5,00	0,113636364	1	7,84944165	0,18	1,00	1,03438156	0	
	Σ	44	1		44	1,00		15,1203893	DIF MAX	0,191433
chi(0,05;4)	9,4877		se rechaza la hipótesis nula							
k-s(0,05;44)	0,20056		no se rechaza la hipótesis nula							

Figura 27: Test estadísticos

En este caso no podemos afirmar con la rotundidad anterior el resultado porque los test ofrecen resultados diferentes: el test χ^2 rechaza la hipótesis nula al ser el estadístico 17,80 mayor que 12,59 (al repetir el test reagrupando intervalos da el mismo resultado, 15,12 > 9,48) y el test de Kolmogorov-Smirnot no rechaza la hipótesis nula al ser 0,191 menor que el valor crítico 0,2. No obstante, puesto que el test de Kolmogorov-Smirnov no rechaza la hipótesis nula, continuaremos con el supuesto de que los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial.

2.8. Resultados en estado estable

Una vez que se sabe que los datos siguen las distribuciones estadísticas adecuadas, se usan los datos de μ y λ obtenidos para calcular los resultados de sistema estable con las expresiones que se expusieron en el punto 1.7.1.2.

Los resultados que se obtienen de este modo son válidos en el supuesto de que el sistema se encuentre en condición de estado estable, como ya se expuso en el punto 1.5. Esto significa que el sistema no se encuentra afectado por el tiempo que ha transcurrido desde el momento 0 o de apertura.

Para realizar los cálculos de forma sencilla se emplea la herramienta Excel (Figura 28).

s	ρ	P(0)	Lq	L	Wq	W	$(\lambda/\mu)^s/s!$	$\sum(\lambda/\mu)^n/n!$
0							1	1
1	1,85807087	0	Desbordado	Desbordado	Desbordado	Desbordado	1,85807087	2,85807087
2	0,92903544	0,03678759	11,71507557	13,57314645	121,5927219	140,877949	1,72621369	4,58428456
3	0,61935696	0,13526191	0,618181955	2,476252828	6,416213537	25,7014408	1,06914246	5,65342701
4	0,46451772	0,15195532	0,122254778	1,980325652	1,268902719	20,55413	0,49663561	6,15006263
5	0,37161417	0,15518884	0,026954428	1,885025301	0,279764499	19,5649918	0,18455683	6,33461946

Figura 28: Captura de pantalla Excel 2007

Analizando los resultados de la figura 28 se observan los siguientes resultados:

Con un único servidor, el factor de utilización sería de 1,85. Es evidente que no es una opción viable pues el sistema se encuentra desbordado al ser éste mayor que uno, esto hace que el sistema se colapse y el estado del servidor crezca exponencialmente hasta desbordarse de modo que nunca alcance la condición de estado estable.

Con dos servidores el factor de utilización alcanza un valor de 0,92. Este valor ya es menor a uno con lo cual se alcanza el estado de sistema estable. Sin embargo presenta los siguientes resultados: la probabilidad de que el sistema se encuentre vacío es de 0,036; el número medio de clientes en el sistema es de 13,57 y en cola de 11,71 y los

tiempos de espera totales y en cola serían 140,87 minutos y 121,59 minutos respectivamente. Estos resultados serían desproporcionados y resultarían insostenibles para la empresa, afectando gravemente a su imagen corporativa.

Con tres servidores el factor de utilización es de 0,61 y presenta los siguientes resultados: la probabilidad de sistema vacío es de 0,135; número medio de clientes en sistema 2,47; número medio de clientes en la cola 0,61; tiempo medio de espera en el sistema 25,70 minutos y tiempo medio de espera en la cola 6,41 minutos. Se observa un cambio muy significativo con respecto a las situaciones anteriores. En este caso los resultados llegan a niveles aceptables para la empresa, los clientes no tendrán la sensación de que se espera mucho (6,41 minutos es un tiempo aceptable y además al contar con una cola de tamaño reducido no se agobiarán) y al ser el número medio de clientes en cola inferior a uno y el número medio de clientes en cola inferior a tres los comerciales podrán aprovechar ese tiempo para la realización de otras tareas internas.

