

# IMPLEMENTACIÓN FRECUENCIAL DE LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE PARA REGISTRO VARIACIONAL DE IMAGEN

Rafael Verdú Monedero, Jorge Larrey Ruiz, Juan Morales Sánchez,  
Pedro José García Laencina, José Luis Sancho Gómez

{rafael.verdu, jorge.larrey, juan.morales, pedroj.garcia, josel.sancho}@upct.es

Dpto. de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, Universidad Politécnica de Cartagena.

**Abstract**—In this paper, a novel theoretical framework defined in the frequency domain for variational non-parametric image registration is proposed. It provides more efficient implementations than existing theoretical approaches for the most common registration techniques. The presented frequency domain analysis adds simplicity to the variational image registration implementations and allows for an easy extension to higher dimensions by using the multidimensional Fourier transform of multidimensional signals.

## I. INTRODUCCIÓN

El registro de imagen es el proceso en el cual, dado un conjunto de datos referencia  $R$  y un conjunto de datos plantilla  $T$ , se intenta buscar la deformación global y/o local de forma que la plantilla deformada se ajuste a la referencia [1]. En muchas aplicaciones, por ejemplo en imagen médica, es necesaria una deformación no rígida para corregir las diferencias locales entre  $R$  y  $T$ . El registro no rígido puede ser paramétrico, donde los puntos de referencia juegan un papel importante, o no paramétrico (más conocido como registro elástico), donde el registro se basa en la minimización de una medida de distancia mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (PDEs). En el campo del registro no paramétrico se han propuesto diversos términos de regularización para sortear el mal condicionamiento del problema, de forma que se dé preferencia a soluciones más probables. El término regularizador es el que distingue los métodos existentes [2].

El problema del registro no paramétrico se puede abordar utilizando el principio variacional y las consiguientes ecuaciones de Euler-Lagrange. En este trabajo, este conjunto de PDEs no lineales se traslada al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier. Este artículo formula las ecuaciones de Euler-Lagrange para los métodos de registro variacionales  $d$ -dimensionales y proporciona una implementación eficiente para el cálculo de la solución numérica. El artículo está organizado de la siguiente manera: comenzamos con el marco matemático del problema general de registro de imagen. En la siguiente sección, las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada método de registro se trasladan al dominio de la frecuencia. A continuación se compara la eficiencia y finalmente, las conclusiones cierran el artículo.

## II. FORMULACIÓN VARIACIONAL EN EL DOMINIO DEL ESPACIO

Los conjuntos de datos  $d$ -dimensionales referencia y plantilla se definen como  $R, T : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Omega := ]0, 1[^d$ ,

y  $d$  representa la dimensión espacial de los conjuntos de datos. El registro produce un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  que hace que la plantilla deformada sea similar al conjunto de datos de referencia,  $T(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \approx R(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}) \cdots u_d(\mathbf{x}))^\top$  y  $\mathbf{x}$  es la posición espacial  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ .

El registro no paramétrico se puede abordar mediante el cálculo variacional, definiendo el funcional de energía a minimizar:

$$\mathcal{J}[\mathbf{u}] := \mathcal{D}[R, T; \mathbf{u}] + \alpha \mathcal{S}[\mathbf{u}], \quad (1)$$

donde  $\mathcal{D}$  es un término de energía que mide la distancia entre la plantilla deformada y la referencia,  $\mathcal{S}$  es un término que determina la suavidad del campo de desplazamientos y que actúa como término regularizador, y  $\alpha$  controla y pondera la influencia de la regularización.

La medida de distancia  $\mathcal{D}$  se elige según la naturaleza de los conjuntos de datos a registrar. Cuando las intensidades de los dos conjuntos de datos son parecidas (registro monomodal), es habitual utilizar la suma de las diferencias al cuadrado de los conjuntos de datos [3]. Cuando se tratan conjuntos de datos de diferentes fuentes o modalidades (registro multimodal), la medida más apropiada es la información mutua, que se basa en la entropía de Shannon [4].

