Temas de interés para los miembros del proyecto: *Sobre algunos métodos numéricos y su relación con modelos matemáticos*

S. Amat, C. Bermúdez, S. Busquier, A. Guillamón, M. Moncayo y J.C. Trillo

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística de la U.P. Cartagena

Paseo Alfonso XIII, 48, 30203 Cartagena (Murcia)
E-mail: sergio.amat@upct.es

***Resumen**. En este artículo presentamos de forma resumida la investigación que está llevando a cabo los miembros que forman parte del proyecto ``Sobre algunos métodos numéricos y su relación con modelos matemáticos''.*

1 Antecedentes

El Análisis Numérico es una rama de la Matemática Aplicada. De una forma más o menos precisa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear métodos numéricos que nos permitan resolver problemas modelizados con matemáticas. En el contexto del Análisis Numérico, a los métodos matemáticos se les suelen denominar **algoritmos**. Un algoritmo es un procedimiento que nos puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. El análisis numérico cobra especial importancia con la llegada de los ordenadores que son fundamentales para cálculos matemáticos.

Los temas usualmente tratados en el Análisis Numérico van desde la resolución de sistemas lineales y no lineales de ecuaciones a la aproximación de ecuaciones diferenciales pasando por la interpolación-aproximación de funciones y sus aplicaciones. Nuestra procedencia diversa tiene dos lecturas. En primer lugar no es fácil la colaboración de personas con distintas formaciones. En segundo lugar si esta colaboración llegase a existir podría ser mucho más fructífera en el sentido de la diversidad de problemas que podrían ser abordados. Este es nuestro mayor potencial. Nuestra intención pues ha sido formar un grupo lo suficientemente amplio para poder abordar los temas anteriormente mencionados. Somos conscientes de las limitaciones que en algunos de los temas tenemos. No obstante, como se puede observar en los trabajos de sus miembros, la unión de los mismos hace que el grupo cubra la mayoría de los tópicos del Análisis Numérico.

Por otra parte, los algoritmos que solemos proponer y estudiar están motivados en la mayoría de los casos por la Modelización Matemática. Un "**Modelo matemático**" es una traducción de la realidad física para poder aplicar los instrumentos y técnicas de las teorías matemáticas con el fin de estudiar el comportamiento de sistemas complejos, y posteriormente hacer el camino inverso para traducir los resultados numéricos a la realidad física. Generalmente se introducen simplificaciones de la realidad, ya que, un estudio directo daría lugar a modelos demasiado complicados que no se podrían resolver con las técnicas y conocimientos actuales. En este sentido, no sólo nos preocupamos de modelos propios sino que intentamos colaborar con otros grupos de investigación más aplicada.

2 Líneas de Investigación

En esta sección se presentan las distintas líneas de investigación que desarrolla el grupo.

2.1 Métodos iterativos para ecuaciones no lineales

En Matemática Aplicada, uno de los problemas más habituales al que nos enfrentamos es la aproximación de ecuaciones. Una expresión como $F(x)=0$ puede modelizar diferentes problemas, resolución de un sistema de ecuaciones, encontrar la solución de una ecuación diferencial o hallar las raíces de un polinomio. La obtención de la solución no es posible en general. Este hecho motiva el estudio de métodos numéricos y en particular los iterativos.

Los métodos iterativos, parten de una o más aproximaciones a la raíz y crean una sucesión que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada. El método más conocido es sin duda, el de Newton que tiene convergencia cuadrática (orden dos) para raíces simples.

El adelanto de los medios técnicos ha permitido el desarrollo de gran variedad de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales en espacios de Banach. Por ejemplo, la simplicidad para evaluar inversas y segundas derivadas de Fréchet, en algunos casos, ha aumentado el uso de métodos de tercer orden, como, los de Halley y Chebyshev.