El efecto que supone añadir más servidores, de acuerdo con la teoría de colas, es notable, pero mucho menos drástico:

- Cuatro servidores:

$$\rho = 0,46 \qquad P(0) = 0,151$$

$$Lq=0,12 \qquad L=1,98$$

$$Wq=1,26 \qquad W=20,55$$

- Cinco servidores:

$$\rho = 0,37 \qquad P(0) = 0,155$$

$$Lq=0,02 \qquad L=1,88$$

$$Wq=0,27 \qquad W=19,56$$

Estos resultados muestran unos tiempos de espera bastante reducidos y un tamaño esperado de cola prácticamente nulo, parece claro que no merece la pena asumir el coste que supone aumentar el número de comerciales para obtener estos resultados. Es innecesario el coste que supone suprimir la cola.

No se dispone de la información suficiente para estimar el coste del tiempo de espera de los clientes o el número de servidores para aplicar lo expuesto en el punto 1.8 de modo que la decisión pertenecerá a la empresa. Sin embargo a simple vista se observa que la mejor opción parece ser contar con 3 servidores.

En el punto 2.6 se mencionó que la empresa disponía de tres comerciales, estos debían realizar otras tareas que no les permitían estar en activo el 100% del tiempo, pero a cambio disponen de una cuarta persona que puede suplirlos en caso de gran necesidad lo que compensa este fenómeno. Con los resultados obtenidos podemos afirmar que cuenta con un número adecuado de comerciales, dejándole la decisión de si merece la pena asumir el coste de contratar uno más con los cambios que eso supondría en la espera de los clientes.

3. Conclusiones y futuras líneas

Con la realización de este Trabajo Fin de Grado para la obtención del Título de Grado en Administración y Dirección de Empresas se han puesto en evidencia las siguientes conclusiones:

- Es usual la existencia de fenómenos de espera en la vida cotidiana y tienen una notable repercusión en la actividad normal de las empresas, por lo que es de interés el estudio de esta materia.
- La Teoría de Colas nos ofrece información útil sobre el funcionamiento de los sistemas de espera. Basándose en los tiempos entre llegadas y en los tiempos de servicio ofrece ayuda para ajustar el tiempo de espera medio y el número de clientes medio tanto en cola como en el sistema a valores asumibles para la empresa.
- Los datos obtenidos en el estudio empírico siguen las distribuciones de un modelo M/M/s. Esto se ha comprobado a través de los test de bondad de ajuste realizados.
- Los resultados del estudio empírico recomiendan el empleo de 3 servidores puesto que ofrece unos resultados aceptables para la empresa, un tiempo medio de espera de 6,41 minutos, que no es excesivo ni perjudica la imagen corporativa y un número medio de clientes en la cola de 0,61, valor más que aceptable y que al ser menor que 1 permite un respiro a los comerciales para realizar otras tareas. Con un servidor más la reducción de la cola no justifica el aumento del coste pues prácticamente eliminaríamos la cola, cosa que no es necesaria, y con un servidor menos el tiempo de espera y los clientes medios en el sistema se disparan siendo insostenibles para la empresa.
- La empresa cuenta en la actualidad con el número de comerciales recomendado, por lo que la conclusión al respecto es que es acertado mantener este número, quedando en ella la decisión de contratar uno más si les merece la pena asumir el coste que esto supone en comparación con la reducción de los tiempos de espera que supondría.

En el futuro consideramos conveniente continuar este estudio con un mayor rango de datos pues nos encontramos delimitados al disponer únicamente de una semana. Con estos datos podría comprobarse el diferente funcionamiento del sistema según los

diferentes días de la semana, realizando un análisis diario que permitiera ajustar el personal, por ejemplo, reduciendo los viernes el número de comerciales disponibles al recibir menor demanda. Otra opción sería realizar un análisis según los diferentes ciclos del año con objetivos similares o también sería posible, puesto que en la recogida de datos se registró qué comercial atendía a cada cliente, comprobar si existen diferencias en el funcionamiento de los diferentes servidores y estudiar diferencias en la eficiencia de estos.