El término de regularización  $\mathcal{S}$  da las características de suavidad al campo de desplazamientos. Su definición da lugar a distintos métodos de registro. Los más relevantes son los siguientes [2]:

- 1) *Registro elástico*, que viene dado por el potencial elástico del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$

$$\mathcal{S}^{\text{elas}}[\mathbf{u}] := \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{l,m=1}^d (\partial_{x_l} u_m + \partial_{x_m} u_l)^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{div } \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}, \quad (2)$$

donde  $\lambda \geq 0$  y  $\mu > 0$  son las constantes de Lamé que caracterizan el comportamiento elástico de un sólido deformable.

- 2) *Registro fluido*, basado en un modelo de fluido viscoso para la deformación y viene dado por el potencial elástico del campo de velocidades  $\mathbf{v}$

$$\mathcal{S}^{\text{fluid}}[\mathbf{u}] := \mathcal{S}^{\text{elas}}[\mathbf{v}], \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

- 3) *Registro de difusión*, dado por la energía de las derivadas de primer orden de  $\mathbf{u}$

$$\mathcal{S}^{\text{diff}}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \int_{\Omega} \|\nabla u_l\|^2 dx. \quad (5)$$

- 4) *Registro de curvatura*, dado por la energía de las derivadas de segundo orden de  $\mathbf{u}$

$$\mathcal{S}^{\text{curv}}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \int_{\Omega} (\Delta u_l)^2 dx. \quad (6)$$

La minimización del funcional de energía (1) se aborda mediante el cálculo de variaciones. El cálculo de la primera variación de  $\mathcal{J}[\mathbf{u}]$  para cualquier dirección (o la derivada Gâteaux) produce las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) + \alpha \mathcal{A}^{\text{meth}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  es la fuerza externa extraída de la medida de distancia, y  $\mathcal{A}^{\text{meth}}[\mathbf{u}](\mathbf{x})$  se obtiene al minimizar  $\mathcal{J}[\mathbf{u}]$ , imponiendo diferentes condiciones de contorno [5].  $\mathcal{A}^{\text{meth}}[\mathbf{u}](\mathbf{x})$  se define para los métodos de registro anteriores como

$$\mathcal{A}^{\text{elas}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$\mathcal{A}^{\text{fluid}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\mu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\mathcal{A}^{\text{diff}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\mathcal{A}^{\text{curv}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \Delta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Estas PDEs no lineales (7) se pueden resolver numéricamente utilizando una aproximación de  $\mathcal{A}^{\text{meth}}[\mathbf{u}]$  por diferencias finitas (véase (26)-(29)) y un esquema iterativo de punto fijo o de descenso de gradiente. Es habitual conseguir la solución de (7) transformando el problema  $d$ -dimensional en uno unidimensional (reordenando todos los puntos del campo de desplazamientos en un solo vector columna). Esto proporciona un procedimiento iterativo cuya matriz es de gran tamaño, dispersa y frecuentemente mal condicionada, y ha de invertirse con procedimientos especiales como, por ejemplo, la pseudo inversa de Moore-Ponrose [6]. Algunos intentos para obtener implementaciones rápidas, estables y eficientes en el dominio espacial, sin invertir matrices, se pueden encontrar en [7] donde se utilizan núcleos de convolución, en [8] con esquemas de partición de operadores aditivos, o aproximaciones que explotan la naturaleza multiescala del problema de registro [9]. Por lo tanto, el escenario resultante en el dominio del espacio implica una carga computacional considerable así como requerimientos de memoria.