Al estudiar un método iterativo, uno de los aspectos más importante a considerar es la convergencia (orden del mismo). Para dicho análisis, en ocasiones, es suficiente conocer un intervalo que contenga a la raíz, más ciertas hipótesis de regularidad, este tipo de convergencia se conoce como convergencia global. Otros resultados (``tipo Kantarovich"), establecen condiciones suficientes en el operador y en la primera aproximación a la solución (pivote) para asegurar que la sucesión generada por el esquema converja a una solución de la ecuación, dando lugar a los llamados teoremas semilocales de convergencia. Por último, en los llamados teoremas locales de convergencia, se imponen las hipótesis sobre la raíz buscada. Además todo este tipo de teoremas proporcionan estimaciones del error. Por otra parte, la implementación y eficiencia de los distintos esquemas son aspectos imprescindibles a estudiar.

En esta temática se desea proponer diversos métodos (modificaciones o variantes de Steffensen, Halley, etc), estudiando su convergencia (donde se generalizan teoremas para los métodos clásicos), su implementación y comparando su eficiencia con los métodos ya existentes (donde se verán sus mejoras).

2.2 Técnicas de aproximación no lineales y aplicaciones

El análisis de Fourier proporciona una manera de representar funciones de cuadrado integrable en términos de sus componentes sinusoidales. La descomposición de Fourier es una herramienta básica para una gran variedad de aplicaciones en muchos campos de la Ciencia. Sin embargo, tiene algún inconveniente, aquí destacaremos su carácter global. En Fourier, una singularidad aislada domina la conducta de todos los coeficientes de la descomposición y nos impide conseguir información precisa sobre la función lejos de la singularidad.

Descomposiciones locales como las provenientes de las ondículas y sus variantes no lineales proporcionan una mejor representación. Típicamente, uno comienza con una sucesión finita, que es, de algún modo, asociada a la información discreta de una señal dada al nivel más fino de la resolución considerada. Procesando la señal en diferentes niveles de resolución, se puede escribir esta información discreta de una nueva manera. La nueva sucesión tiene el mismo cardinal que la primera (si se usa un esquema no redundante) y sus coeficientes representan por un lado los detalles a cada nivel de la resolución y por otro una aproximación "grosera" final a la señal original.

Uno de los aspectos fundamentales de esta parte es profundizar en la Multirresolución no lineal introducida por Harten. Esta multirresolución puede verse como una generalización de la teoría wavelet, permitiéndonos trabajar en muy diversas situaciones y poder abordar gran cantidad de problemas. Además, esta multirresolución permite utilizar representaciones no lineales (datos-dependiente), lo que nos permitirá dar algoritmos más adaptados a los problemas a tratar. Esto es debido a que el operador de predicción utilizado en la teoría de Harten puede no ser lineal.

En los últimos años parte del grupo ha desarrollado varios operadores de predicción no lineales. Además se han propuesto teorías matemáticas que permiten estudiar la convergencia y estabilidad de los algoritmos.

En este sentido nos gustaría seguir avanzando. En particular, nos gustaría obtener predicciones de mayor orden, realizar su estudio teórico y ampliar el abanico de aplicaciones. En este sentido nos gustaria no sólo abordar problemas relacionados con el tratamiento de señales (como compresión, eliminación de ruido, zoom, etc.) sino otras como la obtención de fórmulas de cuadratura y de diferenciación numérica adaptadas a la presencia de singularidades en la señal. Además, nos gustaría comenzar con la inserción de técnicas estadísticas para la obtención de los operadores de predicción. La naturaleza de las imágenes, con textura, hace intuir que estas técnicas pueden mejorar las aproximaciones construidas con procedimientos no estadísticos. Por último nos gustaría destacar que estamos realizando estudios de imágenes de origen biológico relacionados con la monitorización de procesos de anestesia en quirófano y con la búsqueda de concentraciones y patrones.