ANEXOS

Anexo 1. Tabla de datos

Id	Fecha/Hora Entrada	Fecha/Hora Inicio Atención	Cola	Fecha/Hora Fin Atención	Intervalo entre clientes	Tiempo de espera	Tiempo Atención	Tiempo Total	Servidores Activos	Estado Cola	Estado Sistema
1	02/07/2013 10:52	02/07/2013 10:53	2	02/07/2013 11:21	00:22:53	00:00:10	00:28:16	00:28:26	2	0	1
2	02/07/2013 10:56	02/07/2013 10:56	1	02/07/2013 11:22	00:03:52	00:00:00	00:25:46	00:25:46	2	0	2
3	02/07/2013 11:04	02/07/2013 11:23	2	02/07/2013 11:29	00:07:18	00:19:45	00:45:38	01:05:23	2	1	3
4	02/07/2013 11:44	02/07/2013 11:47	1	02/07/2013 11:55	00:40:32	00:03:22	00:07:46	00:11:08	2	0	2
5	02/07/2013 11:48	02/07/2013 11:54	3	02/07/2013 12:21	00:03:53	00:06:24	00:26:57	00:33:21	2	1	3
6	02/07/2013 12:02	02/07/2013 12:10	2	02/07/2013 12:29	00:13:46	00:08:17	00:18:43	00:27:00	2	1	3
7	02/07/2013 12:07	02/07/2013 12:22	3	02/07/2013 12:29	00:05:13	00:14:42	00:06:59	00:21:41	2	2	4
8	02/07/2013 12:41	02/07/2013 12:41	1	02/07/2013 12:47	00:33:33	00:00:19	00:06:35	00:06:54	1	0	1
9	02/07/2013 12:49	02/07/2013 12:49	3	02/07/2013 13:23	00:08:07	00:00:40	00:33:46	00:34:26	2	0	1
10	02/07/2013 12:53	02/07/2013 12:54	2	02/07/2013 13:27	00:04:42	00:00:15	00:33:35	00:33:50	3	0	2
11	02/07/2013 13:17	02/07/2013 13:17	1	02/07/2013 13:23	00:21:41	00:00:16	00:06:05	00:06:21	3	0	3
12	02/07/2013 13:33	02/07/2013 13:33	3	02/07/2013 14:04	00:16:15	00:00:08	00:30:26	00:30:34	3	0	1
13	03/07/2013 10:31	03/07/2013 10:31	1	03/07/2013 10:55	00:17:49	00:00:07	00:24:12	00:24:19	2	0	1
14	03/07/2013 10:33	03/07/2013 10:33 R		03/07/2013 10:43	00:02:07	00:00:15	00:09:43	00:09:58	2	0	2
15	03/07/2013 10:43	03/07/2013 10:43	3	03/07/2013 10:49	00:02:04	00:00:31	00:06:11	00:06:42	2	1	3
16	03/07/2013 10:51	03/07/2013 10:52	3	03/07/2013 11:03	00:08:44	00:00:09	00:11:23	00:11:32	2	0	2
17	03/07/2013 10:56	03/07/2013 10:56	1	03/07/2013 11:11	00:04:12	00:00:05	00:14:52	00:14:57	2	0	2
18	03/07/2013 11:04	03/07/2013 11:08	3	03/07/2013 11:36	00:08:05	00:03:49	00:28:26	00:32:15	2	0	2
19	03/07/2013 11:05	03/07/2013 11:07	2	03/07/2013 11:38	00:01:18	00:01:30	00:11:41	00:13:11	2	1	3
20	03/07/2013 11:08	03/07/2013 11:11	1	03/07/2013 11:38	00:03:01	00:02:42	00:27:29	00:30:11	3	1	4
21	03/07/2013 11:08	03/07/2013 11:41	1	03/07/2013 12:00	00:00:07	00:33:00	00:18:22	00:51:22	3	2	5