### III. ECUACIONES E-L EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Este artículo propone un nuevo enfoque para resolver (7) en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Fourier  $d$ -dimensional sobre la variable espacial  $\mathbf{x}$ . Esta estrategia es muy conocida para resolver una PDE en un dominio regular (véase, por ejemplo, [10]), sin embargo no se ha aplicado antes en la formulación de un problema de registro variacional. El uso de la  $d$ -FT también impone condiciones de contorno periódicas a la solución; esta restricción debería estudiarse para una aplicación particular [11]. La traslación de la ecuación (7) al dominio de la frecuencia da lugar a

$$\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) + \alpha \tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

donde  $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) = (\tilde{f}_1(\boldsymbol{\omega}), \dots, \tilde{f}_d(\boldsymbol{\omega}))^\top$  es la  $d$ -FT de las fuerzas externas, esto es  $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) = d\text{-FT}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))\}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}) = (\tilde{u}_1(\boldsymbol{\omega}), \dots, \tilde{u}_d(\boldsymbol{\omega}))^\top$  es la  $d$ -FT del campo de desplazamientos y  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d)$  es la variable  $d$ -dimensional en el dominio de la frecuencia. El operador matricial  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega})$  realiza las derivadas espaciales en el dominio de la frecuencia y permite su cálculo por medio de productos. Las submatrices que componen  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega})$  se definen a continuación para cada uno de los métodos de registro presentados anteriormente.

- 1) *Registro elástico*. Las submatrices de  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{elas}}(\boldsymbol{\omega})$  son:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{lm}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 2((\lambda + 2\mu)(1 - \cos \omega_l) + \\ \quad + \mu \sum_{k \neq l} (1 - \cos \omega_k)), & l = m \\ (\lambda + \mu) \sin \omega_l \sin \omega_m, & l \neq m. \end{cases} \quad (13)$$

- 2) *Registro fluido*. El procedimiento consistiría en resolver (12) con  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{elas}}(\boldsymbol{\omega})$ .

$$\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) + \alpha \tilde{\mathcal{A}}^{\text{elas}}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

donde la incógnita es la velocidad  $\tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\omega})$  en lugar del desplazamiento  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega})$ , que se actualiza con la ecuación (4). En este caso, el desplazamiento se calcula más eficientemente en el dominio del espacio, ya que trasladar (4) a la frecuencia para resolver  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega})$  involucra convoluciones periódicas (aunque se evita rehacer el malla [12])

- 3) *Registro de difusión*. En este caso las componentes del campo de desplazamiento son independientes y están desacopladas,  $\tilde{\mathcal{A}}_{lm}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ ,  $l \neq m$ . Las submatrices  $\tilde{\mathcal{A}}_{ll}(\boldsymbol{\omega})$  vienen dadas por

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ll}(\boldsymbol{\omega}) = 2 \sum_{k=1}^d (1 - \cos \omega_k). \quad (15)$$

- 4) *Registro de curvatura*. Como en el registro de difusión, las componentes de  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega})$  están desacopladas,  $\tilde{\mathcal{A}}_{lm}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ ,  $l \neq m$ , y las submatrices  $\tilde{\mathcal{A}}_{ll}(\boldsymbol{\omega})$  son:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ll}(\boldsymbol{\omega}) = \left( 2 \sum_{k=1}^d (1 - \cos \omega_k) \right)^2. \quad (16)$$

Para resolver las ecuaciones E-L (12) formuladas en el dominio de la frecuencia, se puede utilizar un esquema iterativo de punto fijo o de descenso de gradiente. El esquema de punto fijo produce la siguiente iteración:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) = \left( \alpha \tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega}) \right)^{-1} \left( -\tilde{\mathbf{f}}^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) \right), \quad (17)$$

siendo  $k$  el índice de la iteración. La inversión de la matriz  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega})$  ha de realizarse con cuidado ya que está mal condicionada y en su inversión se produce una división por cero. Para evitar un comportamiento inestable se ha de tomar una estrategia alternativa como la pseudo inversa de Moore-Penrose [13]. Si se resuelve (12) utilizando el método de descenso de gradiente se obtiene un proceso iterativo con una matriz estable:

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, t) + \tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}, t) + \alpha \tilde{\mathcal{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

donde  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, t) = (\partial_t \tilde{u}_1(\boldsymbol{\omega}, t) \dots \partial_t \tilde{u}_d(\boldsymbol{\omega}, t))^\top$  (en la situación estable  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{0}$  y (18) iguala (12)). Para

resolver (18), el tiempo  $t$  se discretiza,  $t = k\tau$ , siendo  $\tau$  el paso temporal y  $k \in \mathbb{N}$  el índice de la iteración, y las derivadas temporales de  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, t)$  se sustituyen por su aproximación discreta. Utilizando la notación  $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) := \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}, k\tau)$ , el esquema iterativo es el siguiente