2.2 Aproximación numérica de ecuaciones

Las ecuaciones diferenciales aparecen naturalmente al modelizar situaciones físicas en las ciencias naturales, ingeniería, y otras disciplinas, donde hay envueltas razones de cambio de una ó varias funciones desconocidas con respecto a una ó varias variables independientes. Estos modelos varían entre los más sencillos que envuelven una sola ecuación diferencial para una función desconocida, hasta otros más complejos que envuelven sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas para varias funciones desconocidas. Por ejemplo, la ley de enfriamiento de Newton y las leyes mecánicas que rigen el movimiento de los cuerpos, al ponerse en términos matemáticos dan lugar a ecuaciones diferenciales. Usualmente estas ecuaciones están acompañadas de una condición adicional que especifica el estado del sistema en un tiempo o posición inicial. Esto se conoce como la *condición inicial* y junto con la ecuación diferencial forman lo que se conoce como el *problema de valor inicial*. Por lo general, la solución exacta de un problema de valor inicial es imposible ó difícil de obtener en forma analítica. Por tal razón los métodos numéricos se utilizan para aproximar dichas soluciones.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias vinculan las derivadas de funciones de una variable. Los métodos estudiados para EDOs no son en general aplicables a las ecuaciones en derivadas parciales (EDP). La solución numérica de las EDP es toda una disciplina; los problemas en mecánica de fluidos, transmisión de calor, cálculo de tensiones y deformaciones en sólidos, etc. son expresados en términos de una EDP. Las grandes exigencias planteadas al hardware en la resolución de EDPs ha provocado que los métodos y algoritmos traten de explotar al máximo las particularidades del problema. Por ello, existen textos completos sobre técnicas particulares, trucos, etc. muy vinculadas al problema específico. Esta situación, que podría interpretarse como negativa, muestra el interés y la vigencia de las investigaciones sobre el tema.

Para este tema, el grupo está interesado tanto en la aproximación de EDOs como de EDPs. Para el primer apartado, recientemente hemos propuesto una nueva vía para la obtención de nuevos métodos numéricos. Se trata de una técnica variacional con la que se han obtenido resultados muy alentadores y que nos animan a seguir en esta línea. Las posibilidades a explorar son lo suficientemente amplias como para no poder ser concluidas en un solo proyecto. Se trata de una nueva forma de ver la ecuación que abre muchas vías de exploración. Para las EDPs nos gustaría seguir avanzando en problemas de dinámica de fluidos que son donde el grupo tiene su mayor experiencia. Ecuaciones tipo leyes de conservación, Hamilton-Jacobi, de aguas poco profundas.

3 Conclusiones

En este trabajo hemos expuesto de forma resumida las líneas de investigación en las que trabajamos. Las distintas líneas, en un principio independientes, pueden de forma natural interaccionar. Cabría destacar que los métodos multiescala permiten obtener algoritmos adaptativos para las EDPs. En este sentido nos gustaría obtener multirresoluciones no lineales tipo Hermite y analizar su aplicación como herramientas de discretización de las ecuaciones. También, pueden usarse los algoritmos de multirresolución en la implementación de los métodos iterativos para ecuaciones no lineales. El grupo ya tiene experiencia en este tema. Por su parte, los métodos iterativos permiten resolver ecuaciones provenientes de las discretizaciones de las EDOs y EDPs. Por ejemplo, para la obtención de los mínimos de la propuesta variacional para EDOs que comentamos en el punto anterior o para la resolución de las ecuaciones derivadas por los métodos implícitos en la aproximación de problemas rígidos. Por último, mediante técnicas variacionales se pueden modelizar problemas relacionados con el tratamiento de señales.

Las aplicaciones se realizan fundamentalmente en colaboración con otros grupos de investigación más aplicada (y serán comentadas en el punto de colaboraciones). No obstante, en nuestros artículos de investigación siempre se suelen añadir ejemplos de interés aplicado donde testamos los algoritmos numéricos.

Agradecimientos

El trabajo del grupo está subvencionado por los proyectos 08662/PI/08 y MTM2007-62945.

Referencias

[1] Amat, S.; Busquier, S. Third-order iterative methods under Kantorovich conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 336 (2007), no. 1, 243--261.

[2] Amat, S.; Donat, R.; Liandrat, J.; Trillo, J.C. Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing. *Found. Comput. Math.* 6 (2006), no. 2, 193--225.

[3] Amat, S.; Moncayo, M. Exact error bounds for the reconstruction processes using interpolating wavelets. *Math. Comput. Simulation.*, aparecerá en 2009.

[4] Amat, S.; Pedregal P. A variational approach to implicit ODEs and differential inclusions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 15 (2009), no 1, 139-148.