22	03/07/2013 11:23	03/07/2013 11:23	2	03/07/2013 11:27	00:11:06	00:00:06	00:03:49	00:03:55	3	1	4
23	03/07/2013 11:28	03/07/2013 11:30	2	03/07/2013 11:47	00:05:08	00:01:55	00:17:39	00:19:34	3	1	4
24	03/07/2013 11:32	03/07/2013 11:37	3	03/07/2013 11:44	00:04:14	00:04:43	00:06:59	00:11:42	3	2	5
25	03/07/2013 11:41	03/07/2013 11:48	2	03/07/2013 11:58	00:08:01	00:06:22	00:10:19	00:16:41	3	1	4
26	03/07/2013 12:01	03/07/2013 12:15	3	03/07/2013 12:28	00:08:17	00:13:33	00:13:45	00:27:18	3	1	1
27	04/07/2013 10:17	04/07/2013 10:17	1	04/07/2013 10:44	00:00:15	00:00:07	00:26:38	00:26:48	1	0	1
28	04/07/2013 10:18	04/07/2013 10:33	3	04/07/2013 10:49	00:00:23	00:15:32	00:15:38	00:31:10	1	1	2
29	04/07/2013 11:00	04/07/2013 11:14	3	04/07/2013 11:54	00:11:14	00:13:50	00:40:37	00:54:27	1	1	1
30	04/07/2013 11:08	04/07/2013 11:43 R		04/07/2013 11:59	00:08:40	00:34:32	00:16:08	00:50:40	1	2	2
31	04/07/2013 11:32	04/07/2013 11:44	2	04/07/2013 12:12	00:23:19	00:11:56	00:33:42	00:45:38	1	3	3
32	04/07/2013 11:34	04/07/2013 11:55	3	04/07/2013 12:17	00:02:33	00:20:59	00:16:54	00:37:53	1	3	4
33	04/07/2013 11:53	04/07/2013 12:18	3	04/07/2013 12:47	00:18:18	00:24:54	00:29:09	00:54:03	3	2	5
34	04/07/2013 12:51	04/07/2013 12:51	1	04/07/2013 13:15	00:32:38	00:00:05	00:24:30	00:24:35	2	0	1
35	04/07/2013 13:03	04/07/2013 13:09	3	04/07/2013 13:30	00:12:15	00:05:42	00:21:44	00:27:26	2	0	2
36	04/07/2013 13:26	04/07/2013 13:26	2	04/07/2013 13:28	00:22:46	00:00:10	00:02:16	00:02:26	2	0	2
37	05/07/2013 11:02	05/07/2013 11:02	2	05/07/2013 11:28	00:02:00	00:00:05	00:26:12	00:26:17	1	1	1
38	05/07/2013 11:08	05/07/2013 11:10	3	05/07/2013 11:34	00:01:38	00:01:35	00:23:42	00:25:17	1	0	2
39	05/07/2013 11:30	05/07/2013 11:30	1	05/07/2013 11:32	00:21:24	00:00:08	00:02:22	00:02:30	3	0	2
40	05/07/2013 11:35	05/07/2013 11:35	2	05/07/2013 11:50	00:04:55	00:00:05	00:14:58	00:15:03	3	0	1
41	05/07/2013 11:37	05/07/2013 11:38	1	05/07/2013 12:04	00:02:20	00:00:23	00:26:15	00:26:38	1	0	2
42	05/07/2013 12:02	05/07/2013 12:02	2	05/07/2013 12:13	00:12:18	00:00:07	00:10:41	00:10:48	2	0	2
43	05/07/2013 12:17	05/07/2013 12:17	2	05/07/2013 12:32	00:10:59	00:00:06	00:15:29	00:15:35	2	0	1
44	05/07/2013 12:56	05/07/2013 12:56	3	05/07/2013 13:22	00:02:48	00:00:10	00:26:16	00:26:26	1	0	1