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) = \left( \mathbf{I} + \tau\alpha\tilde{\mathbf{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega}) \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{u}}^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) - \tau\tilde{\mathbf{f}}^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) \right), \quad (19)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}(\boldsymbol{\omega})$  se inicializa usualmente a cero,  $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}(\boldsymbol{\omega}) := \mathbf{0}$ .

#### A. Métodos de registro con componentes desacopladas

En el caso de registro de difusión y de curvatura, la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega})$  puede escribirse como  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{meth}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}_d \otimes \tilde{\mathbf{A}}_{ll}(\boldsymbol{\omega})$ , donde  $\mathbf{I}_d$  es la matriz identidad  $d \times d$  y  $\otimes$  denota el producto de Kronecker matricial. En estos casos, las inversiones de matrices han desaparecido debido a que el producto de una matriz circular y un vector columna se convierte en el dominio de la frecuencia en un producto punto a punto de sus respectivos espectros [14]. La iteración para la componente  $l$ -ésima viene dada por

$$\tilde{u}_l^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{1 + \tau\alpha\tilde{A}_{ll}(\boldsymbol{\omega})} \left( \tilde{u}_l^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) - \tau\tilde{f}_l^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) \right), \quad (20)$$

donde  $l = 1, \dots, d$ . Con el propósito de escribir la ecuación anterior de forma más compacta, se definen las siguientes variables:  $\eta := 1/\tau$ ,  $K(\boldsymbol{\omega}) := \alpha\tilde{A}_{ll}(\boldsymbol{\omega})$ ,  $H(\boldsymbol{\omega}) := \eta/(\eta + K(\boldsymbol{\omega}))$ .  $H(\boldsymbol{\omega})$  es un filtro paso bajo  $d$ -dimensional cuyos valores son menores o iguales a uno y son los inversos de  $1 + \eta^{-1}K(\boldsymbol{\omega})$ , por lo tanto, la inversión de matriz requerida para resolver (7) se ha convertido en una división punto a punto.  $H(\boldsymbol{\omega})$  es el filtro pseudo inverso del filtro  $K(\boldsymbol{\omega})$ , que se corresponde con un filtro paso alto  $d$ -dimensional que contiene la representación frecuencial de las derivadas espaciales, y la variable  $\eta$  está relacionada con el ancho de banda del filtro  $H(\boldsymbol{\omega})$ . La figura 1 muestra los espectros frecuenciales del filtro  $H(\boldsymbol{\omega})$  para los casos de difusión y curvatura.

Entonces, la ecuación que expresa la evolución de la componente  $l$ -ésima del campo de desplazamientos es:

$$\tilde{u}_l^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) = H(\boldsymbol{\omega}) \left( \tilde{u}_l^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) - \eta^{-1}\tilde{f}_l^{(k-1)}(\boldsymbol{\omega}) \right). \quad (21)$$

El punto de vista frecuencial permite entender las fuerzas internas, con las restricciones impuestas al campo de desplazamientos por el regularizador, como un filtrado paso bajo. En (21), cada componente del campo de desplazamiento así como las fuerzas externas, ponderadas por el valor de  $\eta^{-1}$ , se filtran paso bajo. La suavidad del campo de desplazamientos resultante depende de la frecuencia de corte del filtro paso bajo, que es mayor para curvatura que para difusión y está relacionada con el orden de la derivada que se está minimizando. El filtro  $H(\boldsymbol{\omega})$  para el registro de curvatura (Fig. 1(b)) muestra una banda de paso mayor y una banda de transición más estrecha que el filtro  $H(\boldsymbol{\omega})$  para el registro de difusión (Fig. 1(a)).

#### IV. COMPARATIVA DE EFICIENCIA

Para las implementaciones de registro elástico y fluido existen esquemas directos para obtener la solución [5], pero su utilidad es limitada debido a que los conjuntos de datos  $N_1 \times \dots \times N_d$  requieren el manejo una matriz dispersa de

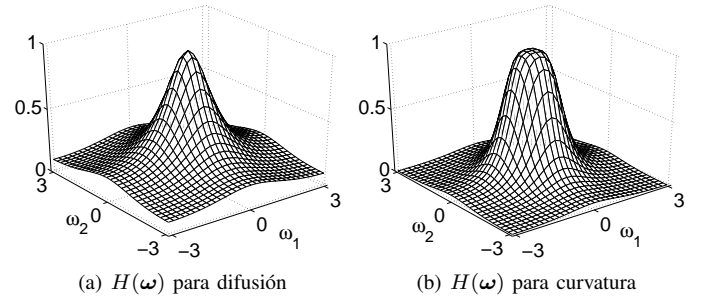


Fig. 1. Espectros de los filtros  $d$ -dimensionales,  $d = 2$ ,  $\eta = 1$ ,  $\alpha = 1$ .

tamaño  $dN \times dN$ , donde  $N = N_1N_2 \dots N_d$ . Existen alternativas que ofrecen implementaciones estables y eficientes para el registro elástico y fluido que, por ejemplo, usan la descomposición en valores singulares [6], o sin invertir matrices sino utilizando núcleos de convolución en espacio-escala [7]. Para estas técnicas no hay una mejora significativa si se utiliza la implementación propuesta en el dominio de la frecuencia.

En el caso de registro de difusión y de curvatura, además de los esquemas directos, hay implementaciones rápidas basadas en una factorización DCT sin tener que invertir ninguna matriz [2]. También existe una implementación eficiente basada en la partición de operadores aditivos (AOS) [8], e implementaciones que recurren a la robustez y eficiencia de las técnicas multimalla [15]. De todos modos, en términos de convergencia y complejidad, las implementaciones disponibles más rápidas y más eficientes en el dominio espacial son las basadas en la DCT<sup>1</sup> (véase [5] y [16]) debido a la excelente implementación de la rutina DCT proporcionada por la librería FFTW [17]. Por lo tanto, en términos de eficiencia, la única comparación relevante es la del esquema basado en DCT frente a la implementación propuesta en el dominio de la frecuencia (18) para el registro de difusión y de curvatura (nótese que ambas técnicas tienen la misma complejidad en la implementación frecuencial).

La Tabla I muestra los tiempos medios de una iteración del algoritmo de registro así como el ratio entre los tiempos de las implementaciones bajo discusión para  $d=2$  y  $d=3$ . Los tiempos se han obtenido en un PC con Intel Pentium IV, 2.8 GHz, 1 GByte RAM, utilizando MATLAB 6.5<sup>2</sup>. Nótese que la complejidad de una  $d$ -DCT de tamaño  $N_1 \times \dots \times N_d$  es aproximadamente el doble que la de una  $d$ -FFT del mismo tamaño. Entonces la estimación de la complejidad de una iteración del algoritmo de registro, sin considerar la deformación de la plantilla con el campo de deformación actual, es  $\mathcal{O}(4dN \log_2 N)$  para el esquema basado en la DCT (donde se realizan  $d$   $d$ -DCT,  $d$   $d$ -IDCT y  $dN$  productos adicionales), y  $\mathcal{O}(2dN \log_2 N)$  para la implementación propuesta en el dominio de la frecuencia (donde se realizan  $d$   $d$ -FFT,  $d$   $d$ -IFFT y  $dN$  productos adicionales), y por lo tanto el ratio teórico entre los tiempos es  $\rho \approx 2$ . Se asume que la complejidad de una FFT es  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$  [18], teniendo en cuenta que tanto la  $d$ -FFT y la  $d$ -DCT se implementan internamente como transformadas separables.

<sup>1</sup>El esquema basado en DCT se incluye en la librería C/C++ FLIRT [16].