Anexo 2. Tabla χ^2

v/p	0,001	0,0025	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	10,8274	9,1404	7,8794	6,6349	5,0239	3,8415	2,7055	2,0722	1,6424	1,3233	1,0742	0,8735	0,7083	0,5707	0,4549
2	13,8150	11,9827	10,5965	9,2104	7,3778	5,9915	4,6052	3,7942	3,2189	2,7726	2,4079	2,0996	1,8326	1,5970	1,3863
3	16,2660	14,3202	12,8381	11,3449	9,3484	7,8147	6,2514	5,3170	4,6416	4,1083	3,6649	3,2831	2,9462	2,6430	2,3660
4	18,4662	16,4238	14,8602	13,2767	11,1433	9,4877	7,7794	6,7449	5,9886	5,3853	4,8784	4,4377	4,0446	3,6871	3,3507
5	20,5147	18,3854	16,7496	15,0863	12,8325	11,0705	9,2363	8,1152	7,2893	6,6257	6,0644	5,5731	5,1319	4,7278	4,3515
6	22,4575	20,2491	18,5475	16,8119	14,4494	12,5916	10,6446	9,4461	8,5581	7,8408	7,2311	6,6948	6,2108	5,7652	5,3481
7	24,3213	22,0402	20,2777	18,4753	16,0128	14,0671	12,0170	10,7479	9,8032	9,0371	8,3834	7,8061	7,2832	6,8000	6,3458
8	26,1239	23,7742	21,9549	20,0902	17,5345	15,5073	13,3616	12,0271	11,0301	10,2189	9,5245	8,9094	8,3505	7,8325	7,3441
9	27,8767	25,4625	23,5893	21,6660	19,0228	16,9190	14,6837	13,2880	12,2421	11,3887	10,6564	10,0060	9,4136	8,8632	8,3428
10	29,5879	27,1119	25,1881	23,2093	20,4832	18,3070	15,9872	14,5339	13,4420	12,5489	11,7807	11,0971	10,4732	9,8922	9,3418
11	31,2635	28,7291	26,7569	24,7250	21,9200	19,6752	17,2750	15,7671	14,6314	13,7007	12,8987	12,1836	11,5298	10,9199	10,3410
12	32,9092	30,3182	28,2997	26,2170	23,3367	21,0761	18,5493	16,9893	15,8120	14,8454	14,0111	13,2661	12,5838	11,9463	11,3403
13	34,5274	31,8830	29,8193	27,6882	24,7356	22,3620	19,8119	18,2020	16,9848	15,9839	15,1187	14,3451	13,6356	12,9717	12,3398
14	36,1239	33,4262	31,3194	29,1412	26,1189	23,6848	21,0641	19,4062	18,1508	17,1169	16,2221	15,4209	14,6853	13,9061	13,3393
15	37,6978	34,9494	32,8015	30,5780	27,4884	24,9958	22,3071	20,6030	19,3107	18,2451	17,3217	16,4940	15,7332	15,0197	14,3389
16	39,2518	36,4555	34,2671	31,9999	28,8453	26,2962	23,5418	21,7931	20,4651	19,3689	18,4179	17,5646	16,7795	16,0425	15,3385
17	40,7911	37,9462	35,7184	33,4087	30,1910	27,5871	24,7690	22,9770	21,6146	20,4887	19,5110	18,6330	17,8244	17,0646	16,3382
18	42,3119	39,4220	37,1564	34,8052	31,5264	28,8693	25,9894	24,1555	22,7595	21,6049	20,6014	19,6993	18,8679	18,0860	17,3379
19	43,8194	40,8847	38,5821	36,1908	32,8523	30,1435	27,2036	25,3289	23,9004	22,7178	21,6891	20,7638	19,9102	19,1069	18,3376
20	45,3142	42,3358	39,9969	37,5663	34,1696	31,4104	28,4120	26,4976	25,0375	23,8277	22,7745	21,8265	20,9514	20,1272	19,3374
21	46,7963	43,7749	41,4009	38,9322	35,4789	32,6706	29,6151	27,6620	26,1711	24,9348	23,8578	22,8876	21,9915	21,1470	20,3372
22	48,2676	45,2041	42,7957	40,2894	36,7807	33,9245	30,8133	28,8224	27,3015	26,0393	24,9390	23,9473	23,0307	22,1663	21,3370
23	49,7276	46,6231	44,1814	41,6383	38,0756	35,1725	32,0069	29,9792	28,4288	27,1413	26,0184	25,0055	24,0689	23,1852	22,3369
24	51,1790	48,0336	45,5584	42,9798	39,3641	36,4150	33,1962	31,1325	29,5633	28,2412	27,0960	26,0625	25,1064	24,2037	23,3367
25	52,6187	49,4351	46,9280	44,3140	40,6465	37,6525	34,3816	32,2825	30,6752	29,3388	28,1719	27,1183	26,1430	25,2218	24,3366
26	54,0511	50,8291	48,2898	45,6416	41,9231	38,8851	35,5632	33,4295	31,7946	30,4346	29,2463	28,1730	27,1789	26,2395	25,3365
27	55,4751	52,2152	49,6450	46,9628	43,1945	40,1133	36,7412	34,5736	32,9117	31,5284	30,3193	29,2266	28,2141	27,2569	26,3363
28	56,8918	53,5939	50,9936	48,2782	44,4608	41,3372	37,9159	35,7150	34,0266	32,6205	31,3909	30,2791	29,2486	28,2740	27,3362
29	58,3006	54,9662	52,3355	49,5878	45,7223	42,5569	39,0875	36,8538	35,1394	33,7109	32,4612	31,3308	30,2825	29,2908	28,3361