<sup>2</sup>MATLAB y FLIRT llaman a la misma rutina FFT de la librería FFTW.

TABLE I

TIEMPOS MEDIOS EN SEGUNDOS Y RATIOS PARA UNA ITERACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN MÁS EFICIENTE EN EL DOMINIO ESPACIAL (BASADA EN DCT) Y LA IMPLEMENTACIÓN FRECUENCIAL PROPUESTA.

Tamaño de la imagen	Tiempos implem. espacial (s)	Tiempos implem. frecuencial (s)	ratio
256 × 256	0.127	0.053	2.39
512 × 512	1.063	0.449	2.37
1024 × 1024	4.303	1.844	2.33
64 × 64 × 64	1.698	0.729	2.33
128 × 128 × 128	15.185	5.959	2.55

## V. CONCLUSIONES

En este artículo, las ecuaciones E-L para el registro de imagen variacional no paramétrico se han trasladado al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier. El dominio de Fourier permite considerar las fuerzas de regularización como un filtro paso bajo. Estas fuerzas se derivan del regularizador  $\mathcal{S}$  y conducen a los esquemas de registro elástico, fluido, de difusión y de curvatura definidos en el dominio de la frecuencia. Debido al uso de la transformada de Fourier  $d$ -dimensional, en la minimización del funcional de energía se imponen condiciones de contorno periódicas.

Esta aproximación novedosa proporciona una implementación de los métodos de registro más eficiente que las existentes. El uso del dominio frecuencial reduce considerablemente la complejidad y los requerimientos de memoria del esquema iterativo global. En particular, para los esquemas de registro más recientes y populares, *difusión* y *curvatura*, el marco propuesto proporciona una implementación  $\mathcal{O}(2dN \log_2 N)$ , donde  $N$  denota el número de voxels, siendo así una técnica de registro no paramétrico rápida y eficiente.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por el *Ministerio de Ciencia y Tecnología*, bajo el proyecto TEC2006-13338/TCM .

## APPENDIX

Para calcular las aproximaciones discretas de las derivadas espaciales definimos los operadores

$$\mathbf{d}^- [n] := \delta[n] - \delta[n-1], \quad (22)$$

$$\mathbf{d}^+ [n] := \delta[n+1] - \delta[n], \quad (23)$$

$$\mathbf{d}^c [n] := (\mathbf{d}^- [n] + \mathbf{d}^+ [n])/2, \quad (24)$$

$$\mathbf{d}^2 [n] := \mathbf{d}^- [n] * \mathbf{d}^+ [n], \quad (25)$$

donde  $\mathbf{d}^-$ ,  $\mathbf{d}^+$ ,  $\mathbf{d}^c$ ,  $\mathbf{d}^2$  implementan la diferencia hacia atrás, hacia adelante, central y de segundo orden, respectivamente,  $\delta$  es la delta de Kronecker y  $*$  denota convolución lineal. Entonces, las aproximaciones discretas de las derivadas espaciales de segundo orden se pueden obtener como  $\partial_{x_l} u(\mathbf{x}) \approx \mathbf{d}^- [n_l] * u[\mathbf{n}]$ ,  $\partial_{x_l x_l} u(\mathbf{x}) \approx \mathbf{d}^2 [n_l] * u[\mathbf{n}]$  and  $\partial_{x_l x_m} u(\mathbf{x}) \approx \mathbf{d}^c [n_l] * \mathbf{d}^c [n_m] * u[\mathbf{n}]$ , donde  $\mathbf{n}$  es el índice espacial discreto. Utilizando la aproximaciones discretas anteriores, los operadores de derivadas parciales se pueden escribir como:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx (\mathbf{d}^- [n_m] * u_l[\mathbf{n}])_{l,m=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^d \mathbf{d}^- [n_l] * u_l[\mathbf{n}] \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \left( \sum_{m=1}^d \mathbf{d}^2 [n_m] * u_l[\mathbf{n}] \right)_{l=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d, \quad (28)$$

$$\Delta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \left( \sum_{m=1}^d \mathbf{d}^2 [n_m] * \sum_{k=1}^d \mathbf{d}^2 [n_k] * u_l[\mathbf{n}] \right)_{l=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d \quad (29)$$