Anexo 3. Tabla Kolmogorov-Smirnov

	Nivel de significación α							
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500	0.99750	0.99900	0.99950
2	0.68337	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929	0.95000	0.96838	0.97764
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900	0.86428	0.90000	0.92065
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424	0.77639	0.82217	0.85047
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853	0.70543	0.75000	0.78137
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661	0.65287	0.69571	0.72479
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581	0.60975	0.65071	0.67930
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179	0.57429	0.61368	0.64098
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332	0.54443	0.58210	0.60846
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45562	0.48893	0.51872	0.55500	0.58042
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770	0.49539	0.53135	0.55588
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905	0.47672	0.51047	0.53422
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247	0.45921	0.49189	0.51490
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762	0.44352	0.47520	0.49753
15	0.26589	0.30397	0.33750	0.37713	0.40420	0.42934	0.45611	0.48182
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201	0.41644	0.44637	0.46750
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086	0.40464	0.43380	0.45540
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062	0.39380	0.42224	0.44234
19	0.23735	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117	0.38379	0.41156	0.43119
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241	0.37451	0.40165	0.42085
21	0.22517	0.25858	0.28724	0.32104	0.34426	0.36588	0.39243	0.41122
22	0.22115	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666	0.35782	0.38382	0.40223
23	0.21646	0.24746	0.27491	0.30728	0.32954	0.35027	0.37575	0.39380
24	0.21205	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286	0.34318	0.36787	0.38588
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.29518	0.31657	0.33651	0.36104	0.37743
26	0.20399	0.23320	0.25908	0.28962	0.30963	0.33022	0.35431	0.37139
27	0.20030	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502	0.32425	0.34794	0.36473
28	0.19680	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971	0.31862	0.34190	0.35842
29	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466	0.31327	0.33617	0.35242
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.27023	0.28986	0.30818	0.33072	0.34672
31	0.18732	0.21412	0.23788	0.26596	0.28529	0.30333	0.32553	0.34129
32	0.18445	0.21085	0.23424	0.26189	0.28094	0.29870	0.32058	0.33611
33	0.18171	0.20771	0.23076	0.25801	0.27577	0.29428	0.31584	0.33115
34	0.17909	0.21472	0.22743	0.25429	0.27271	0.29005	0.31131	0.32641
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.25073	0.26897	0.28600	0.30597	0.32187
36	0.17418	0.19910	0.22119	0.24732	0.26532	0.28211	0.30281	0.31751
37	0.17188	0.19646	0.21826	0.24404	0.26180	0.27838	0.29882	0.31333
38	0.16966	0.19392	0.21544	0.24089	0.25843	0.27483	0.29498	0.30931
39	0.16753	0.19148	0.21273	0.23785	0.25518	0.27135	0.29125	0.30544
40	0.16547	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205	0.26803	0.28772	0.30171
41	0.16349	0.18687	0.20760	0.23213	0.24904	0.26482	0.28429	0.29811
42	0.16158	0.18468	0.20517	0.22941	0.24613	0.26173	0.28097	0.29465
43	0.15974	0.18257	0.20283	0.22679	0.24332	0.25875	0.27778	0.29130
44	0.15795	0.18051	0.20056	0.22426	0.24060	0.25587	0.27468	0.28806
45	0.15623	0.17856	0.19837	0.22181	0.23798	0.25308	0.27169	0.28493
46	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544	0.25038	0.26880	0.28190

47	0.15295	0.17481	0.19420	0.21715	0.23298	0.24776	0.26600	0.27896
48	0.15139	0.17301	0.19221	0.21493	0.23059	0.24523	0.26328	0.27611
49	0.14987	0.17128	0.19028	0.21281	0.22832	0.24281	0.26069	0.27339
50	0.14840	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604	0.24039	0.25809	0.27067
n>50	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.85}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.95}{\sqrt{n}}$