Estas aproximaciones junto con la transformada de Fourier  $\mathcal{FT}\{\delta[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0}$ ,  $\mathcal{FT}\{d^2[n]\} = -|1 - e^{-j\omega}|^2 = 2(1 - \cos \omega)$  y el hecho de que las convoluciones en el dominio espacial se convierten en productos en la frecuencia [18], proporcionan las siguientes expresiones de los operadores en la frecuencia:

$$\mathcal{FT}\{\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\} \approx ((1 - e^{-j\omega_m}) \tilde{u}_l(\omega))_{l,m=1,\dots,d} \in \mathbb{C}^{d \times d} \quad (30)$$

$$\mathcal{FT}\{\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})\} \approx \sum_{l=1}^d (1 - e^{-j\omega_l}) \tilde{u}_l(\omega) \in \mathbb{C}, \quad (31)$$

$$\mathcal{FT}\{\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x})\} \approx \left( - \sum_{m=1}^d |1 - e^{-j\omega_m}|^2 \tilde{u}_l(\omega) \right)_{l=1,\dots,d} \in \mathbb{C}^d \quad (32)$$

$$\mathcal{FT}\{\Delta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})\} \approx \left( \left( \sum_{m=1}^d |1 - e^{-j\omega_m}|^2 \right)^2 \tilde{u}_l(\omega) \right)_{l=1,\dots,d} \in \mathbb{C}^d \quad (33)$$

## REFERENCES

- [1] B. Zitová and J. Flusser, "Image registration methods: a survey," *Image and Vision Computing*, vol. 21, pp. 997–1000, 2003.
- [2] B. Fischer and J. Modersitzki, "A unified approach to fast image registration and a new curvature based registration technique," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 308, pp. 107–124, 2004.
- [3] L. G. Brown, "A survey of image registration techniques," *ACM Computing Surveys*, vol. 24, no. 4, pp. 325–376, 1992.
- [4] P. Viola and W. M. Wells, "Alignment by maximization of mutual information," *Int. J. of Computer Vision*, vol. 24, p. 137–154, 1997.
- [5] J. Modersitzki, *Numerical Methods for Image Registration*. Oxford University Press, USA, 2004.
- [6] B. Fischer and J. Modersitzki, "Fast inversion of matrices arising in image processing," *Numerical Algorithms*, vol. 22, pp. 1–11, 1999.
- [7] M. Bro-Nielsen and C. Gramkow, "Fast fluid registration of medical images," *LNCS*, vol. 1131, pp. 267–276, 1996.
- [8] B. Fischer and J. Modersitzki, "Fast diffusion registration," *AMS Contemporary Mathematics*, vol. 313, pp. 117–129, 2002.
- [9] S. Henn and K. Witsch, "Image registration based on multiscale energy information," *Multiscale Modelling and Simulation*, vol. 4, no. 2, pp. 584–609, 2005.
- [10] A. Quarteroni and A. Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, 1999.
- [11] S. Henn, "A full curvature based algorithm for image registration," *Journal of Mathematical Imaging & Vision*, vol. 24, pp. 195–208, 2006.
- [12] G. E. Christensen, "Deformable shape models for anatomy," Ph.D. dissertation, Washington University, 1994.
- [13] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York: Wiley, 1977.
- [14] P. J. Davis, *Circulant Matrices*. Wiley-Interscience, NY, 1979.
- [15] S. Henn, "A multigrid method for a fourth-order diffusion equation with application to image processing," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 27, no. 3, pp. 831–849, 2005.
- [16] B. Fischer, J. Modersitzki, "Flirt: A flexible image registration toolbox," *Biomedical Image Registration LNCS*, vol. 2717, pp. 261–270, 2003.
- [17] M. Frigo and S. G. Johnson, "The design and implementation of FFTW3," *Proc. of the IEEE*, vol. 93, no. 2, pp. 216–231, 2005.
- [18] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.