Anexo 4. Detalle de fórmulas de la Figura 28

s	p	P(0)	Lq	L	Wq	W
0						
1	=F5/A13	=S((B13<1;1/(J12+I13/(1-B13)));0)	=S((B13<1;C13^I13*B13/(1-B13)^2;"Desbordado")	=S((B13<1;D13+F5;"Desbordado")	=S((B13<1;D13/\$C\$4;"Desbordado")	=S((B13<1;F13+(1/\$C\$5);"Desbordado")
2	=F5/A14	=S((B14<1;1/(J13+I14/(1-B14)));0)	=S((B14<1;C14^I14*B14/(1-B14)^2;"Desbordado")	=S((B14<1;D14+F5;"Desbordado")	=S((B14<1;D14/\$C\$4;"Desbordado")	=S((B14<1;F14+(1/\$C\$5);"Desbordado")
3	=F5/A15	=S((B15<1;1/(J14+I15/(1-B15)));0)	=S((B15<1;C15^I15*B15/(1-B15)^2;"Desbordado")	=S((B15<1;D15+F5;"Desbordado")	=S((B15<1;D15/\$C\$4;"Desbordado")	=S((B15<1;F15+(1/\$C\$5);"Desbordado")
4	=F5/A16	=S((B16<1;1/(J15+I16/(1-B16)));0)	=S((B16<1;C16^I16*B16/(1-B16)^2;"Desbordado")	=S((B16<1;D16+F5;"Desbordado")	=S((B16<1;D16/\$C\$4;"Desbordado")	=S((B16<1;F16+(1/\$C\$5);"Desbordado")
5	=F5/A17	=S((B17<1;1/(J16+I17/(1-B17)));0)	=S((B17<1;C17^I17*B17/(1-B17)^2;"Desbordado")	=S((B17<1;D17+F5;"Desbordado")	=S((B17<1;D17/\$C\$4;"Desbordado")	=S((B17<1;F17+(1/\$C\$5);"Desbordado")

Calculos	
$(\lambda/\mu)^s/s!$	$?(\lambda / \sum n/n!$
1	1
=F5	=J12+I13
=I13*B14	=J13+I14
=I14*B15	=J14+I15
=I15*B16	=J15+I16
=I16*B17	=J16+I17

Bibliografía

- [1] Anderson D.R. et al. (2011). An Introduction to Management Science, quantitative approaches to decision making. SOUTH-WESTERN Cengage learning
- [2] Azpeitia, F. y Martín, E. (2012) Seguros: resistiendo la crisis. Consultado en agosto de 2013, Pagina Web de El País.
http://elpais.com/diario/2012/01/29/negocio/1327845144_850215.html
- [3] Fundación Mapfre (2012). El mercado español de seguros en 2011. Consultado en agosto 2013, Pagina web de Fundación Mapfre.
http://www.fundacionmapfre.org/fundacion/es_es/images/informe-mercado-espanol-de-seguros-2012_tcm164-16623.pdf
- [4] Hillier F.S. y Lieberman G.J. (2010). Introducción a la investigación de operaciones. McGrawHill
- [5] IMAF INESE. Estado económico financiero de las corredurías españolas. Edición 2012.
- [6] Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 338-354.
- [7] Little, J. D. C. (1961). A proof for the queueing formula $L = \lambda W$. *Operations Research*, 9, 383-387.
- [8] Mendieta M. M. (2013) La guerra en el seguro de automóviles abarata un 7% las pólizas en dos años. Consultado en agosto de 2013, Periódico digital CincoDias.
http://www.cincodias.com/articulo/mercados/guerra-seguro-automoviles-abarata-polizas-anos/20130221cdsncdmer_2/
- [9] Ruiz-Maya, L y Martín Pliego, F.J. (1995). Estadística II: Inferencia. Colección Plan Nuevo. Editorial AC
- [10] Sánchez García, Juan Francisco (2004). Nuevas propuestas de tratamiento de los fenómenos de espera con prioridades. Una aplicación a la sanidad pública. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena
- [11] Sturges, H. (1926). The choice of a class-interval. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 21, 65–66

- [12] Varios autores (2013). El sector asegurador ante las transformaciones del estado de bienestar. Fundación de Estudios Financieros